V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, Analogs of the liouville property for harmonic functions on unbounded domains, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 4, 752–764

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.403>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.73.92

April 26, 2023, 17:45:20

УДК 517.5

АНАЛОГИ СВОЙСТВА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Аннотация. Получены аналоги свойства Лиувилля для функций, гармонических на внешности жордановой области $G \subset \mathbb{C}$ и имеющих постоянные граничные значения для самой функции и ее нормальной производной. Показано, что в общем случае указанные условия ослабить нельзя.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.403

Ключевые слова: свойство Лиувилля, гармонические функции, граничное поведение.

Введение

Известно, что ограниченная аналитическая функция на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ постоянна. Этот факт называется свойством Лиувилля для аналитических функций. В указанном утверждении аналитические функции можно заменить гармоническими, а плоскость $\mathbb{C}$ — произвольным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. Одна из первых теорем такого вида утверждает (см. [1, § 24, п. 11]), что если функция f является гармонической в $\mathbb{R}^n$ и ограничена сверху (или снизу), то она постоянна. Еще одна теорема является следствием более общего результата из [2, ч. 3, гл. 3, § 3.2] и касается функций, гармонических на внешности компакта в $\mathbb{R}^n$ со связным дополнением. Эта теорема утверждает, что если такая функция убывает при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$ (здесь $|x|$ — евклидова норма), то она нулевая, при этом указанную скорость убывания ослабить нельзя.

В некоторых утверждениях такого типа можно ослабить условие гармоничности. В частности, изучалось поведение на бесконечности для функций, удовлетворяющих уравнениям средних значений по сферам (или шарам) с ограничениями на рассматриваемые множества центров и радиусов [2–5]. Например, в [2, ч. 5, гл. 5; 4] получены точные теоремы типа Лиувилля для функций в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих теореме о среднем для всех центров и одного фиксированного радиуса. Можно показать (см. [2, ч. 5, гл. 5]), что данный класс функций значительно шире класса гармонических в $\mathbb{R}^n$ функций. Отметим также интересный результат Хансена [5, 6]: если f — непрерывная ограниченная функция на $\mathbb{R}^2$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r(x)e^{it}) dt,$$

где $r(x)$ — положительная функция на $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} (r(x) - |x|) < +\infty,$$

то f — константа.

Многие авторы исследовали свойство Лиувилля для решений некоторых дифференциальных уравнений и неравенств на различных пространствах (см. [7–11] и библиографию в них).

Еще одним важным направлением в рассматриваемой тематике является изучение возможного асимптотического поведения на бесконечности периодических в среднем функций. Очевидным свойством ненулевых периодических функций на вещественной оси является невозможность их стремления к нулю на бесконечности. В многомерном случае, где возможны различные обобщения понятия периодичности, ситуация становится значительно сложнее. Развивая теорию периодических в среднем функций, Йон [12, гл. 6] получил следующий результат: если непрерывная функция f на $\mathbb{R}^3$ имеет нулевые интегралы по всем сферам единичного радиуса и

$$f(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

то $f \equiv 0$ (см. также [13], где рассмотрен n -мерный случай). Примеры показывают (см. [12, 13]), что указанное условие убывания функции f точное. Теорема Йона получила дальнейшее развитие и уточнение в разных направлениях [14–23].

Во-первых, изучались ее обобщения для функций f , удовлетворяющих уравнению свертки $f * T = 0$, где T — заданное ненулевое распределение в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Выяснилось, в частности, что не существует ненулевых решений f , принадлежащих $L^p(\mathbb{R}^n)$ при некотором $p \in [1, 2n/(n-1)]$, $n \geq 2$. При этом показатель p не может быть увеличен [14–17].

Во-вторых, доказаны так называемые «спектральные» аналоги теоремы Йона. Как и в классической теореме Лиувилля для целых функций, в них установлена связь между поведением на бесконечности решений уравнений свертки и множеством нулевых коэффициентов в ее разложении Фурье по сферическим гармоникам [2, ч. 3, гл. 3; 18, ч. 3, гл. 14].

В-третьих, исследовалась задача о допустимом росте (убывании) функций с нулевыми сферическими средними на неограниченных областях. Здесь возникли интересные эффекты, связанные с зависимостью от вида области [2, ч. 3, гл. 3, § 3.3; 18, ч. 3, гл. 14, § 14.6; 19, ч. 2, гл. 1, § 1.6]. К рассматриваемому кругу идей относятся также различные теоремы типа Фрагмена — Линделёфа и теоремы о граничном поведении аналитических функций [20, 21].

В-четвертых, получены аналоги теоремы Йона на симметрических пространствах [18, ч. 3, гл. 15; 22]. Разработанные для этого методы оказались весьма полезными при изучении близких вопросов для искаженного уравнения свертки на комплексном евклидовом пространстве и группе Гейзенберга [23].

В данной работе получены аналоги свойства Лиувилля для функций, гармонических на внешности жордановой области $G \subset \mathbb{C}$ и имеющих постоянные граничные значения для самой функции и ее нормальной производной (см. теоремы 1 и 2 ниже). Кроме того, показано, что в общем случае условия теоремы 1 нельзя ослабить (см. теорему 3).

§ 1. Формулировки основных результатов

Пусть Γ — замкнутая гладкая жорданова кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, G — ограниченная область в $\mathbb{C}$ с границей Γ , $\bar{G} = G \cup \Gamma$. На кривой Γ стандартным образом вводится мера μ , которая на каждом открытом подмножестве Γ равна сумме длин составляющих его дуг (см. [24, гл. 10, § 1]).

Как обычно, символом $\frac{\partial}{\partial n}$ будем обозначать оператор дифференцирования в направлении внешней (по отношению к G) нормали к Γ .

Для функции f , непрерывной на окружности $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, положим

$$M_r(f) = \int_{\gamma_r} |f(z)| |dz|. \quad (1)$$

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. Пусть функция $f \in C(\mathbb{C} \setminus G)$ гармонична в $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$ и для некоторых $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ выполнены следующие условия:

- (1) $f = c_1$ на Γ ;
- (2) $\frac{\partial f}{\partial n} = c_2$ μ -почти всюду на Γ ;
- (3) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^3} M_r(f) = 0$.

Тогда если G не является кругом, то $f = c_1$ в $\mathbb{C} \setminus G$. Если G — круг, то

$$f(z) = c_1 + c_2 R \ln \frac{|z - z_0|}{R}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus G, \quad (2)$$

где z_0, R — центр и радиус круга G .

Доказательство теоремы 1 основано на применении конформного отображения внешности единичного круга на область $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$. Это отображение позволяет свести исходную задачу к переопределенной краевой задаче для уравнения Лапласа на внешности круга, в которой основной трудностью является неоднородность граничного условия для нормальной производной. Для изучения этого условия потребовались некоторые тонкие результаты о граничных свойствах функции, осуществляющей указанное выше конформное отображение, а также некоторые свойства классов Харди H_p в единичном круге (см. [24, гл. 9, 10]). Соответствующие вспомогательные конструкции и утверждения содержатся в § 2. Отметим, что отсутствие соответствующего аппарата в многомерном случае оставляет открытым вопрос о существовании аналога теоремы 1 в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$.

Из теоремы 1 сразу вытекает

Следствие 1. Пусть функция $g \in C(\mathbb{C} \setminus G)$ голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$ и для функции $f = \operatorname{Re} g$ выполнены условия 1–3 теоремы 1. Тогда g — константа.

Далее, если в теореме 1 положить $c_2 = 0$, то получим, что функция f обязана быть тождественно постоянной независимо от вида G . Как показывает следующая теорема, данное утверждение сохраняет силу и при более слабых предположениях.

Теорема 2. Пусть функция $f \in C(\mathbb{C} \setminus G)$ гармонична в $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$ и для некоторого $c \in \mathbb{C}$ выполнены следующие условия:

- (1) $f = c$ на Γ ;
- (2) $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$ на некотором множестве $E \subset \Gamma$ положительной меры μ ;
- (3) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^\alpha} M_r(f) = 0$ для некоторого $\alpha > 0$.

Тогда $f = c$ в $\mathbb{C} \setminus G$.

Следующий результат показывает необходимость условий 1, 2 и точность условия 3 в теореме 1.

Теорема 3. Существуют отличная от круга ограниченная центрально-симметричная область $G \subset \mathbb{C}$ с гладкой жордановой границей Γ и функции f_1, f_2, f_3 , непрерывные в $\mathbb{C} \setminus G$ и гармонические в $\mathbb{C} \setminus \bar{G}$, такие, что

(1) f_1 удовлетворяет условиям (1) и (3) теоремы 1 и не является тождественной константой;

(2) f_2 удовлетворяет условию (3) теоремы 1 и

$$\frac{\partial f_2}{\partial n} = 1 \quad \text{всюду на } \Gamma;$$

(3) $f_3 = 0$ и $\frac{\partial f_3}{\partial n} = 1$ всюду на Γ , при этом

$$f_3(z) = O(|z|^2) \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

В частности, $M_r(f_3) = O(r^3)$ при $r \rightarrow \infty$.

Доказательства теорем 1–3 содержатся в § 3.

§ 2. Вспомогательные конструкции и утверждения

Пусть $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ и функция u непрерывна в $\bar{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$. При любом фиксированном $\rho \geq 1$ функции $u(\rho e^{i\varphi})$ соответствует ряд Фурье

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

где

$$u_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (4)$$

Пусть $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. Если $u \in C^2(A)$, то простые вычисления с использованием (4) показывают, что при любых $\rho > 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$\Delta(u_n(\rho) e^{in\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Delta u)(\rho e^{it}) e^{in(\varphi-t)} dt. \quad (5)$$

Кроме того,

$$\Delta(u_n(\rho) e^{in\varphi}) = \left(u_n''(\rho) + \frac{u_n'(\rho)}{\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} u_n(\rho) \right) e^{in\varphi}. \quad (6)$$

По теореме Римана о конформном отображении существует единственная голоморфная в области A функция $w = \psi(z)$, которая отображает A конформно на область $\mathbb{C} \setminus G$ при условиях

$$\psi(\infty) = \infty, \quad \psi'(\infty) = a > 0. \quad (7)$$

Первое условие в (7) показывает, что функция $w = \psi(z)$ точку $z = \infty$ переводит в точку $w = \infty$, а второе условие означает, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi(z)}{z} = a > 0. \quad (8)$$

Из условий (7) и (8) следует, что функция ψ , являясь голоморфной в области A , имеет в точке $z = \infty$ простой полюс, поэтому ее лорановское разложение в A имеет вид

$$\psi(z) = az + \sum_0^{\infty} \psi_n z^{-n}, \quad a > 0. \quad (9)$$

Согласно принципу соответствия границ при конформных отображениях функция ψ может быть продолжена по непрерывности на множество $\bar{A}$. Для этого продолжения сохраним обозначение $w = \psi(z)$.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Можно показать (см. [24, гл. 10, § 1, теорема 2]), что любому множеству положительной лебеговой меры на $\mathbb{T}$ при отображении ψ соответствует μ -измеримое множество положительной меры на Γ , и обратно. Аналогично всякому множеству меры нуль на $\mathbb{T}$ соответствует множество точек нулевой меры μ на Γ , и обратно.

Как обычно, обозначим через $H_p(\mathbb{D})$, $p > 0$, класс функций f , голоморфных в $\mathbb{D}$ и таких, что для каждой из них интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \quad (10)$$

ограничен при $0 \leq r < 1$. При $z \in \mathbb{D}$ положим

$$h(z) = a - \sum_0^{\infty} n\psi_n z^{-n-1} = \psi' \left(\frac{1}{z} \right). \quad (11)$$

Отметим, что в силу однолиственности ψ функция h не имеет нулей в $\mathbb{D}$. Далее потребуются некоторые вспомогательные утверждения о свойствах функций h и ψ .

Лемма 1. *Функции h и $1/h$ принадлежат классу $H_p(\mathbb{D})$ при всех $p > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \in G$. Обозначим через $d(b)$ расстояние от точки b до Γ . Тогда при любом $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\left| \psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right| \geq d(b) > 0.$$

Из этого неравенства и (9) следует, что существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$\left| z \left(\psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right) \right| > c_1 \quad (12)$$

при всех $z \in \mathbb{D}$. Кроме того, из (9) и определения ψ получаем, что

$$\left| z \left(\psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right) \right| < c_2, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (13)$$

где $c_2 > 0$ не зависит от z . Далее, при $z \in \mathbb{D}$ из (11) находим

$$h(z) = -z^2 \left(\psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right)^2 \lambda'(z), \quad (14)$$

где

$$\lambda(z) = \left(\psi \left(\frac{1}{z} \right) - b \right)^{-1}.$$

Учитывая оценки (12) и (13), при любых $p > 0$, $r \in [0, 1]$ из (14) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (|h(re^{i\varphi})|^p + |h(re^{i\varphi})|^{-p}) d\varphi \\ < c_2^{2p} \int_0^{2\pi} |\lambda'(re^{i\varphi})|^p d\varphi + c_1^{-2p} \int_0^{2\pi} |\lambda'(re^{i\varphi})|^{-p} d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Функция λ отображает круг $\mathbb{D}$ конформно и однолистно на некоторую ограниченную область с гладкой жордановой границей. По теореме Линделёфа (см. [24, гл. 10, § 1, теорема 4]) при надлежащем выборе ветви аргумента функции $\arg \lambda'(z)$ и $\arg 1/\lambda'(z)$ могут быть продолжены до непрерывных функций на $\mathbb{D}$. Отсюда следует (см. [24, гл. 10, § 1, теорема 5]), что функции λ и $1/\lambda$ принадлежит классу $H_p(\mathbb{D})$ при любом $p > 0$. Таким образом, интегралы в правой части неравенства (15) ограничены по r . Отсюда и из (15) получаем утверждение леммы 1. $\square$

Следствие 2. Функция h имеет почти всюду на $\mathbb{T}$ конечные предельные значения по некасательным путям, образующие граничную функцию $h(e^{i\varphi})$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. При этом $h(e^{i\varphi}) \in L^p(0, 2\pi)$ для любого $p > 0$ и

$$h(e^{i\varphi}) \neq 0 \quad \text{для почти всех } \varphi \in (0, 2\pi). \quad (16)$$

Доказательство. Утверждение о существовании указанной предельной функции $h(e^{i\varphi})$ и ее принадлежности классу $L^p(0, 2\pi)$ следует из леммы 1 и известного аналогичного свойства для любой функции класса $H_p(\mathbb{D})$ (см., например, [24, гл. 9, § 4]). Применяя данное свойство к функции $1/h$ и используя лемму 1, получим (16). $\square$

Следствие 3. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и $|\alpha| \geq |\beta| > 0$. Тогда функция

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{(\alpha + \beta z)^2}$$

принадлежит классу $H_p(\mathbb{D})$ при всех $0 < p < \frac{1}{4}$.

Доказательство. Сначала предположим, что $|\beta| = |\alpha|$. В этом случае $\alpha + \beta z = \beta(z - e^{i\gamma})$ при некотором $\gamma \in [0, 2\pi]$. Пусть $0 < p < \frac{1}{4}$. Выберем $q > 1$ так, что $qp < \frac{1}{4}$. Используя неравенство Гёльдера и лемму 1, для любого $r \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |h_1(re^{i\varphi})|^p d\varphi &= \int_0^{2\pi} |h(re^{i\varphi})|^p |\beta(re^{i\varphi} - e^{i\gamma})|^{-2p} d\varphi \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} |h(re^{i\varphi})|^{\frac{pq}{q-1}} d\varphi \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^{2\pi} |\beta(re^{i\varphi} - e^{i\gamma})|^{-2pq} d\varphi \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \left(\int_0^{2\pi} |1 - re^{i(\varphi-\gamma)}|^{-2pq} d\varphi \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от r . Поскольку

$$|1 - re^{i(\varphi-\gamma)}| \geq 1 - |\cos(\varphi - \gamma)|$$

и $pq < \frac{1}{4}$, из (17) получаем требуемое утверждение. В случае $|\alpha| > |\beta| > 0$ утверждение очевидно в силу леммы 1 и неравенства $|\alpha + \beta z| \geq |\alpha| - |\beta|$, $z \in \mathbb{D}$. $\square$

Лемма 2. Для почти всех (по мере Лебега) $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi'((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}}, \quad (18)$$

где оба предела существуют и конечны.

Доказательство. Из (11) имеем $\psi'((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) = h((1 + \varepsilon)^{-1}e^{-i\varphi})$ для любых $\varepsilon > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отсюда и из следствия 2 вытекает существование конечного предела в левой части равенства (18) для почти всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. По теореме о среднем для таких φ выполнено равенство

$$\int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho = \varepsilon \psi'(\xi e^{i\varphi})$$

для любого $\varepsilon > 0$ и некоторого $\xi \in (1, 1 + \varepsilon)$, зависящего от ε . Следовательно, существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho$, который равен пределу в левой части равенства (18). Поскольку

$$\int_1^{1+\varepsilon} \psi'(\rho e^{i\varphi}) d\rho = \frac{\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}},$$

отсюда получаем утверждение леммы 2. $\square$

Лемма 3. Для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует $\delta = \delta(\varphi) > 0$ такое, что при любом $\varepsilon \in (0, \delta(\varphi))$ круг

$$K_{\varepsilon, \varphi} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \psi(e^{i\varphi}) - \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\psi'(e^{i\varphi})| \right\} \quad (19)$$

не пересекается с Γ .

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует последовательность $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел такая, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$ и при любом j круг $K_{\varepsilon_j, \varphi}$ пересекается с Γ . Обозначим через φ_j одну из точек полуинтервала $[0, 2\pi)$, для которой $\psi(e^{i\varphi_j}) \in K_{\varepsilon_j, \varphi} \cap \Gamma$. Тогда имеем

$$|\psi(e^{i\varphi_j}) - \psi(e^{i\varphi}) - \varepsilon_j e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})| \leq \frac{\varepsilon_j}{2} |\psi'(e^{i\varphi})|. \quad (20)$$

Из этого неравенства и однолиственности ψ заключаем, что $\varphi_j \rightarrow \varphi$ при $j \rightarrow \infty$.

Далее, функция $\psi(e^{it})$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$ и для почти всех $t \in [0, 2\pi]$ выполнено равенство

$$\frac{d}{dt} \psi(e^{it}) = ie^{it} \psi'(e^{it}) \quad (21)$$

(см. [24, гл. 10, § 1, теорема 1]).

Предположим теперь, что $\psi'(e^{i\varphi}) \neq 0$ и

$$\psi(e^{i\varphi}) - \psi(e^{i\varphi_j}) = i\psi'(e^{i\varphi})e^{i\varphi}(\varphi - \varphi_j) + o(\varphi - \varphi_j) \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Из следствия 2 и равенства (21) следует, что эти требования выполняются для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. Сопоставляя (22) и (20) и учитывая, что $\psi'(e^{i\varphi}) \neq 0$, приходим к неравенству

$$|\varepsilon_j + i(\varphi - \varphi_j) + o(\varphi - \varphi_j)| \leq \frac{\varepsilon_j}{2} \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

При достаточно больших j последнее неравенство противоречиво, откуда следует утверждение леммы 3. $\square$

Лемма 4. Пусть f гармонична в круге $K = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \zeta_0| < r\}$ и

$$M = \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)| < +\infty. \quad (23)$$

Тогда при любом $\zeta \in K$ имеет место оценка

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq \frac{2M|\zeta - \zeta_0|}{r - |\zeta - \zeta_0|}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы получаем, что $w(z) = f(rz + \zeta_0)$ гармонична в $\mathbb{D}$ и $|w(z)| \leq M$ для любого $z \in \mathbb{D}$. Отсюда следует (см., например, [24, гл. 9, § 2, следствие 2]), что почти всюду на $\mathbb{T}$ функция w имеет некасательные конечные предельные значения. Как обычно, сохраним обозначение $w(e^{it})$ для соответствующей предельной функции, определенной почти всюду на $\mathbb{T}$. Тогда из (23) имеем $|w(e^{it})| \leq M$. Кроме того, для любого $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \rho < 1$, выполнена формула Пуассона

$$w(z) - w(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w(e^{it}) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n(\varphi - t)) dt \quad (25)$$

(см. [24, гл. 9, § 2, теорема 3]). Интеграл справа не превосходит выражения

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |w(e^{it})| \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n dt \leq \frac{2M\rho}{1 - \rho},$$

поэтому оценка (24) следует из (25). $\square$

Лемма 5. Для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ выполнено следующее утверждение: если f гармонична в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$, непрерывна в $\mathbb{C} \setminus G$ и существует производная $\frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi}))$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}))}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi}))|\psi'(e^{i\varphi})|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 2 и леммы 2 вытекает, что для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ существует отличный от нуля конечный предел в левой части равенства (18) и

$$\psi((1 + \varepsilon)e^{i\varphi}) = \psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi}) + o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (26)$$

Следовательно, для таких φ точка $\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})$ содержится в круге $K_{\varepsilon,\varphi}$ (см. (19)) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Применим лемму 4, полагая

$$\zeta_0 = \psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi}), \quad r = \frac{\varepsilon}{2} |\psi'(e^{i\varphi})|, \quad \zeta = \psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi}),$$

где $\varepsilon \in (0, \delta(\varphi))$ достаточно мало. Поскольку круг $K_{\varepsilon,\varphi}$ содержится в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |\psi(e^{i\varphi})| + \frac{3}{2}\delta(\varphi)|\psi'(e^{i\varphi})|\}$, существует константа M_φ , не зависящая от ε , такая, что

$$\sup_{K_{\varepsilon,\varphi}} |f| \leq M_\varphi \quad \text{для всех } \varepsilon \in (0, \delta(\varphi)).$$

Тогда из (26) и леммы 4 получаем

$$f(\psi((1+\varepsilon)e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})) = o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (27)$$

Из определения нормальной производной имеем

$$\frac{\partial f}{\partial n}(\psi(e^{i\varphi})) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{f(\psi(e^{i\varphi}) + \varepsilon e^{i\varphi} \psi'(e^{i\varphi})) - f(\psi(e^{i\varphi}))}{\varepsilon |\psi'(e^{i\varphi})|}.$$

Из этого равенства и соотношения (27) следует утверждение леммы 5. $\square$

Лемма 6. Пусть f гармонична в $\mathbb{C} \setminus G$ и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{M_r(f)}{r^\alpha} = 0 \quad (28)$$

для некоторого $\alpha > 1$. Тогда

$$f(z) = \sum_{0 < k < \alpha - 1} a_k z^k + \sum_{1 - \alpha < k < 0} b_k (\bar{z})^{-k} + O(\ln |z|) \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ и суммы с пустым множеством индексов суммирования считаются равными нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B — открытый круг в $\mathbb{C}$ с центром в нуле, содержащий множество $\overline{G}$. При $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}$ имеем равенство

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad (29)$$

где

$$f_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (30)$$

Из (30) и гармоничности f следует, что ряд (29) сходится локально равномерно в $\mathbb{C} \setminus \overline{B}$ и при этом функции $f_n(\rho) e^{in\varphi}$ гармонические в $\mathbb{C} \setminus \overline{B}$ (см. (3)–(5)). Используя формулу (6), отсюда получаем

$$f_0(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho, \quad f_n(\rho) = a_n \rho^n + b_n \rho^{-n} \quad \text{при } n \neq 0, \quad (31)$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Равенства (30), (31) и (1) показывают, что

$$|a_n r^n + b_n r^{-n}| \leq \frac{M_r(f)}{2\pi r} \quad \text{при } r > 0, \quad n \neq 0.$$

Поэтому из (28) следует, что $a_n = 0$ при $n \geq \alpha - 1$ и $b_n = 0$ при $n < 1 - \alpha$. Отсюда и из соотношений (31) и (29) получаем требуемое утверждение. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далеко идущие обобщения леммы 6, связанные с поведением на бесконечности решений уравнений свертки на симметрических пространствах, получены в [18, гл. 15] (для случая пространства $\mathbb{R}^n$ см. также [2, ч. 3, гл. 3]).

§ 3. Доказательства основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы 1. Рассмотрим функцию $u(z) = f(\psi(z))$, где ψ — функция, определенная в § 2. Из условия теоремы 1 получаем, что u гармонична в области A и непрерывна в $\bar{A}$, при этом

$$u(e^{i\varphi}) = c_1 \quad \text{для любого } \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (32)$$

Кроме того, из условия (3) теоремы 1, равенства (9) и леммы 6 следует, что

$$u(z) = O(|z|) \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (33)$$

При любом фиксированном $\rho \geq 1$ функции $u(\rho e^{i\varphi})$ соответствует ряд Фурье (3), в котором функции $u_n(\rho)$ непрерывны на $[1, +\infty)$ (см. (4)). Из гармоничности u и соотношения (5) получаем, что функции $u_n(\rho)e^{in\varphi}$ гармонические в A при всех n . В силу (6) это означает, что

$$u_0(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho, \quad u_n(\rho) = a_n \rho^n + b_n \rho^{-n} \quad \text{при } n \neq 0,$$

где $\rho \geq 1$ и a_n, b_n — комплексные постоянные. Из равенств (32) и (4) следует, что $u_0(1) = c_1$ и $u_n(1) = 0$ при $n \neq 0$. Следовательно,

$$a_0 = 0 \quad \text{и} \quad a_n + b_n = 0 \quad \text{при } n \neq 0. \quad (34)$$

Далее, из (4) и (33) получаем

$$u_n(\rho) = O(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow +\infty.$$

Последнее равенство означает, что $a_n = 0$ и $b_{-n} = 0$ при $n \geq 2$. Сопоставляя это с (34), приходим к выводу, что при $|z| \geq 1$

$$u(z) = b_0 \ln |z| + a_1 \left(z - \frac{1}{\bar{z}} \right) + a_{-1} \left(\frac{1}{z} - \bar{z} \right), \quad (35)$$

где черта означает знак комплексного сопряжения. Из этого равенства находим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{u((1+\varepsilon)e^{i\varphi}) - u(e^{i\varphi})}{\varepsilon} = b_0 + 2a_1 e^{i\varphi} - 2a_{-1} e^{-i\varphi}$$

для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$. Отсюда, используя лемму 5 и условие (2) теоремы 1, заключаем, что

$$b_0 + 2a_1 e^{-i\varphi} - 2a_{-1} e^{i\varphi} = c_2 |h(e^{i\varphi})| \quad (36)$$

для почти всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. Если $c_2 = 0$, то из последнего равенства следует, что $b_0 = a_1 = a_{-1} = 0$. В силу (35), это означает, что $f = c_1$.

Предположим, что $c_2 \neq 0$. Тогда из (36) имеем

$$c_2^{-1} (b_0 + 2a_1 e^{-i\varphi} - 2a_{-1} e^{i\varphi}) \geq 0. \quad (37)$$

По теореме Фейера — Рисса (см. [25, приложение 5]) неотрицательный тригонометрический полином в левой части равенства (37) можно представить в виде

$$c_2^{-1} (b_0 + 2a_1 e^{-i\varphi} - 2a_{-1} e^{i\varphi}) = |\alpha + \beta e^{i\varphi}|^2, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (38)$$

где комплексные постоянные α, β таковы, что

$$\alpha + \beta z \neq 0 \quad \text{при } z \in \mathbb{D}. \quad (39)$$

Докажем, что $\beta = 0$. Предположим противное, тогда из (39) имеем $|\alpha| \geq |\beta| > 0$. Применяя лемму 1 и следствие 3, отсюда заключаем, что функции

$$h_1(z) = \frac{h(z)}{(\alpha + \beta z)^2}, \quad h_2(z) = \frac{1}{h_1(z)}$$

принадлежат классу $H_p(\mathbb{D})$ при $p \in (0, 1/4)$. Кроме того, из (36) и (39) следует, что

$$|h_1(e^{i\varphi})| = |h_2(e^{i\varphi})| = 1$$

для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. В силу теоремы В. И. Смирнова (см. [24, гл. 9, § 4, теорема 4]) это означает, что $|h_1(z)| = 1$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Следовательно, $h(z) = \gamma(\alpha^2 + 2\alpha\beta z + \beta^2 z^2)$, где $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| = 1$. Учитывая (11), отсюда получаем $\beta = 0$, что противоречит нашему предположению. Данное рассуждение и формулы (36) и (38) показывают, что $\beta = a_1 = a_{-1} = 0$ и $|h(e^{i\varphi})| = c_2^{-1}b_0$ для почти всех $\varphi \in (0, 2\pi)$. Как и выше, отсюда и из теоремы В. И. Смирнова заключаем, что h — тождественная константа. Учитывая (11) и (9), имеем $h(z) = a$ в $\mathbb{D}$ и $\psi(z) = az + \psi_0$ в A . Следовательно, область G является кругом с центром $z_0 = \psi_0$ и радиусом $R = a$. В этом случае из равенства (35) получаем соотношение (2), что завершает доказательство теоремы 1. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть f удовлетворяет условиям теоремы 2. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем, что для функции $u(z) = f(\psi(z))$ выполнены соотношения (32)–(34). Используя лемму 6 и условие (3) теоремы 2 при $\alpha > 1$, как и выше, приходим к равенству

$$u(z) = c_1 + b_0 \ln |z| + \sum_{0 < k < \alpha - 1} (a_k(z^k - (\bar{z})^{-k}) + a_{-k}(z^{-k} - \bar{z}^k)). \quad (40)$$

Из этого равенства, леммы 5 и условия (2) теоремы 2 следует, что

$$b_0 + 2 \sum_{0 < k < \alpha - 1} (a_k e^{ik\varphi} - a_{-k} e^{-ik\varphi}) = 0$$

для некоторого множества точек $\varphi \in [0, 2\pi]$ положительной лебеговой меры. Это означает, что $b_0 = 0$ и $a_k = 0$ при $0 < |k| < \alpha - 1$. Отсюда, из равенства (40) и определения u получаем, что $f = c_1$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Очевидно, при любом достаточно малом $\varepsilon \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{9(1-\varepsilon)^2} < (1-\varepsilon)^2. \quad (41)$$

Для таких ε обозначим $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1 - \varepsilon\}$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = z - \frac{2}{3z} - \frac{1}{27z^3}, \quad z \in A_\varepsilon. \quad (42)$$

Для любых $z_1, z_2 \in A_\varepsilon$ имеем оценки

$$|z_1 z_2| > (1 - \varepsilon)^2, \quad |z_1^{-2} + (z_1 z_2)^{-1} + z_2^{-2}| < \frac{3}{(1 - \varepsilon)^2}. \quad (43)$$

Кроме того, из (42) находим

$$\Phi(z_1) - \Phi(z_2) = (z_1 - z_2) \left(1 + \frac{1}{z_1 z_2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{27} (z_1^{-2} + (z_1 z_2)^{-1} + z_2^{-2}) \right) \right).$$

Учитывая неравенства (41) и (43), из последнего соотношения заключаем, что $\Phi(z_1) \neq \Phi(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$. Таким образом, Φ однолистка в области A_ε . Положим

$$\Phi(A_\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A_\varepsilon\}$$

и обозначим через g обратную к Φ функцию, действующую из $\Phi(A_\varepsilon)$ на A_ε . Из формулы (42) следует, что при любом $z \in A_\varepsilon$ выполнены неравенства

$$|z| - \frac{2}{3(1-\varepsilon)} - \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} < |\Phi(z)| < |z| + \frac{2}{3(1-\varepsilon)} + \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3}.$$

Отсюда и из определения g получаем, что

$$|z| - \frac{2}{3(1-\varepsilon)} - \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} < |g(z)| < |z| + \frac{2}{3(1-\varepsilon)} + \frac{1}{27(1-\varepsilon)^3} \quad (44)$$

при всех $z \in \Phi(A_\varepsilon)$.

Положим $G = \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(A)}$, где $\Phi(A) = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in A\}$. В силу нечетности и однолиственности Φ множество G является центрально-симметричной ограниченной областью с гладкой жордановой границей $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \Phi(\zeta), \zeta \in \mathbb{T}\}$. Кроме того, поскольку

$$\Phi(1) = -\Phi(-1) = \frac{8}{27} \quad \text{и} \quad \Phi(i) = -\Phi(-i) = \frac{44}{27}i,$$

область G не является кругом.

Рассмотрим функции

$$f_1 = \ln |g|, \quad f_2 = \frac{10}{9} \ln |g| - \frac{1}{3} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{g^2} \right), \quad f_3 = \frac{10}{9} \ln |g| + \frac{1}{6} \operatorname{Re} \left(g^2 - \frac{1}{g^2} \right).$$

Из определения g следует, что g голоморфна в $\Phi(A_\varepsilon)$ и не обращается в нуль. Отсюда получаем, что функции f_1, f_2, f_3 гармонические в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и непрерывны в $\mathbb{C} \setminus G$. Используя также (44), приходим к выводу, что функции f_1, f_2, f_3 удовлетворяют всем требованиям теоремы 3. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
2. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer, 2003.
3. Netuka I., Vesely J. Mean value property and harmonic functions // Classical and modern potential theory and applications. Dordrecht: Kluwer, 1994. P. 359–398.
4. Волчков В. В. Новые теоремы о двух радиусах в теории гармонических функций // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 1. С. 182–194.
5. Kuznetsov N. Mean value properties of harmonic functions and related topics (a survey) // arXiv:1904.08312v2[math.AP]22.05.2019. 21 p.
6. Hansen W. A Liouville property for spherical averages in the plane // Math. Ann. 2001. V. 319. P. 539–551.
7. Caruzzo Dolcetta I., Cutrì A. On the Liouville property for sublaplacians // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1997. V. 25, N 4. P. 239–256.
8. Cutrì A., Leoni F. On the Liouville property for fully nonlinear equations // Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire. 2000. V. 17, N 2. P. 219–245.
9. Chu C. H., Lau A. T. M. Harmonic functions on topological groups and symmetric spaces // Math. Z. 2011. Bd 268. Heft 3–4. S. 649–673.
10. Degtyarev S. P. Liouville Property for solutions of the linearized degenerate thin film equation of fourth order in a halfspace // Result. Math. 2016. V. 70. P. 137–161.
11. Heyer H. The Liouville property for harmonic functions on groups and hypergroups // Methods Funct. Anal. Topol. 2017. V. 23, N 1. P. 3–25.

12. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
13. Smith J. D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1972. V. 72. P. 403–416.
14. Волчков В. В. Проблемы типа Помпейю на многообразиях // Докл. АН Украины. 1993. № 11. С. 9–13.
15. Thangavelu S. Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // J. Anal. Math. 1994. V. 63. P. 255–286.
16. Rawat R., Sitaram A. The injectivity of the Pompeiu transform and L^p -analogues of the Wiener Tauberian theorem // Israel J. Math. 1995. V. 91. P. 307–316.
17. Волчков В. В. Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 9. С. 13–30.
18. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer-Verl., 2009.
19. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.
20. Еграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962.
21. Еграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1965.
22. Shahshahani M., Sitaram A. The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 267–277.
23. Волчков В. В., Волчков Вит. В. Поведение на бесконечности решений искаженного уравнения свертки // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 1. С. 85–100.
24. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
25. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.

Поступила в редакцию 2 декабря 2019 г.

После доработки 2 декабря 2019 г.

Принята к публикации 19 февраля 2020 г.

Волчков Валерий Владимирович, Волчков Виталий Владимирович
Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 83001, Украина
valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com