N. A. Daurtseva, Quasi-kähler structures of cohomogeneity 1 on $s^2 \times s^4$, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 4, 765–776

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.404>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.80.181.102

April 26, 2023, 16:44:52

КВАЗИ-КЭЛЕРОВЫ СТРУКТУРЫ КООДНОРОДНОСТИ 1 НА $S^2 \times S^4$

Н. А. Даурцева

Аннотация. Построен пример квази-кэлеровой структуры координатности один на произведении $S^2 \times S^4$.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.404

Ключевые слова: структуры координатности 1, квази-кэлеровы структуры, 6-мерные многообразия.

§ 1. Введение

Будем называть гладкое четномерное многообразие M *почти комплексным*, если на нем определено гладкое поле эндоморфизмов $J : TM \rightarrow TM$, удовлетворяющее условию $J_x^2 = -\text{Id}_x$ в каждой точке $x \in M$. Будем называть такое поле эндоморфизмов *почти комплексной структурой* (п.к.с.) на M .

Не на всяком четномерном многообразии можно определить п.к.с. Так, в 1953 г. Борель и Серр [1] показали, что только сферы размерностей 2 и 6 допускают существование п.к.с. Относительно произведений сфер известно, что на $S^{2n+1} \times S^{2p+1}$ существует двухпараметрическое семейство комплексных структур [2]. Эти структуры кэлеровы в том и только том случае, если $p = n = 0$. Для произведений четномерных сфер известен результат [3], согласно которому только произведения $S^2 \times S^2$, $S^2 \times S^4$, $S^4 \times S^2$, $S^2 \times S^6$, $S^6 \times S^2$, $S^6 \times S^6$ могут быть почти комплексными. В этом списке отдельно стоит произведение $S^2 \times S^4$ ($S^4 \times S^2$), поскольку оно содержит не почти комплексный и почти комплексный множители. В качестве примера п.к.с. на $S^2 \times S^4$ обычно рассматривают структуру Кэли, индуцированную вложением $S^2 \times S^4 \in \mathbb{R}^8$ [4].

Что касается сфер и их произведений в размерности 6, то чаще всего изучаются инвариантные структуры на однородных пространствах $S^6 = G_2/SU(3)$ и $S^3 \times S^3 = SU(2) \times SU(2)$. Однако отказ от изучения инвариантных структур позволяет получить совершенно новые примеры. Самый простой способ построения неоднородных примеров — это переход к структурам координатности один, т. е. к структурам, инвариантным относительно действия компактной группы Ли, с одномерным пространством орбит. Так, в [5] построены новые серии эйнштейновых метрик на сферах S^5 , S^6 , S^7 , S^8 , S^9 и некоторых других многообразиях, в частности на $S^3 \times S^3$. В [6] построен большой класс метрик неотрицательной кривизны на некоторых многообразиях координатности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке научных школ (код проекта НШ–5913.2018.1).

един. В [7] впервые найдены примеры неоднородных приблизительно кэлеровых многообразий в размерности 6 на множестве почти эрмитовых структур кооднородности один на S^6 и $S^3 \times S^3$.

В данной работе изучаются почти эрмитовы структуры кооднородности один на $S^2 \times S^4$. Основной результат работы сформулирован в теореме.

Теорема. *Функции $\lambda = B \cos^3(\varphi)$, $u_0 = A \cos^4(\varphi) + \sin(\varphi)$, $u_1 = \sin(\varphi)$, $u_2 = 0$, $u_3^2 = -B \cos^4(\varphi) + A^2 \cos^8(\varphi) + 2A \cos^4(\varphi) \sin(\varphi)$ при $B \leq -2$, $A > 0$ и $-B \geq 4A$ определяют на $S^2 \times S^4$ квази-кэлерову структуру $(J_{d\omega}, \omega)$ кооднородности один.*

§ 2. Многообразия кооднородности один

Пусть G обозначает компактную связную группу Ли и M — некоторое замкнутое связное многообразие. Действие компактной группы Ли G на M называется *действием кооднородности один*, если пространство орбит M/G одномерно. Если M связно, то M/G может быть диффеоморфно $(-\infty; +\infty)$, $[0; +\infty)$, $[-1; 1]$ или S^1 . В первых двух случаях многообразие M некомпактно, в последнем будет расслоением над S^1 и, следовательно, неодносвязным. Для компактного многообразия M с конечной фундаментальной группой $M/G \cong [-1; 1]$ это единственно возможный случай. Такие многообразия называются *интервальными многообразиями кооднородности один*.

Пусть g — произвольная, но фиксированная G -инвариантная метрика на M , и пусть $\pi : M \rightarrow M/G \approx [-1; 1]$. Пусть $c : [-1; 1] \rightarrow M$ — минимальная геодезическая между двумя сингулярными орбитами $\pi^{-1}(-1)$ и $\pi^{-1}(1)$. Тогда c ортогональна орбитам и для всех точек $c(t)$, $t \in (-1; 1)$, подгруппа K изотропии группы G постоянна. Подгруппа $K \subset G$ называется *главной подгруппой изотропии*, а G/K — *главной орбитой*. Орбиты $M_- = \pi^{-1}(-1) = G/K^-$ и $M_+ = \pi^{-1}(1) = G/K^+$ имеют меньшую размерность и называются *сингулярными орбитами*, а группы K^- , K^+ — *сингулярными подгруппами изотропии* соответственно. Таким образом, $M = M_- \cup M_{\text{reg}} \cup M_+$, где M_{reg} — открытое множество, соответствующее внутренности интервала $[-1; 1]$, диффеоморфное $(-1; 1) \times G/K$.

Пусть $D_{\pm}$ — диск радиуса 1, нормальный к $M_{\pm}$ в точке $c(\pm 1)$. Группа $K^{\pm}$ действует на диске $D_{\pm}$, и это действие транзитивно на его границе $\partial D_{\pm} = S^{l_{\pm}} = K^{\pm} \cdot c(0) = K^{\pm}/H$. Теорема о срезе говорит о том, что трубчатые окрестности сингулярных орбит имеют вид [8]:

$$\pi^{-1}[-1; 0] \approx G \times_{K^-} D_-; \quad \pi^{-1}[0; 1] \approx G \times_{K^+} D_+.$$

Таким образом, M раскладывается в два дисковых расслоения, склеенных по общей границе $\pi^{-1}(0) \approx G/K$:

$$M \approx G \times_{K^-} D_- \cup_{G/H} G \times_{K^+} D_+, \quad S^{l_{\pm}} = \partial D_{\pm} \approx K^{\pm}/H. \quad (1)$$

Это позволяет описать M в терминах групп $G, K^{\pm}, K$. Схему $G \supset K^+, K^- \supset K$ будем называть *групповой диаграммой* многообразия кооднородности один. Обратно, пусть $G \supset K^+, K^- \supset K$ — компактные группы и $K^{\pm}/H \approx S^{l_{\pm}}$. Согласно классификации транзитивных действий на сферах [9–11] действие $K^{\pm}$ на $S^{l_{\pm}}$ линейно и, следовательно, продолжается на диск $D_{\pm}$, ограниченный $S^{l_{\pm}}$, что позволяет построить многообразие кооднородности один, используя (1). Этот факт позволяет свести классификацию интервальных многообразий кооднородности один к классификации групповых диаграмм $G \supset K^+, K^- \supset K$, $K^{\pm}/H \approx S^{l_{\pm}}$.

Отдельно надо определить непримитивное многообразие кооднородности один. Многообразие M кооднородности один называется *непримитивным*, если его групповая диаграмма $G \supset K^+, K^- \supset K$ такова, что существует замкнутая связная собственная подгруппа $L \subset G$, которая содержит K^-, K^+ и K . Тогда $L \supset K^+, K^- \supset K$ — это тоже групповая диаграмма некоторого многообразия M_L кооднородности один. Многообразие M в таком случае G -эквивариантно диффеоморфно $G \times_L M_L$ и, в частности, является нетривиальным расслоением $M_L \rightarrow M \rightarrow G/L$ со структурной группой L .

§ 3. Приблизительно кэлэровы многообразия

Если почти комплексное многообразие M риманово и риманова структура g согласована с почти комплексной структурой J : $g(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, J\cdot)$, то говорят, что на M задана *почти эрмитова структура с кэлэровой формой* $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$. Существует известная классификация Грея — Хервеллы [12] почти эрмитовых многообразий. Представление группы $U(n)$ на пространстве $\mathscr{W}$, состоящем из 3-форм, имеющих те же симметрии, что и $\nabla\omega$, имеет четыре неприводимые компоненты: $\mathscr{W} = \mathscr{W}_1 \oplus \mathscr{W}_2 \oplus \mathscr{W}_3 \oplus \mathscr{W}_4$. Всякая комбинация этих компонент соответствует некоторым дополнительным условиям на почти эрмитовы структуры. Поскольку существует ровно 16 таких комбинаций, включая пустое множество и само пространство $\mathscr{W}$, выделяют ровно 16 возможных классов почти эрмитовых многообразий.

Почти эрмитово многообразие (M, g, J) называется *приблизительно кэлэровым* (NK от *nearly Kähler*) если $(\nabla_X J)X = 0$ для любого векторного поля X . NK -многообразие называется *строго приблизительно кэлэровым* (SNK), если $\nabla_v J|_p \neq 0$ для всех $p \in M$ и $0 \neq v \in T_p M$. Класс таких многообразий появляется в классификации Грея — Хервеллы как $\mathscr{W}_1$.

Относительно структуры таких многообразий известны два следующих результата [13].

1. Всякое NK -многообразие локально голоморфно изометрично произведению кэлэрова многообразия и строго приблизительно кэлэрова.

2. Всякое строго приблизительно кэлэрово многообразие конечно покрывается произведением однородных 3-симметрических многообразий, твисторных пространств положительных кватернионно-кэлэровых многообразий с канонической NK -структурой и 6-мерных строго приблизительно кэлэровых многообразий.

Это одна из причин, по которой случай размерности 6 столь важен, когда речь идет о строго приблизительно кэлэровых многообразиях.

В [14] Бутруй классифицировал все 6-мерные однородные SNK -многообразия, доказав, что только

$$S^6 = G_2/SU(3), \quad \mathbb{C}P^3 = Sp(2)/T^1 \times Sp(1), \quad F_{1,2} = SU(3)/T^2,$$

$$S^3 \times S^3 = SU(2) \times SU(2) \times SU(2)/\Delta SU(2)$$

таковы. До 2017 г. это были единственные примеры 6-мерных полных SNK -многообразий.

В [15, 16] Подеста и Спиро привели список всех 6-мерных многообразий кооднородности один, на которых возможно существование приблизительно кэлэровых структур кооднородности один.

Таблица 1. Возможные групповые диаграммы для приблизительно кэлеровых 6-мерных многообразий кооднородности один

G	K	K_1	K_2	M
$SU(2) \times SU(2)$	$\Delta U(1)$	$\Delta SU(2)$	$\Delta SU(2)$	$S^3 \times S^3$
$SU(2) \times SU(2)$	$\Delta U(1)$	$\Delta SU(2)$	$U(1) \times SU(2)$	S^6
$SU(2) \times SU(2)$	$\Delta U(1)$	$U(1) \times SU(2)$	$SU(2) \times U(1)$	$\mathbb{C}P^3$
$SU(2) \times SU(2)$	$\Delta U(1)$	$U(1) \times SU(2)$	$U(1) \times SU(2)$	$S^2 \times S^4$
$SU(3)$	$SU(2)$	$SU(3)$	$SU(3)$	S^6

В [7] Хаскинс и Фасколо уточнили данный список (табл. 1) и исследовали многообразия этого списка. Последняя строка таблицы не дает новых NK -структур на S^6 , отличных от уже известных. Для групповых диаграмм из первой и второй строк таблицы авторами [7] доказано существование NK -структур кооднородности 1, которые дают новые неоднородные примеры таких структур на S^6 и $S^3 \times S^3$. Для $S^2 \times S^4$ и $\mathbb{C}P^3$ на основе численного анализа выдвинуты гипотезы о том, что на $S^2 \times S^4$ нет приблизительно кэлеровой структуры кооднородности один, а на $\mathbb{C}P^3$ нет такой структуры, отличной от уже известной однородной.

§ 4. Квази-кэлеровы многообразия

В [7] и классификации из [15, 16] используется тот факт, что приблизительно кэлерова структура индуцирует $SU(3)$ -структуру на многообразии.

Напомним, что $SU(3)$ -многообразие — это почти эрмитово многообразие с комплексной формой объема $\Psi = \psi + i\phi$, где $\psi = \operatorname{Re}(\Psi)$, $\phi = \operatorname{Im}(\Psi)$ и $\psi(X, \cdot, \cdot) = \phi(JX, \cdot, \cdot)$. Таким образом, одна из форм ψ или ϕ вместе с п.к.с. J определяют редукцию структурной группы к $SU(3)$.

Классическое определение NK -многообразия (M, g, J, ω) эквивалентно следующим двум условиям:

- 1) форма $d\omega$ имеет тип $(3,0)+(0,3)$;
- 2) тензор Нейенхейса N тотально кососимметричен.

Это свойство формы $d\omega$ приблизительно кэлеровых многообразий позволяет определить естественную $SU(3)$ -структуру на M , определяемую через форму $\psi = d\omega$ и п.к.с. J . При этом условие тотальной кососимметричности тензора Нейенхейса не используется. Поэтому для того чтобы иметь естественную $SU(3)$ -структуру, достаточно рассмотреть более широкий класс почти эрмитовых многообразий, удовлетворяющих только условию 1. Это класс квази-кэлеровых многообразий $\mathcal{QK}$, который в классификации Грэя — Хервеллы соответствует $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$ и определяется условием

$$\nabla_X(\omega)(Y, Z) + \nabla_{JX}(\omega)(JY, Z) = 0,$$

эквивалентным условию $d\omega^{(2,1)+(1,2)} = 0$ [17].

Хитчин в [18] заметил, что дифференциальные 2-форма ω и 3-форма ψ , удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, определяют $SU(3)$ -структуру на многообразии. Действительно, $SU(3) = Sp(3, \mathbb{R}) \cap SL(3, \mathbb{C})$. Группа $Sp(3, \mathbb{R})$ стабилизирует невырожденную 2-форму ω . Относительно $SL(3, \mathbb{C})$ известно следующее: группа $GL(6, \mathbb{R})$ на $\Lambda^3 \mathbb{R}^6$ имеет две открытые орбиты $\mathcal{O}_1$ и

$\mathcal{O}_2$, группа $SL(3, \mathbb{C})$ стабилизирует формы первой орбиты, т. е. если 3-форма ψ принадлежит $\mathcal{O}_1$ во всех своих точках, то она определяет редукцию структурной группы к $SL(3, \mathbb{C})$. Для $\psi \in \Lambda^3$ определим эндоморфизм $K_\psi \in \text{End}(TM) \otimes \Lambda^6$ по формуле

$$i_{K_\psi(X)} \text{Vol} = i_X \psi \wedge \psi.$$

Обозначим $\frac{1}{6} \text{tr} K_\psi^2$ через $\tau(\psi)$. Известно [18], что $K_\psi^2 = \text{Id} \otimes \tau(\psi)$ и 3-форма ψ принадлежит $\mathcal{O}_1$ во всех своих точках если и только если $\tau(\psi) < 0$. Тогда

$$J_\psi = \frac{1}{\sqrt{-\tau(\psi)}} K_\psi$$

— почти комплексная структура.

В результате для того чтобы пара форм (ω, ψ) определяла $SU(3)$ -структуру, необходимо выполнение следующих алгебраических условий:

- 1) $\tau(K_\psi) < 0$;
- 2) $\omega \wedge \omega \wedge \omega \neq 0$;
- 3) $\omega \wedge \psi = 0$, что эквивалентно условию согласованности п.к.с. J_ψ с формой ω : $\omega(J_\psi \cdot, J_\psi \cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$;
- 4) метрика $g_\psi(X, Y) = \omega(X, J_\psi Y)$ положительно определена.

Если дополнительно $\psi = d\omega$, то $SU(3)$ -многообразие $(M, g_{d\omega}, J_{d\omega})$ будет квази-кэлеровым. Обратно, если на (M, ω) определить $\psi = d\omega$ и потребовать выполнения условий

$$\tau(K_\psi) < 0, \quad \omega \wedge d\omega = 0, \quad \omega \wedge \omega \wedge \omega \neq 0, \quad \omega(X, J_\psi X) > 0,$$

то они определяют квази-кэлерово многообразие $(M, g_{d\omega}, J_{d\omega}, \omega)$.

§ 5. Действие $SU(2) \times SU(2)$ на $S^2 \times S^4$

В [19] получена классификация компактных односвязных многообразий кооднородности один в размерностях 5, 6 и 7. Классификация таких многообразий сводится к классификации групповых диаграмм $G \supset K^+, K^- \supset K$ таких, что $K^\pm/K$, — это сферы. Для дальнейшего изучения интересна серия 6-мерных многообразий кооднородности один, обозначаемая в [19] через N_E^6 :

$$S^3 \times S^3 \supset S^3 \times S^1, S^3 \times S^1 \supset \{e^{ip\theta}, e^{i\theta}\}.$$

Случай $S^2 \times S^4$ соответствует $p = 1$. В этом случае действие группы $S^3 \times S^3$ на $S^2 \times S^4$ определяется по формуле

$$(g_1, g_2) \in S^3 \times S^3 : (p, q, t) \in S^2 \times S^4 \subset \text{Im}(\mathbb{H}) \times (\mathbb{H} \times \mathbb{R}) \mapsto (g_1 p g_1^{-1}, g_1 q g_2^{-1}, t).$$

Это неприводимое действие кооднородности один на неприводимом симметрическом пространстве.

В случае произвольного целого p известно [19, 20], что действие группы $S^3 \times S^3$ на $M_p \in N_E^6$ непримитивно. Группа $G = S^3 \times S^3$ имеет замкнутую связную собственную подгруппу $L = S^3 \times S^1 \subset G = S^3 \times S^3$, $G/L \simeq S^2$. Примитивная поддиаграмма

$$S^3 \times S^1 \supset S^3 \times S^1, S^3 \times S^1 \supset \{e^{ip\theta}, e^{i\theta}\}$$

соответствует действию группы $S^3 \times S^1$ на S^4 , определяемому следующей формулой:

$$(g, e^{i\theta}) \in S^3 \times S^1 : (x, t) \in S^4 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{R} \rightarrow (g x e^{-ip\theta}, t).$$

Таким образом, многообразия $M_p \in N_E^6$ при $p \neq 1$ являются нетривиальными S^4 сферическими расслоениями над S^2 со структурной группой L .

§ 6. Инвариантная кососимметрическая 2-форма ω на M_{reg}

Пусть $(p, q, t) \in M = S^2 \times S^4 \subset \text{Im}(\mathbb{H}) \times (\mathbb{H} \times \mathbb{R})$. Поскольку $|p| = 1$, $|q|^2 + t^2 = 1$, при $t = \pm 1$ будет $q = 0$, тем самым $(p, 0, \pm 1) \in M$. Тогда $(g_1, g_2) : (p, 0, \pm 1) \rightarrow (g_1 p g_1^{-1}, 0, \pm 1)$, следовательно, сингулярные орбиты — это $S^2 \times \{x_{\pm}\}$, где $x_{\pm} = (0; \pm 1) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$ — полюсы сферы S^4 . При $t \neq \pm 1$ очевидно, что $q \neq 0$, тогда регулярная орбита действия группы $SU(2) \times SU(2)$ — это $S^2 \times S^3$. Зафиксируем точки $(i, 0, \pm 1) \in S^2 \times \{x_{\pm}\} \in \pi^{-1}(\pm 1)$ сингулярных орбит. Кривая $\gamma(\varphi) = (i, \cos(\varphi), \sin(\varphi)) \in S^2 \times S^4$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, соединяет точки x_- и x_+ , пересекая каждую орбиту ровно один раз. Кривая $\gamma(\varphi)$ инвариантна относительно действия группы $\Delta U(1)$. Действительно,

$$(e^{i\theta}, e^{i\theta}) : \gamma(\varphi) \rightarrow (e^{i\theta} i e^{-i\theta}, e^{i\theta} \cos(\varphi) e^{-i\theta}, \sin(\varphi)) = \gamma(\varphi).$$

При фиксированном значении $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ орбита $\pi^{-1}(\gamma(\varphi_0))$ есть $S^2(1) \times S^3(r_0)$, где $r_0 = \cos(\varphi)$.

Определим на $\text{Im}(\mathbb{H}) \times (\mathbb{H} \times \mathbb{R})$ метрику по формуле

$$\langle X, Y \rangle = \frac{X_1 \bar{Y}_1 + Y_1 \bar{X}_1}{2} + \frac{X_2 \bar{Y}_2 + Y_2 \bar{X}_2}{2} + UV,$$

где $X = (X_1, X_2, U)$, $Y = (Y_1, Y_2, V) \in \text{Im}(\mathbb{H}) \times (\mathbb{H} \times \mathbb{R})$. Данная метрика индуцирует $SU(2) \times SU(2)$ -инвариантную метрику на $S^2 \times S^4$, в которой кривая γ является минимальной геодезической, ортогональной главным орбитам.

Напомним [7, 15, 16], как описать $SU(3)$ -структуру координатности один. Пусть M — 6-мерное многообразие со структурной группой $SU(3)$. Всякое 5-мерное подмногообразие $N \subset M$ естественным образом снабжается $SU(2)$ -структурой. Для того чтобы это увидеть, воспользуемся тем [21], что $SU(2)$ -структура на 5-мерном многообразии эквивалентна существованию четверки форм $(\eta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, где η — 1-форма, не обращающаяся в нуль, и ω_i — 2-формы, причем

- 1) $\omega_i \wedge \omega_j = \delta_{ij} \nu$, где ν — фиксированная 4-форма, для которой $\eta \wedge \nu \neq 0$;
- 2) $\omega_1(X, \cdot) = \omega_2(Y, \cdot) \implies \omega_3(X, Y) \geq 0$.

Всякая $SU(3)$ -структура (ω, ψ) на M^6 определяет $SU(2)$ -структуру на $N^5 \subset M^6$ по формулам

$$\eta = -\omega(v, \cdot), \quad \omega_1 = \omega|_N, \quad \omega_2 + i\omega_3 = -i\psi(v, \cdot, \cdot),$$

где v — единичный вектор нормали к N . Обратно, $SU(2)$ -структура на N определяет $SU(3)$ -структуру на $N \times \mathbb{R}$ по формулам

$$\omega = \omega_1 + \eta \wedge dt, \quad \psi = (\omega_2 + i\omega_3) \wedge (\eta + idt),$$

где t — координата на $\mathbb{R}$.

Таким образом, $SU(3)$ -структуру координатности один на регулярной части M_{reg} многообразия M можно рассматривать как 1-параметрическое семейство $SU(2)$ -структур на главных орбитах, инвариантных относительно действия $SU(2) \times SU(2)$.

Зафиксируем базис

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$ со скобками Ли $[H, E] = V$, $[H, V] = -E$, $[E, V] = \frac{1}{2}H$. Выпишем базис алгебры Ли $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$:

$$U_+ = (H, H), \quad U_- = (H, -H), \quad E_1 = (E, 0), \quad V_1 = (V, 0), \quad E_2 = (0, E), \quad V_2 = (0, V).$$

Элемент U_+ порождает алгебру Ли $\Delta\mathfrak{u}(1)$, а U_- , E_1 , V_1 , E_2 , V_2 определяют векторные поля на главной орбите $S^2 \times S^3$. Обозначим через u_- , e_1 , v_1 , e_2 , v_2 соответствующий кобазис. На $S^2 \times S^3$ среди всех инвариантных $SU(2)$ -структур можно выделить Сасаки — Эйнштейнову:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2}{3}u_-, \quad \omega_1 = \frac{1}{12}(e_1 \wedge v_1 - e_2 \wedge v_2), \\ \omega_2 &= \frac{1}{12}(e_1 \wedge v_2 + e_2 \wedge v_1), \quad \omega_3 = \frac{1}{12}(e_1 \wedge e_2 + v_1 \wedge v_2), \end{aligned}$$

а затем через нее описать все остальные $SU(2) \times SU(2)$ -инвариантные $SU(2)$ -структуры $S^2 \times S^3$. Так, аналогично [7] можно показать, что всякая инвариантная 2-форма на $M_{\text{reg}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (S^2 \times S^3)$ имеет вид

$$\omega = \lambda(\varphi)\eta \wedge d\varphi + u_0(\varphi)\omega_0 + u_1(\varphi)\omega_1 + u_2(\varphi)\omega_2 + u_3(\varphi)\omega_3,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{12}(e_1 \wedge v_1 + e_2 \wedge v_2)$ — инвариантная антиавтотдуальная 2-форма на $\ker \eta$. Для того чтобы определить 2-форму кооднородности один на всем многообразии, необходимо найти условия гладкого продолжения данной формы на сингулярные орбиты.

§ 7. Условия гладкого продолжения 2-формы ω на сингулярные орбиты

В [22] авторы сформулировали необходимое и достаточное условие продолжения метрики на сингулярную орбиту, которое может быть обобщено для произвольного тензорного поля. Воспользуемся методом из [22] и результатами из [7]. В этом параграфе $G = SU(2) \times SU(2)$, $K^\pm = U(1) \times SU(2)$, $K = \Delta U(1)$, $M = S^2 \times S^4$.

Пусть $V = T_q M / T_q(S^2 \times x_-) = \mathbb{H}$ — нормальное пространство в точке q сингулярной орбиты M_- . Нормальное расслоение $E = G \cdot V = G \times_{K^-} V$ над M_- будет G -эквивариантно диффеоморфно окрестности $S^2 \times \{x_-\}$ в M . Пространство V рассматривается как слой в E над $q = eK^- \in S^2 \times \{x_-\}$:

$$V \rightarrow E, \quad v \rightarrow (e, v) \cdot K^-,$$

где e — единица группы G . Действие группы K^- на V определяется формулой

$$(e^{i\theta}, q) \in U(1) \times SU(2) : x \in V \rightarrow e^{i\theta} x q^{-1}.$$

Это действие кооднородности один, оно транзитивно на сферах $S^3(r_0) = \{v \in V : |v| = r_0\} \subset V$. Главные орбиты $G/K = G \cdot v_0$ для $v_0 \in S^3(r_0)$ — это трубки вокруг сингулярной орбиты, диффеоморфные сферическому расслоению:

$$G \times_{K^-} S^3 \rightarrow S^2 \times \{x_-\}.$$

Пусть J — G -инвариантный эндоморфизм на E . Так как $E = G \cdot V$, тензорное поле J определяется своим K^- -инвариантным ограничением на V .

$\text{Ad}(K^-)$ -инвариантное дополнение $\mathfrak{p}$ алгебры Ли $\mathfrak{k}^-$ в $\mathfrak{g}$ определяет G -инвариантное распределение $\mathcal{H}_g = dL_g \cdot \mathfrak{p}$, тем самым определяя G -инвариантную связность на векторном расслоении. Таким образом,

$$TE = \pi^* E \oplus \pi^*(T(S^2 \times \{p_-\})).$$

Над V получаем K^- -инвариантную тривиализацию

$$TE|V = V \times (V \oplus \mathfrak{p}).$$

Следовательно, G -инвариантный эндоморфизм J есть K^- -инвариантное гладкое отображение:

$$J : V \rightarrow \text{End}(V \oplus \mathfrak{p}).$$

Так как K^- действует транзитивно на $S^3 \subset V$, удобно перейти к полярным координатам $(t, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times S^3$:

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times S^3 \rightarrow V, \quad \phi(t, \sigma) = \phi_t(\sigma) = t\sigma,$$

что позволяет перейти к 1-параметрическому семейству K_- -эквивариантных отображений:

$$J_t = J \circ \phi_t : S^3 \rightarrow \text{End}(V \oplus \mathfrak{p}).$$

Обозначим пространство K^- -эквивариантных отображений через W . В силу эквивариантности J_t определяется своим значением $J_t(v_0) \in \text{End}(V \oplus \mathfrak{p})$ в произвольной фиксированной точке $v_0 \in S^3$. Это значение должно быть инвариантным относительно главной подгруппы изотропии K .

Надо решить обратную задачу. Пусть для всех $t \in \mathbb{R}_+$ заданы эндоморфизмы $J_t \in \text{End}(V \oplus \mathfrak{p})^K$. Определим

$$J : V \setminus \{0\} \rightarrow \text{End}(V \oplus \mathfrak{p})$$

по формуле $J(v) = J_{|v|}(\frac{v}{|v|})$. При каких условиях J имеет гладкое продолжение в нуле?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим подпространство $W_p \subset W$, состоящее из ограничений однородных многочленов порядка p , и $W^p = \sum_{k=0}^p W_p$. Степень полинома всегда может быть увеличен на 2, домножением на $|v|^2$. Однако поскольку $\bigcup_p W^p$ плотно в W и пространство W конечномерно, можно найти базис векторного пространства $\text{End}(V \oplus \mathfrak{p})^K$, в котором каждый элемент соответствует K^- -эквивариантному однородному полиному минимальной степени $p \geq 0$. Тогда согласно [22, лемма 1.1] кривая $J_t \in W$, определенная при $t \in [0, \infty)$, представляет гладкое сечение $J \in C^\infty(E, \text{End}(TE))$ если и только если коэффициенты J_p разложения в ряд Тейлора в нуле $J_t = \sum_{p \geq 0} J_p t^p$ принадлежат W_p .

Обозначим $\mathfrak{n}_1 = \text{Span}\{E_1, V_1\}$, $\mathfrak{n}_2 = \text{Span}\{E_2, V_2\}$, $\mathfrak{n}_1 \simeq \mathfrak{n}_2$. Тогда $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_1$ и $U(1)$ — представление $V = \mathbb{R}^2 \oplus \mathfrak{n}_2$. Согласно [7]

- 1) $\text{Id}_{\mathfrak{n}_1}$, $J_{\mathfrak{n}_1}$, $\text{Id}_{\mathbb{R}^2} + \text{Id}_{\mathfrak{n}_2}$, $J_{\mathbb{R}^2} + J_{\mathfrak{n}_2}$ соответствуют постоянным многочленам,
- 2) $\text{End}(\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j)^{\Delta U(1)}$, $i \neq j$, соответствуют многочленам первой степени,
- 3) $\text{Id}_{\mathbb{R}^2} - \text{Id}_{\mathfrak{n}_2}$, $J_{\mathbb{R}^2} - J_{\mathfrak{n}_2}$, $\text{Sym}_0^2(\mathbb{R}^2)$ соответствуют многочленам второй степени.

Найдем значения векторных полей U_-, E_1, V_1, E_2, V_2 вдоль кривой $\gamma(\varphi) = (i, \cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Пусть $x_t = (x_t^1, x_t^2)$, $x_0 = e$ — некоторая кривая на группе Ли G и

$$X_e = (X_1, X_2) = \left. \frac{dx_t}{dt} \right|_{t=0} \in \mathfrak{g}.$$

Тогда $X^*(\gamma(\varphi)) = (X_1 i - i X_1, \cos(\varphi)(X_1 - X_2), 0)$. Отождествим алгебру Ли $\mathfrak{su}(2)$ с алгеброй чисто мнимых кватернионов $H = \frac{1}{2}i$, $E = \frac{1}{2\sqrt{2}}j$, $V = \frac{1}{2\sqrt{2}}k$. Получаем

$$U_-^*(\gamma(\varphi)) = (0, i \cos(\varphi), 0), \quad E_1^*(\gamma(\varphi)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}k, \frac{1}{2\sqrt{2}}j \cos(\varphi), 0 \right),$$

$$V_1^*(\gamma(\varphi)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}j, \frac{1}{2\sqrt{2}}k \cos(\varphi), 0 \right),$$

$$E_2^*(\gamma(\varphi)) = \left(0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}j \cos(\varphi), 0 \right), \quad V_2^*(\gamma(\varphi)) = \left(0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}k \cos(\varphi), 0 \right).$$

Для того чтобы использовать информацию о порядке базисных полиномов, перейдем от координат на M_{reg} к координатам в окрестности сингулярной орбиты. В записи формы ω перейдем от базиса $e_1, v_1, d\varphi, u_-, e_2, v_2$ на T^*M_{reg} к базису $(e_1, v_1, dq_0, dq_1, dq_2, dq_3)$ в T^*E , где (q_0, q_1, q_2, q_3) — стандартные координаты в $V = \mathbb{H}$. Получаем $dq_0 = -\sin(\varphi)d\varphi$, $dq_1(U_-^*) = \cos(\varphi) = \cos(\varphi)U_-(U_-^*)$, следовательно, $dq_1 = \cos(\varphi)U_- = \frac{3}{2}\cos(\varphi)\eta$. Аналогично $2\sqrt{2}dq_2 = -\cos(\varphi)e_2$, $2\sqrt{2}dq_3 = -\cos(\varphi)v_2$.

Лемма 1. Пусть $\omega = \lambda\eta \wedge d\varphi + u_0\omega_0 + u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3$ — инвариантная 2-форма на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тогда

1) ω гладко продолжается на сингулярную орбиту G/K^- при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ если и только если

$$u_i \left(-\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = u_i \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \quad \lambda \left(-\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\lambda \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

для достаточно малых значений φ ,

$$u_2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0 = u_3 \left(-\frac{\pi}{2} \right), \quad u_0(\varphi) - u_1(\varphi) = -\dot{\lambda} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)^2 + O \left(\left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)^4 \right)$$

для $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$,

2) ω гладко продолжается на сингулярную орбиту G/K^+ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ если и только если в некоторой окрестности точки $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$u_i \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = u_i \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \quad \lambda \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\lambda \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

для достаточно малых значений φ ,

$$u_2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0 = u_3 \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad u_0(\varphi) - u_1(\varphi) = -\dot{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^2 + O \left(\left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^4 \right)$$

при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Доказательство. 2-Форма

$$\omega = \lambda\eta \wedge d\varphi + u_0\omega_0 + u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3$$

в координатах $(e_1, v_1, dq_0, dq_1, dq_2, dq_3)$ окрестности $-\frac{\pi}{2}$ принимает вид

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2\lambda}{3\sin(\varphi)\cos(\varphi)} dq_0 \wedge dq_1 + \frac{u_0 + u_1}{12} e_1 \wedge v_1 + \frac{2(u_0 - u_1)}{3\cos^2(\varphi)} dq_2 \wedge dq_3 \\ &\quad - \frac{\sqrt{2}u_2}{6\cos(\varphi)} (e_1 \wedge dq_3 + dq_2 \wedge v_1) - \frac{\sqrt{2}u_3}{6\cos(\varphi)} (e_1 \wedge dq_2 - dq_3 \wedge v_1) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{\sin(\varphi)\cos(\varphi)} + \frac{u_0 - u_1}{\cos^2(\varphi)} \right) (dq_0 \wedge dq_1 + dq_2 \wedge dq_3) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda}{\sin(\varphi)\cos(\varphi)} - \frac{u_0 - u_1}{\cos^2(\varphi)} \right) (dq_0 \wedge dq_1 - dq_2 \wedge dq_3) \\ &\quad + \frac{u_0 + u_1}{12} e_1 \wedge v_1 - \frac{\sqrt{2}u_2}{6\cos(\varphi)} (e_1 \wedge dq_3 + dq_2 \wedge v_1) - \frac{\sqrt{2}u_3}{6\cos(\varphi)} (e_1 \wedge dq_2 - dq_3 \wedge v_1).\end{aligned}$$

Формы $dq_0 \wedge dq_1 + dq_2 \wedge dq_3$ и $e_1 \wedge v_1$ относительно G -инвариантной метрики соответствуют постоянным многочленам $J_{\mathbb{R}^2} + J_{\mathbf{n}_2}$ и $J_{\mathbf{n}_1}$, формы $e_1 \wedge dq_3 + dq_2 \wedge v_1$ и $e_1 \wedge dq_2 - dq_3 \wedge v_1$ — многочленам первого порядка из $\text{End}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$, а форма $dq_0 \wedge dq_1 - dq_2 \wedge dq_3$ соответствует многочлену второго порядка $J_{\mathbb{R}^2} - J_{\mathbf{n}_2}$. Таким образом, для того чтобы форма ω имела гладкое продолжение при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, необходимо, чтобы при $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ было

$$\begin{aligned}\frac{u_0 + u_1}{12}, \frac{\lambda}{\sin(\varphi)\cos(\varphi)} + \frac{u_0 - u_1}{\cos^2(\varphi)} &\sim \text{const}, \\ \frac{u_2}{\cos(\varphi)}, \frac{u_3}{\cos(\varphi)} &\sim \frac{\pi}{2} + \varphi, \quad \frac{\lambda}{\sin(\varphi)\cos(\varphi)} - \frac{u_0 - u_1}{\cos^2(\varphi)} \sim \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)^2.\end{aligned}$$

Так как порядок многочлена может изменяться на степень, кратную двум, то

$$\begin{aligned}u_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= u_3\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ u_2\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) &= u_2\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad u_3\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = u_3\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\end{aligned}$$

при достаточно малых значениях φ . Аналогично

$$(u_0 + u_1)\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = (u_0 + u_1)\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Для выполнения первого и последнего условий $\frac{\lambda}{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}$ и $\frac{u_0 - u_1}{\cos^2(\varphi)}$ должны быть симметричны относительно $-\frac{\pi}{2}$ и определены при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, причем их значения в этой точке должны совпадать. Это возможно в том и только том случае, если при достаточно малых значениях φ

$$\begin{aligned}\lambda\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) &= -\lambda\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \quad (u_0 - u_1)\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = (u_0 - u_1)\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \\ (\ddot{u}_0 - \ddot{u}_1)\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -2\dot{\lambda}\left(-\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить условия в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

§ 8. Пример квази-кэлеровой структуры

Выпишем условия на форму ω , позволяющие определить почти комплексную структуру $J_{d\omega}$, согласованную с ω . Известно, что $SU(2)$ -структура $(\eta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ является Сасаки — Эйнштейновой если и только если

$$d\eta = -2\omega_1, \quad d\omega_2 = 3\eta \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = -3\eta \wedge \omega_2.$$

Лемма 2. Эндоморфизм $K_{d\omega}$ является $SU(2) \times SU(2)$ -инвариантным, причем

$$\begin{aligned} K_{d\omega}(\partial_\varphi) &= 3(\dot{u}_2 u_3 - \dot{u}_3 u_2) \partial_\varphi + (4\lambda^2 - 4\lambda \dot{u}_1 - \dot{u}_0^2 + \dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) \xi, \\ K_{d\omega}(\xi) &= -9(u_2^2 + u_3^2) \partial_\varphi + 3(u_2 \dot{u}_3 - u_3 \dot{u}_2) \xi, \\ K_{d\omega}(E_1) &= -3(u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3) V_1 - 3u_3(2\lambda - \dot{u}_0 - \dot{u}_1) E_2 - 3u_2(2\lambda - \dot{u}_0 - \dot{u}_1) V_2, \\ K_{d\omega}(V_1) &= 3(u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3) E_1 + 3u_2(2\lambda - \dot{u}_0 - \dot{u}_1) E_2 - 3u_3(2\lambda - \dot{u}_0 - \dot{u}_1) V_2, \\ K_{d\omega}(E_2) &= 3u_3(2\lambda + \dot{u}_0 - \dot{u}_1) E_1 - 3u_2(2\lambda + \dot{u}_0 - \dot{u}_1) V_1 + 3(u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3) V_2, \\ K_{d\omega}(V_2) &= 3u_2(2\lambda + \dot{u}_0 - \dot{u}_1) E_1 + 3u_3(2\lambda + \dot{u}_0 - \dot{u}_1) V_1 - 3(u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3) E_2, \end{aligned}$$

где ∂_φ — векторное поле, касательное к кривой $\gamma(\varphi)$, а ξ — векторное поле, дуальное форме η .

Для того чтобы получить квази-кэлерову структуру кооднородности один, во-первых, необходимо выполнение условия $\tau(d\omega) < 0$:

$$\tau(d\omega) = \frac{1}{6} \operatorname{tr} K_{d\omega}^2 = -9[(u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3)^2 + (u_2^2 + u_3^2)((2\lambda - \dot{u}_1)^2 - \dot{u}_0^2)] < 0.$$

Выполнение этого условия позволяет определить

$$J_{d\omega} = \frac{1}{\sqrt{-\tau}} K_{d\omega}.$$

Для квази-кэлеровости структуры $(\omega, J_{d\omega})$ необходимо и достаточно, чтобы п.к.с. $J_{d\omega}$ была положительно ассоциирована с формой ω :

$$\omega(J_{d\omega} \cdot, J_{d\omega} \cdot) = \omega(\cdot, \cdot), \quad \omega(\cdot, J_{d\omega} \cdot) > 0.$$

Теорема 1. Функции $\lambda = B \cos^3(\varphi)$, $u_0 = A \cos^4(\varphi) + \sin(\varphi)$, $u_1 = \sin(\varphi)$, $u_2 = 0$, $u_3^2 = -B \cos^4(\varphi) + A^2 \cos^8(\varphi) + 2A \cos^4(\varphi) \sin(\varphi)$ при $B \leq -2$, $A > 0$ и $-B \geq 4A$ определяют на $S^2 \times S^4$ квази-кэлерову структуру $(J_{d\omega}, \omega)$ кооднородности один.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно установить, что условие согласованности $\omega(J_{d\omega} \cdot, J_{d\omega} \cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$ эквивалентно условию $4\lambda u_1 = (-u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)'$.

Перепишем условие согласованности $4\lambda u_1 = (-u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)'$ в виде

$$u_2^2 + u_3^2 = 4 \int_{-\pi/2}^{\varphi} \lambda u_1 d\phi + u_0^2 - u_1^2 - u_0^2 \left(-\frac{\pi}{2}\right) + u_1^2 \left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Согласно условиям леммы 1 $(u_0 - u_1)(-\frac{\pi}{2}) = 0$, следовательно,

$$u_2^2 + u_3^2 = 4 \int_{-\pi/2}^{\varphi} \lambda u_1 d\phi + u_0^2 - u_1^2.$$

Будем искать u_0 , u_1 , u_2 и λ в следующем виде:

$$u_1 = \sin(\varphi), \quad u_0 = A \cos^4(\varphi) + \sin(\varphi), \quad \lambda = B \cos^3(\varphi), \quad u_2 = 0.$$

Условия леммы 1 для этих функций очевидным образом выполняются. Чтобы выполнить условие согласованности, определяем

$$u_3^2 = -B \cos^4(\varphi) + A^2 \cos^8(\varphi) + 2A \cos^4(\varphi) \sin(\varphi).$$

Если $B \leq -2$, $A > 0$ и $-B \geq 4A$, то этих условий достаточно для того, чтобы функция u_3 была корректно определена, $\tau(d\omega)$ было отрицательно и выполнялось условие на знак $\omega(\cdot, J_{d\omega} \cdot)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borel A., Serre J.-P. Détermination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1951. V. 233. P. 680–682.
2. Calabi E., Eckmann B. A class of compact, complex manifolds which are not algebraic // Ann. Math. 1953. V. 58, N 3. P. 494–500.
3. Datta B., Subramanian S. Nonexistence of almost complex structures on products of even-dimensional spheres // Topol. Appl. 1990. V. 36. P. 39–42.
4. Смоленцев Н. К. О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер // Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2004. Т. 151, № 4. С. 116–135.
5. Böhm C. Inhomogeneous Einstein metrics on low-dimensional spheres and other low-dimensional spaces // Invent. Math. 1998. V. 134, N 1. P. 145–176.
6. Grove K., Ziller W. Curvature and symmetry of Milnor spheres // Ann. Math. 2000. V. 152. P. 331–367.
7. Foscolo L., Haskins M. New G_2 -holonomy cones and exotic nearly Kähler structures on S^6 and $S^3 \times S^3$ // Ann. Math. 2017. V. 185, N 1. P. 59–130.
8. Bredon G. E. Introduction to compact transformation group. New York: Acad. Press, 1972.
9. Montgomery D., Samelson H. Transformation groups on spheres // Ann. Math. 1943. V. 44. P. 454–470.
10. Borel A. Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie // Ann. Math. 1953. V. 58. P. 443–457.
11. Poncet J. Groupes de Lie compacts de transformations de l'espace euclidien et les sphères comme espaces homogènes // Comment. Math. Helv. 1959. V. 33. P. 109–120.
12. Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. 1980. V. 123, N 1. P. 35–58.
13. Nagy N.-A. Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations // Asian J. Math. 2002. V. 3, N 6. P. 481–504.
14. Butruille J.-B. Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes // Ann. Global Anal. Geom. 2005. V. 27, N 3. P. 201–225.
15. Podestà F., Spiro A. Six-dimensional nearly Kähler manifolds of cohomogeneity one // J. Geom. Phys. 2010. V. 60, N 2. P. 156–164.
16. Podestà F., Spiro A. Six-dimensional nearly Kähler manifolds of cohomogeneity one. II // Comm. Math. Phys. 2012. V. 312, N 2. P. 477–500.
17. Salamon S. Almost parallel structures // Contemp. Math., Global Diff. Geom.: The Math. Legacy of A. Gray. 2001. V. 288. P. 162–181.
18. Hitchin N. Stable forms and special metrics // Contemp. Math., Global Diff. Geom.: The Math. Legacy of A. Gray. 2001. V. 288. P. 70–89.
19. Hoelscher C. A. Classification of cohomogeneity one manifolds in low dimensions // Pac. J. Math. 2010. V. 246, N 1. P. 129–186.
20. Hoelscher C. A. Diffeomorphism type of six-dimensional cohomogeneity one manifolds // Ann. Glob. Anal. Geom. 2010. V. 38, N 1. P. 1–9.
21. Conti D., Salamon S. Generalized Killing spinors in dimension 5 // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359, N 11. P. 5319–5343.
22. Eschenburg J.-H., Wang M. Y. The initial value problem for cohomogeneity one Einstein metrics // J. Geom. Anal. 2000. V. 10, N 1. P. 109–137.

Поступила в редакцию 17 октября 2019 г.

После доработки 20 января 2020 г.

Принята к публикации 19 февраля 2020 г.

Даурцева Наталия Александровна
 Кемеровский государственный университет,
 ул. Красная, 6, Кемерово 650000
 natali0112@ngs.ru