S. Z. Djamaalov, S. G. Pyatkov, On some boundary value problems for multidimensional higher order equations of mixed type, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 4, 777–795

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.405>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.172.240.79

April 26, 2023, 14:16:10

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

С. З. Джамалов, С. Г. Пятков

Аннотация. Описаны постановки краевых задач общего вида для многомерного уравнения смешанного типа высокого порядка. Приведен способ построения краевых условий, обеспечивающих коэрцитивность задачи. Доказывается обобщенная и регулярная разрешимость поставленных краевых задач в пространствах С. Л. Соболева.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.405

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальная краевая задача, краевая задача, обобщенное решение, регулярное решение, единственность решения, существование решения.

1. Введение

Рассматривается вопрос о разрешимости краевых задач для уравнения смешанного типа высокого порядка вида

$$Lu = Pu + Mu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где $G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ , $S = \Gamma \times (0, T)$,

$$Pu = \sum_{i=0}^{2n} k_i(x, t) u^{(i)}, \quad Mu = (-1)^m \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^\alpha (a_{\alpha, \beta}(x) D^\beta u), \quad u^{(i)} = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$U_i u = \sum_{j=0}^{2n-2} (\alpha_{i,j} u^{(j)}(0) + \beta_{i,j} u^{(j)}(T)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n-1, \quad (2)$$

$$B_j u|_S = \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j,\alpha}(x) D^\alpha u|_S = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

В работах М. А. Лаврентьева, И. Н. Векуа, С. А. Христиановича, С. А. Чаплыгина, К. Г. Гудерля и др. отмечена важность изучения краевых задач для уравнений смешанного типа в связи с задачами, возникающими в трансзвуковой газовой динамике, в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака и во многих прикладных задачах механики. В исследованиях Фикеры,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-51-41009).

О. А. Олейник, Е. В. Радкевича и ряда других авторов (см. библиографию в [1]) предложены новые подходы и методы для построения единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений. В. Н. Враговым [2, 3] начато построение общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков с произвольным многообразием изменения типа, в частности, для гиперболо-параболических уравнений. Довольно много работ посвящено краевым задачам для уравнений смешанного типа второго порядка (см. [4–11]). Работ, посвященных уравнениям высокого порядка, не так много. Опишем известные результаты. Сошлемся прежде всего на [12], где изучаются краевые задачи для уравнения (1) с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \Big|_S = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad u^{(i)}(0, x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \\ u^{(i)}(T, x) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad u^{(n)}|_{P_0^+} = 0, \quad u^{(n)}|_{P_T^-} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \Big|_S = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad u^{(i)}(0, x) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \\ u^{(i)}(T, x) = 0, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad u^{(n-1)}|_{P_0^+} = 0, \quad u^{(n)}|_{P_T^-} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $P_0^+ = \{(x, 0) : (-1)^{n-1}k_{2n}(x, 0) > 0\}$, $P_T^- = \{(x, 0) : (-1)^{n-1}k_{2n}(x, 0) < 0\}$. В [12] предполагается, что оператор M положительно определен. При выполнении естественных условий на коэффициенты получены теоремы существования и единственности обобщенных решений задачи (1), (4) класса $L_2(0, T; W_2^m(G)) \cap W_2^n(0, T; L_2(G))$. В случаях, когда $k_i = k_i(t)$ для всех i , $k_{2n}(0), k_{2n}(T) \neq 0$ и $f \in W_2^1(0, T; L_2(G))$, $f(T, x) = 0$, доказано существование решений этой задачи из класса $L_2(0, T; W_2^{2m}(G)) \cap W_2^{2n}(0, T; L_2(G))$. Для задачи (1), (5) аналогично доказываются существование и единственность обобщенных решений, в некоторых случаях получена теорема существования регулярных решений, точнее, при условии $(-1)^{n-1}k_{2n}(0, x) > 0$, $(-1)^{n-1}k_{2n}(T, x) > 0$ в G . В этом случае рассмотрен вопрос и о повышении гладкости решений. Широкий класс локальных краевых условий, входящих в класс (2), рассмотрен в [12] при естественных условиях и предположении, что $k_{2n} = k_{2n}(t)$, $k_{2n-1} = k_{2n-1}(t)$ и величины $k_{2n}(0)$, $k_{2n}(T)$ одного знака. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений. В данной работе исследуются вопросы существования и единственности решений краевых задач (1)–(3) при других условиях на коэффициент k_{2n} , предполагая, что функции $k_{2n}(0, x)$ и $k_{2n}(T, x)$ разных знаков. Также в отличие от работ других авторов класс рассматриваемых краевых задач уже является довольно широким, в частности, он содержит задачи с нелокальными условиями по времени (см. [13]), например, периодические краевые задачи. Кроме того, описан способ построения коэрцитивных краевых условий для обыкновенных дифференциальных операторов нечетного порядка, полученные результаты применяются для исследования вопросов существования и единственности решений задач (1)–(3). Отметим, что в случае дифференциальных операторов четного порядка и для более общих классов операторов — эллиптических дифференциальных операторов — коэрцитивные краевые условия и способ их построения описаны (см., например, [14, гл. 2, § 9.4]).

2. Вспомогательные результаты

Положим

$$\langle u, v \rangle = \int_G u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (u, v)_0 = \int_0^T u(t) \overline{v(t)} dt, \quad (u, v) = \int_Q u(x, t) \overline{v(x, t)} dx dt.$$

Нормы в $L_2(0, T)$ и $L_2(Q)$ обозначаются через $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|$. Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначим пространство сильно измеримых функций, определенных на G , со значениями в E и конечной нормой $\|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [15]. Определение пространств Соболева $W_p^s(G; E)$ также стандартное (см. [15–17]). Пусть $D(M) = \{u \in W_2^{2m}(G) : B_j u|_\Gamma = 0, j = 1, 2, \dots, m\}$. Далее предполагаем, что

(А) $\Gamma \in C^{2m}$, оператор M самосопряжен в $L_2(G)$ и найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что $\langle Mu + \lambda_0 u, u \rangle \geq \delta \|u\|_{W_2^m(G)}^2$ для всех $u \in D(M)$, где $\delta > 0$ — некоторая постоянная. Считаем, что выполнены условия

$$a_{\alpha, \beta} \in C(\overline{G}) \quad (|\alpha| = |\beta| = m), \quad a_{\alpha, \beta} \in W_\infty^{|\alpha|}(G) \quad (|\alpha| + |\beta| \leq 2m); \quad (6)$$

$$b_{j, \alpha}(x) \in C^{2m-m_j}(\Gamma) \quad (|\alpha| \leq m_j, j = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

Пусть k_j — порядок граничного оператора U_j . Без ограничения общности считаем, что $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{2n-1} < 2n - 1$, причем $k_j < k_{j+2}$ для всех j , иначе проведем процедуру нормировки краевых условий (см. [18, гл. 2, § 4, п. 7]). Далее предполагаем, что векторы $\vec{R}_i = (\alpha_{i,0}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,2n-2}, \beta_{i,0}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,2n-2})$, $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$, отвечающие граничным операторам (2), линейно независимы. Выделим граничные условия U_j с $k_j \leq n - 1$. Пусть это будут условия $U_1, \dots, U_p$.

Рассмотрим произвольный оператор $P_0 u = \sum_{i=0}^{2n-1} b_i(t) u^{(i)}$ и опишем условия его коэрцитивности, т. е. условия существования постоянных $\delta_0 > 0$, λ_0 таких, что

$$\operatorname{Re}(P_0 u + \lambda_0 u, u)_0 \geq \delta_0 \|u\|_{W_2^{n-1}(0, T)}^2 \quad (8)$$

для всех u из $D(P_0)$, области определения P_0 , состоящей из функций, принадлежащих $W_2^{2n-1}(0, T)$ и удовлетворяющих (2). Пусть выполнены условия

$$b_i \in W_2^{i-n+1}(0, T), \quad i \geq n, \quad b_i \in W_2^1(0, T), \quad i < n, \quad k_p = n - 1, \quad k_{p-1} < n - 1; \quad (9)$$

существует постоянная $\delta_1 > 0$ такая, что

$$(-1)^n (b'_{2n-1}(t)(n - 1/2) - b_{2n-2}(t)) \geq \delta_1, \quad |b_{2n-1}(t)| \geq \delta_1 \quad \forall t \in [0, T] \quad (10)$$

и коэффициенты b_{2n-1} , b_{2n-2} вещественны. При выполнении условия (9) для главной части U_{0p} граничного оператора U_p имеем три возможности:

- (а) $U_{0p} u = \alpha_{p, n-1} u^{(n-1)}(0)$, $\alpha_{p, n-1} \neq 0$ и $\beta_{p, n-1} = 0$;
- (б) $U_{0p} u = \beta_{p, n-1} u^{(n-1)}(T)$, $\beta_{p, n-1} \neq 0$ и $\alpha_{p, n-1} = 0$;
- (с) $U_{0p} u = \alpha_{p, n-1} u^{(n-1)}(0) + \beta_{p, n-1} u^{(n-1)}(T)$, причем $\alpha_{p, n-1} \beta_{p, n-1} \neq 0$.

В первых двух случаях соответственно предположим, что на $(0, T)$

$$(a) \quad (-1)^{n-1} b_{2n-1}(t) > 0, \quad (b) \quad (-1)^{n-1} b_{2n-1}(t) < 0, \quad (11)$$

и в третьем случае предположим, что

$$(c) \quad (-1)^{n-1} (b_{2n-1}(T) - \alpha^2 b_{2n-1}(0)) > 0, \quad \alpha = \beta_{p, n-1} / \alpha_{p, n-1}. \quad (12)$$

Дополним набор $R_1, \dots, R_p$ векторами $\vec{R}'_i = (\alpha'_{i,0}, \alpha'_{i,1}, \dots, \alpha'_{i,n-1}, \beta'_{i,0}, \beta'_{i,1}, \dots, \beta'_{i,n-1})$, $i = p+1, p+2, \dots, 2n$, так, чтобы система $R_1, R_2, \dots, R_p, R'_{p+1}, \dots, R'_{2n}$ была линейно независимой и выполнены условия: система операторов $U_1, U_2, \dots, U_p, U'_{p+1}, \dots, U'_{2n}$ (U'_j — граничные операторы, отвечающие векторам R'_j) нормирована (см. [18, гл. 2, § 4, п. 7]) и $\text{ord } U'_j \leq n-1$ для всех j . В этом случае порядки граничных операторов пробегают множество $0, 1, \dots, n-1$ и имеется ровно два оператора одного порядка. Среди этих новых операторов обязательно найдется оператор порядка $n-1$ в силу условия (9). Без ограничения общности считаем, что это U'_{p+1} . Пусть строки матрицы B (начиная с верхней строчки) суть векторы этой системы. Рассмотрим систему уравнений

$$B\vec{y} = U, \quad U = (U_1, U_2, \dots, U_p, U'_{p+1}, \dots, U'_{2n})^T$$

и найдем ее решение $\vec{y} = (y_1, \dots, y_{2n})$. Для $v(t) \in W_2^{2n-1}(0, T)$ положим $v^{(i)}(0) = y_{i+1}$, $v^{(i)}(T) = y_{i+n+1}$ ($i \leq n-1$). Таким образом, получили представления вида

$$\begin{aligned} v^{(i)}(0) &= \sum_{j=1}^p \gamma_{i,j} U_j v + \sum_{j=p+1}^{2n} \gamma_{i,j} U'_j v, \\ v^{(i)}(T) &= \sum_{j=1}^p \gamma_{i+n+1,j} U_j v + \sum_{j=p+1}^{2n} \gamma_{i,j+n+1} U'_j v, \end{aligned} \quad (13)$$

где $i = 0, 1, \dots, n-1$ и $\gamma_{i,j}$ — элементы матрицы B^{-1} . Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} (P_0 u, v)_0 &= \sum_{i=0}^{2n-1} (b_i u^{(i)}, v)_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i u^{(i)}, v)_0 \\ &\quad + \sum_{i=n}^{2n-1} (u^{(n-1)}, (\bar{b}_i v)^{(i-n+1)})_0 (-1)^{i-n+1} \\ &\quad + \sum_{i=n}^{2n-1} \sum_{k=1}^{i-n+1} (-1)^{k-1} u^{(i-k)} (b_i \bar{v})^{(k-1)} \Big|_0^T = a_0(u, v) + a_1(u, v). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя представления (13) в последнем слагаемом $a_1(u, v)$ и приводя подобные, получим, что

$$a_1(u, v) = \sum_{i=1}^p F_i u \overline{U_i v} + \sum_{i=1+p}^{2n} F_i u \overline{U'_i v}, \quad (15)$$

где выражения $F_i u$ имеют такой же вид, что и граничные операторы $U_j u$, но, конечно, с другими числами $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$. Из равенства (14) легко увидеть, что выполнено равенство $\text{ord } F_j = 2n-2 - \text{ord } U'_j$, $j = p+1, \dots, 2n$, $\text{ord } F_j = 2n-2 - \text{ord } U_j$, $j = 1, \dots, p$. Приведем последнее условие, гарантирующее коэрцитивность оператора P_0 при выполнении условий (9)–(12).

(В) Существуют граничные операторы U'_j , $j = p+1, \dots, 2n$, $\text{ord } U'_j \leq n-1$, такие, что векторы $R_1, R_2, \dots, R_p, R'_{p+1}, \dots, R'_{2n}$ из коэффициентов этих операторов линейно независимы, система граничных операторов $U_1, U_2, \dots, U_p, U'_{p+1}, \dots, U'_{2n}$ (U'_j — граничные операторы, отвечающие векторам R'_j) нормирована и

справедливо представление

$$\begin{aligned} (P_0 u, v)_0 &= \sum_{i=0}^{2n-1} (b_i u^{(i)}, v)_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (b_i u^{(i)}, v)_0 + \sum_{i=n}^{2n-1} (u^{(n-1)}, (\bar{b}_i v)^{(i-n+1)})_0 (-1)^{i-n+1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^p F_i \overline{u \bar{U}_i v} + F_{p+1} \overline{u \bar{U}'_{p+1} v} + \sum_{i=2+p}^{2n} U_{i-1} \overline{u \bar{U}'_i v} \quad (16) \end{aligned}$$

для всех $u, v \in W_2^{2n-1}(0, T)$.

Условие (B) гарантирует, что для всех $u, v \in D(P_0)$ имеет место равенство

$$(P_0 u, v)_0 = \sum_{i=0}^{n-1} (b_i u^{(i)}, v)_0 + \sum_{i=n}^{2n-1} (u^{(n-1)}, (\bar{b}_i v)^{(i-n+1)})_0 (-1)^{i-n+1} + F_{p+1} \overline{u \bar{U}'_{p+1} v}. \quad (17)$$

Опишем слагаемое $F_p \overline{u \bar{U}_p v} + F_{p+1} \overline{u \bar{U}'_{p+1} v}$, входящее в (16). Сравнивая (14), (16) для функций $u, v \in W_2^{2n-1}(0, T)$ таких, что

$$u^{(i)}(0) = u^{(i)}(T) = v^{(i)}(0) = v^{(i)}(T) = 0 \quad \text{при } i \leq n-2,$$

получим, что для таких функций

$$F_p \overline{u \bar{U}_p v} + F_{p+1} \overline{u \bar{U}'_{p+1} v} = (-1)^{n-1} b_{2n-1} u^{(n-1)} v^{(n-1)} \Big|_0^T. \quad (18)$$

В силу произвольности величин $u^{(n-1)}(0), u^{(n-1)}(T), v^{(n-1)}(0), v^{(n-1)}(T)$ заключаем, что главная часть выражения $F_p \overline{u \bar{U}_p v} + F_{p+1} \overline{u \bar{U}'_{p+1} v}$, т. е. слагаемые, содержащие произведения $u^{(n-1)}(0) \overline{v^{(n-1)}(0)}$, $u^{(n-1)}(0) \overline{v^{(n-1)}(T)}$, $u^{(n-1)}(T) \overline{v^{(n-1)}(0)}$, $u^{(n-1)}(T) \overline{v^{(n-1)}(T)}$, совпадает с правой частью в (18). Таким образом, имеем представление

$$F_p \overline{u \bar{U}_p v} + F_{p+1} \overline{u \bar{U}'_{p+1} v} = (-1)^{n-1} b_{2n-1} u^{(n-1)} \overline{v^{(n-1)}} \Big|_0^T + \sum_{i=1}^4 \tilde{F}_i u \tilde{\bar{U}}_i v, \quad (19)$$

где $\tilde{F}_i, \tilde{U}_i$ — граничные операторы такие, что

$$\text{ord } \tilde{F}_i + \text{ord } \tilde{U}_i < 2n-2, \quad \text{ord } \tilde{F}_i \leq n-1, \quad \text{ord } \tilde{U}_i \leq n-1.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (9)–(12), (B). Тогда оператор P_0 коэрцитивен и найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для любой функции $f \in L_2(0, T)$ и $\lambda \geq \lambda_0$ существует единственное решение $u \in W_2^{2n-1}(0, T)$ задачи

$$P_0 u + \lambda u = f, \quad U_i u = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n-1. \quad (20)$$

Если дополнительно $f \in W_2^1(0, T)$, то $u \in W_2^{2n}(0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u \in D(P_0)$ имеем (см. (17))

$$\begin{aligned} (P_0 u, u)_0 + (\lambda u, u)_0 &= \sum_{i=n}^{2n-1} (u^{(n-1)}, (\bar{b}_i u)^{(i-n+1)})_0 (-1)^{i-n+1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i u^{(i)}, u)_0 + F_{p+1} \overline{u \bar{U}'_{p+1} u} + \lambda_0 \|u\|_0^2. \quad (21) \end{aligned}$$

Выпишем слагаемые со старшими производными в (21):

$$\begin{aligned} J &= (-1)^n (u^{(n-1)}, (b_{2n-1}u)^{(n)})_0 - (u^{(n-1)}, (b_{2n-2}u)^{(n-1)})_0 \\ &= (-1)^n \operatorname{Re}[(u^{(n-1)}, b_{2n-1}u^{(n)} + nb'_{2n-1}u^{(n-1)} + \dots)_0 - (u^{(n-1)}, u^{(n-1)}b_{2n-2} + \dots)_0], \end{aligned} \quad (22)$$

где точки обозначают слагаемые, содержащие производные порядка не больше $n-2$. Отсюда

$$\begin{aligned} (-1)^n \operatorname{Re} J &= \operatorname{Re} \left(u^{(n-1)}, \left(b'_{2n-1} \left(n - \frac{1}{2} \right) - b_{2n-2} \right) u^{(n-1)} + P_{n-2}u \right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} |u^{(n-1)}|^2 b_{2n-1} \Big|_0^T, \end{aligned} \quad (23)$$

где P_{n-2} — дифференциальный оператор порядка не больше чем $n-2$. Из (10) имеем неравенство

$$\operatorname{Re} J \geq \delta_1 \|u^{(n-1)}\|_0^2 - |(u^{(n-1)}, P_{n-2}u)_0| + \frac{(-1)^n}{2} |u^{(n-1)}|^2 b_{2n-1} \Big|_0^T. \quad (24)$$

Рассмотрим граничные слагаемые в (21). Используя (19), получим

$$\begin{aligned} F_{p+1}u\overline{U'_{p+1}u} &= F_{p+1}u\overline{U'_{p+1}u} + F_p u\overline{U_p u} \\ &= (-1)^{n-1} b_{2n-1} |u^{(n-1)}|^2 \Big|_0^T + \sum_{i=1}^4 \tilde{F}_i u \overline{\tilde{U}_i u}. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя (21), (24) и (25), имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= \operatorname{Re}[(P_0 u, u)_0 + (\lambda u, u)_0] \geq \operatorname{Re} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (b_i u^{(i)}, u)_0 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=n}^{2n-3} (u^{(n-1)}, (\bar{b}_i u)^{(i-n+1)})_0 (-1)^{i-n+1} \right] - |(u^{(n-1)}, P_{n-2}u)_0| \\ &\quad + \delta_1 \|u^{(n-1)}\|_0^2 + \frac{(-1)^{n-1}}{2} |u^{(n-1)}|^2 b_{2n-1} \Big|_0^T + \sum_{i=1}^4 \tilde{F}_i u \overline{\tilde{U}_i u} + \lambda \|u\|_0^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражения вида $(u^{(n-1)}, \bar{b}_i^{(l)} u^{(k)})_0$, $k < n-1$, $i \geq n$, $(u^{(i)} b_i, u)$, входящие в первое и второе слагаемые, оцениваются одинаково. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$|(u^{(n-1)}, \bar{b}_i^{(l)} u^{(k)})_0| \leq \|u^{(n-1)}\|_0 \|\bar{b}_i^{(l)} u^{(k)}\|_0.$$

Последний множитель оцениваем через $\|\bar{b}_i^{(l)}\|_0 \|u^{(k)}\|_{L_\infty(0,T)}$. В силу вложения $W_2^s(0,T) \subset L_\infty(0,T)$ при $s > 1/2$ [15, теорема 4.6.1] последняя норма оценивается через $c\|u\|_{W_2^{s+n-2}(0,T)}$, $s \in (1/2, 1)$, фиксировано. Таким образом,

$$|(u^{(n-1)}, \bar{b}_i^{(l)} u^{(k)})_0| \leq c_0 \|u^{(n-1)}\|_0 \|u\|_{W_2^{s+n-2}(0,T)}.$$

Используя интерполяционное неравенство вида [15]

$$\|u\|_{W_2^{s+n-2}(0,T)} \leq c \|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^\theta \|u\|_0^{1-\theta}, \quad \theta(n-1) = s + n - 2, \quad (27)$$

получим

$$|(u^{(n-1)}, \bar{b}_i^{(l)} u^{(k)})_0| \leq c_1 \|u\|_0^{1-\theta} \|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^{1+\theta}. \quad (28)$$

Оставшиеся слагаемые $(u^{(i)} b_i, u)$ также допускают оценку

$$|(u^{(i)} b_i, u)_0| \leq c_2 \|u\|_0^{1-\theta} \|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^{1+\theta}.$$

Тогда неравенство (26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} J_2 \geq & \delta_1 \|u^{(n-1)}\|_0^2 - c_3 \|u\|_0^{1-\theta} \|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^{1+\theta} \\ & + \frac{(-1)^{n-1}}{2} |u^{(n-1)}|^2 b_{2n-1} \Big|_0^T + \operatorname{Re} \sum_{i=1}^4 \tilde{F}_i u \overline{\tilde{U}_i u} + \lambda \|u\|_0^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим случай (а) (см. (11)). Тогда $U_{0p}u = \alpha_{p,n-1}u^{(n-1)}(0)$ и равенство $U_p u = 0$ переписывается в виде

$$u^{(n-1)}(0) = \sum_{j=0}^{n-2} (\tilde{\alpha}_{i,j} u^{(j)}(0) + \tilde{\beta}_{i,j} u^{(j)}(T)).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{n-1} b_{2n-1}}{2} |u^{(n-1)}|^2 \Big|_0^T & \geq \frac{(-1)^{n-1} b_{2n-1}(T)}{2} |u^{(n-1)}(T)|^2 \\ & - c_2 \sum_{j=0}^{n-2} (|u^{(j)}(0)|^2 + |u^{(j)}(T)|^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^4 \tilde{F}_i u \overline{\tilde{U}_i u} & \geq -c_3 |u^{(n-1)}(T)| \sum_{j=0}^{n-2} (|u^{(j)}(0)| + |u^{(j)}(T)|) \\ & - c_4 \sum_{j=0}^{n-2} (|u^{(j)}(0)|^2 + |u^{(j)}(T)|^2). \end{aligned} \quad (31)$$

Окончательно

$$\begin{aligned} J_4 = & \frac{(-1)^{n-1}}{2} |u^{(n-1)}|^2 b_{2n-1} \Big|_0^T + \operatorname{Re} \sum_{i=1}^4 \tilde{F}_i u \overline{\tilde{U}_i u} \geq \frac{(-1)^{n-1}}{2} b_{2n-1}(T) |u^{(n-1)}(T)|^2 \\ & - c_3 |u^{(n-1)}(T)| \sum_{j=0}^{n-2} (|u^{(j)}(0)| + |u^{(j)}(T)|) - c_4 \sum_{j=0}^{n-2} (|u^{(j)}(0)|^2 + |u^{(j)}(T)|^2). \end{aligned}$$

Далее используем неравенство

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p/p + |b|^q \varepsilon^{-q/p}/q, \quad 1/p + 1/q = 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (32)$$

Отсюда

$$J_4 \geq \frac{\delta_1}{2} |u^{(n-1)}(T)|^2 - \varepsilon |u^{(n-1)}(T)|^2 - c(\varepsilon) \sum_{j=0}^{n-2} (|u^{(j)}(0)|^2 + |u^{(j)}(T)|^2).$$

Как и выше, используя теоремы вложения, неравенства (27) и (32), получим

$$J_4 \geq \frac{\delta_1}{2} |u^{(n-1)}(T)|^2 - \varepsilon |u^{(n-1)}(T)|^2 - \varepsilon_1 \|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^2 - c(\varepsilon, \varepsilon_1) \|u\|_0^2. \quad (33)$$

Используя (33) в (29) вместе с неравенством (32), имеем

$$J_2 \geq \delta_1 \|u^{(n-1)}\|_0^2 + \frac{\delta_1}{2} |u^{(n-1)}(T)|^2 + \lambda \|u\|_0^2 - \varepsilon |u^{(n-1)}(T)|^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^2 - c(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \|u\|_0^2.$$

Не умаляя общности, считаем, что вместо стандартной нормы в $W_2^{n-1}(0, T)$ в предыдущем неравенстве используется эквивалентная норма $(\|u^{(n-1)}\|_0^2 + \|u\|_0^2)^{1/2}$. Выбрав малые параметры $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ и достаточно большой параметр λ_0 , для $\lambda \geq \lambda_0$ получим неравенство

$$J_2 \geq \delta_2 (\|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^2 + |u^{(n-1)}(T)|^2 + \lambda \|u\|_0^2),$$

которое гарантирует утверждение в случае (а). Здесь постоянная $\delta_2 > 0$ не зависит от u . Рассмотрение остальных случаев проходит совершенно аналогично, и их опустим. Приведем лишь предыдущую оценку в этих случаях. В случае (b) имеем

$$\operatorname{Re}[(P_0 u, u)_0 + (\lambda_0 u, u)_0] \geq \delta_2 (\|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^2 + |u^{(n-1)}(0)|^2 + \lambda \|u\|_0^2),$$

а в случае (с) —

$$\operatorname{Re}[(P_0 u, u)_0 + (\lambda_0 u, u)_0] \geq \delta_2 (\|u\|_{W_2^{n-1}(0,T)}^2 + |u^{(n-1)}(0)|^2 + |u^{(n-1)}(T)|^2 + \lambda \|u\|_0^2),$$

Существование решений вытекает из известных результатов (см. [18]). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В некоторых случаях утверждение может быть доказано лишь при выполнении условия

$$(-1)^{n-1} (b_{2n-1}(T) - \alpha^2 b_{2n-1}(0)) \geq 0, \quad \alpha = \beta_{p,n-1} / \alpha_{p,n-1}. \quad (34)$$

Например, это будет иметь место при условии, что $U_p u = u^{(n-1)}(0) - \alpha u^{(n-1)}(T) = 0$ и предпоследнее слагаемое в (26) не содержит производных порядка $n-1$.

Приведем примеры коэрцитивных краевых условий.

Нелокальная задача. Рассмотрим условия

$$u^{(i)}(0) = \alpha u^{(i)}(T), \quad i = 0, 1, \dots, 2n-2, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$P_{2n-1} u = \sum_{i=0}^{2n-1} b_i(t) u^{(i)}.$$

Утверждение теоремы 1 будет выполнено при выполнении условий (9), (10) и условий типа периодичности

$$b_i^{(k)}(T) = \alpha^2 b_i^{(k)}(0), \quad i \geq n, \quad k \leq i - n + 1.$$

В этом случае находимся в условиях предыдущего замечания и выражение (34) обращается в нуль. Естественно, такие операторы P_0 существуют, например, можем взять

$$b_{2n-1} = e^{\gamma t}, \quad \gamma = \frac{2}{T} \ln |\alpha|, \quad b_{2n-2} = e^{\gamma t} ((-1)^{n-1} + \gamma(n-1/2)),$$

$b_i = 0$ при $i < 2n - 2$.

Задача Дирихле. $u^{(i)}(0) = u^{(i)}(T) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$; $u^{(n-1)}(0) = 0$, если $(-1)^{n-1}b_{2n-1}(T) > 0$; $u^{(n-1)}(T) = 0$, если $(-1)^{n-1}b_{2n-1}(T) < 0$. В качестве оператора P_{2n-1} можно взять оператор вида

$$P_{2n-1}u = \sum_{i=0}^{2n-1} b_i(t)u^{(i)},$$

удовлетворяющий условиям (9), (10).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (9)–(12) для оператора

$$P_0u = \sum_{i=0}^{2n-1} b_iu^{(i)}$$

и нормированного набора граничных операторов U_j , $j = 1, 2, \dots, p$, порядков $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_p \leq n - 1$, причем соответствующие векторы R_i , $j = 1, 2, \dots, p$, из коэффициентов операторов линейно независимы. Тогда найдутся граничные операторы $U_{p+1}, \dots, U_{2n-1}$ такие, что оператор P_0 с $D(P_0) = \{u \in W_2^{2n-1}(0, T) : U_ju = 0, j = 1, 2, \dots, 2n-1\}$ коэрцитивен и справедливо утверждение теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения, приведенные перед теоремой 1, получим формулы (14), (15). Положим $U_i = F_{i+1}$, $i = p + 1, \dots, 2n - 1$. Легко видеть, что для нового набора граничных операторов U_i , $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$, будет выполнено условие (B). Далее применим теорему 1.

Теорема 2 определяет способ построения коэрцитивных граничных условий.

3. Основные результаты

Вместо уравнения (1) будем рассматривать уравнение с параметром вида

$$Lu = Pu + Mu + lu + \lambda u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T), \quad (35)$$

где λ — вещественный параметр,

$$P = k_{2n}(x, t)u^{(2n)} + k_{2n-1}(x, t)u^{(2n-1)},$$

l — оператор вида

$$lu = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{|\alpha| < m} k_{i,\alpha}(x, t) D^\alpha u^{(i)} + \sum_{i=n}^{2n-2} \sum_{|\alpha| < m(1-(i-n+1)/n)} k_{i,\alpha}(x, t) D^\alpha u^{(i)}.$$

Пусть выполнены условия

$$k_{i,\alpha}(x, t) \in L_\infty(0, T; L_{p_i}(G)), \quad p_i > n/(m - |\alpha|) \quad \text{при } i < n, \quad (36)$$

$$p_i > n/(m(1 - (i - n + 1)/n) - |\alpha|) \quad \text{при } i \geq n, \quad k_{2n-1}, k_{2n}, \partial_t k_{2n} \in L_\infty(Q). \quad (37)$$

Далее без ограничения общности считаем, что M положительно определен, иначе заменим M в (35) на $M + \lambda_0$. Определены операторы M^s ($s \in \mathbb{R}$). При наших предположениях на Γ и граничные операторы B_j (следствие равенства $D(M^s) = (D(M), L_2(G))_{1-s, 2}$, см. [15, п. 1.18.2] и описания пространства

$(D(M), L_2(G))_{\theta, 2}$ в [19, теорема 8.1; 20, теорема 7.5], см. также [15, п. 4.3.3]) имеем

$$D(M^s) = \left\{ u \in W_2^{2ms}(G) : B_j u|_{\Gamma} = 0 \text{ для всех } j \text{ с } m_j < 2ms - 1/2, \right. \\ \left. \int_G \frac{1}{\rho} |B_j u|^2 dx < \infty \text{ при } m_j = 2ms - 1/2 \right\}, \quad \rho(x) = \text{dist}(x, \Gamma).$$

Будем также использовать равенство (следствие равенств (6.8), (6.9) в [20])

$$(W_2^s(0, T; L_2(G)), L_2(0, T; W_2^r(G)))_{\theta, 2} = W_2^{s(1-\theta)}(0, T; W_2^{r\theta}(G)), \quad \theta \in (0, 1). \quad (38)$$

Положим $D(M^s) = \widetilde{W}_2^{2ms}(G)$. Негативное пространство, построенное по $\widetilde{W}_2^s(G)$ и $L_2(G)$, обозначаем через $\widetilde{W}_2^{-s}(G)$ ($s > 0$). Предположим, что выполнено условие

(C) Найдется дифференциальный оператор

$$P_0 u = \sum_{i=0}^{2n-1} b_i u^{(i)}$$

такой, что

$$D(P_0) = \{u \in W_2^{2n-1}(0, T) : U_j u = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n-1\},$$

выполнены условия (9)–(12), (B) теоремы 1, коэффициенты k_{2n}, k_{2n-1} вещественны, $k_{2n} b_{2n-1}(T, x) \geq 0$, $k_{2n} b_{2n-1}(0, x) \leq 0$ в G и найдется постоянная $\delta_2 > 0$ такая, что

$$k_{2n-1} b_{2n-1} - \frac{1}{2} (k_{2n} b_{2n-1})_t - k_{2n} b_{2n-2} \geq \delta_2 > 0, \quad |b_{2n-1}| \geq \delta_2 \quad \forall (x, t) \in Q.$$

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия (A), (C), (6), (7), (36), (37) и $f \in L_2(Q)$. Тогда найдется $\lambda_1 \geq 0$ такой, что при $\lambda \geq \lambda_1$ существует решение задачи (35), (2), (3) такое, что

$$u \in L_2(0, T; \widetilde{W}_2^{(1-1/2n)2m}(G)) \cap W_2^{2n-1}(0, T; L_2(G)).$$

Доказательство. Воспользуемся утверждением теоремы 1. Возьмем базис $\psi_j(t)$ в пространстве $W_2^1(0, T)$ и базис $\{\omega_i\}$ в пространстве $\widetilde{W}_2^{2m}(G)$ из собственных функций оператора M , нормированных в $L_2(G)$. Тогда система $\{\psi_j \omega_i\}$ — базис в пространстве $W_2^1(0, T; L_2(G)) \cap L_2(0, T; \widetilde{W}_2^{2m}(G))$. Рассматривая оператор $P_0 + \lambda_0$ вместо оператора P_0 , если необходимо, без ограничения общности считаем, что выполнено неравенство (8) в случае $\lambda_0 = 0$ и справедливо утверждение теоремы 1 при $\lambda_0 = 0$.

Построим функции $\varphi_j(t)$ как решение уравнения $P_0 \varphi_j = \psi_j$, удовлетворяющее краевым условиям (2). Ищем приближенное решение нашей задачи в виде

$$u^N = \sum_{i,j=1}^N c_{i,j} \varphi_j \omega_i,$$

где постоянные $c_{i,j}$ определяем из системы уравнений

$$(Lu_N, \psi_j \omega_i) = (f, \psi_j \omega_i), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (39)$$

Покажем разрешимость этой системы при подходящих λ . Умножим (39) на $c_{i,j}$ и просуммируем результат по i, j . Получим равенство

$$(Lu_N, P_0u_N) = (f, P_0u_N). \quad (40)$$

В силу теоремы 1 (считаем, что $\lambda > 0$) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Mu_N + \lambda u_N, P_0u_N) &= \operatorname{Re}(M^{1/2}u_N, P_0M^{1/2}u_N) + \lambda \operatorname{Re}(u_N, P_0u_N) \\ &\geq \delta_1 (\|u_N\|_{W_2^{n-1}(0,T;W_2^m(G))}^2 + \lambda \|u_N\|_{W_2^{n-1}(0,T;L_2(G))}^2), \end{aligned} \quad (41)$$

где δ_1 — некоторая положительная постоянная. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Pu_N, P_0u_N) &= \operatorname{Re}(Pu_N, b_{2n-1}u_N^{(2n-1)} + b_{2n-2}u_N^{(2n-2)}) \\ &\quad + \operatorname{Re}(Pu_N, P_0u_N - b_{2n-1}u_N^{(2n-1)} - b_{2n-2}u_N^{(2n-2)}) = J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого, интегрируя по частям, в силу (C) получим

$$\begin{aligned} J_1 &\geq \frac{\delta_2}{2} (\|\sqrt{|k_{2n}(x,T)|}u_N^{(2n-1)}(x,T)\|_{L_2(G)}^2 + \|\sqrt{|k_{2n}(x,0)|}u_N^{(2n-1)}(x,0)\|_{L_2(G)}^2) \\ &\quad + \delta_2 \|u_N^{(2n-1)}\|^2 + \operatorname{Re}(b_{2n-1}u_N^{(2n-1)}, b_{2n-2}u_N^{(2n-2)}) \\ &\quad - \operatorname{Re}((k_{2n}b_{2n-2})_t u_N^{(2n-1)}, u_N^{(2n-2)}) + \operatorname{Re} k_{2n}b_{2n-2}u^{(2n-1)}\overline{u^{(2n-2)}}\Big|_0^T. \end{aligned}$$

Последние третье, четвертое и пятое слагаемые оцениваются однотипно, например, для четвертого имеем (используем включения $b_{2n-2} \in W_2^1(0,T)$, $k_{2n}, k_{2nt} \in L_\infty(Q)$)

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}((k_{2n}b_{2n-2})_t u_N^{(2n-1)}, u_N^{(2n-2)})| &\leq c \|u_N^{(2n-1)}\| (\|u_N^{(2n-2)}\| + \|b'_{2n-2}u_N^{(2n-2)}\|) \\ &\leq c_1 \|u_N^{(2n-1)}\| \|u_N^{(2n-2)}\|_{L_2(G;L_\infty(0,T))} \leq c_1 \|u_N^{(2n-1)}\| \|u_N\|_{L_2(G;W_2^{2n-2+\delta}(0,T))} \\ &\leq c_2 \|u_N\|_{L_2(G;W_2^{2n-1}(0,T))}^{1+\theta} \|u_N\|^{1-\theta} \leq \varepsilon \|u_N^{(2n-1)}\|^2 + c(\varepsilon) \|u_N\|^2, \end{aligned}$$

где $\theta(2n-1) = 2n-2+\delta$, $\delta \in (1/2, 1)$ и воспользовались интерполяционным неравенством, неравенством (32), вложением $W_2^\delta(0,T) \subset C([0,T])$ при $\delta > 1/2$ и тем, что стандартная норма в $W_2^{2n-1}(0,T)$ и норма $\|u\| = (\|u^{(2n-1)}\|_0^2 + \|u\|_0^2)^{1/2}$ эквивалентны. Оценка для третьего слагаемого записывается в том же виде. Запишем оценку для последнего слагаемого:

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Re} k_{2n}b_{2n-2}u_N^{(2n-1)}\overline{u^{(2n-2)}}\Big|_0^T| \\ &\leq c (|k_{2n}(x,T)u_N^{(2n-1)}(T)u^{(2n-2)}(T)| + |k_{2n}(x,0)u_N^{(2n-1)}(0)u^{(2n-2)}(0)|) \\ &\leq \varepsilon (|k_{2n}(x,T)| |u_N^{(2n-1)}(T)|^2 + |k_{2n}(x,0)| |u_N^{(2n-1)}(0)|^2) \\ &\quad + c(\varepsilon) (|u^{(2n-2)}(T)|^2 + |u^{(2n-2)}(0)|^2) \\ &\leq \varepsilon (|k_{2n}(x,T)| |u_N^{(2n-1)}(T)|^2 + |k_{2n}(x,0)| |u_N^{(2n-1)}(0)|^2) \\ &\quad + c_1(\varepsilon) \|u_N\|_{L_2(G;W_2^{2n-2+\delta}(0,T))}^2 \\ &\leq \varepsilon (|k_{2n}(x,T)| |u_N^{(2n-1)}(T)|^2 + |k_{2n}(x,0)| |u_N^{(2n-1)}(0)|^2) \\ &\quad + \varepsilon \|u_N^{(2n-1)}\|^2 + c_2(\varepsilon) \|u_N\|^2, \end{aligned}$$

где $\delta \in (1/2, 1)$. Выбрав малое положительное ε , приходим к оценке

$$J_1 \geq \frac{\delta_2}{4} (\|\sqrt{|k_{2n}(x, T)|} u_N^{(2n-1)}(x, T)\|_{L_2(G)}^2 + \|\sqrt{|k_{2n}(x, 0)|} u_N^{(2n-1)}(x, 0)\|_{L_2(G)}^2) + \frac{\delta_2}{2} \|u_N^{(2n-1)}\|^2 - c_3 \|u_N\|^2. \quad (42)$$

Как и при оценке последнего слагаемого в J_1 , интегрируя по частям в выражении J_2 и используя условия на коэффициенты и (32), легко получить неравенство

$$|J_2| \leq \varepsilon (|k_{2n}(x, T)| \|u_N^{(2n-1)}(T)\|^2 + |k_{2n}(x, 0)| \|u_N^{(2n-1)}(0)\|^2) + \varepsilon \|u_N^{(2n-1)}\|^2 + c_2(\varepsilon) \|u_N\|^2.$$

При подходящем выборе параметра ε получим неравенство

$$\operatorname{Re}(P u_N, P_0 u_N) \geq \frac{\delta_2}{8} (\|\sqrt{|k_{2n}(x, T)|} u_N^{(2n-1)}(x, T)\|_{L_2(G)}^2 + \|\sqrt{|k_{2n}(x, 0)|} u_N^{(2n-1)}(x, 0)\|_{L_2(G)}^2 + \|u_N^{(2n-1)}\|^2) - c_4 \|u_N\|^2. \quad (43)$$

Оценим оставшиеся слагаемые в (40) вида $(l u_N, P_0 u_N)$. Сюда входят всевозможные слагаемые вида $(k_{i,\alpha} D^\alpha u_N^{(i)}, b_k u_N^{(k)}) = J$. Пусть $i \geq n$. Используя неравенство Гёльдера, получим

$$|J| \leq \left(\int_0^T \|k_{i,\alpha}\|_{L_{2p'}(G)}^2 \|D^\alpha u_N^{(i)}\|_{L_{2q}(G)}^2 \right)^{1/2} \|u_N^{(k)}\|.$$

Возьмем $2p' = p_i$ (p_i — постоянная из (37)). Пусть, например, $i \geq n$. Тогда для величины $q = p'/(p'-1)$ имеем неравенство $q < n/(n-2m(1-(i-n+1)/n)+2|\alpha|)$. Можем найти $s < m(1-(i-n+1)/n) - |\alpha|$ такое, что $q = n/(n-2s)$. Тогда из предыдущего неравенства и вложения $W_2^s(G) \subset L_{2q}(G)$ получим оценку

$$|J| \leq c \|D^\alpha u_N^{(i)}\|_{L_2(0,T;W_2^s(G))} \|u_N^{(k)}\| \leq c \|u_N^{(i)}\|_{L_2(0,T;W_2^{s+|\alpha|}(G))} \|u_N^{(k)}\|.$$

Отметим, что $s+|\alpha| < m(1-(i-n+1)/n)$. Имеем интерполяционное неравенство [15]

$$\|u\|_{W_2^{s+|\alpha|}(G)} \leq c \|u\|_{W_2^{m(1-(i-n+1)/n)}(G)}^\theta \|u\|_{L_2(G)}^{1-\theta}, \quad \theta m(1-(i-n+1)/n) = s+|\alpha|,$$

откуда

$$|J| \leq c \|u_N^{(i)}\|_{L_2(0,T;W_2^{m(1-(i-n+1)/n)}(G))}^\theta \|u_N^{(k)}\| \|u_N^{(i)}\|^{1-\theta}. \quad (44)$$

Из равенства (38) с $s = n$ и $r = m$ вытекает, что

$$\|u_N^{(i)}\|_{L_2(0,T;W_2^{m(1-(i-n+1)/n)}(G))} \leq c (\|u_N\|_{W_2^{2n-1}(0,T;L_2(G))} + \|u_N\|_{W_2^{n-1}(0,T;W_2^m(G))}).$$

Используя это неравенство в (44) вместе с интерполяционным неравенством

$$\|u^{(j)}\| \leq c \|u\|_{W_2^{2n-1}(G)}^\theta \|u\|^{1-\theta}, \quad \theta(2n-1) = j,$$

и неравенством (32) получим оценку

$$|J| \leq \varepsilon (\|u_N^{(2n-1)}\|_{L_2(0,T;L_2(G))}^2 + \|u_N\|_{W_2^{n-1}(0,T;W_2^m(G))}^2) + c(\varepsilon) \|u_N\|^2. \quad (45)$$

Слагаемые вида $(k_{i,\alpha} D^\alpha u_N^{(i)}, b_k u_N^{(k)})$ с $i \leq n-1$ оцениваются существенно проще, и оценки опустим. Используя (41)–(43), (45) с достаточно малым параметром ε и (40), получим неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f, P_0 u_N) = \operatorname{Re}(L u_N, P_0 u_N) &\geq \delta_4 (\|u_N^{(2n-1)}\|^2 + \|u_N^{(n-1)}\|_{L_2(0,T;W_2^m(G))}^2 \\ &+ \|\sqrt{|k_{2n}(x,T)|} u_N^{(2n-1)}(x,T)\|_{L_2(G)}^2 + \|\sqrt{|k_{2n}(x,0)|} u_N^{(2n-1)}(x,0)\|_{L_2(G)}^2 \\ &- c_4 \|u_N\|_{L_2(G)}^2 + \lambda \|u_N\|_{W_2^{n-1}(G)}^2, \end{aligned}$$

где $\delta_4, \delta_5 > 0$ — некоторые постоянные. Пусть $\lambda_0 = 2c_4$. Тогда при $\lambda \geq \lambda_0$ верно неравенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(f, P_0 u_N) &\geq \operatorname{Re}(L u_N, P_0 u_N) \geq \delta_4 (\|u_N^{(2n-1)}\|^2 + \|u_N^{(n-1)}\|_{L_2(0,T;W_2^m(G))}^2 \\ &+ \|\sqrt{|k_{2n}(x,T)|} u_N^{(2n-1)}(x,T)\|_{L_2(G)}^2 \\ &+ \|\sqrt{|k_{2n}(x,0)|} u_N^{(2n-1)}(x,0)\|_{L_2(G)}^2) + \frac{\lambda}{2} \|u_N\|_{W_2^{n-1}(G)}^2, \end{aligned}$$

которое также можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &\geq \delta_5 (\|u_N\|_{L_2(0,T;W_2^{n-1}(G))}^2 + \|u_N\|_{W_2^{n-1}(0,T;W_2^m(G))}^2 + \lambda \|u_N\|_{W_2^{n-1}(G)}^2 \\ &+ \|\sqrt{|k_{2n}(x,T)|} u_N^{(2n-1)}(x,T)\|_{L_2(G)}^2 + \|\sqrt{|k_{2n}(x,0)|} u_N^{(2n-1)}(x,0)\|_{L_2(G)}^2). \end{aligned} \quad (46)$$

Оценка (46) гарантирует, что найдется подпоследовательность u_{N_k} такая, что для всех производных, входящих в правую часть (46), имеет место сходимость

$$D^\alpha u_{N_k}^{(i)} \rightarrow D^\alpha u^{(i)}, \quad u_{N_k}^{(2n-1)}(x,0) \rightarrow u_0, \quad u_{N_k}^{(2n-1)}(x,T) \rightarrow u_T,$$

где $|\alpha| \leq m$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$, $u \in W_2^{2n-1}(0,T;L_2(G)) \cap W_2^{n-1}(0,T;W_2^m(G))$ и последние две сходимости имеют место в весовых пространствах $L_{2,k_{2n}(x,0)}(G_0)$ и $L_{2,k_{2n}(x,T)}(G_T)$ ($G_0 = \{x : |k_{2n}(x,0)| > 0\}$, $G_T = \{x : |k_{2n}(x,T)| > 0\}$) соответственно с нормами

$$\|u\|^2 = \left(\int_G |k_{2n}(x,0)| |u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|u\|^2 = \left(\int_G |k_{2n}(x,T)| |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим равенство (39). Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} &(-u_{N_k}^{(2n-1)}, (\psi_j k_{2n})_t \omega_i) + (k_{2n-1} u_{N_k}^{(2n-1)}, \psi_j \omega_i) \\ &+ (M^{1/2} u_{N_k}, M^{1/2} \psi_j \omega_i) + (l u_{N_k} + \lambda u_{N_k}, \psi_j \omega_i) \\ &+ (k_{2n}(x,T) u_{N_k}(x,T), \psi_j(T) \omega_i) - (k_{2n}(x,0) u_{N_k}(x,0), \psi_j(0) \omega_i) = (f, \psi_j \omega_i), \end{aligned} \quad (47)$$

где $i, j = 1, \dots, N_k$. Умножая (47) на постоянные $\gamma_{i,j}$ и суммируя по i, j , получим

$$\begin{aligned} &(-u_{N_k}^{(2n-1)}, (v k_{2n})_t) + (k_{2n-1} u_{N_k}^{(2n-1)}, v) + (M^{1/2} u_{N_k}, M^{1/2} v) + (l u_{N_k}, v) + (\lambda u_{N_k}, v) \\ &+ (k_{2n}(x,T) u_{N_k}(x,T), v(x,T)) - (k_{2n}(x,0) u_{N_k}(x,0), v(x,0)) = (f, v), \end{aligned} \quad (48)$$

где $v = \sum_{i,j=1}^N \gamma_{i,j} \psi_j \omega_i$. Переходя к пределу по k , приходим к интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &(-u^{(2n-1)}, (v k_{2n})_t) + (k_{2n-1} u^{(2n-1)}, v) + (M^{1/2} u, M^{1/2} v) + (l u, v) + (\lambda u, v) \\ &+ (k_{2n}(x,T) u_T(x), v(x,T)) - (k_{2n}(x,0) u(x,0), v(x,0)) = (f, v), \end{aligned} \quad (49)$$

В силу произвольности постоянных $\gamma_{i,j}$ заключаем, что равенство (49) выполнено для всех функций $v \in L_2(0, T; \widetilde{W}_2^m(G)) \cap W_2^1(0, T; L_2(G))$. Из определения обобщенной производной получаем, что существует обобщенная производная $\partial_t(k_{2n}u^{(2n-1)}) \in L_2(0, T; \widetilde{W}_2^{-m}(G))$. Более того, определены следы

$$k_{2n}u^{(2n-1)}(x, T) = k_{2n}(x, T)u_T \in L_2(G), \quad k_{2n}u^{(2n-1)}(x, 0) = k_{2n}(x, 0)u_0 \in L_2(G).$$

Тогда уравнение (35) выполняется в пространстве $L_2(0, T; \widetilde{W}_2^{-m}(G))$. Интегрируя (35) от нуля до t , получим

$$\begin{aligned} Mv + \lambda v &= \int_0^t f(x, \tau) d\tau - \int_0^t l u(x, \tau) + (k_{2nt} - k_{2n-1})u^{(2n-1)}(x, \tau) d\tau \\ &\quad - k_{2n}u^{(2n-1)}(x, t) + k_{2n}(x, 0)u_0(x) \in L_2(Q), \quad v = \int_0^t u(x, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (50)$$

поскольку правая часть в (50) принадлежит $L_2(Q)$, $v \in L_2(0, T; W_2^{2m}(G))$ и справедлива оценка

$$\|v\|_{L_2(0, T; W_2^{2m}(G))} + \lambda \|v\| \leq c \|f\|. \quad (51)$$

Так как $v \in W_2^{2n}(0, T; L_2(G))$, согласно (39) $v^{(i)} \in L_2(0, T; W_2^{2m(1-i/2n)}(G))$. В частности, $v' = u \in L_2(0, T; W_2^{2m(1-1/2n)}(G))$. Тогда из (51) также имеем оценку

$$\|u\|_{L_2(0, T; W_2^{2m(1-1/2n)}(G))} + \lambda^{1-1/2m} \|u\| \leq c_1 \|f\|. \quad (52)$$

Из уравнения вытекает, что $\partial_t(k_{2n}u^{(2n-1)}) \in L_2(0, T; \widetilde{W}_2^{-m/n}(G))$. $\square$

Лемма 1 [21, лемма 1.2]. Пусть $k \in C^1([0, T])$, $a \in W_\infty^1(0, T)$, функции k, a вещественны и найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что $a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0$ для всех $t \in (0, T)$ и u — обобщенное решение уравнения

$$l_0 u = k u_t + a u = f \quad (53)$$

из $L_2(0, T)$, причем $f \in W_2^1(0, T)$. Тогда $u \in W_2^1(0, T)$, $k u_t \in W_2^1(0, T)$.

Лемма 2. Пусть $k \in C^1(0, T)$, $a \in W_\infty^1(0, T)$ и найдется постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что $a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0$ для всех $t \in (0, T)$, $k(0) \leq 0$, $k(T) \geq 0$. Тогда обобщенное решение $u \in L_2(0, T)$ уравнения (53) существует и единственно и существует последовательность $u_n \in W_2^1(0, T)$, $k u_{nt} \in W_2^1(0, T)$ такая, что $\partial_t k u_n \rightarrow \partial_t k u$, $u_n \rightarrow u$, $l_0 u_n \rightarrow f$ в $L_2(0, T)$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Существование решения легко доказать, например, методом Галёркина, используя первую априорную оценку $(l_0 u, u) \geq \delta_0 \|u\|_{L_2(0, T)}^2$, справедливую для всех $u \in W_2^1(0, T)$. Обобщенное решение будет обладать свойствами

$$(-u, k v_t) + ((a - k_t)u, v) = (f, v) \quad \forall v \in W_2^1(0, T), \quad v(0) = v(T) = 0, \quad k u \in W_2^1(0, T).$$

Предположим, что существует два решения u_1, u_2 . Тогда их разность ω также обобщенное решение уравнения $l_0 \omega = 0$. По лемме 1 $\omega \in W_2^1(0, T)$. Рассматривая равенство $(l_0 \omega, \omega) = 0$ и интегрируя по частям, получим $\omega = 0$. Построим

последовательность $f_n \in W_2^1(0, T)$ такую, что $f_n \rightarrow f$ в $L_2(0, T)$, и построим обобщенное решение u_n уравнения

$$l_0 u_n = f_n \quad (54)$$

из класса $u_n \in L_2(0, T), ku_n \in W_2^1(0, T)$. По лемме 1 $u_n \in W_2^1(0, T)$. Умножим уравнение (54) на u_n и проинтегрируем по $(0, T)$. Получим неравенство $\|u_n\|_{L_2(0, T)} \leq c\|f_n\|_{L_2(0, T)}$, которое, будучи записанным для разности $u_n - u_m$, влечет существование функции $u \in L_2(0, T)$ такой, что $u_n \rightarrow u$ в $L_2(0, T)$. Из (54) вытекает также сходимость в себе ku_n в $W_2^1(0, T)$ к некоторой функции $v \in W_2^1(0, T)$, совпадающей с ku .

Лемма 3. Пусть $k \in C^1(0, T)$, $k(0) \leq 0$, $k(T) \geq 0$, $u \in L_2(0, T)$, $\partial_t ku \in L_2(0, T)$. Тогда справедливо равенство

$$\operatorname{Re} \int_0^T ku_t u(t) dt \geq \int_0^T \frac{-1}{2} |u(t)|^2 dt + \frac{1}{2} (k(T)|u_n(T)|^2 - k(0)|u_n(0)|^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию a , удовлетворяющую условиям лемм 1, 2, и положим $l_0 u = f \in L_2(0, T)$. Построим последовательность u_n , удовлетворяющую условиям леммы 2. Имеем

$$\operatorname{Re}(ku_{nt}, u_n) = \int_0^T \frac{-k_t}{2} |u_n|^2(t) dt + \frac{1}{2} (k(T)|u_n(T)|^2 - k(0)|u_n(0)|^2).$$

Это неравенство, записанное для разностей $u_n - u_m$, влечет существование пределов чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = \alpha_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(T) = \alpha_T$ (если $k(T) \neq 0$, $k(0) \neq 0$ соответственно). Переходя к пределу, получим равенство

$$\operatorname{Re}(ku_t, u) = \int_0^T \frac{-k_t}{2} |u|^2(t) dt + \frac{1}{2} (k(T)|\alpha_T|^2 - k(0)|\alpha_0|^2).$$

Рассмотрим равенство $(l_0 u_n, v) = (f_n, v)$, $v \in W_2^1(0, T)$. Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^T -u_n(t)kv_t + (a - k_t)u_nv dt + k(T)u_n(T) - k(0)u_n(0) = (f, v).$$

Переходя к пределу по n , получим

$$\int_0^T -u(t)kv_t + (a - k_t)uv dt + k(T)\alpha_T - k(0)\alpha_0 = (f, v).$$

В силу произвольности v заключаем, что $u(T) = \alpha_T$, $u(0) = \alpha_0$ (в случае $k(T) \neq 0$ и $k(0) \neq 0$ если, например, $k(T) = 0$, то слагаемое $k(T)\alpha_T$ полагается равным нулю).

Теорема единственности решений, полученных в теореме 3, имеет место при некоторых дополнительных ограничениях. Например, это условия дополнительной гладкости коэффициентов уравнения или другие условия. В приведенной ниже теореме чтобы получить теорему единственности, предполагаем

что коэффициенты оператора P не зависят от x . При этом используем более слабые условия на коэффициенты оператора l . Итак, рассматриваем уравнение (35), где будем предполагать, что $P = k_{2n}(t)u^{(2n)} + k_{2n-1}(t)u^{(2n-1)}$ и l — оператор вида

$$lu = \sum_{i=0}^{2n-2} \sum_{|\alpha| < 2m(1-(i+1)/2n)} k_{i,\alpha}(x, t) D^\alpha u^{(i)},$$

причем

$$k_{i,\alpha}(x, t) \in L_\infty(0, T; L_{p_i}(G)), \quad p_i > n/(2m(1-(i+1)/2n) - |\alpha|), \quad i \leq 2n-2, \quad (55)$$

$$k_{2n-1} \in L_\infty(0, T), \quad k_{2n} \in C^1([0, T]). \quad (56)$$

Теорема 4. Предположим, что для $f \in L_2(Q)$ выполнены условия (A), (6), (7), (55), (56), (C), где дополнительно к (9) потребуем, чтобы $b_{2n-1} \in C^1([0, T])$ при $n = 1$. Тогда найдется число $\lambda_1 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_1$ существует единственное решение $u \in L_2(0, T; \widetilde{W}_2^{(1-1/2n)2m}(G)) \cap W_2^{2n-1}(0, T; L_2(G))$ задачи (35), (2), (3).

Доказательство. Сначала докажем утверждение в случае более простого уравнения вида

$$L_0 u = Pu + Mu + \lambda u = f. \quad (57)$$

Повторяем рассуждения из доказательства теоремы 3. Приближенное решение u_N , определяемое при помощи равенства (39), где оператор L заменен на L_0 , удовлетворяет оценке (46), т. е.

$$\|u_N\|_{L_2(0, T; W_2^{2n-1}(G))}^2 + \|u_N\|_{W_2^{n-1}(0, T; W_2^m(G))}^2 + \lambda \|u_N\|_{W_2^{n-1}(G)}^2 \leq c \|f\|^2 \quad (58)$$

при всех $\lambda \geq \lambda_0$ для некоторого $\lambda_0 > 0$, где постоянные не зависят от параметров λ, N . Переходя к пределу, получим, что решение u также удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{L_2(0, T; W_2^{2n-1}(G))}^2 + \|u\|_{W_2^{n-1}(0, T; W_2^m(G))}^2 + \lambda \|u\|_{W_2^{n-1}(G)}^2 \leq c \|f\|^2.$$

Согласно (52) предельное решение удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L_2(0, T; W_2^{2n-1}(G))}^2 + \|u\|_{W_2^{n-1}(0, T; W_2^m(G))}^2 + \lambda \|u\|_{W_2^{n-1}(G)}^2 \\ & + \|u\|_{L_2(0, T; W_2^{2m(1-1/2n)}(G))}^2 + \lambda^{2(1-1/2m)} \|u\|^2 \leq c \|f\|^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Покажем единственность построенных решений. Считаем, что собственные функции $\{\omega_i\}$ нормированы в пространстве $L_2(G)$. Тогда коэффициенты Фурье u_i решения u в этом базисе суть решения задачи

$$L_i u_i = Pu_i + (\lambda_i + \lambda) u_i = f_i = (f, \omega_i)_0 = f_i, \quad U_j u_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n-1. \quad (60)$$

Предполагая, что существуют два решения, находим, что коэффициенты Фурье ψ_i разности решений удовлетворяют равенству

$$P\psi_i + (\lambda_i + \lambda)\psi_i = 0, \quad U_j \psi_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n-1. \quad (61)$$

Из уравнения вытекает, что существует обобщенная производная $\partial_t(k\psi_i^{(2n-1)}) \in L_2(0, T)$. Умножив равенство (61) скалярно в $L_2(0, T)$ на $P_0\psi_i$, интегрируя по частям, используя при этом лемму 3 (по сути повторяем доказательство оценки (58)), получим оценку ($\lambda \geq \lambda_0$)

$$\|\psi_i\|_{W_2^{2n-1}(0, T)}^2 + (\lambda + \lambda_i) \|\psi_i\|_{W_2^{n-1}(G)}^2 \leq 0,$$

т. е. $\psi_i = 0$. В силу произвольности i заключаем что наши решения совпадают. Таким образом, определен оператор

$$L_0^{-1} : L_2(Q) \rightarrow W_2^{2n-1}(0, T; L_2(G)) \cap L_2(0, T; \widetilde{W}_2^{2m(1-m/n)}(G)).$$

При этом справедлива оценка (59) для $u = L_0^{-1}f$. Перейдем к рассмотрению задачи (35), (2), (3). Ее можно переписать в виде

$$v + lL_0^{-1}v = f, \quad L_0v = u. \quad (62)$$

Покажем, что оператор $R = lL_0^{-1} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ является сжатием, если параметр $\lambda > 0$ достаточно велик. Получим оценки. Пусть $J = k_{i,\alpha}D^\alpha u$. Как в доказательстве теоремы 3,

$$\|J\| \leq \left(\int_0^T \|k_{i,\alpha}\|_{L_{2p'}(G)}^2 \|D^\alpha u^{(i)}\|_{L_{2q}(G)}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Возьмем $2p' = p_i$ (p_i — постоянная из (55)). По условию $p_i > n/(2m(1 - (i+1)/2n) - |\alpha|)$. Тогда для величины $q = p'/(p' - 1)$ имеем неравенство $q < n/(n - 4m(1 - (i+1)/2n) + 2|\alpha|)$. Можно найти $s < 2m(1 - (i+1)/2n) - |\alpha|$ такое, что $q = n/(n - 2s)$. Тогда из предыдущего неравенства и вложения $W_2^s(G) \subset L_{2q}(G)$ получим оценку

$$|J| \leq c \|D^\alpha u^{(i)}\|_{L_2(0,T;W_2^s(G))} \leq c_1 \|u^{(i)}\|_{L_2(0,T;W_2^{s+|\alpha|}(G))}.$$

Отметим, что $s + |\alpha| < 2m(1 - (i+1)/2n)$. Имеем интерполяционное неравенство [15]

$$\|u\|_{W_2^{s+|\alpha|}(G)} \leq c \|u\|_{W_2^{2m(1-(i+1)/2n)}(G)}^\theta \|u\|_{L_2(G)}^{1-\theta}, \quad \theta 2m(1 - (i+1)/2n) = s + |\alpha|,$$

откуда

$$|J| \leq c \|u^{(i)}\|_{L_2(0,T;W_2^{2m(1-(i+1)/2n)}(G))}^\theta \|u^{(i)}\|^{1-\theta}. \quad (63)$$

Из равенства (39) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|u^{(i)}\|_{L_2(0,T;W_2^{2m(1-(i+1)/2n)}(G))} \\ \leq c \left(\|u\|_{W_2^{2n-1}(0,T;L_2(G))} + \left\| \int_0^t u d\tau \right\|_{L_2(0,T;W_2^{2m}(G))} \right). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\|u^{(i)}\| \leq c \|u\|_{W_2^{2n-1}(0,T;L_2(G))}^{i/(2n-1)} \|u\|^{1-i/(2n-1)}.$$

Из последних двух неравенств вытекает оценка

$$|J| \leq c \left(\|u\|_{W_2^{2n-1}(0,T;L_2(G))} + \left\| \int_0^t u(x, \tau) d\tau \right\|_{L_2(0,T;W_2^{2m}(G))} \right)^{\theta_1} \|u\|^{1-\theta_1}$$

для некоторого $\theta_1 \in (0, 1)$. Суммируя подобные оценки, будем иметь

$$\begin{aligned} \|lL_0^{-1}v\| \leq M \left(\|L_0^{-1}v\|_{W_2^{2n-1}(0,T;L_2(G))}^2 \right. \\ \left. + \left\| \int_0^t L_0^{-1}v(x, \tau) d\tau \right\|_{L_2(0,T;W_2^{2m}(G))}^2 \right)^{\theta_2} \|L_0^{-1}v\|^{1-\theta_2}, \end{aligned}$$

где M — некоторая постоянная, не зависящая от u , и параметр θ_2 максимальный из параметров θ_1 , возникающих в различных оценках. Используя далее оценку (59), получим $\|lL_0^{-1}v\| \leq M_1\|v\|/\lambda^{(1-\theta_2)(1-1/2n)}$. Выберем параметр λ так, что $M_1/\lambda^{(1-\theta_1)(1-1/2n)} < 1$. Тогда уравнение (62) будет иметь единственное решение в необходимом классе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М.: ВИНТИ, 1971. (Итоги науки. Сер. математика. Математический анализ).
2. Врагов В. Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 1978. С. 5–13.
3. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 1983.
4. Терехов А. Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 1985. С. 148–158.
5. Глазатов С. Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 162–164.
6. Джамалов С. З. О корректности нелокальных краевых задач для многомерного уравнения смешанного типа // Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики. Новосибирск: Ин-т математики им. С. Л. Соболева, 1989. С. 63–70.
7. Каратопраклиева М. Г. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 68–79.
8. Джамалов С. З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 4. С. 17–28.
9. Dzhamalov S. Z. The nonlocal boundary value problem with constant coefficients for the multidimensional equation of the mixed type of the second kind, the second order // J. Siber. Federal University. 2018. V. 11, N 4. P. 472–461.
10. Джамалов С. З. О гладкости решения одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве Соболева // Журн. Средне-Волжского мат. о-ва. 2019. Т. 21, № 1. С. 24–33.
11. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
12. Чуешев А. В. Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 454–472.
13. Джамалов С. З. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка // Тез. докл. 7-й Междунар. конф. по математическому моделированию. Якутск: Изд-во СВФУ, 2014. С. 37–38.
14. Lions J. L., Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems and applications. Berlin; Heidelberg; New-York: Springer-Verl., 1972. V. 1.
15. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1986.
16. Grisvard P. Équations différentielles abstraites // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4). 1969. V. 2, N 3. P. 311–395.
17. Denk R., Hieber M., Prüss J. R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2003. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 166).
18. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
19. Grisvard P. Caractérisation de quelques espaces d'interpolation // Arch. Rat. Mech. 1967. V. 25, N 1. P. 40–63.
20. Grisvard P. Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications // J. Math. Pures Appl. 1966. V. 45. P. 143–206.

21. Чуешев А. В. Оценки резольвенты для обыкновенных дифференциальных операторов смешанного типа // Мат. тр. 2000. Т. 3, № 1. С. 144–196.

Поступила в редакцию 19 декабря 2019 г.

После доработки 19 декабря 2019 г.

Принята к публикации 19 февраля 2020 г.

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович
Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз,
пр. М. Улугбека, 81, Ташкент 100125, Узбекистан;
Филиал Российского государственного университета
нефти и газа им. И. М. Губкина в г. Ташкенте,
ул. Дурмон Йули, 34, Ташкент 10125, Узбекистан
`siroj63@mail.ru`

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`s-pyatkov@ugrasu.ru`, `pyatkov@math.nsc.ru`