V. N. Dubinin, Asymptotics for the capacity of a condenser with variable potential levels, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 4, 796–802

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.406>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.172.240.79

April 26, 2023, 11:44:01

АСИМПТОТИКА ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ УРОВНЯМИ ПОТЕНЦИАЛА

В. Н. Дубинин

Аннотация. Получена асимптотическая формула для емкости обобщенного конденсатора в случае, когда часть его пластин стягивается в наперед заданные точки. В отличие от предыдущих исследований емкости рассматриваются конденсаторы с переменными уровнями потенциала и устанавливается третий член в указанной асимптотике.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.406

Ключевые слова: асимптотическая формула, конформная емкость, конденсатор, функция Грина.

§ 1. Введение и формулировка результата

Систематическое изучение поведения емкости конденсатора при геометрических преобразованиях его пластин восходит к работам Поля и Сеге [1]. Нас интересует асимптотика конформной емкости конденсатора при стягивании части его пластин в наперед заданные точки. В случае одной точки такая асимптотика приводит к понятию приведенного модуля области, которое было введено в классических работах Гретша и Тейхмюллера начала 20-го века. Большое влияние на применение этого понятия в комплексном анализе оказали исследования Альфорса и Бейрлинга [2], Хеймана [3] и Дженкинса [4]. Впоследствии появились многочисленные разновидности приведенных модулей, изучение которых диктовалось прежде всего широтой приложений (см., например, работы [5, 6] и библиографию в них). Асимптотика емкости конденсатора с тремя и более пластинами разной полярности рассматривалась впервые в [7, 8]. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть B — открытое множество на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$. *Обобщенный конденсатор* (далее *конденсатор*) в $\overline{B}$ есть тройка $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=0}^n$ — совокупность замкнутых непустых попарно не пересекающихся множеств $E_k \subset \overline{B}$, $k = 0, 1, \dots, n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=0}^n$ — совокупность вещественных чисел δ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Множества E_k называют *пластинами* конденсатора C , а числа δ_k — *уровнями потенциала* или, короче, *потенциалами пластин* E_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Емкость сар C конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле

$$I(v, B) := \iint_B |\nabla v|^2 dx dy$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, дополнительное соглашение от 21.04.2020 № 075-02-2020-1482-1.

по всем вещественнозначным функциям v , непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица локально в B и равным δ_k на E_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Предположим, что одна из пластин конденсатора C , пусть E_0 , совпадает с ∂B , $\delta_0 = 0$, а другие пластины $E_k = E_k(r)$, $r > 0$, представляют собой «почти круги» с центрами в некоторых фиксированных различных точках $z_k \in B$ радиусов $\mu_k r^{\nu_k}(1 + o(1))$ при $r \rightarrow 0$, где μ_k, ν_k — произвольные положительные числа, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Из теоремы 1 в [8] вытекает асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \text{cap } C = & -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l) \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь

$$g_B(z, z_k) = h_B(z, z_k) - \log |z - z_k|$$

означает функцию Грина связной компоненты множества B , содержащей точку z_k (равной нулю вне этой компоненты), а $r(B, z_k) = \exp h_B(z_k, z_k)$ — внутренний радиус области B относительно точки z_k , $k = 1, \dots, n$. При $n = 1$ слагаемые, содержащие функции Грина, полагаем равными нулю.

Обобщения формулы (1) в различных направлениях и многочисленные ее приложения в теории функций представлены в [9] (см. также [10, 11]). В настоящей статье получена асимптотическая формула для емкости конденсатора в случае, когда потенциалы пластин суть переменные величины, стремящиеся к заданным значениям. Кроме того, уточняется третий член в асимптотике вида (1). Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть B — открытое подмножество $\mathbb{C}$, каждая связная компонента которого имеет классическую функцию Грина; $\{z_k\}_{k=1}^n$, $n \geq 1$, — совокупность различных конечных точек B , и пусть

$$\delta_k(r) = \delta_k + \frac{\alpha_k}{\log r} + \frac{\beta_k}{(\log r)^2} + O\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^3 \right), \quad r \rightarrow 0, \quad (2)$$

где $\delta_k \neq 0$, α_k и β_k — вещественные числа, $k = 1, \dots, n$. Предположим, что замкнутые множества $E_k(r)$ содержат круги и содержатся в кругах соответственно:

$$|z - z_k| \leq \mu_k r^{\nu_k} \left(1 + O\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right) \right), \quad r \rightarrow 0,$$

$\mu_k > 0$, $\nu_k > 0$, $k = 1, \dots, n$. Тогда для емкости конденсатора $C(r) = (B, \{\partial B, E_1(r), \dots, E_n(r)\}, \{0, \delta_1(r), \dots, \delta_n(r)\})$ имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \text{cap } C(r) = & -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \left[2 \frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} + \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} \right] \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l) \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\nu_k} \left[2\beta_k \delta_k + \left(\alpha_k + \frac{\delta_k}{\nu_k} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{1}{\nu_k \nu_l} \left[\alpha_k \delta_l + \alpha_l \delta_k + \delta_k \delta_l \log \left(\left(\frac{r(B, z_k)}{\mu_k} \right)^{1/\nu_k} \left(\frac{r(B, z_l)}{\mu_l} \right)^{1/\nu_l} \right) \right] g_B(z_k, z_l) \right\} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{l=1, l \neq k, \\ l \neq j}}^n \frac{\delta_k \delta_j}{\nu_k \nu_j \nu_l} g_B(z_k, z_l) g_B(z_l, z_j) \left\{ \left(\frac{1}{\log r} \right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^3 \right) \right\}, \quad r \rightarrow 0. \quad (3)$$

Случай, когда одна из пластин конденсатора стягивается к бесконечности, сводится к теореме 1 с помощью дробно-линейного отображения. Выписанная выше формула (3) остается справедливой и в случае произвольного множества B , имеющего обобщенную (не обязательно непрерывную на замыкании B) функцию Грина. Это можно установить с помощью соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 2.1 в [9].

§ 2. Доказательство теоремы 1

Введем сокращенные обозначения $g(z, z_k) = g_B(z, z_k)$, $R_k = r(B, z_k)$ и $\log \psi_k \log \psi_l = (\log \psi_k) \log \psi_l$, $k, l = 1, \dots, n$. При достаточно малом положительном значении параметра r рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = \sum_{k=1}^n \delta_k(r) \sum_{l=1}^n \beta_{lk} g(z, z_l),$$

где

$$\beta_{lk} = \begin{cases} -\frac{g(z_k, z_l)}{\log \psi_k \log \psi_l}, & l \neq k, \\ -\frac{1}{\log \psi_k} \left[1 + \frac{\log R_k}{\log \psi_k} + \frac{\sigma_k}{(\log r)^2} \right], & l = k, \end{cases}$$

$\psi_k \equiv \psi_k(r) = \mu_k r^{\nu_k}$, а вещественные числа σ_k будут определены ниже, $k, l = 1, \dots, n$. Функция $g(z)$ равна нулю в $\overline{\mathbb{C}} \setminus B$, непрерывна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{k=1}^n \{z_k\}$ и гармоническая в $B \setminus \bigcup_{k=1}^n \{z_k\}$. В каждой точке z_k функция $g(z)$ имеет логарифмическую особенность. Отсюда заключаем, что при любом k , $1 \leq k \leq n$, граница множества

$$\mathcal{E}_k(r) := \{z : |z - z_k| < \psi_k(\sqrt{r}), g(z)/\delta_k(r) > 1\}$$

представляет собой замкнутую аналитическую жорданову кривую. Для точек $z \in \partial \mathcal{E}_k(r)$ выполняется

$$\begin{aligned} \delta_k(r) = \delta_k(r) & \left\{ -\frac{1}{\log \psi_k} \left[1 + \frac{\log R_k}{\log \psi_k} + \frac{\sigma_k}{(\log r)^2} \right] [-\log |z - z_k| + \log R_k + O(|z - z_k|)] \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{g(z_k, z_l)}{\log \psi_k \log \psi_l} [g(z_k, z_l) + O(|z - z_k|)] \right\} \\ & - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \delta_j(r) \left\{ \frac{g(z_j, z_k)}{\log \psi_j \log \psi_k} \left[\log \frac{R_k}{|z - z_k|} + O(|z - z_k|) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\log \psi_j} \left[1 + \frac{\log R_j}{\log \psi_j} \right] [g(z_k, z_j) + O(|z - z_k|)] \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{l=1, l \neq j, \\ l \neq k}}^n \frac{g(z_j, z_l)}{\log \psi_l \log \psi_j} [g(z_l, z_k) + O(|z - z_k|)] \right\} + O\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^3 \right), \quad z \rightarrow z_k. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 1 = \frac{\log |z - z_k|}{\log \psi_k} & \left\{ 1 + \frac{\log R_k}{\log \psi_k} + \frac{\sigma_k}{(\log r)^2} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} \frac{g(z_j, z_k)}{\log \psi_j} \right\} \\
 & - \frac{\log R_k}{\log \psi_k} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} \frac{g(z_k, z_j)}{\log \psi_j} - \frac{(\log R_k)^2}{(\log \psi_k)^2} \\
 & - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{g^2(z_k, z_l)}{\log \psi_k \log \psi_l} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} \frac{g(z_j, z_k) \log R_k}{\log \psi_j \log \psi_k} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} \frac{g(z_k, z_j) \log R_j}{(\log \psi_j)^2} \\
 & - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} \sum_{\substack{l=1, l \neq k, \\ l \neq j}}^n \frac{g(z_j, z_l) g(z_l, z_k)}{\log \psi_l \log \psi_j} + O\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^3\right), \quad r \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Поделив обе части последнего равенства на выражение в фигурных скобках и приведя подобные слагаемые, приходим к равенству

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{\sigma_k}{(\log r)^2} = \frac{\log |z - z_k|}{\log \psi_k} & - \frac{(\log R_k)^2}{(\log \psi_k)^2} - \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{g^2(z_k, z_l)}{\log \psi_k \log \psi_l} \\
 & - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} \frac{g(z_j, z_k) \log R_k}{\log \psi_j \log \psi_k} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} \frac{g(z_k, z_j) \log R_j}{(\log \psi_j)^2} \\
 & - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} \sum_{\substack{l=1, l \neq k, \\ l \neq j}}^n \frac{g(z_j, z_l) g(z_l, z_k)}{\log \psi_l \log \psi_j} + O\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^3\right), \quad r \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Учитывая соотношения

$$\frac{\delta_j(r)}{\delta_k(r)} = \frac{\delta_j}{\delta_k} + O\left(\frac{1}{\log r}\right), \quad \frac{1}{\log \psi_k} = \frac{1}{\nu_k \log r} + O\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right)$$

при $r \rightarrow 0$, $j, k = 1, \dots, n$, и полагая

$$\begin{aligned}
 \sigma_k = \left(\frac{\log R_k}{\nu_k}\right)^2 & + \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{g^2(z_k, z_l)}{\nu_k \nu_l} \\
 & + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^n \frac{\delta_j}{\delta_k} \left[\frac{g(z_j, z_k) \log R_k}{\nu_j \nu_k} + \frac{g(z_j, z_k) \log R_j}{\nu_j^2} + \sum_{\substack{l=1, l \neq k, \\ l \neq j}}^n \frac{g(z_j, z_l) g(z_l, z_k)}{\nu_l \nu_j} \right], \quad (4)
 \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{\log |z - z_k|}{\log \psi_k} = 1 + O\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^3\right), \quad r \rightarrow 0.$$

Следовательно, на границе множества $\mathcal{E}_k(r)$ справедливо асимптотическое равенство

$$|z - z_k| = \mu_k r^{\nu_k} \left(1 + O\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right)\right), \quad r \rightarrow 0. \quad (5)$$

Вычислим емкость конденсатора

$$\mathcal{C}(r) := (B, \{\partial B, \mathcal{E}_1(r), \dots, \mathcal{E}_n(r)\}, \{0, \delta_1(r), \dots, \delta_n(r)\}).$$

Пусть $\rho > 0$ настолько мало, что круги $\{z : |z - z_k| \leq \rho\}$ принадлежат соответственно пластинам $\mathcal{E}_k(r)$, $k = 1, \dots, n$. Применяя формулу Грина и теорему Гаусса, последовательно имеем

$$\begin{aligned} \text{cap } \mathcal{C}(r) &= I\left(g, B \setminus \bigcup_{k=1}^n \mathcal{E}_k(r)\right) = - \sum_{k=1}^n \int_{\partial \mathcal{E}_k(r)} \delta_k(r) \frac{\partial g}{\partial n} ds \\ &= - \sum_{k=1}^n \delta_k(r) \int_{|z-z_k|=\rho} \frac{\partial g}{\partial n} ds = 2\pi \sum_{k=1}^n \delta_k(r) \sum_{l=1}^n \delta_l(r) \beta_{kl} + o(1), \quad \rho \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Здесь дифференцирование производится по внешней нормали к границе множеств $\mathcal{E}_k(r)$ и $\{z : |z - z_k| \leq \rho\}$, $k = 1, \dots, n$. Подставив сюда значения β_{kl} и учитывая, что емкость конденсатора не зависит от ρ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \text{cap } \mathcal{C}(r) &= - \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2(r)}{\log \psi_k} \left[1 + \frac{\log R_k}{\log \psi_k} + \frac{\sigma_k}{(\log r)^2} \right] - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k(r) \delta_l(r)}{\log \psi_k \log \psi_l} g(z_k, z_l) \\ &= - \sum_{k=1}^n \left[\delta_k^2 + 2 \frac{\alpha_k \delta_k}{\log r} + \frac{\alpha_k^2 + 2\beta_k \delta_k}{(\log r)^2} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) \right] \\ &\quad \times \left[1 + \frac{\log R_k}{\log(\mu_k r^{\nu_k})} + \frac{\sigma_k}{(\log r)^2} \right] \frac{1}{\log(\mu_k r^{\nu_k})} \\ &- \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \left[\delta_k + \frac{\alpha_k}{\log r} + \frac{\beta_k}{(\log r)^2} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) \right] \left[\delta_l + \frac{\alpha_l}{\log r} + \frac{\beta_l}{(\log r)^2} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) \right] \\ &\quad \times \frac{g(z_k, z_l)}{\log(\mu_k r^{\nu_k}) \log(\mu_l r^{\nu_l})} = - \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} \\ &- \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{R_k}{\mu_k} + 2 \frac{\alpha_k \delta_k}{\nu_k} \right) + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l g(z_k, z_l)}{\nu_k \nu_l} \right] \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \\ &+ \left\{ \sum_{k=1}^n \left[\frac{\delta_k^2 (\log \mu_k) \log(R_k / \mu_k)}{\nu_k^3} - \frac{2\alpha_k \delta_k \log(R_k / \mu_k)}{\nu_k^2} - \frac{\alpha_k^2 + 2\beta_k \delta_k}{\nu_k} \right] \right. \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1, \\ l \neq k}}^n \left[\frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} \left(\frac{\log \mu_k}{\nu_k} + \frac{\log \mu_l}{\nu_l} \right) - \frac{\alpha_k \delta_l + \delta_k \alpha_l}{\nu_k \nu_l} \right] g(z_k, z_l) - \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2 \sigma_k}{\nu_k} \left. \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^3 \\ &\quad + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^3\right), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Заменяя σ_k выражением (4), после простых вычислений приходим к равенству

$$\text{cap } \mathcal{C}(r) = M(\{\delta_k(r), \mu_k, \nu_k, z_k, B, r\}) + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^3\right), \quad r \rightarrow 0, \quad (6)$$

где через $M(\cdot)$ обозначена сумма первых трех слагаемых в правой части равенства (3).

Рассмотрим наряду с функцией $g(z)$ функцию $g^+(z)$, определенную таким же образом, как $g(z)$, но с заменой $\delta_k(r)$ на $\tilde{\delta}_k(r) = \delta_k(r) + \frac{\delta_k c}{(\log r)^3}$ и затем заменой параметра r на $\tilde{r} = r(1 + \frac{c}{(\log r)^2})$, $c > 0$. Соответствующий конденсатор примет вид

$$\mathcal{C}^+(\tilde{r}) := (B, \{\partial B, \mathcal{E}_1^+(\tilde{r}), \dots, \mathcal{E}_n^+(\tilde{r})\}, \{0, \tilde{\delta}_1(\tilde{r}), \dots, \tilde{\delta}_n(\tilde{r})\}),$$

где

$$\mathcal{E}_k^+(\tilde{r}) = \{z : |z - z_k| < \psi_k(\sqrt{\tilde{r}}), g^+(z)/\tilde{\delta}_k(\tilde{r}) > 1\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log \tilde{r}} &= \frac{1}{\log r} - \frac{c}{(\log r)^4} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^4\right), \\ \tilde{r}^{\nu_k} &= r^{\nu_k} \left(1 + \frac{c}{(\log r)^2}\right)^{\nu_k} = r^{\nu_k} \left(1 + \frac{\nu_k c}{(\log r)^2} + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^3\right)\right), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому при достаточно большом $c > 0$ потенциалы пластин удовлетворяют неравенствам

$$\tilde{\delta}_k(\tilde{r}) > \delta_k, \text{ если } \delta_k > 0, \quad \text{и} \quad \tilde{\delta}_k(\tilde{r}) < \delta_k, \text{ если } \delta_k < 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

В то же время для пластин конденсаторов выполняются включения

$$\mathcal{E}_k^+(\tilde{r}) \supset E_k(r), \quad k = 1, \dots, n.$$

Это имеет место ввиду (5) для $z \in \partial \mathcal{E}_k^+(\tilde{r})$ и $r = \tilde{r}$, $k = 1, \dots, n$. Так как срезка потенциальной функции и сужение пластин конденсатора не увеличивают емкости [9, теорема 1.15], с учетом (6) получим

$$\begin{aligned} \text{cap } C(r) &\leq \text{cap } \mathcal{C}^+(\tilde{r}) = M(\{\tilde{\delta}_k(\tilde{r}), \mu_k, \nu_k, z_k, B, \tilde{r}\}) + o\left(\left(\frac{1}{\log \tilde{r}}\right)^3\right) \\ &= M(\{\delta_k(r), \mu_k, \nu_k, z_k, B, r\}) + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^3\right), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, рассматривая функцию $g^-(z)$, определенную, как и $g^+(z)$, но с отрицательными значениями параметра c , приходим к конденсатору $\mathcal{C}^-(\tilde{r})$ с пластинами ∂B , $\mathcal{E}_k^-(\tilde{r})$ и потенциалами 0 , $\tilde{\delta}_k(\tilde{r})$, $k = 1, \dots, n$. При достаточно большом $|c|$ имеем неравенства

$$\tilde{\delta}_k(\tilde{r}) < \delta_k, \text{ если } \delta_k > 0, \quad \text{и} \quad \tilde{\delta}_k(\tilde{r}) > \delta_k, \text{ если } \delta_k < 0,$$

а также включения

$$\mathcal{E}_k^-(\tilde{r}) \subset E_k(r), \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому срезка допустимой функции конденсатора $C(r)$ и монотонность емкости дают неравенство, противоположное (7):

$$\text{cap } C(r) \geq M(\{\delta_k(r), \mu_k, \nu_k, z_k, B, r\}) + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^3\right), \quad r \rightarrow 0.$$

Этим завершается доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поля Г., Серё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматлит, 1962.
2. Ahlfors L. V., Beurling A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. 1950. V. 83, N 1/2. P. 101–129.
3. Хейман В. К. Многолистные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Кузьмина В. Г. Методы геометрической теории функций. II // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 5. С. 1–50.
6. Сольнин А. Ю. Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 1. С. 3–86.
7. Дубинин В. Н. Симметризация, функция Грина и конформные отображения // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1996. Т. 226. С. 80–92.
8. Дубинин В. Н. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 237. С. 56–73.
9. Dubinin V. N. Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Basel: Birkhäuser/Springer, 2014.
10. Дубинин В. Н. Асимптотическое поведение емкости конденсатора при стягивании некоторых его пластин в точки // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 194–206.
11. Дубинин В. Н. О приведенном модуле комплексной сферы // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1078–1090.

Поступила в редакцию 11 декабря 2019 г.

После доработки 11 декабря 2019 г.

Принята к публикации 17 июня 2020 г.

Дубинин Владимир Николаевич
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8, Владивосток, 690000;
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
dubinin@iam.dvo.ru