M. B. Karmanova, The area of graphs on arbitrary carnot groups with sub-lorentzian structure, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 4, 823–848

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.408>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 15:29:41

УДК 517.518.1+514.747

ПЛОЩАДЬ ГРАФИКОВ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРУППАХ КАРНО С СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

М. Б. Карманова

Аннотация. Доказана формула площади для классов отображений-графиков на группах Карно и нильпотентных градуированных группах произвольной размерности и глубины, на которых введена сублоренцева структура. Количество пространственных и временных направлений также произвольно.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.408

Ключевые слова: группа Карно, нильпотентная градуированная группа, многомерная сублоренцева структура, внутренний базис, внутренняя мера, формула площади.

В статье выводятся метрические свойства поверхностей-графиков на сублоренцевых структурах произвольной глубины с многомерным временем. Основой для построения таких структур является хорошо известная геометрия Минковского (см., например, [1] и цитируемые авторами литературные источники). Геометрия Минковского представляет собой структуру пространства-времени $\mathbb{R}_1^{n+1}$, при этом частный случай $\mathbb{R}_1^4$ является пространством событий специальной теории относительности. Ее отличительной особенностью является то, что квадрат расстояния между точками с координатами (x_1, t_1) и (x_2, t_2) , $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, вычисляется по формуле

$$(x_1 - x_2)^2 - (t_1 - t_2)^2, \quad (1)$$

т. е. вдоль временного направления t он отрицателен, а вдоль пространственных $x \in \mathbb{R}^n$ положителен. Таким образом, длина вектора с ненулевыми координатами также может быть как положительной, так и отрицательной или равной нулю. Если у поверхности в $\mathbb{R}_1^{n+1}$ все касательные векторы имеют положительную длину, то такая поверхность называется *пространственноподобной*, и локально она представима в виде графика, где временная координата зависит от остальных: $t = \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. При определенных требованиях на гладкость определяющего поверхность отображения можно выписать уравнения, описывающие поверхность максимальной площади, из которых следует, что средняя кривизна максимальных поверхностей равна нулю. Согласно гипотезе Нильсена [2, 3] решения уравнения тяготения Эйнштейна физически содержательны тогда и только тогда, когда они реализуемы в виде таких поверхностей в $\mathbb{R}_1^{n+1}$.

Публикация выполнена при финансовой поддержке Регионального математического центра Новосибирского государственного университета.

Подробнее о геометрии Минковского, интерпретациях и применениях можно ознакомиться в [1] и упомянутых там источниках, например, [2, 3] и др.

Неголономный вариант такой геометрии, основанный на введении расстояния со свойствами (1) на субримановых структурах и называемый сублоренцевой геометрией, начали исследовать относительно недавно [4–14], как и его приложения в физике [15, 16]. Практически в то же время, что и неголономное обобщение, стали изучаться структуры с многомерным временем [17–19], но на евклидовых пространствах. Отметим, что вопрос о вычислении площади поверхностей на вышеперечисленных аналогах до недавнего времени был открыт даже в частных случаях.

В последнее время автором установлен ряд результатов геометрической теории меры с применением к теории экстремальных поверхностей в частных случаях четырех- и пятимерных сублоренцевых структур [20–26], а также для двухступенчатых сублоренцевых структур, в том числе, с многомерным временем, имеющих произвольную размерность [27–31].

В данной работе снимается ограничение на глубину образа и прообраза отображения, по которому строится график. Кроме того, сублоренцева структура, как и понятие пространственноподобной поверхности, описывается в самом общем случае. Основной результат — формулы адаптированной площади для пространственноподобных поверхностей-графиков, построенных по классам отображений нильпотентных градуированных групп и групп Карно.

Краткий обзор результатов статьи изложен в [32, 33].

1. Основные определения и свойства

Для формулировки и дальнейшего решения задачи введем необходимые определения и опишем важные свойства исследуемых структур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (см., например, [34]). *Группой Карно* называется связанная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представляется в виде прямой суммы

$$V = \bigoplus_{k=1}^M V_k, \quad [V_1, V_k] = V_{k+1}, \quad k = 1, \dots, M-1, \quad [V_1, V_M] = \{0\}. \quad (2)$$

Число M называется *глубиной* группы $\mathbb{G}$. Размерность V_k в каждой точке будем обозначать символом $\dim V_k$, $k = 1, \dots, M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Если в (2) условия $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ и $[V_1, V_M] = \{0\}$ заменить условиями $[V_1, V_k] \subset V_{k+1}$, $k = 1, \dots, M-1$, и $[V_k, V_M] = \{0\}$, $k = 1, \dots, M$, то $\mathbb{G}$ называется *нильпотентной градуированной группой (Ли)*.

Из определений следует, что группа Карно является частным случаем нильпотентной градуированной группы Ли.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.3. Положим $n_1 = \dim V_1$ и $n_i = \sum_{k=1}^i \dim V_k$, $i = 2, \dots, M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V , причем

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_{\dim V_1} & \text{— базис } V_1, \\ X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k} & \text{— базис } V_k, \quad k = 2, \dots, M. \end{cases}$$

Если $X_j \in V_k$, $k = 1, \dots, M$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$, $j = 1, \dots, N$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Базис выбран таким образом, что любое базисное поле принадлежит одному из V_k на всей группе $\mathbb{G}$, $k = 1, \dots, M$. Иными словами, для каждого векторного поля однозначно определено значение его степени.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.6. Обозначим символом $\mathbf{0}$ единицу группы $\mathbb{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Обозначение единицы группы нулем мотивировано тем, что многие рассуждения проводятся в нормальных координатах, в том числе относительно этой единицы (см. далее определение 1.15). Очевидно, что в этом случае координаты единицы нулевые.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.8. Если $x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j X_j\right)(\mathbf{0})$, то переменные при полях степени k будем называть *переменными* степени k , $k = 1, \dots, M$.

Для описания групповой операции понадобится следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Для мультииндекса $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ его *весовая норма* равна

$$|\mu|_h = \sum_{j=1}^N \mu_j \dim V_j.$$

Из формулы Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа и условия левоинвариантности базисных полей выводятся следующие выражения для групповой операции на $\mathbb{G}$. Если

$$x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j X_j\right)(\mathbf{0}), \quad y = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

то

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

где

$$\begin{cases} z_j = x_j + y_j & \text{для } \deg X_j = 1, \\ z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu > 0, \beta > 0, \\ |\mu + \beta|_h = \deg X_j}} F_{\mu, \beta}^j x^\mu y^\beta & \text{для } \deg X_j > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Геометрическая интерпретация умножения $x \cdot y$ состоит в следующем. Сначала движение идет вдоль интегральной линии векторного поля $\sum_{j=1}^N x_j X_j$ с началом в $\mathbf{0}$ до точки x , а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum_{j=1}^N y_j X_j$ с началом в x . Таким образом, интегральная линия поля $\sum_{j=1}^N z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Константы $\{F_{\mu, \beta}^j\}_{j, \mu, \beta}$ называются *структурными константами* группы $\mathbb{G}$.

На группах Карно часто используется метрика Карно — Каратеодори d_{cc} , согласованная с неголономной структурой (см., например, [35]). Однако до сих

пор остаются открытыми вопросы о строении ее шаров. Кроме того, ее не всегда возможно использовать на нильпотентных градуированных группах, поэтому в таких случаях применяется квазиметрика d_∞ , которая на группах Карно локально билиппшицево эквивалентна d_{cc} : если $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, то

$$d_\infty(v, w) = \max_{i=1, \dots, N} \{|w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}.$$

Мы же будем использовать следующую величину, локально билиппшицево эквивалентную d_∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Пусть $\mathbb{G}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности N и $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$. Определим величину d_2 следующим образом:

$$d_2(v, w) = \max_{k=1, \dots, M} \left\{ \left(\sum_{j: \deg X_j = k} w_j^2 \right)^{\frac{1}{2k}} \right\}.$$

Свойство 1.12. Величина $d_2(v, w)$ локально является квазиметрикой: она неотрицательна (и равна нулю тогда и только тогда, когда $v = w$), обладает свойством симметричности и для всякой окрестности $D \subset \mathbb{G}$ существует константа $C_D < \infty$ такая, что обобщенное неравенство треугольника

$$d_2(v, w) \leq C_D(d_2(v, u) + d_2(u, w))$$

верно для всех $v, u, w \in D$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.13. Шар в квазиметрике d_2 радиуса r с центром в точке v , равный $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$, обозначим символом $\text{Box}_2(v, r)$.

Свойство 1.14. Рассмотрим точку $v \in \mathbb{G}$ и $(w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_v(w_1, \dots, w_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v).$$

Известно, что θ_v — гладкий диффеоморфизм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Набор $\{w_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (относительно $v \in \mathbb{G}$) точки $w = \theta_v(w_1, \dots, w_N)$.

Свойство 1.16. Образ шара $\text{Box}_2(v, r)$ при отображении θ_v^{-1} — декартово произведение шаров, диаметры которых равны $2r, 2r^2, \dots, 2r^M$.

Свойство 1.17. С помощью свойства 1.16 непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна

$$\nu = \sum_{i=1}^M k \dim V_k.$$

Опишем классы исследуемых в статье отображений.

Предположение 1.18. Будем рассматривать $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, где

(1) $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество;

(2) $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности $N + \tilde{N}$ с базисными полями $X_1, \dots, X_N$ и $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$, алгеброй Ли векторных полей $\hat{V} = \bigoplus_{k=1}^{\hat{M}} \hat{V}_k$, где поля $X_1, \dots, X_{n_1}, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{n}_1}$ составляют базис $\hat{V}_1$, а $X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k}, \tilde{X}_{\tilde{n}_{k-1}+1}, \dots, \tilde{X}_{\tilde{n}_k}$ — базис $\hat{V}_k$, $k = 2, \dots, \hat{M}$, единицей $\hat{\mathbf{0}}$ и квазиметрикой $\hat{d}_2$;

(3) $\mathbb{G}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности N с базисными полями $X_1, \dots, X_N$, алгеброй Ли векторных полей $V = \bigoplus_{k=1}^M V_k$, где поля $X_1, \dots, X_{n_1}$ составляют базис V_1 , а $X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_{n_k}$ — базис V_k , $k = 2, \dots, M$, единицей $\mathbf{0}$ и квазиметрикой d_2 ;

(4) $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности $\tilde{N}$ с базисными полями $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$, алгеброй Ли векторных полей $\tilde{V} = \bigoplus_{k=1}^{\tilde{M}} \tilde{V}_k$, где поля $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\tilde{n}_1}$ составляют базис $\tilde{V}_1$, а $\tilde{X}_{\tilde{n}_{k-1}+1}, \dots, \tilde{X}_{\tilde{n}_k}$ — базис $\tilde{V}_k$, $k = 2, \dots, \tilde{M}$, единицей $\tilde{\mathbf{0}}$ и квазиметрикой $\tilde{d}_2$;

(5) $\hat{\mathbf{0}} = (\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{0}})$ и $\hat{M} = \max\{M, \tilde{M}\}$;

(6) каждая координатная функция φ_i имеет гладкость $\left[\frac{\hat{M}+p-1}{p}\right]$ по переменным степени p , $p = 1, \dots, M$. Здесь $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{\tilde{N}}(x)) = \theta_{\mathbf{0}}^{-1}(\varphi(x))$, $x \in \Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.19. Группы $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — подмногообразия $\mathbb{U}$, которые пересекаются по их единицам. Это пересечение совпадает с единицей $\hat{\mathbf{0}}$ группы $\mathbb{U}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.20. Мы не накладываем строгих условий на соотношение M и $\tilde{M}$; см. подробности в теоремах 2.16, 2.18, 2.24 и их доказательствах, а также свойство 2.22. Единственное ограничение состоит в том, что $\tilde{M}$ не может быть строго больше M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.21. Требование п. (6) остается корректным, если точку $\tilde{\mathbf{0}}$ заменить произвольной точкой; см. подробнее в [36].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22. Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$ и $\mathbb{U}$ — нильпотентные градуированные группы Ли, удовлетворяющие условиям предположения 1.18, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. *Отображение-график* $\varphi_{\Gamma} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$ сопоставляет точке x элемент

$$\mathbb{U} \ni \varphi_{\Gamma}(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(x),$$

где

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(\tilde{\mathbf{0}}) = \varphi(x) \in \tilde{\mathbb{G}}.$$

Опишем специфику отображений-графиков, а именно связь их свойств со свойствами отображений, по которым они строятся. Приведенные результаты будут использованы далее при вычислении локального искажения меры и доказательства формулы площади.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.23. Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ называется *липшицевым во внутреннем смысле*, или *липшицевым в субримановом смысле*, если

$$\tilde{d}_2(\varphi(y), \varphi(x)) \leq L d_2(y, x)$$

для $L < \infty$ и всех $x, y \in \Omega$.

В силу формул (3) легко видеть, что отображения-графики в общем случае не являются липшицевыми в субримановом смысле, если таковым является исходное отображение (в отличие от классического случая; см., например, частный случай в [37]). Отображения-графики гёльдеровы с показателем $1/\widehat{M}$:

$$\hat{d}_2(\varphi_\Gamma(y), \varphi_\Gamma(x)) \leq K d_2(x, y)^{1/\widehat{M}}, \quad 0 < K < \infty.$$

Несмотря на то, что разработанная для липшицевых отображений теория субримановой дифференцируемости неприменима к отображениям-графикам, существуют способы описать их метрические свойства через дифференциальные характеристики исходных отображений (см. ниже теорему 1.32). Для детального описания напомним основные определения и результаты теории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.24 ([35], см. также [38]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(y), \mathcal{L}_x(y)) = o(d_2(x, y)) \quad \text{при } \Omega \ni y \rightarrow x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathcal{L}_x$ обозначается символом $\hat{D}\varphi(x)$.

Теорема 1.25 ([35], см. также [38] для измеримых множеств). Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа и $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда φ является *hc-дифференцируемым почти всюду*.

Важным подклассом липшицевых в субримановом смысле отображений являются контактные отображения класса C_H^1 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.26. Отображение φ нильпотентных градуированных групп является *контактным отображением класса C_H^1* , если его горизонтальные производные существуют и непрерывны, а образы горизонтальных полей принадлежат горизонтальному подрасслоению образа.

Известно [38], что такие отображения, определенные на открытых множествах $\Omega \subset \mathbb{G}$ групп Карно, непрерывно *hc-дифференцируемы всюду*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.27. Случай определенного на группе Карно контактного отображения φ для задачи, решаемой в статье, является основным. О распространении результатов на классы неконтактных отображений нильпотентных градуированных групп говорится отдельно; см. теорему 2.18.

Следующее понятие является основным инструментом работы с отображениями-графиками и другими классами гёльдеровых в субримановом смысле отображений неголономных структур. Оно является обобщением субримановой дифференцируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.28 (см., например, [36]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы, $\Omega \subset \mathbb{G}$, $\psi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ и функция $\tilde{d} : \psi(\Omega) \times \tilde{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ такова, что $\tilde{d}(x, x) = 0$ и $\tilde{d}(x, y) = \tilde{d}(y, x)$ для всех точек ее области определения. Будем говорить, что ψ *полиномиально субриманово дифференцируемо*, или *полиномиально h -дифференцируемо*, в (предельной) точке $x \in \Omega$ относительно $\tilde{d}$, если существует отображение $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ такое, что

$$1) \tilde{d}(\psi(w), \mathcal{L}_x(w)) = o(d_2(x, w)), \Omega \ni w \rightarrow x;$$

$$2) \mathcal{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w), \text{ где компоненты } L_x \text{ — полиномы по } w_1, \dots, w_N,$$

$$\text{а } \exp\left(\sum_{j=1}^N w_j X_j\right)(x) = w.$$

Отображение $\mathcal{L}_x$ называется *полиномиальным субримановым дифференциалом*, или *полиномиальным h -дифференциалом*, отображения ψ в точке x .

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.29. Здесь и далее полиномиальный субриманов дифференциал $\mathcal{L}_x$ отображения ψ в точке x будем обозначать символом $\hat{D}_P \psi(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.30. Требуемые в определении 1.28 свойства не обеспечивают единственности в выборе полиномиального h -дифференциала (см. подробнее в [36]). По умолчанию будем рассматривать минимально возможный приближающий отображение полином. При необходимости более точной аппроксимации вид полиномиального h -дифференциала оговорен специально.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.31. Далее в статье символ $(\varphi(x))^\eta$ обозначает произведение $\prod_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x)^{\eta_j}$ для набора $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ из определения 1.22 и мультииндекса

$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{\tilde{N}})$, а символ $(\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^\tau$ — произведение $\prod_{j=1}^{\tilde{N}} (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)_j^{\tau_j}$ для мультииндекса $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{\tilde{N}})$, где $((\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)_1, \dots, (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)_{\tilde{N}})$ — координаты $\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle$ относительно $\varphi(x)$ в базисе $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$.

Теорема 1.32 [36]. Пусть $\varphi \in C_H^1(\Omega, \tilde{\mathbb{G}})$. Отображение-график $\varphi_\Gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$ полиномиально субриманово дифференцируемо всюду, и $\hat{D}_P \varphi_\Gamma(x)$ сопоставляет элементу $\exp\left(\sum_{p=1}^N y_p X_p\right)(x)$ в координатах относительно $\varphi_\Gamma(x)$ набор $(\Delta_1(x, y), \dots, \Delta_N(x, y), \tilde{\Delta}_1(x, y), \dots, \tilde{\Delta}_{\tilde{N}}(x, y))$, где

$$\begin{cases} \Delta_i(x, y) = y_i + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_i, \\ \kappa, |\lambda|+|\mu| > 0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{X_i} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ \quad + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \tau > 0}} L_{\alpha, \beta, \gamma, \tau}^{X_i} (-\varphi(x))^\beta (\varphi(x))^\gamma y^\alpha (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^\tau, \\ \tilde{\Delta}_j(x, y) = (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)_j + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \kappa, |\lambda|+|\mu| > 0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\tilde{X}_j} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ \quad + \sum_{\substack{|\alpha+\beta+\gamma+\tau|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \tau > 0}} L_{\alpha, \beta, \gamma, \tau}^{\tilde{X}_j} (-\varphi(x))^\beta (\varphi(x))^\gamma y^\alpha (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^\tau, \end{cases} \quad (4)$$

$y = (y_1, \dots, y_N)$, а $K_{\kappa, \mu, \lambda}^{X_i}$, $L_{\alpha, \beta, \gamma, \tau}^{X_i}$, $K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\tilde{X}_j}$ и $L_{\alpha, \beta, \gamma, \tau}^{\tilde{X}_j}$ — константы для всех мульт-

ти индексов $\kappa, \mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \tau, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, \tilde{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.33. Подчеркнем, что полиномиальный субриманов дифференциал зависит от фиксированной точки x и от точек y из ее окрестности.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.34. Действие полиномиального субриманова дифференциала отображения ψ в точке x на элементе y будем обозначать символом $\hat{D}_P\psi(x)\langle y \rangle$.

Из установленных в теореме 1.32 выражений координат полиномиального субриманова дифференциала видно, что неголономные структуры образа и прообраза не являются согласованными, т. е. координаты при каждом базисном поле X не всегда сравнимы с величиной $O(d_\infty(x, y)^{\deg X})$. Чтобы такое условие локально выполнялось, необходимо изменение базиса в образе в окрестности $\varphi_\Gamma(x)$. Введем понятие адаптированного базиса и сформулируем результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.35 [36]. Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\psi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ полиномиально hc -дифференцируемо. Если координаты $\{\kappa_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ полиномиального субриманова дифференциала $\hat{D}_P\psi(x)\langle y \rangle$, рассмотренные относительно точки $\psi(x)$ в базисе $\{Y_i\}_{i=1}^{\tilde{N}}$, обладают свойством $|\kappa_j| = O(d_\infty(x, y)^{\deg \tilde{X}_j})$ для всех y из некоторой окрестности точки $x, j = 1, \dots, \tilde{N}$, то базис $\{Y_i\}_{i=1}^{\tilde{N}}$ называется *внутренним*, или *адаптированным* (в точке x).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.36. Рассмотрим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E_{\dim V_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{\dim V_3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_{\dim V_M} \\ (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1, V_1}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2, V_2}(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_3, V_3}(x) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_M, V_M}(x) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $E_{\dim V_l}$ — единичные матрицы размера $\dim V_l, l = 1, \dots, M$, а $(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j, V_j}(x), j = 1, \dots, \min\{M, \tilde{M}\}$, — диагональные блоки матрицы hc -дифференциала отображения φ , и $(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_M, V_M}(x) = \emptyset$, если $\tilde{M} < M$. Если $\tilde{M} > M$, то в матрице (5) присутствуют дополнительные нулевые строки.

Оператор, полученный из дифференциала $D(\hat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$, матрица которого совпадает с матрицей (5) (без изменения базиса), будем обозначать символом $D_{\text{diag}}(\hat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)$.

Теорема 1.37 [36]. Пусть φ в условиях предположения 1.18 является контактным отображением, а $\mathbb{G}$ — группа Карно. Тогда для всех $x \in \Omega$ существует адаптированный базис $\{^x X_1, \dots, ^x X_N, ^x \tilde{X}_1, \dots, ^x \tilde{X}_{\tilde{N}}\}$ такой, что множество

$$(^x \tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)} \circ \theta_{\varphi_\Gamma(x)}^{-1})(D_{\text{diag}}(\hat{D}_P\varphi_\Gamma(x))(x)\langle \text{Box}(x, r) \rangle)$$

совпадает с $\hat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle \text{Box}(x, r) \rangle$. Здесь $\theta_{\varphi_\Gamma(x)}$ — отображение нормальных координат в исходном базисе, а $^x \tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}$ — в адаптированном базисе.

Справедливо следующее утверждение для рассматриваемых классов гёльдеровых отображений.

Теорема 1.38 [36]. Если φ не обладает свойством контактности, а все остальные условия предположения 1.18 выполнены, то справедливы результаты теорем 1.32 и 1.37 с заменой координат $\widehat{D}\varphi(x)\langle y \rangle$ координатами $\widehat{D}_R\varphi(x)\langle y \rangle$. В частности, в матрице (5) блоки $(\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_k, V_k}(x)$ заменяются на $D(\widehat{D}_R\varphi)_{\widetilde{V}_k, V_k}(x)$, $k = 1, \dots, \min\{M, \widetilde{M}\}$. Здесь $\widehat{D}_R\varphi(x)$ приближает φ в точке y с точностью до $o(d_2(x, y)^{\widehat{M}})$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.39. Если $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i^x X_i + \sum_{j=1}^{\widetilde{N}} w_{N+j}^x \widetilde{X}_j\right)(v)$, то

$${}^x \hat{d}_2(v, w) = \max_{k=1, \dots, \max\{M, \widetilde{M}\}} \left\{ \left(\sum_{i: \deg X_i = k} w_i^2 + \sum_{j: \deg \widetilde{X}_j = k} w_{N+j}^2 \right)^{\frac{1}{2k}} \right\}.$$

2. Сублоренцевы структуры и мера на поверхностях

Опишем сублоренцеву структуру на $\mathbb{U}$. Так как на таких структурах существуют направления, квадрат длины вдоль которых отрицателен, разобьем базисные векторные поля в каждом $\widehat{V}_k$ по этому признаку на «положительные» и «отрицательные», $k = 1, \dots, \widehat{M}$.

ОПИСАНИЕ 2.1. Положим

$$\{X_1, \dots, X_N, \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\widetilde{N}}\} = \{Y_1, \dots, Y_{\widehat{N}}\},$$

где $\widehat{N} = N + \widetilde{N}$. Далее, пусть

$$\widehat{V}_k = \text{span}\{\widehat{V}_k^+, \widehat{V}_k^-\}, \quad \text{где } \widehat{V}_k^+ \cap \widehat{V}_k^- = \{0\} \text{ и } \widehat{V}_k^- \subseteq \widetilde{V}_k, \quad k = 1, \dots, \widehat{M},$$

причем каждое базисное поле из $\widehat{V}_k$ принадлежит либо $\widehat{V}_k^+$, либо $\widehat{V}_k^-$, $k = 1, \dots, \widehat{M}$.

Приведем определения сублоренцевых расстояния и меры сразу для внутреннего базиса, так как они будут использоваться только в этом виде. Для исходного базиса все определения аналогичны (см. также [30]).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.2. Для каждого фиксированного $x \in \Omega$ положим $\{{}^x Y_1, \dots, {}^x Y_{\widehat{N}}\} = \{{}^x X_1, \dots, {}^x X_N, {}^x \widetilde{X}_1, \dots, {}^x \widetilde{X}_{\widetilde{N}}\}$. Здесь каждое адаптированное поле ${}^x Y_k$ заменяет соответствующее базисное поле Y_k , $k = 1, \dots, \widehat{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Фиксируем $x \in \Omega$. Для векторного поля $T = \sum_{j=1}^{\widehat{N}} y_j^x Y_j$ с постоянными коэффициентами положим *квадратную сублоренцеву норму* равной

$${}^x \mathbf{d}_2^{SL^2}(T) = \max_{k=1, \dots, \widehat{M}} \left\{ \left| \text{sgn} \left(\sum_{j: Y_j \in \widehat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}_k^-} y_j^2 \right) \cdot \left| \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \widehat{V}_k^-} y_j^2 \right|^{1/k} \right| \right\}.$$

Квадратная сублоренцева норма ${}^x\mathbf{d}_2^{SL^2}(T(x_0))$ вектора, равного

$$T(x_0) = \sum_{j=1}^{\widehat{N}} y_j {}^xY_j(x_0),$$

определяется аналогично.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть $w = \exp(T)(v)$, где $T = \sum_{j=1}^{\widehat{N}} y_j {}^xY_j$. Положим ${}^x\mathfrak{d}_2^2(v, w) = {}^x\mathbf{d}_2^{SL^2}(T)$. Величину ${}^x\mathfrak{d}_2^2(v, w)$ будем называть *квадратным сублоренцевым расстоянием*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Шар относительно ${}^x\mathfrak{d}_2^2$ с центром в точке v радиуса r — это множество

$${}^x\text{Box}_2^{\mathfrak{d}}(v, r) = \{w \in \mathbb{U} : {}^x\mathfrak{d}_2^2(v, w) < r^2\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Для исследования метрических свойств поверхностей на сублоренцевых структурах будет достаточно квадратной сублоренцевой нормы и квадратного сублоренцева расстояния (см. подробности в [30]).

Здесь и далее в статье перегруппируем поля на $\mathbb{U}$ по степеням.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. При отображении θ_v^{-1} шар ${}^x\text{Box}_2^{\mathfrak{d}}(v, r)$ переходит в декартово произведение множеств

$$\left\{ (y_{n_{k-1}+\tilde{n}_{k-1}+1}, \dots, y_{n_k+\tilde{n}_k}) : \right. \\ \left. \text{sgn}\left(\sum_{j:Y_j \in \widehat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j:Y_j \in \widehat{V}_k^-} y_j^2 \right) \cdot \left| \sum_{j:Y_j \in \widehat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j:Y_j \in \widehat{V}_k^-} y_j^2 \right| < r^{2k} \right\},$$

$k = 1, \dots, \widehat{M}$, $n_0 = \tilde{n}_0 = 0$. Здесь мы предполагаем, что координаты $(y_1, \dots, y_{\widehat{N}})$ упорядочены по степеням соответствующих векторных полей. Иными словами, координаты $(y_{n_{k-1}+\tilde{n}_{k-1}+1}, \dots, y_{n_k+\tilde{n}_k})$ соответствуют полям из $\widehat{V}_k$.

В геометрии Минковского для теории максимальных поверхностей интерес представляют пространственноподобные поверхности, т. е. те, касательные векторы к которым имеют положительную длину [1]. В [30] сформулировано обобщение такого понятия и установлено соответствующее свойство для широких классов поверхностей на двуступенчатых сублоренцевых структурах. Дело в том, что у классов поверхностей-графиков (см., например, [29, 30]) касательных векторов может не существовать на множестве положительной меры. Поэтому определение пространственноподобия сформулировано в терминах светового конуса: локально поверхность должна лежать вне любого светового конуса с вершиной на этой поверхности. В классическом случае оба понятия совпадают. Сформулируем признак пространственноподобия таким же образом, как в [30].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Пусть $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, биективно на свой образ, $S = \psi(\Omega)$ и $v \in S$. Множество

$$\left\{ \exp\left(\sum_{j=1}^{\widehat{N}} y_j {}^{\psi^{-1}(v)}Y_j \right)(v) : \sum_{j:Y_j \in \widehat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j:Y_j \in \widehat{V}_k^-} y_j^2 = 0, \ k = 1, \dots, \widehat{M} \right\}$$

называется *световым конусом* с центром в v .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9 (ср. [23]). Поверхность-образ $S \subset \mathbb{U}$ биективного на свой образ отображения $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, называется *пространственноподобной* (относительно адаптированного базиса), если для любой ее точки $v \in S$ существует $r_0 > 0$ такое, что пересечение $S \cap B(v, r)$ (за исключением v) лежит строго вне светового конуса с центром в v для любого $r \leq r_0$, т. е. в множестве

$$\left\{ \exp \left(\sum_{j=1}^{\hat{N}} y_j^{\psi^{-1}(v)} Y_j \right) (v) : \max_{k=1, \dots, \hat{M}} \left\{ \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^+} y_j^2 - \sum_{j: Y_j \in \hat{V}_k^-} y_j^2 \right\} > 0 \right\}.$$

Здесь B — шар в (суб)римановой (квази)метрике.

Для рассматриваемых в статье отображений, включая принадлежащие классу C_H^1 , отображение, обратное к графику, также будет непрерывным. Чтобы в этом убедиться, достаточно повторить рассуждения, используемые для вывода (4) в [36], для обратного с учетом того, что координаты, соответствующие полям $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{\hat{N}}$, должны быть нулевыми. Отсюда выводится зависимость компонент $\theta_{\varphi(x)}^{-1}(\varphi(y))$ от набора $\theta_{\varphi(x)}^{-1}(\varphi_\Gamma(y))$, а также оценки, доказывающие непрерывность φ_Γ^{-1} . Поэтому при проверке свойства пространственноподобия достаточно рассматривать либо $S \cap B(v, r)$, либо $\varphi_\Gamma(U(\varphi_\Gamma^{-1}(v)))$, где $U(\varphi_\Gamma^{-1}(v))$ — некоторая окрестность $\varphi_\Gamma^{-1}(v)$.

Введем для пространственноподобных поверхностей-графиков следующую меру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Фиксируем точку $p \in \Omega$ и ее окрестность $\mathcal{U} \Subset \Omega$, $\mathcal{U} \ni p$, на которой величина $o(1)$ из определения hc -дифференцируемости достаточно мала, и рассмотрим $\delta_0 > 0$. Пусть $S \subset \varphi_\Gamma(\mathcal{U})$ и $\delta \in (0, \delta_0)$. Положим *внутреннюю*, или *адаптированную*, меру множества $A \subset S$ равной

$$^{SL} \mathcal{H}_\Gamma^\nu(A) = \prod_{j=1}^M \omega_{\dim V_j} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \varphi_\Gamma^{-1}(x_i) \text{Box}_2^\delta(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\}.$$

Глобально такая мера вводится аналогично работе [30] и др.: область определения исчерпывается компактными подмножествами, каждое из них покрывается конечным числом окрестностей, обладающих свойствами $\mathcal{U}$, таким образом, что найдется $r_0 > 0$, что на любом шаре меньшего радиуса $o(1)$ из определения hc -дифференцируемости не будет превосходить некоторой фиксированной величины, для всякого такого покрытия выбирается достаточно малое δ_0 (определяемое величиной r_0), а покрытие $A \subset \varphi_\Gamma(\Omega)$ формируется из множеств $\{\varphi_\Gamma^{-1}(x_i) \text{Box}_2^\delta(x_i, r_i) \cap \varphi_\Gamma(\mathcal{U}(\varphi_\Gamma^{-1}(x_i)))\}_{i \in \mathbb{N}}$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.11. Так как в силу теоремы 1.37 дифференциалы полиномиальных субримановых дифференциалов во внутреннем базисе имеют вид (5), то при перегруппировке полей по степеням они имеют блочно-диагональный вид. В этом случае каждый блок состоит из единичной матрицы размера $\dim V_i$ и либо $(\dim \tilde{V}_i \times \dim V_i)$ -блока $(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}$ матрицы $\hat{D}\varphi$, либо $(\dim \tilde{V}_i \times \dim V_i)$ -блока $D(\hat{D}_P\varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}$ матрицы $D(\hat{D}_P\varphi)$, тогда, перегруппируя при необходимости поля в образе, представим эти блоки как объединение частей $(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}^+$ и $(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}^-$ (соответственно $D(\hat{D}_P\varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}^+$ и $D(\hat{D}_P\varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}^-$), где «плюсовые» части состоят из строк, соответствующих полям из $\hat{V}_i^+$, а «минусовые» — из строк,

соответствующих полям из $\widehat{V}_i^-$, $i = 1, \dots, \widetilde{M}$. Таким образом, для контактных отображений (5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_1, V_1}^+(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_1, V_1}^-(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & E_{\dim V_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_2, V_2}^+(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_2, V_2}^-(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{\dim V_3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_3, V_3}^+(x) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_3, V_3}^-(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_{\dim V_M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_M, V_M}^+(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_M, V_M}^-(x) \end{pmatrix}$$

с учетом комментариев насчет соотношения $\widetilde{M}$ и M в обозначении 1.36. Для гёльдеровых отображений вид матрицы аналогичный с упомянутыми выше изменениями.

Предположение 2.12. Для $(\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_k, V_k}^-$ будем полагать, что квадраты длин их столбцов (т. е. евклидовых норм) не превосходят $\frac{1}{\dim V_k} - c$ соответственно, $c > 0$, $k = 1, \dots, \widetilde{M}$. Кроме того, будем считать, что $M \geq \widetilde{M}$ и все $\dim V_1, \dots, \dim V_M$ положительны.

Свойство 2.13. Из предположения 2.12 следует [30, 39], что при $M \geq \widetilde{M}$ и положительных $\dim V_1, \dots, \dim V_M$

- 1) $\det(E_{\dim V_k} - (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_k, V_k}^-(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_k, V_k}^-(x)) \geq s > 0$, $k = 1, \dots, \widehat{M}$;
- 2) квадратичная форма, определяемая матрицей

$$E_{\dim V_k} - (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_k, V_k}^-(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_k, V_k}^-(x),$$

положительно определена, $k = 1, \dots, \widehat{M}$.

Замечание 2.14. При решении задач о метрических характеристиках φ утверждения свойства 2.13 можно взять в качестве описания требуемых свойств φ (вместо условий предположения 2.12) в зависимости от того, какое утверждение легче проверить.

Свойство 2.15. В условиях предположений 1.18 и 2.12 функция множества $\Phi: A \mapsto {}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu(\varphi_\Gamma(A))$ обладает следующими свойствами:

- 1) она абсолютно непрерывна относительно меры $\mathcal{H}^N$ на $\Omega \subset \mathbb{G}$.
- 2) она аддитивна на отдаленных шарах.

Теорема 2.16. Пусть выполнены условия предположений 1.18 и 2.12 (или свойства 2.13) и отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ контактно. Тогда поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ пространственноподобна в смысле определения 2.9 и сублоренцева ${}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ -мера

образа $\varphi_\Gamma(\Omega) \subset \mathbb{U}$ вычисляется по формуле

$$\int_{\Omega} {}^{SL} \mathcal{J}(\varphi, v) d\mathcal{H}^\nu(v) = \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d {}^{SL} \mathcal{H}_\Gamma^\nu(y), \quad (6)$$

где сублоренцев якобиан ${}^{SL} \mathcal{J}(\varphi, v)$ равен

$$\prod_{j=1}^M \sqrt{\det(E_{\dim V_j} + (\widehat{D}\varphi^+)^*_{\tilde{V}_j, V_j}(v)(\widehat{D}\varphi^+)_{\tilde{V}_j, V_j}(v) - (\widehat{D}\varphi^-)^*_{\tilde{V}_j, V_j}(v)(\widehat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}(v))}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.17. Определение пространственноподобия, как и в [23], зависит от вторых производных (см. подробности и комментарии в [30] и др.).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.16. Общая идея доказательства основана на идеях из [40] (см. также [30]). Опишем основные шаги и прокомментируем идеи доказательства каждого из ключевых утверждений.

ШАГ 1: поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ пространственноподобна в смысле определения 2.9. Для каждой точки поверхности $\varphi_\Gamma(\Omega)$ это утверждение следует из предположения 2.12, что проверяется непосредственными вычислениями (см. [30]). Размер окрестности из определения 2.9 зависит от точности аппроксимации отображения-графика φ_Γ его полиномиальным субримановым дифференциалом, а именно от величины $o(1)$ из определения полиномиальной субримановой дифференцируемости (см. теоремы 1.37, 1.38).

ШАГ 2: справедливо утверждение свойства 2.15 для функции множества $\Phi : A \mapsto {}^{SL} \mathcal{H}_\Gamma^\nu(\varphi_\Gamma(A))$, $A \subset \Omega$. Это следует из липшицевости отображения-графика и его полиномиального субриманова дифференциала (относительно ${}^x \mathfrak{d}_2^2$ и адаптированного базиса, см. (5)) и стандартных аргументов, полностью аналогичных приведенным в [30] и др.

ШАГ 3: прообразы сублоренцевых шаров, построенных в адаптированном базисе, при отображении-графике адекватно аппроксимируются прообразами этих же шаров при полиномиальном hc -дифференциале. Для поверхности $\varphi_\Gamma(\mathcal{U})$, $\mathcal{U} \Subset \Omega$, выведена следующая характеристика ее аппроксимируемости: при достаточно малых $r > 0$ справедливо

$$\mathcal{H}^N(\varphi_\Gamma^{-1}({}^v \text{Box}_2^3(\varphi_\Gamma(v), r))) = (1 + o(1)) \mathcal{H}^N(\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(v)^{-1}({}^v \text{Box}_2^3(\varphi_\Gamma(v), r))),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно по $v \in \mathcal{U} \Subset \Omega$. Далее это свойство вместе с явной формулой вычисления меры (см. следующий шаг) применено для вывода локального значения адаптированной меры Хаусдорфа поверхности-графика.

Утверждение этого шага, как и последующих, вытекает из аргументов [30] и др., приведенных почти дословно с очевидными изменениями.

ШАГ 4: мера пересечения образа $\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(v)$ с ${}^v \mathfrak{d}_2^2$ -шаром явно зависит от значений субриманова дифференциала. Найдено аналитическое выражение $\mathcal{H}^N$ -меры множества $\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(v)(\mathcal{U}) \cap {}^v \text{Box}_2^3(\varphi_\Gamma(v), r)$ с точностью до множителя $1 + o(1)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно по $v \in \mathcal{U} \Subset \Omega$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}^N(\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(v)(\mathcal{U}) \cap {}^v \text{Box}_2^3(\varphi_\Gamma(v), r)) \\ &= \prod_{j=1}^M \omega_{\dim V_j} \cdot r^\nu \cdot Q(v) \cdot |{}^v g|_{\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(v)(\mathcal{U})}(\varphi_\Gamma(v)) \cdot (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где ${}^v g$ — риманов тензор в базисе $\{{}^v Y_k\}_{k=1}^{\hat{N}}$, и

$$Q(v) = \prod_{j=1}^M \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_j} + (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j, V_j}(v)^* (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j, V_j}(v))}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_j} + (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j, V_j}^+(v)^* (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j, V_j}^+(v) - (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j, V_j}^-(v)^* (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j, V_j}^-(v))}}.$$

ШАГ 5: существует прямая связь точной нижней грани сумм из определения 2.10 адаптированной сублоренцевой ${}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ -меры Хаусдорфа для $\varphi_\Gamma(\text{Box}_2(v, r))$ с точной нижней гранью сумм мер покрытия $\text{Box}_2(v, r)$ прообразами сублоренцевых шаров (из этого же определения) при отображении φ_Γ . Установлено, что точная нижняя грань сумм вида $\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu$ из определения 2.10 достигается тогда и только тогда, когда значение $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^N(\varphi_\Gamma^{-1}(v_j \text{Box}_2^\delta(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)))$ близко с точностью до множителя $1 + o(1)$ к точной нижней грани, равной $\mathcal{H}^N(\text{Box}_2(v, r))$, где шары $\{v_j \text{Box}_2^\delta(\varphi_\Gamma(v_j), r_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$, $r_j < \delta$, $j \in \mathbb{N}$, покрывают множество $\varphi_\Gamma(\text{Box}_2(v, r))$ и $o(1) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по $v \in \mathcal{U} \Subset \Omega$ (см. также [30]).

ШАГ 6: выведена производная функции множества $\Phi'(v) = {}^{SL}\mathcal{J}(\varphi, v)$, $v \in \Omega$, с помощью которой доказана формула площади (6). $\square$

В силу теоремы 1.38 справедлив следующий результат для графиков достаточно гладких неконтактных отображений.

Теорема 2.18. Пусть выполнены условия предположений 1.18, 2.12 (или свойства 2.13) с учетом замены элементов $\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle$ соответствующими элементами $\hat{D}_P\varphi(x)\langle y \rangle$ в условиях теоремы 1.38. Тогда поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ пространственноподобна в смысле определения 2.9 и сублоренцева ${}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ -мера образа $\varphi_\Gamma(\Omega) \subset \mathbb{U}$ вычисляется по формуле

$$\int_{\Omega} {}^{SL}\mathcal{J}(\varphi, v) d\mathcal{H}^\nu(v) = \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d {}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu(y),$$

где сублоренцев якобиан ${}^{SL}\mathcal{J}(\varphi, v)$ равен

$$\prod_{j=1}^M (\det(E_{\dim V_j} + D(\hat{D}_P\varphi^+)_{\tilde{V}_j, V_j}^*(v) D(\hat{D}_P\varphi^+)_{\tilde{V}_j, V_j}(v) - D(\hat{D}_P\varphi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}^*(v) D(\hat{D}_P\varphi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}(v)))^{1/2},$$

а $\hat{D}_P\varphi$ — полиномиальный h -с-дифференциал φ , аппроксимирующий это отображение с точностью до $o(d_2)^{\tilde{M}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все аргументы следуют той же схеме, что и вывод (6), с учетом теоремы 1.38 и аналога свойства 2.13 для $D(\hat{D}_P\varphi)_{\tilde{V}_j, V_j}^\pm$, $j = 1, \dots, \min\{M, \tilde{M}\}$. $\square$

Рассмотрим класс C_H^1 -отображений групп Карно в нильпотентные градуированные группы, представляющий независимый интерес. Подчеркнем, что в этом случае φ может не быть дифференцируемым в классическом смысле.

Предположение 2.19. Для $y \in \Omega$ определим

$$\varphi_y(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x) \tilde{X}_j\right)(y)$$

и рассмотрим точку

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \zeta_j \tilde{X}_j\right)(\varphi_y(x)), \quad (7)$$

где $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{\tilde{N}})$ принадлежит некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^{\tilde{N}}$. Далее будем считать, что в каждой точке x выполняется одно из следующих условий:

1) существует замена исходного базиса адаптированным, приводящая координаты точки (7) относительно $\varphi_\Gamma(x)$ к виду

$$\begin{cases} \Delta_i(x, y) = y_i + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \tau > 0}} \hat{L}_{\alpha, \tau}^{X_i}(x) y^\alpha \zeta^\tau, & i = 1, \dots, N \\ \tilde{\Delta}_j(x, y) = \zeta_j + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \tau > 0}} \hat{L}_{\alpha, \tau}^{\tilde{X}_j}(x) y^\alpha \zeta^\tau, & j = 1, \dots, \tilde{N}; \end{cases} \quad (8)$$

2) существует замена исходного базиса адаптированным, приводящая (4) к виду

$$\begin{cases} \Delta_i(x, y) = y_i + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \tau > 0}} \hat{L}_{\alpha, \tau}^{X_i}(x) y^\alpha (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^\tau, & i = 1, \dots, N, \\ \tilde{\Delta}_j(x, y) = (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)_j + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \tau > 0}} \hat{L}_{\alpha, \tau}^{\tilde{X}_j}(x) y^\alpha (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^\tau, & j = 1, \dots, \tilde{N}, \end{cases} \quad (9)$$

причем внутреннее расстояние $^x \hat{d}_2$ на $\mathbb{U}$, ограниченное на проходящее через $y \in \Omega$ интегральное многообразие $\tilde{\mathbb{G}}_y$ распределения $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$, локально билипшицево эквивалентно $\tilde{d}_2$.

Будем считать, что помимо выполнения одного из этих условий такая замена сохраняет на $\mathbb{U}$ треугольную таблицу коммутаторов с исходными степенями базисных полей: справедливы соотношения

$$[{}^x Y_i, {}^x Y_j](y) = \sum_{k: \deg Y_k \leq \deg Y_i + \deg Y_j} \hat{c}_{ijk}(x) \cdot {}^x Y_k(y) \quad (10)$$

для всех $i, j = 1, \dots, \tilde{N}$. Кроме того, будем считать, что $M \geq \tilde{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.20. Если в (4)

1) $K_{\kappa, \mu, \lambda}^Y \neq 0$ только при $|\kappa| = 1$,

2) $L_{\alpha, \beta, \gamma, \tau}^{\tilde{X}_j} \neq 0$ только при $\beta = \gamma = 0$,

то координаты (7) будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_i(x, y) = y_i + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_i, \\ |\kappa|=1, |\lambda|+|\mu|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{X_i} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ \quad + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \tau > 0}} L_{\alpha, \tau}^{X_i} y^\alpha \zeta^\tau, \quad i = 1, \dots, N, \\ \tilde{\Delta}_j(x, y) = \zeta_j + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ |\kappa|=1, |\lambda|+|\mu|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\tilde{X}_j} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ \quad + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \tau > 0}} L_{\alpha, \tau}^{\tilde{X}_j} y^\alpha \zeta^\tau, \quad j = 1, \dots, \tilde{N}, \end{array} \right.$$

$y = (y_1, \dots, y_N)$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_{\tilde{N}}(x))$, а $K_{\kappa, \mu, \lambda}^{X_i}$, $L_{\alpha, \tau}^{X_i}$, $K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\tilde{X}_j}$ и $L_{\alpha, \tau}^{\tilde{X}_j}$ — константы для всех мультииндексов κ , μ , λ , α , τ . Тогда для получения соотношений (8) (в частности, для приведения (4) к виду (9)) достаточно применить линейные преобразования базиса. Заметим, что в этом случае меняются только поля $X_1, \dots, X_{n_{M-1}}$.

ПРИМЕР 2.21. В [30] рассмотрен случай C_H^1 -отображений двуступенчатой группы Карно в двуступенчатую нильпотентную градуированную группу. Такие отображения удовлетворяют условиям предположения 2.19.

Другими примерами отображений, для которых выполняется условие 2.19, являются следующие случаи.

(1) $[X_i, \tilde{X}_j] = 0$ на $\mathbb{U}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \tilde{N}$; в этом случае формула (4) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_i(x, y) = y_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ \tilde{\Delta}_j(x, y) = (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)_j, \quad j = 1, \dots, \tilde{N}. \end{array} \right.$$

(2) Пусть $[\tilde{X}_j, X_i] \in \hat{V}_{\hat{M}}$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \tilde{N}$. Тогда координаты (7) относительно $\varphi_\Gamma(x)$ равны

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_i(x, y) = y_i + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg X_i, \\ |\kappa|=1, |\lambda|+|\mu|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{X_i} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ \quad + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg X_i, \\ |\alpha|=1, \tau > 0}} L_{\alpha, \tau}^{X_i} y^\alpha \zeta^\tau, \quad i = 1, \dots, N, \\ \tilde{\Delta}_j(x, y) = \zeta_j + \sum_{\substack{|\kappa+\mu+\lambda|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ |\kappa|=1, |\lambda|+|\mu|>0}} K_{\kappa, \mu, \lambda}^{\tilde{X}_j} y^\kappa (-\varphi(x))^\mu (\varphi(x))^\lambda \\ \quad + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ |\alpha|=1, \tau > 0}} L_{\alpha, \tau}^{\tilde{X}_j} y^\alpha \zeta^\tau, \quad j = 1, \dots, \tilde{N}, \end{array} \right.$$

и, кроме того, треугольная таблица коммутаторов после приведения коэффициентов полиномиального субриманова дифференциала к виду (9) сохраняется, так как коммутаторы добавленных к исходным полей будут нулевыми по выбору условия. Утверждение проверяется непосредственно формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Поля, входящие в алгебру Ли группы $\mathbb{G}$, остаются без изменений.

Свойство 2.22. Отображения, удовлетворяющие условиям предположения 2.19, аппроксимируются полиномиальным субримановым дифференциалом (9) относительно ${}^x\hat{d}_2$. Кроме того, координата $\varphi_\Gamma(y)$ относительно $\varphi_\Gamma(x)$, соответствующая полю xY_k , отличается от аналогичной координаты $\hat{D}_P\varphi_\Gamma(x)\langle y \rangle$ на величину $o(d_2(x, y)^{\deg Y_k})$, где Y_k — базисное поле из набора $\{X_i\}_{i=1}^N$ или $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$, $k = 1, \dots, \hat{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнено условие 2 предположения 2.19, то утверждение об аппроксимируемости следует из предположения о локальной билипшицевой эквивалентности расстояний. Утверждение о координатах следует из сохранения треугольной таблицы коммутаторов. Действительно, в этом случае групповая операция в адаптированном базисе имеет тот же вид, что и в исходном, с точностью до структурных констант.

Пусть теперь выполнено условие 1 предположения 2.19. Обозначим через $(\varphi_1^\Delta(x \rightarrow y), \dots, \varphi_N^\Delta(x \rightarrow y))$ такой набор координат, что

$$\varphi(y) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j^\Delta(x \rightarrow y) \tilde{X}_j\right)(\varphi(x)).$$

По свойству hc -дифференцируемости имеем

$$|\varphi_j^\Delta(x \rightarrow y) - (\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)_j| = o(d_2(x, y)^{\deg \tilde{X}_j}), \quad (11)$$

$j = 1, \dots, \tilde{N}$. Кроме того, по предположению $\varphi_\Gamma(y)$ в новом базисе имеет координаты

$$\begin{cases} \Phi_i(x, y) = y_i + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg X_i, \\ \alpha, \tau > 0}} \hat{L}_{\alpha, \tau}^{X_i}(x) y^\alpha (\varphi^\Delta(x \rightarrow y))^\tau, & i = 1, \dots, N, \\ \tilde{\Phi}_j(x, y) = \varphi_j^\Delta(x \rightarrow y) + \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h = \deg \tilde{X}_j, \\ \alpha, \tau > 0}} \hat{L}_{\alpha, \tau}^{\tilde{X}_j}(x) y^\alpha (\varphi^\Delta(x \rightarrow y))^\tau, & j = 1, \dots, \tilde{N}, \end{cases}$$

где $\varphi^\Delta(x \rightarrow y) = (\varphi_1^\Delta(x \rightarrow y), \dots, \varphi_N^\Delta(x \rightarrow y))$. Для доказательства точности аппроксимации оценим разности $|\Delta_i(x, y) - \Phi_i(x, y)|$ и $|\tilde{\Delta}_j(x, y) - \tilde{\Phi}_j(x, y)|$ и покажем, что они равны $o(d_2(x, y)^{\deg X_i})$ и $o(d_2(x, y)^{\deg \tilde{X}_j})$ соответственно, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, \tilde{N}$. Для $\deg X_i = 1$ утверждение следует из (11). Для $\deg X_i = 2$ выводим

$$\begin{aligned} |\Delta_i(x, y) - \Phi_i(x, y)| &\leq \sum_{\substack{|\alpha+\tau|_h=2, \\ \alpha, \tau > 0}} |\hat{L}_{\alpha, \tau}^{X_i}(x)| \cdot |y^\alpha| \cdot |(\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^\tau - (\varphi^\Delta(x \rightarrow y))^\tau| \\ &= O(d_2(x, y)) \cdot o(d_2(x, y)) = o(d_2(x, y)^2). \end{aligned}$$

Если утверждение верно для $|\alpha + \tau|_h = k$, $k \geq 2$, то случай $|\alpha + \tau|_h = k + 1$ сводится к доказанному ранее. Действительно, если $|\tau| = 1$, то $\deg X_\tau = k + 1 - |\alpha|_h$, поэтому утверждение является следствием (11). Пусть теперь $|\tau| > 1$. В этом случае $\tau = \tau_1 + \tau_2$, где $\tau_1, \tau_2 \neq 0$, и так как $|\alpha + \tau_1|_h \leq k$ и $|\alpha + \tau_2|_h \leq k$, то

$$\begin{aligned} &|(\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^{\tau_1\tau_2} - (\varphi^\Delta(x \rightarrow y))^{\tau_1\tau_2}| \\ &\leq |(\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^{\tau_1}| \cdot |(\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^{\tau_2} - (\varphi^\Delta(x \rightarrow y))^{\tau_2}| \\ &+ |(\varphi^\Delta(x \rightarrow y))^{\tau_2}| \cdot |(\hat{D}\varphi(x)\langle y \rangle)^{\tau_1} - (\varphi^\Delta(x \rightarrow y))^{\tau_1}| = o(d_2(x, y)^{|\tau|_h}). \end{aligned}$$

Следовательно, $|\Delta_i(x, y) - \Phi_i(x, y)| = o(d_2(x, y)^{\deg X_i})$. Случаи для $j = 1, \dots, \tilde{N}$ доказываются аналогичными аргументами.

Так как по условию адаптированный базис сохраняет треугольную таблицу коммутаторов с исходными степенями (см. (10)), формулы групповой операции для новых полей имеют тот же вид, что и для исходных; разница состоит только в структурных константах. Поэтому дальнейшие рассуждения в доказательстве того, что

$${}^x \hat{d}_2(\varphi_\Gamma(y), \hat{D}_P \varphi_\Gamma(x)(y)) = o(d_2(x, y)),$$

стандартны и основываются на формулах групповой операции (3). Свойство доказано. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.23. Степень полинома, подсчитанную относительно растяжений

$$(y_1, \dots, y_N) \mapsto \delta_\varepsilon(y_1, \dots, y_N) = (\varepsilon^{\deg X_1} y_1, \dots, \varepsilon^{\deg X_N} y_N),$$

будем называть *однородной*.

Следующее утверждение доказывает формулу площади для отображений-графиков, построенных по отображениям класса C_H^1 , которые, в общем случае, не являются дифференцируемыми в классическом смысле.

Теорема 2.24. Пусть выполнены условия предположений 1.18, пп. (1)–(5), и 2.12 (или свойства 2.13), $M \geq \tilde{M}$, отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ принадлежит классу C_H^1 и, кроме того, $\hat{V}_k^- = \tilde{V}_k$, $k = 2, \dots, \tilde{M}$. Тогда существует такая нормированная мера ${}^{SL} \mathcal{H}_b^\nu$, вычисляемая явно через значения полиномиального субриманова дифференциала, для которой справедлива формула площади

$$\int_{\Omega} {}^{SL} \mathcal{J}(\varphi, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d {}^{SL} \mathcal{H}_b^\nu(y),$$

где сублоренцев якобиан ${}^{SL} \mathcal{J}(\varphi, x)$ равен

$$\begin{aligned} & \sqrt{\det(E_{\dim V_1} + (\hat{D}\varphi^+)^*_{\tilde{V}_1, V_1}(x)(\hat{D}\varphi^+)_{\tilde{V}_1, V_1}(x) - (\hat{D}\varphi^-)^*_{\tilde{V}_1, V_1}(x)(\hat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_1, V_1}(x))} \\ & \times \prod_{j=2}^M \sqrt{\det(E_{\dim V_j} - (\hat{D}\varphi^-)^*_{\tilde{V}_j, V_j}(x)(\hat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}(x))}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО данной теоремы принципиально отличается от доказательства теоремы 2.16 на шагах 1 и 4 в силу разницы в структуре полиномиального субриманова дифференциала. Поэтому опишем только эти шаги (остальные проводятся по представленной выше схеме с очевидными изменениями).

ШАГ 1. Пусть $x \in \Omega$. Покажем, что существует такая окрестность $\mathcal{U} \subset \Omega$, $\mathcal{U} \ni x$, что для поверхности $\varphi_\Gamma(\mathcal{U})$ будут выполнены условия определения 2.9. Утверждение тривиально, если $M > \tilde{M}$ и в этом случае условие определения 2.9 справедливо для $y_{\dim V_{\tilde{M}}+1}, \dots, y_{\dim V_{\tilde{M}+1}}$ или для переменных большей степени,

где $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$, $x \in \mathcal{U}$, а y — точка из достаточно малой окрестности x , также лежащая в $\mathcal{U}$. В противном случае рассуждения такие же, как и для $M = \tilde{M}$.

Пусть $M = \tilde{M}$.

Обозначим $(\delta_1(x, y), \dots, \delta_{\widehat{N}}(x, y)) = {}^x\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}^{-1}(\varphi_\Gamma(y))$ (см. теорему 1.37). На достаточно малой окрестности $\mathcal{U}$ для ее точек x, y в силу предположения 2.12 (или п. 2 свойства 2.13) выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{\dim \widehat{V}_1^+} \delta_j(x, y)^2 - \sum_{l=\dim \widehat{V}_1^++1}^{\dim \widehat{V}_1} \delta_l(x, y)^2 \geq (c \dim V_1) \sum_{j=1}^{\dim V_1} y_j^2 - T_1 \varepsilon (d_2(x, y))^2, \quad (12)$$

где $T_1 < \infty$ зависит от $\widehat{D}\varphi$, и оно равномерно на $\mathcal{U}$. Если правая часть (12) положительна, то требуемое условие выполняется.

Рассмотрим случай, когда правая часть (12) не превосходит 0. Из (9) следует, что для $y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i X_i\right)(x)$ действие $\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(x)$ на этом элементе в нормальных координатах ${}^x\tilde{\theta}_{\varphi_\Gamma(x)}^{-1}$ представимо как умножение матрицы

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_1, V_1}^+(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_1, V_1}^-(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & E_{\dim V_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_2, V_2}^-(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & E_{\dim V_3} & \dots & 0 & 0 \\ * & * & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_3, V_3}^-(x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & \dots & 0 & 0 \\ * & * & * & \dots & * & E_{\dim V_M} \\ * & * & * & \dots & * & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_M, V_M}^-(x) \end{pmatrix} \quad (13)$$

на вектор $(y_1, \dots, y_N)^T$. Здесь на месте каждого элемента «*» в строке m и столбце l находится полином от $(y_1, \dots, y_N)$, являющийся однородным относительно растяжений

$$(y_1, \dots, y_N) \mapsto \delta_\varepsilon(y_1, \dots, y_N) = (\varepsilon^{\deg X_1} y_1, \dots, \varepsilon^{\deg X_N} y_N).$$

Иными словами, каждому элементу полинома вида y^μ можно сопоставить значение $|\mu|_h$ (см. также определение 1.9), которое не меняется. В этом случае однородная степень полинома, посчитанная таким образом, равна $|\mu|_h = \deg Y_m - \deg X_l$. Подчеркнем, что считаем поля $Y_1, \dots, Y_{\widehat{N}}$ упорядоченными по степеням. Фиксируем $k > 1$. Рассмотрим произвольный блок

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_k} \\ (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_k, V_k}^-(x) \end{pmatrix}$$

и оценим разность вида (12) для соответствующего блока матрицы (13)

$$\begin{pmatrix} * & * & E_{\dim V_k} & 0 & \dots & 0 \\ * & * & (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_k, V_k}^-(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

который действует на $(y_1, \dots, y_{n_k})$. Заметим, что это действие можно представить как

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_k} \\ (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_k, V_k}^-(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ y_{n_k} \end{pmatrix} + (c_1 \dots c_{n_{k-1}}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n_{k-1}} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где элементы столбца c_j сравнимы с $O(y^{\mu_j})$, $|\mu_j|_h = k - \deg X_j$. Для доказательства пространственноподобия необходимо проанализировать соотношение

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} y_i^2 - \sum_{j=1}^{\dim \tilde{V}_k} ((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_k, V_k}^-(x) \langle y_{n_{k-1}+1}, \dots, y_{n_k} \rangle_j)^2 - P^k(y_1, \dots, y_{n_k}) - T_k \varepsilon d_2(x, y)^{2k}, \quad (15)$$

где значения P^k определяются значениями во втором слагаемом в (14) и их произведениями с первым слагаемым, его однородная степень равна $2k$, а $T_k < \infty$ зависит от $\hat{D}\varphi$ и констант из (9) равномерно на $\mathcal{U}$. В силу предположения 2.12 имеем

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} y_i^2 - \sum_{j=1}^{\dim \tilde{V}_k} ((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_k, V_k}^-(x) \langle y_{n_{k-1}+1}, \dots, y_{n_k} \rangle_j)^2 \geq c \dim V_k \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} y_i^2.$$

Оценим значение полинома

$$P^k(y_1, \dots, y_{n_k}) = \sum_{\alpha: |\alpha|_h = 2k} K_\alpha(x) y^\alpha,$$

коэффициенты которого локально равномерно ограничены. Напомним, что в этом полиноме степень $y_{n_{k-1}+1}, \dots, y_{n_k}$ не превосходит 1. Обозначим

$$\mathbf{y}_l^2 = \sum_{i=n_{l-1}+1}^{n_l} y_i^2, \quad l = 1, \dots, M, \quad n_0 = 0, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M).$$

Заметим, что в этом случае $d_2(x, y) = \max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{1/m}\}$. Полином P^k в силу неравенства Гёльдера можно оценить величиной

$$\left| \sum_{\alpha: |\alpha|_h = 2k} K_\alpha(x) y^\alpha \right| \leq C \cdot \mathbf{y}_k \sum_{\substack{|\beta_1 + \beta_2|_h = k, \\ \beta_1, \beta_2 > 0}} \mathbf{y}^{\beta_1 + \beta_2} + C \cdot \sum_{\substack{|\lambda_1 + \lambda_2|_h = k, \\ |\lambda_3 + \lambda_4|_h = k, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0}} \mathbf{y}^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}.$$

Следовательно, (15) оценивается снизу величиной

$$c \dim V_k \mathbf{y}_k^2 - C \cdot \mathbf{y}_k \sum_{\beta: |\beta|_h = k} \mathbf{y}^\beta - C \cdot \sum_{\lambda: |\lambda|_h = 2k} \mathbf{y}^\lambda - T_k \varepsilon \max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{2k/m}\}, \quad (16)$$

где $\beta = \beta_1 + \beta_2$ и $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, и такой вывод справедлив для всех $k = 2, \dots, M$. Для доказательства пространственноподобия достаточно, чтобы (16) была положительна хотя бы для одного $k = 2, \dots, M$.

Предположим, что это не так. Напомним, что по условию рассматриваемого случая имеем

$$\mathbf{y}_1^2 \leq \frac{T_1 \varepsilon}{c \dim V_1} \max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{2/m}\}.$$

Тогда для $k = 2$ выводим следующую оценку снизу и предполагаем, что она неположительна:

$$\mathbf{y}_2^2 - \mathbf{y}_2 \cdot C_{1,2} \varepsilon \max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{2/m}\} - C_{2,2} \varepsilon \max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{4/m}\} \leq 0,$$

поэтому $\mathbf{y}_2 < C_{3,2} \varepsilon^{1/2} \max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{2/m}\}$.

Применяя аналогичные рассуждения для $k = 3, \dots, M$, приходим к выводу, что

$$\mathbf{y}_k < C_{3,k} \varepsilon' \max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{k/m}\}, \quad k = 1, \dots, M,$$

где величина ε' достаточно мала и зависит от аппроксимации отображения субримановым дифференциалом, а $C_{3,k}$ локально равномерно ограничена и не зависит от ε' . Иными словами, получено противоречие:

$$\max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{1/m}\} < C_0 \tilde{\varepsilon} \max_{m=1, \dots, M} \{\mathbf{y}_m^{1/m}\},$$

где произведение $C_0 \tilde{\varepsilon}$ может быть сколь угодно малым. Таким образом, хотя бы для одного $k \in [1, M]$ величина (16) и, следовательно, (15) положительна, поэтому поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ пространственноподобна.

Шаг 4. Пусть $\mathcal{H}_x^l$ — l -мерная мера Хаусдорфа, построенная относительно адаптированного в x базиса, $l \in \mathbb{N}$. Вычислим в координатах первого рода относительно $\varphi_\Gamma(x)$ (построенных относительно адаптированного в точке x базиса) $\mathcal{H}_x^N$ -меру пересечения B образа полиномиального субриманова дифференциала $\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(x) \langle \mathcal{U} \rangle$ и сублоренцева шара ${}^x \text{Box}_2^3(\varphi_\Gamma(x), r)$, $x \in \mathcal{U} \Subset \Omega$. Чтобы не усложнять обозначения, действующее в координатах первого рода отображение обозначим также символом φ , а соответствующий график — символом φ_Γ . В прообразе при необходимости будем тоже рассматривать координаты первого рода относительно x .

Структура (13) позволяет последовательно применить формулу коплощади для отображения проекции π_1 сначала на горизонтальное подпространство $\widehat{V}_1$, затем соответственно $\pi_2, \dots, \pi_{\widehat{M}-1}$ последовательно на $\widehat{V}_2, \dots, \widehat{V}_{\widehat{M}-1}$ (структура в координатах первого рода позволяет отождествлять точки множества $\widehat{V}_k$ и $\exp(\widehat{V}_k)(0)$, $k = 1, \dots, \widehat{M}$):

$$\begin{aligned} \int_B d\mathcal{H}_x^N &= \int_B \mathcal{J}_{\dim \widehat{V}_1}(\pi_1) d\mathcal{H}_x^N = \int_{\widehat{V}_1} d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_{\widehat{V}_1}) \int_{\pi_1^{-1}(y_{\widehat{V}_1}) \cap B} d\mathcal{H}_x^{N - \dim V_1}(y) \\ &= \int_{\widehat{V}_1} d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_{\widehat{V}_1}) \int_{\widehat{V}_2} d\mathcal{H}_x^{\dim V_2}(y_{\widehat{V}_2}) \int_{\pi_2^{-1}(y_{\widehat{V}_2}) \cap B} d\mathcal{H}_x^{N - \dim V_1 - \dim V_2}(y) \\ &= \int_{\widehat{V}_1} d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_{\widehat{V}_1}) \cdots \int_{\widehat{V}_{M-1}} d\mathcal{H}_x^{\dim V_{M-1}}(y_{\widehat{V}_{M-1}}) \int_{\pi_{M-1}^{-1}(y_{\widehat{V}_{M-1}}) \cap B} d\mathcal{H}_x^{\dim V_M}(y_{\widehat{V}_M}). \end{aligned} \quad (17)$$

Подчеркнем, что в правой части первые $M-1$ интегралов берутся по $\pi_1(B), \pi_2 \circ \pi_1^{-1}(y_{\widehat{V}_1}), \dots, \pi_{M-1} \circ \pi_{M-2}^{-1} \circ \dots \circ \pi_1^{-1}(y_{\widehat{V}_1})$, где $y_{\widehat{V}_1} \in \pi_1(B)$. Напомним, что $\widehat{M} = M$.

При проекции на горизонтальное подпространство получаем множество $(\Pi_1 \cap B_1)$, где

$$B_1 = \left\{ (y_1, \dots, y_{\dim \widehat{V}_1}) : \sum_{j=1}^{\dim \widehat{V}_1^+} y_j^2 - \sum_{k=1}^{\dim \widehat{V}_1^-} y_{\dim \widehat{V}_1^+ + k}^2 \leq r^2 \right\},$$

а Π_1 — $\dim V_1$ -мерная плоскость

$$\Pi_1 = \{ (y_1, \dots, y_{\dim V_1}, (\widehat{D}\varphi)_{\widehat{V}_1, V_1}(x)(y_1, \dots, y_{\dim V_1})) : (y_1, \dots, y_{\dim V_1}) \in \mathbb{R}^{\dim V_1} \}.$$

Его $\mathcal{H}_x^{\dim V_1}$ -мера в силу аналогичного результата из [30] равна

$$\frac{r^{\dim V_1} \omega_{\dim V_1} \sqrt{\det(E_{\dim V_1} + (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_1, V_1}(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_1, V_1}(x))}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_1} + (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_1, V_1}^\perp(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_1, V_1}^\perp(x) - (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_1, V_1}^-(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_1, V_1}^-(x))}}.$$

Так как далее последовательно применяем формулу коплощади для отображения проекции на каждое $\widehat{V}_k$, $k = 2, \dots, \widehat{M} - 1$, сначала исследуем блок (13) с наибольшим номером:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & E_{\dim V_M} \\ * & * & * & \cdots & * & (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}^-(x) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Представим N -мерный вектор y в виде $(y_{V \setminus V_M}, y_{V_M})$, где $y_{V_M} = (y_{N - \dim V_M + 1}, \dots, y_N)$. (Здесь и далее, где требуется, мы предполагаем, что строка транспонируется. Знак $(\cdot)^T$ не будем использовать, чтобы не загромождать текст.) Тогда (18) действует на y как

$$(y_{V_M} + \xi_1(y_{V \setminus V_M}), \widehat{D}_{V_M}(x) \langle y_{V_M} \rangle + \xi_2(y_{V \setminus V_M})),$$

где $\widehat{D}_{V_M}(x) = (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}^-(x) = (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x)$, а вектор-функции ξ_1 и ξ_2 — полиномы однородной степени M от переменных $y_1, \dots, y_{N - \dim V_M}$. Далее аргументы основываются на идее из [30]. Положим $z_{V_M} = y_{V_M} + \xi_1(y_{V \setminus V_M})$. Тогда образ отображения, задаваемого матрицей (18), совпадает с множеством

$$\{(z_{V_M}, \widehat{D}_{V_M}(x) \langle z_{V_M} \rangle + \xi(y_{V \setminus V_M})) : z_{V_M} \in \mathbb{R}^{\dim V_M}\}, \quad (19)$$

где $\xi(y_{V \setminus V_M}) = -\widehat{D}_{V_M}(x) \langle \xi_1(y_{V \setminus V_M}) \rangle + \xi_2(y_{V \setminus V_M})$. Так как точки множества (19) принадлежат сублоренцеву шару, имеем

$$\langle z_{V_M}, z_{V_M} \rangle - \langle \widehat{D}_{V_M}(x) \langle z_{V_M} \rangle + \xi(y_{V \setminus V_M}), \widehat{D}_{V_M}(x) \langle z_{V_M} \rangle + \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle \leq r^{2M}. \quad (20)$$

Сделаем еще одну замену переменных:

$$z_{V_M} \mapsto t_{V_M} = z_{V_M} - (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))^{-1} \widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle.$$

С учетом соотношения $E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x) = (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))^*$ получаем, что (20) представимо в виде

$$\begin{aligned} \langle t_{V_M}, (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x)) \langle t_{V_M} \rangle \rangle &\leq r^{2M} + \langle \xi(y_{V \setminus V_M}), \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle \\ &+ \langle (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))^{-1} \widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle, \widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Действительно, это следует из того, что при такой замене

$$\langle t_{V_M}, z_{V_M}^0 \rangle = \langle t_{V_M}, \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x) \langle z_{V_M}^0 \rangle + \widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle \rangle$$

для всякого t_{V_M} , где

$$z_{V_M}^0 = (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))^{-1} \widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \langle \xi(y_{V \setminus V_M}), \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle &+ \langle (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))^{-1} \widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle, \\ &\widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Так как в силу предположения 2.12 квадратичная форма

$$t_{V_M} \mapsto \langle t_{V_M}, (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x)) \langle t_{V_M} \rangle \rangle$$

положительно определена, множество

$$S_M = \{t_{V_M} : \langle t_{V_M}, (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x)) \langle t_{V_M} \rangle \rangle \leq r^{2M} + \kappa_M(y_{V \setminus V_M})\} \quad (21)$$

— эллипсоид и его $\mathcal{H}_x^{\dim V_M}$ -мера равна

$$\frac{\omega_{\dim V_M}(\sqrt{r^{2M} + \kappa_M(y_{V \setminus V_M})})^{\dim V_M}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))}},$$

где

$$\begin{aligned} \kappa_M(y_{V \setminus V_M}) &= \langle \xi(y_{V \setminus V_M}), \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle \\ &+ \langle (E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))^{-1} \widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle, \widehat{D}_{V_M}(x)^* \langle \xi(y_{V \setminus V_M}) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Тогда мера образа отображения (18) совпадает с мерой образа множества (21) при отображении $t_{V_M} \mapsto (t_{V_M}, \widehat{D}_{V_M}(x) \langle t_{V_M} \rangle)$, и она будет равна

$$\begin{aligned} &\omega_{\dim V_M}(\sqrt{r^{2M} + \kappa_M(y_{V \setminus V_M})})^{\dim V_M} \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_M} + \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_M} - \widehat{D}_{V_M}(x)^* \widehat{D}_{V_M}(x))}} \\ &= \omega_{\dim V_M}(\sqrt{r^{2M} + \kappa_M(y_{V \setminus V_M})})^{\dim V_M} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_M} + (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x))}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_M} - (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x))}}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что $\kappa_M(y_{V \setminus V_M})$ — однородный полином степени $2M$ от координат $(y_1, \dots, y_{N-\dim V_M})$. Таким образом, получаем величину

$$\omega_{\dim V_M} \cdot \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_M} + (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x))}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_M} - (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_M, V_M}(x))}},$$

умноженную на

$$\begin{aligned} &\int_{\widehat{V}_1} d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_{\widehat{V}_1}) \dots \int_{\widehat{V}_{M-1}} d\mathcal{H}_x^{\dim V_{M-1}}(y_{\widehat{V}_{M-1}}) \int_{\pi_{M-1}^{-1}(y_{\widehat{V}_{M-1}}) \cap B} d\mathcal{H}_x^{\dim V_M}(y_{\widehat{V}_M}) \\ &= \int_{D_P \varphi_\Gamma(x) \langle A_1 \rangle} \dots \int_{D_P \varphi_\Gamma(x) \langle A_{M-1} \rangle} (\sqrt{r^{2M} + \kappa_M(y_{V \setminus V_M})})^{\dim V_M} \\ &\quad \times d\mathcal{H}_x^{\dim V_{M-1}}(y_{\widehat{V}_{M-1}}) \dots d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_{\widehat{V}_1}), \end{aligned}$$

где $A_1, \dots, A_{M-1}$ — прообразы множеств из соотношения (17), лежащие в V , $A_i \subset \text{span}\{V_1, \dots, V_i\}$, которые удовлетворяют соотношениям вида (20), записанных для V_i , $i = 1, \dots, M-1$. Подчеркнем, что в каждом интеграле в правой части интегрирование идет только по последним $\dim V_i$ переменным (в том смысле, что образ $\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(x)$ является N -мерным), $i = 1, \dots, M-1$. Из описания множества $\Pi_1 \cap B_1$ видно, что для $i \leq \dim V_1$ справедливо $|y_i| \leq$

$O(r)$. Из соотношений (20), (21) и дальнейших рассуждений, проведенных для $y_{\dim V_1+1}, \dots, y_{\dim V_1+\dim V_2}$, получаем, что $|y_i| \leq O(r^2)$ для $i = \dim V_1 + 1, \dots, \dim V_1 + \dim V_2$. Повторяя эти же рассуждения для больших степеней, выводим, что $|y_j| \leq O(r^{\deg X_j})$, $j = 1, \dots, M$. Кроме того, множество $D_P \varphi_\Gamma(x) \langle A_i \rangle$ совпадает с образом

$$\left(\begin{array}{c} E_{\dim V_i} \\ (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_i, V_i}^-(x) \end{array} \right) \langle S_i \rangle,$$

где S_i — множества вида (21) с заменой M на i , в которых κ_i зависит от координат с номерами от 1 до n_{i-1} , $i = M-1, \dots, 2$, а $A_1 = S_1$. Далее, по формуле площади для $D_P \varphi_\Gamma(x)$, ограниченного на множество S_{M-1} , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{D_P \varphi_\Gamma(x) \langle A_{M-1} \rangle} \left(\sqrt{r^{2M} + \kappa_M(y_{V \setminus V_M})} \right)^{\dim V_M} d\mathcal{H}^{\dim V_{M-1}} \\ &= \sqrt{\det(E_{\dim V_M} + (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_{M-1}, V_{M-1}}^-(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_{M-1}, V_{M-1}}^-(x))} \\ & \quad \times \int_{S_{M-1}} \left(\sqrt{r^{2M} + \kappa_M(y_{V \setminus V_M})} \right)^{\dim V_M} d\mathcal{H}^{\dim V_{M-1}}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_x^{\dim V_{M-1}}$ -мера S_{M-1} равна

$$\frac{\omega_{\dim V_{M-1}} \left(\sqrt{r^{2M-1} + \kappa_{M-1}(y_{V \setminus (V_M \cup V_{M-1})})} \right)^{\dim V_{M-1}}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_{M-1}} - \widehat{D}_{V_{M-1}}(x)^* \widehat{D}_{V_{M-1}}(x))}},$$

а $y_{V \setminus (V_M \cup V_{M-1})}$ состоит из координат с номерами от 1 до n_{M-2} . Аналогичные рассуждения повторим для $M-2, \dots, 1$.

Окончательно $\mathcal{H}_x^N$ -мера пересечения образа полиномиального субримано-ва дифференциала $\widehat{D}_P \varphi_\Gamma(x) \langle \mathcal{U} \rangle$ и сублоренцева шара ${}^x \text{Box}_2^d(\varphi_\Gamma(x), r)$, $x \in \mathcal{U} \in \Omega$, в координатах первого рода относительно $\varphi_\Gamma(x)$ равна

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_1} + (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1, V_1}^-(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1, V_1}^-(x))}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_1} + (\widehat{D}\varphi^+)_{\tilde{V}_1, V_1}^*(x) (\widehat{D}\varphi^+)_{\tilde{V}_1, V_1}(x) - (\widehat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_1, V_1}^*(x) (\widehat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_1, V_1}(x))}} \\ & \quad \times \prod_{k=2}^M \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_k} + (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_k, V_k}^-(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_k, V_k}^-(x))}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_k} - (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_k, V_k}^-(x)^* (\widehat{D}\varphi)_{\tilde{V}_k, V_k}^-(x))}} \cdot \mathbf{b}(x, r, \nu), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(x, r, \nu) &= \int_{S_1(x)} \dots \int_{S_{M-1}(x)} \left(\sqrt{r^{2M} + \kappa_M(y_{V \setminus V_M})} \right)^{\dim V_M} \\ & \quad \times d\mathcal{H}_x^{\dim V_{M-1}}(y_{V_{M-1}}) \dots d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_{V_1}) \\ & \quad \times \omega_{\dim V_M} \prod_{j=2}^{M-1} \sqrt{\det(E_{\dim V_j} - (\widehat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}^*(x) (\widehat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_j, V_j}(x))} \\ & \quad \times \sqrt{\det(E_{\dim V_1} + (\widehat{D}\varphi^+)_{\tilde{V}_1, V_1}^*(x) (\widehat{D}\varphi^+)_{\tilde{V}_1, V_1}(x) - (\widehat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_1, V_1}^*(x) (\widehat{D}\varphi^-)_{\tilde{V}_1, V_1}(x))}. \end{aligned}$$

Для задания меры ${}^{SL}\mathcal{H}_b^\nu$ заменим в определении 2.10 соответствующий каждому шару покрытия ${}^{x_i}\text{Box}_2^{\mathfrak{d}}(\varphi_\Gamma(x_i), r_i)$ множитель $\prod_{j=1}^M \omega_{\dim V_j} r_i^\nu$ величиной $\mathfrak{b}(x_i, r_i, \nu)$, при этом множества $S_1, \dots, S_{M-1}$ также будут зависеть от центра x_i , $i \in \mathbb{N}$. Дальнейшие шаги повторяют почти дословно схему из [30] с очевидными изменениями. Теорема доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.25. Если $\kappa_M \equiv \dots \equiv \kappa_2 \equiv 0$, то $\mathfrak{b}(x, r, \nu) = \prod_{j=1}^M \omega_{\dim V_j} r^\nu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.26. В случае, когда $\dim V_2, \dots, \dim V_M$ четные, имеем

$$\mathfrak{b}(x, r, \nu) = \prod_{j=1}^M \omega_{\dim V_j} r^\nu + \int_{S_1(x)} \sum_{\substack{\beta, \mu > 0, \\ |\beta + \mu| = \nu}} K_{\beta, \mu}(x) \cdot (y_{V_1})^\beta r^\mu d\mathcal{H}_x^{\dim V_1}(y_1),$$

где $y_{V_1} = (y_1, \dots, y_{\dim V_1})$, а $K_{\beta, \mu}(x)$ — константы, зависящие от x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А. Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. [Электронный ресурс]: <http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf>. 2011.
2. Naber G. L. The geometry of Minkowski spacetime. An introduction to the mathematics of the special theory of relativity. Berlin: Springer-Verl., 1992. (Appl. Math. Sci.; V. 92).
3. Nielsen B. Minimal immersion, Einstein's equations and Mach's principle // J. Geom. Phys. 1987. V. 4. P. 1–20.
4. Берестовский В. Н., Гичев В. М. Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 1–34.
5. Grochowski M. Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12, N 2. P. 145–160.
6. Grochowski M. Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. V. 59, N 7. P. 885–900.
7. Grochowski M. Normal forms and reachable sets for analytic Martinet sub-Lorentzian structures of Hamiltonian type // J. Dyn. Control Syst. 2011. V. 17, N 1. P. 49–75.
8. Grochowski M. Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. 2011. V. 177, N 3. P. 383–394.
9. Grochowski M. The structure of reachable sets for affine control systems induced by generalized Martinet sub-Lorentzian metrics // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2012. V. 18, N 4. P. 1150–1177.
10. Grochowski M. The structure of reachable sets and geometric optimality of singular trajectories for certain affine control systems in $\mathbb{R}^3$. The sub-Lorentzian approach // J. Dyn. Control Syst. 2014. V. 20, N 1. P. 59–89.
11. Grochowski M. Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 2002. V. 50, N 2. P. 161–178.
12. Grochowski M. Remarks on the global sub-Lorentzian geometry // Anal. Math. Phys. 2013. V. 3, N 4. P. 295–309.
13. Korolko A., Markina I. Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19, N 4. P. 864–889.
14. Korolko A., Markina I. Geodesics on H-type quaternion groups with sub-Lorentzian metric and their physical interpretation // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4, N 3. P. 589–618.
15. Крым В. Р., Петров Н. Н. Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2007. № 1. С. 62–70.
16. Крым В. Р., Петров Н. Н. Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2008. № 3. С. 68–80.
17. Craig W., Weinstein S. On determinism and well-posedness in multiple time dimensions // Proc. R. Soc. A. 2008. V. 465, N 2110. P. 3023–3046.

18. Bars I., Terning J. Extra dimensions in space and time. New York, NY: Springer-Verl., 2010.
19. Velev M. Relativistic mechanics in multiple time dimensions // *Physics Essays*. 2012. V. 25, N 3. P. 403–438.
20. Карманова М. Б. Формула площади графиков на 4-мерных 2-ступенчатых сублоренцевых структурах // *Сиб. мат. журн.* 2015. Т. 56, № 5. С. 1068–1091.
21. Карманова М. Б. Площадь графиков на четырехмерных двухступенчатых сублоренцевых структурах // *Докл. АН.* 2015. Т. 463, № 4. С. 387–390.
22. Карманова М. Б. Максимальные поверхности-графики на 4-мерных 2-ступенчатых сублоренцевых структурах // *Сиб. мат. журн.* 2016. Т. 57, № 2. С. 350–363.
23. Карманова М. Б. Поверхности-графики на пятимерных сублоренцевых структурах // *Сиб. мат. журн.* 2017. Т. 58, № 1. С. 122–142.
24. Карманова М. Б. Площадь графиков на пятимерных сублоренцевых структурах // *Докл. АН.* 2016. Т. 467, № 6. С. 634–637.
25. Карманова М. Б. Максимальные поверхности на пятимерных групповых структурах // *Сиб. мат. журн.* 2018. Т. 59, № 3. С. 561–579.
26. Карманова М. Б. Вариации отображений с неголономным образом и применения к теории максимальных поверхностей // *Докл. АН.* 2016. Т. 468, № 3. С. 257–260.
27. Карманова М. Б. Площадь поверхностей на двуступенчатых сублоренцевых структурах с многомерным временем // *Докл. АН.* 2017. Т. 474, № 2. С. 151–154.
28. Карманова М. Б. Класс максимальных поверхностей-графиков на многомерных двуступенчатых сублоренцевых структурах // *Докл. АН.* 2018. Т. 480, № 1. С. 16–20.
29. Карманова М. Б. Графики липшицевых отображений на двуступенчатых сублоренцевых структурах с многомерным временем // *Докл. АН.* 2018. Т. 481, № 5. С. 474–477.
30. Карманова М. Б. Двуступенчатые сублоренцевы структуры и поверхности-графики // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2020. Т. 84, № 1. С. 60–104.
31. Карманова М. Б. Достаточные условия максимальности поверхностей на двуступенчатых сублоренцевых структурах // *Докл. АН.* 2019. Т. 485, № 6. С. 662–666.
32. Карманова М. Б. Площадь поверхностей-графиков на группах Карно с сублоренцевой структурой // *Докл. АН.* 2019. Т. 485, № 2. С. 145–148.
33. Карманова М. Б. Графики негладких контактных отображений на группах Карно с сублоренцевой структурой // *Докл. АН.* 2019. Т. 486, № 3. С. 275–279.
34. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
35. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un // *Ann. Math.* 1989. V. 129, N . P. 1–60.
36. Карманова М. Б. О полиномиальной субримановой дифференцируемости некоторых гёльдеровых отображений групп Карно // *Сиб. мат. журн.* 2017. Т. 58, № 2. С. 305–332.
37. Карманова М. Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
38. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // *The interaction of analysis and geometry*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. (Contemporary Math. V. 424). P. 247–301.
39. Ostrowsky A. Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe des déterminants // *Bull. Sci. Math.* 1937. V. 61. P. 19–32.
40. Карманова М. Б. Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

Поступила в редакцию 24 января 2019 г.

После доработки 13 апреля 2020 г.

Принята к публикации 17 июня 2020 г.

Карманова Мария Борисовна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com