A. I. Karol', The singular values of compact pseudodifferential operators with spatially nonsmooth symbols, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 4, 849–866

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.409>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.73.92

April 26, 2023, 05:50:54

СИНГУЛЯРНЫЕ ЧИСЛА КОМПАКТНЫХ
ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ С СИМВОЛОМ, НЕГЛАДКИМ
ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ
А. И. Кароль

Аннотация. Рассматриваются компактные псевдодифференциальные операторы с символами, гладкость которых по переменной x нарушается на фиксированном множестве. Получены условия, когда для s -чисел таких операторов сохраняется вейлевская формула спектральной асимптотики. Результаты применяются к операторам, для которых порядок убывания символа по переменной ξ является негладкой функцией от x .

DOI 10.33048/smzh.2020.61.409

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, негладкий символ, сингулярные числа, вейлевская асимптотика.

§ 1. Постановка задачи. Основные результаты

Пусть $A : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\Omega)$ — компактный псевдодифференциальный оператор (ПДО),

$$Au(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) dy d\xi, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad (1)$$

область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограничена и имеет липшицеву границу. Будем считать, что символ a определен для всех $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ и $a(x, \xi) \equiv 0$ для всех достаточно больших $|x|$. Через $\{s_k(A)\}$ обозначим невозрастающую последовательность сингулярных чисел (s -чисел) оператора A , занумерованную с учетом кратности, $s_k(A) := \sqrt{\lambda_k(A^*A)}$, $N(t, A)$ — функция распределения s -чисел,

$$N(t, A) := \#\{k \mid s_k(A) > t^{-1}\}.$$

В данной работе рассматриваются операторы с символами, гладкость которых по переменной x нарушается на фиксированном множестве, а порядок убывания по переменной ξ (локально — порядок оператора) может зависеть от точки x . Оценки и асимптотики спектра для ПДО с негладкими символами были ранее получены лишь для классических операторов с однородными по ξ символами [1, 2]. В этих работах использовался вариационный подход к вычислению спектральных асимптотик. Символ должен был принадлежать нужному

классу мультипликаторов ядер интегральных операторов. К операторам, у которых порядок убывания символа по ξ зависит от точки x , эта техника неприменима. Спектральные асимптотики компактных ПДО с гладкими неклассическими символами в $\mathbb{R}^d$ рассматривались в [3, 4].

В [5, 6] рассматривались ПДО с вейлевскими символами, когда функция $a(x, \xi)$ в (1) заменяется на $a((x + y)/2, \xi)$. В [5] доказана справедливость вейлевской формулы спектральной асимптотики для неклассических ПДО с гладкими символами, в [6] — для операторов с вейлевскими символами, гладкость которых по переменной x зависит от порядка оператора. Интерес к задачам определения спектральной асимптотики таких операторов возник в последнее время в связи с теорией случайных процессов. К этим задачам сводятся проблемы определения асимптотики вероятности малых отклонений в L_2 для гауссовых процессов с дробным переменным показателем Херста [7, 8]. В этих задачах степенной порядок убывания символа при $|\xi| \rightarrow \infty$ является гёльдеровской функцией переменной x . Главный член спектральной асимптотики в этом случае определяется сколь угодно узкой окрестностью множества тех точек x , где порядок по абсолютной величине минимален. В [6] рассматриваются операторы с вейлевскими символами, в настоящей работе — с обычными, левыми, символами. Для операторов (1) удастся существенно ослабить по сравнению с [6] требования гладкости символа.

Результаты работы анонсированы в [9].

Приведем необходимые обозначения. Через C обозначаем различные константы, $\text{vol}_k(D)$ — k -мерный объем множества D , $\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$. Для неотрицательной функции f обозначаем через μ_f ее функцию распределения,

$$\mu_f(s) := \text{vol}_d\{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < f(x) < s\}.$$

Опишем нужный класс символов. Символ имеет особенности на множестве $\Gamma \subset \bar{\Omega}$. Фиксируем функцию $d(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, — регуляризованное расстояние до Γ : $d \asymp \text{dist}(x, \Gamma)$, если $\text{dist}(x, \Gamma) < 1$, и $d(x) = 2$, если $\text{dist}(x, \Gamma) > 2$. Предположим, что $d(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)$ и

$$|\partial^\alpha d(x)| \leq C(\alpha) d^{1-|\alpha|}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad (2)$$

а для некоторого $\varkappa > 0$

$$\mu_d(s) \leq C s^\varkappa, \quad 0 < s < 1. \quad (3)$$

Условия (2), (3) заведомо выполнены, если Γ — липшицева поверхность; в этом случае параметр $\varkappa$ является коразмерностью Γ (см. [10]).

Через $\tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m}$, $m > 0$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, обозначим класс символов $a(x, \xi)$ таких, что для всех α, β при любом $\varepsilon > 0$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C(\alpha, \beta, \varepsilon) \langle \xi \rangle^{-m-|\beta|\rho+|\alpha|\delta+\varepsilon} d^{-|\alpha|}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (4)$$

Отметим, что пересечение обычных классов Хёрмандера $S_{\rho', \delta'}^{m'}$ по всем $m' > -m$, $\rho' < \rho$, $\delta' > \delta$, лежит в $\tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m}$. Оценки «с ε » позволяют включать в рассмотрение символы, у которых убывание по переменной ξ не строго степенное.

Напомним, что функция $f(t) \in C^1(1, +\infty)$, $f(t) \neq 0$, называется *медленно меняющейся* (ММФ) на бесконечности, если $tf'(t)/f(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Сформулируем основные результаты работы. Пусть

$$\text{vol}_{2d}\{x, \xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid |a(x, \xi)| > t^{-1}\} = t^{\frac{d}{m}} V(t, a), \quad (5)$$

где $V(t, a)$ является медленно меняющейся функцией.

Следующее условие на символы класса $\tilde{S}^{-m}$ будем накладывать лишь при $m \geq d/2$, что соответствует операторам «почти Гильберта — Шмидта». Пусть для какого-нибудь $l \in (0, 1)$ и любого $\varepsilon > 0$

$$|a(x, \xi) - a(y, \xi)| \leq C(\varepsilon)(1 + |\xi|)^{-m+l+\varepsilon}|x - y|^l, \quad x, y, \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (6)$$

Теорема 1.1. Пусть для символа $a \in \tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m}$ выполнены условия (2)–(5). Если $m < d/2$, то дополнительно потребуем, чтобы $\rho = 1$, а если $m \geq d/2$, то должны выполняться неравенства (6). Тогда для некоторого $\nu > 0$ справедлива асимптотическая формула Вейля

$$\begin{aligned} N(t, A) &= (2\pi)^{-d} \text{vol}_{2d}\{x, \xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid |a(x, \xi)| > t^{-1}\}(1 + O(t^{-\nu})) \\ &= (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V(t, a)(1 + O(t^{-\nu})), \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (7)$$

$\nu = \nu(m, d, \delta, \varkappa, l)$.

Для операторов с вейлевскими символами при $m > d/2$ в [6] по сравнению с настоящей работой накладывались гораздо более жесткие условия на гладкость символа вблизи множества Γ .

В формуле (1) можно рассматривать ПДО A на функциях u из $C_0^\infty(\Omega)$. Соответствующий оператор, действующий в $L_2(\Omega)$, обозначим через A_Ω . Пусть в условиях теоремы 1 условие (5) заменяется условием поведения объема больших значений символа $\text{Re } a(x, \xi)$:

$$\text{vol}_{2d}\{x, \xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid \text{Re } a(x, \xi) > t^{-1}\} = t^{\frac{d}{m}} V_R(t, a),$$

где V_R — некоторая медленно меняющаяся функция. Для собственных чисел оператора $\text{Re } A_\Omega := (A_\Omega + A_\Omega^*)/2$ справедлива

Теорема 1.2. Для функции распределения положительных собственных чисел оператора $\text{Re } A_\Omega$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} N_+(t, \text{Re } A_\Omega) &:= \#\{k \mid \lambda_k(\text{Re } A_\Omega) > t^{-1}\} \\ &= (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V_R(t, a)(1 + O(t^{-\nu})), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\nu = \nu(m, d, \delta, \varkappa, l) > 0$.

Опишем схему доказательства теорем 1.1 и 1.2. Представим оператор A в виде суммы регулярной и сингулярной частей: $A = A_0 + A_1$. Оператор A_0 является ПДО с гладким символом, к исследованию его спектра применим метод приближенного спектрального проектора. Для спектра регулярной части A_0 докажем асимптотическую формулу (7), здесь доказательство следует работе [5], где получена спектральная асимптотика компактных ПДО переменного порядка с гладкими символами. Далее, следуя [6], для спектра сингулярной части A_1 доказываются оценки, которые позволяют с помощью асимптотической теории возмущений сохранить асимптотику (7) для суммы $A_0 + A_1$.

Спектральная асимптотика регулярной части в работе получена для символов из класса $a \in \tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m}$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Условие $\rho = 1$ возникает лишь при доказательстве оценок спектра сингулярной части, когда $m < d/2$ (см. § 4, теорема 4.1).

В теории случайных процессов возникает потребность в определении асимптотики s -чисел операторов с символом

$$a(x, \xi) = (p(x, \xi))^{-(m+h(x))}, \quad m > d/2, \quad h \geq 0, \quad (9)$$

где символ $p \in S_{\rho, \delta}^1$ эллиптичен. Функция h в этих задачах принадлежит классу Гёльдера. Как указано выше, главный член спектральной асимптотики в этом случае определяется сколь угодно узкой окрестностью множества нулей функции h .

Пусть $D := \{x \in \bar{\Omega} \mid h(x) = 0\}$, $d(x)$ — регуляризованное расстояние от точки x до D . Будем считать, что вне D для функции $d(x)$ выполнены оценки (2). Пусть для некоторого $\nu_0 > 0$

$$\text{vol}_d\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |p(x, \xi)| < t\} = v(x)t^d(1 + O(t^{-\nu_0})), \quad t \rightarrow \infty.$$

Теорема 1.3. Пусть $m > d/2$ и $h \in C^l(\bar{\Omega})$ для какого-то $l \in (0, 1)$. Предположим, что $h = h_0 + h_1$, где $h_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus D)$, причем

$$|\partial^\alpha h_0(x)| \leq C(\alpha)h_0(x)d^{-|\alpha|}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus D,$$

а $h_1 = O((h_0)^{1+\tau})$ при $h_0 \rightarrow 0$. Пусть для некоторой медленно меняющейся функции φ при $s \rightarrow +0$

$$\int_{0 < h(x) < s} v(x) dx = s^\sigma \varphi(s^{-1}), \quad \sigma > 0, \quad (10)$$

и при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\mu_h(s) \leq C(\varepsilon)s^{\sigma-\varepsilon}, \quad 0 < s < 1. \quad (11)$$

Если $\text{vol}_d D > 0$, то при $\tau > \max\{0, (1-\sigma)/2\}$ для функции распределения s -чисел оператора A с символом (9) справедлива асимптотика

$$N(t, A) = (2\pi)^{-d} \int_{\Omega} t^{\frac{d}{m+h(x)}} v(x) dx + O(t^{d/m} \log^{-r}(t)), \quad t \rightarrow \infty, \quad (12)$$

для любого $r \in (0, \frac{2\tau+\sigma-1}{2(d+m)}d)$.

Если $\text{vol}_d D = 0$, то при $\tau > \sigma(m/d - 1/2) + 1/2$

$$N(t, A) = (2\pi)^{-d} \int_{\Omega} t^{\frac{d}{m+h(x)}} v(x) dx (1 + O(\log^{-\nu}(t))), \quad t \rightarrow \infty, \quad (13)$$

где $\nu = \nu(m, d, \sigma, \tau, \varkappa) > 0$.

Формула (13) является, конечно, реализацией формулы Вейля (5), (7) для оператора с символом (9). Вычисляя интегралы в (12), (13) методом Лапласа, получаем

Следствие. Если $\text{vol}_d D > 0$, то

$$N(t, A) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} (\alpha + \beta(\log t)^{-\sigma} \varphi(\log t)(1 + o(1))) + O(t^{d/m} \log^{-r} t) \quad t \rightarrow \infty, \quad (14)$$

$$\alpha = \int_D v(x) dx, \quad \beta = (m^2/d)^\sigma \Gamma(\sigma + 1),$$

Γ — Γ -функция Эйлера.

Если $\text{vol}_d D = 0$, то

$$N(t, A) = (2\pi)^{-d} \beta t^{\frac{d}{m}} (\log t)^{-\sigma} \varphi(\log t)(1 + o(1)).$$

Отметим, что если $r \leq \sigma$, то в формуле (14) сохраняется лишь степенная асимптотика с логарифмической оценкой остатка.

Схема доказательства теоремы 1.3 повторяет в основном доказательство теорем 1.1, 1.2. Если в разложении функции h слагаемое h_1 тождественно нулевое, то, поскольку символ $p \in S_{\rho, \delta}^1$ эллиптичен, символ (9) попадает в класс $\tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m}$. Для такого оператора утверждение теоремы 1.3 со степенной оценкой остатка следует из теоремы 1.1. Тем самым в ПДО с символом (9) выделяется старшая часть. Остаток — оператор A_{h_1} с символом $p(x, \xi)^{-(m+h_0(x))}(p(x, \xi)^{-h_1(x)} - 1)$, для его s -чисел доказывается оценка $N(t, A_{h_1}) \leq Ct^{d/m} \log^{-q} t$ с некоторым $q > \sigma$. Такие оценки через степени и логарифмы спектрального параметра получаются модификацией известных оценок s -чисел интегрального оператора через нормы ядра в соответствующих соболевских пространствах [11, 12].

Опишем структуру работы. В § 2 приведены вспомогательные сведения об используемых пространствах Соболева и оценках s -чисел интегральных операторов, в § 3 выделяется регулярная часть ПДО и приводятся результаты об асимптотике ее s -чисел. В § 4 доказаны оценки s -чисел оставшейся сингулярной части, что дает доказательство теорем 1.1 и 1.2. В § 5 рассматривается оператор переменного порядка с символом (9) и доказывается теорема 1.3.

§ 2. Вспомогательные утверждения

2.1. Сингулярные числа компактных операторов. Следующий результат об оценках s -чисел композиции операторов приведен в [13, теорема 2.2a].

Предложение 2.1. Пусть $T_1 : H_1 \rightarrow H_2, T_2 : H_2 \rightarrow H_3$ — компактные операторы такие, что для некоторых $p_1, p_2 > 0$ и медленно меняющихся функций Φ_1, Φ_2

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} s_k(T_1)k^{1/p_1}\Phi_1(k) \leq M_1, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} s_k(T_2)k^{1/p_2}\Phi_2(k) \leq M_2.$$

Тогда для композиции $T_2 T_1 : H_1 \rightarrow H_3$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} s_k(T_2 T_1)k^{1/p}\Phi_1(k)\Phi_2(k) \leq \frac{p_1^{1/p_1} p_2^{1/p_2}}{(p_1 + p_2)^{1/p}} M_1 M_2, \quad 1/p = 1/p_1 + 1/p_2.$$

Ниже потребуются следующие результаты об оценках остатка в асимптотической теории возмущений.

Лемма 2.1. Пусть $A, B : H_1 \rightarrow H_2$ — компактные операторы. Справедливы следующие утверждения.

1. Если для функций распределения s -чисел справедливы равенства $N(t, A) = t^p V(t)$, где V — ММФ, и $N(t, B) = O(t^q)$ при $t \rightarrow \infty$ для некоторого $q < p$, то для функции распределения s -чисел суммы операторов верно равенство

$$N(t, A + B) = t^p V^*(t), \quad \text{где } V^*(t) = V(t) + O(t^{-r}), \quad r < (p - q)/(q + 1).$$

2. Если $N(t, A) = t^p \log^{-a} t V(\log t)$, где V — ММФ, и $N(t, B) = O(t^p \log^{-b} t)$ при $t \rightarrow \infty$ для некоторого $b > a$, то

$$N(t, A + B) = t^p \log^{-a} t V^*(\log t), \quad \text{где } V^*(s) = V(s) + O(s^{-r}), \quad r < (b - a)/(p + 1).$$

3. Если $N(t, A) = t^p(\alpha + \beta \log^{-a} t V(\log t))$, $a > 0$, V — ММФ, и $N(t, B) = O(t^p \log^{-b} t)$ при $t \rightarrow \infty$ для некоторого $b > a$, то

$$N(t, A + B) = t^p(\alpha + \beta \log^{-a} t V(\log t) + O(\log^{-r} t)), \quad \text{где } r < b/(p + 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение п. 1 об оценках в степенной шкале имеется в [6, лемма 2.2]. Утверждения пп. 2 и 3 доказываются одинаково. Докажем утверждение п. 2.

Для функций распределения спектра известно неравенство

$$N(t, A+B) \leq N(t_1, A) + N(t_2, B), \quad 1/t = 1/t_1 + 1/t_2$$

[12, § 9.3, теорема 9]. Взяв $t_2 = t \log^r t$, получим, что $N(t_2, B) = O(t^p \log^{-b+pr} t)$, а $N(t_1, A) = t^p \log^{-a} t V(t)(1 + O(\log^{-r} t))$. Таким образом,

$$N(t, A+B) \leq t^p \log^{-a} t V(t)(1 + O(\log^{-r} t)) + Ct^p \log^{-b+pr} t.$$

Для $r < (b-a)/(p+1)$ отсюда следует, что $V^*(t) \leq V(t) + O(t^{-r})$. Неравенство $V^*(t) \geq V(t) + O(t^{-r})$, эквивалентное оценке

$$N(t, A+B) \geq N(t, A) - Ct^p \log^{-b+pr} t,$$

получается точно так же из равенства $A = (A+B) + (-B)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты пп. 1 и 2 леммы справедливы и для функции распределения собственных чисел. Именно, если $H_1 = H_2$, $A = A^*$, $B = B^*$ и для функции распределения положительных собственных чисел оператора A справедливо $N_+(t, A) = t^p V_+(t)$, а для s -чисел оператора B выполнена оценка $N(t, B) = O(t^q)$ при $t \rightarrow \infty$, то $N_+(t, A+B) = t^p V_+^*(t)$, где $V_+^*(t) = V_+(t) + O(t^{-r})$, $r < (p-q)/(q+1)$.

Отметим, что, если в п. 3 $b/(p+1) \leq a$, то для функции распределения суммы операторов сохраняется лишь степенная асимптотика с логарифмической оценкой остатка.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка s -чисел

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^p \log^q k s_k \leq C, \quad p > 0,$$

эквивалентна оценке функции распределения

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t)^p t^{-1} \log^q t \leq p^q C.$$

2.2. Сведения по теории интерполяции. Приведем нужные факты из теории интерполяции. Пусть $\mathcal{H}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}_0$ — сепарабельные гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_0$ соответственно; $\mathcal{H}_1$ плотно и непрерывно вложено в $\mathcal{H}_0$. Будем говорить, что $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_0$ являются *допустимой парой*. Обозначим через $\mathcal{J}$ самосопряженный положительный оператор в $\mathcal{H}_0$ с областью определения $\mathcal{H}_1$ такой, что $\|\mathcal{J}u\|_0 = \|u\|_1$ для всех u из $\mathcal{H}_1$. Для параметров $\theta \in (0, 1)$ и $q \in \mathbb{R}$ определим пространство $\mathcal{H}_{\theta, q}$ — область определения оператора $\mathcal{J}^\theta \log^q(1 + \mathcal{J})$ с нормой графика. Следующее предложение (см. [14, гл. 5.4.2]) означает, что функция $\mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow t^\theta \log^q(2+t)$ является *интерполяционной функцией*.

Предложение 2.2. Пусть $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ и $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1$ — допустимые пары и непрерывный оператор $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ продолжается до непрерывного оператора из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{V}_0$. Тогда оператор T непрерывно действует из $\mathcal{H}_{\theta, q}$ в $\mathcal{V}_{\theta, q}$, для соответствующих норм справедливо неравенство

$$\|T\|_{\mathcal{H}_{\theta, q} \rightarrow \mathcal{V}_{\theta, q}} \leq C_{\theta, q} \max\{\|T\|_{\mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0}, \|T\|_{\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1}\}.$$

2.3. Пространства Соболева. Через $H^{l,q}(\mathbb{R}^d)$, $l > 0$, $-\infty < q < \infty$, обозначим пространство Соболева функций с конечной нормой

$$\|u\|_{H^{l,q}(\mathbb{R}^d)}^2 := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{2l} (1 + \log^2 \langle \xi \rangle)^q |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Для $q = 0$ получаем обычное пространство Соболева в $\mathbb{R}^d$, для этого случая сохраняем стандартное обозначение H^l . Пространства $H^{l,q}(\mathbb{R}^d)$ являются частным случаем пространств $B_{p,k}$ [15, гл. 10.1] для $p = 2$ и весовой функции $k(\xi) = \langle \xi \rangle^l (1 + \log \langle \xi \rangle)^q$.

Очевидно, что пространства $H^m(\mathbb{R}^d)$ и $L_2(\mathbb{R}^d)$, $m > 0$, являются допустимой парой в смысле п. 2.2. При этом $\mathcal{J} = (1 - \Delta)^{m/2}$ и для $l = m\theta$ имеем $H^{l,q}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{H}_{\theta,q}$, соответствующие нормы эквивалентны.

Для области $X \subset \mathbb{R}^d$ определим пространство $H^{l,q}(X)$ как пространство сужений функций из $H^{l,q}(\mathbb{R}^d)$ на X ;

$$\|u\|_{H^{l,q}(X)} := \inf\{\|\tilde{u}\|_{H^{l,q}(\mathbb{R}^d)} \mid \tilde{u} \in H^{l,q}(\mathbb{R}^d), \tilde{u}(x) = u(x), x \in X\}. \quad (15)$$

Если X допускает непрерывный оператор продолжения $H^m(X) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^d)$, $m > l$ (например, имеет липшицеву границу), то, конечно, пространства $H^{l,q}(X)$ интерполяционные в паре $H^m(X)$, $L_2(X)$; норма (15) эквивалентна соответствующей интерполяционной норме для $l = m\theta$.

Для $l \in (0, 1)$ удобно характеризовать принадлежность $H^{l,q}(X)$ в терминах разностных отношений. В случае $q = 0$ утверждение следующей леммы хорошо известно.

Лемма 2.2. Пусть $l \in (0, 1)$, а область X имеет липшицеву границу (или $X = \mathbb{R}^d$). Для $u \in L_2(X)$ принадлежность пространству $H^{l,q}(X)$ эквивалентна конечности интеграла

$$I_\alpha(u, X) := \int_{\substack{X \times X, \\ |x-y| < \alpha}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{d+2l}} |\log |x - y||^{2q} dx dy, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Таким образом, $I_\alpha(u, X)$ дает старшую часть эквивалентной нормы пространства $H^{l,q}(X)$. Для разных параметров α полученные нормы эквивалентны друг другу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разбиение единицы и локальные координаты стандартным образом сводят доказательство к случаям, когда область X — это все пространство $\mathbb{R}^d$ или полупространство $\mathbb{R}_+^d$. Рассмотрим сначала случай $X = \mathbb{R}^d$.

Записав конечную разность через преобразование Фурье, получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x+z) - u(x)|^2 dx = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{iz\xi} - 1|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Таким образом,

$$I_\alpha(u, \mathbb{R}^d) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\xi) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad \Phi(\xi) := \int_{|z| < \alpha} \frac{|e^{iz\xi} - 1|^2}{|z|^{d+2l}} \log^{2q} |z| dz.$$

Функция Φ зависит лишь от $|\xi|$, после замены $z \rightarrow |\xi|^{-1}z$ имеем

$$\Phi(\xi) = |\xi|^{2l} \log^{2q} |\xi| \int_{|z| < \alpha|\xi|} \frac{|e^{iz\xi_0} - 1|^2}{|z|^{d+2l}} \left| \frac{\log |\xi| - \log |z|}{\log |\xi|} \right|^{2q} dz. \quad (16)$$

По теореме Лебега получаем

$$\Phi(\xi) = c_0 |\xi|^{2l} \log |\xi|^{2q} (1 + o(1)), \quad |\xi| \rightarrow \infty, \quad c_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{iz\xi_0} - 1|^2}{|z|^{d+2l}} dz, \quad |\xi_0| = 1.$$

Подынтегральное выражение в (16) не превосходит

$$C(\alpha) \frac{|e^{iz\xi_0} - 1|^2}{|z|^{d+2l}} (1 + |\log |z||)^{2|q|},$$

что дает суммируемую мажоранту для предельного перехода при $|\xi| \rightarrow \infty$. Таким образом, $\Phi(\xi) \asymp \langle \xi \rangle^{2l} (1 + \log^2 \langle \xi \rangle)^q$, и утверждение леммы для $X = \mathbb{R}^d$ доказано.

Пусть $X = \mathbb{R}_+^d$. Обозначим через u_e четное продолжение функции u через границу полупространства. Несложные выкладки приводят к неравенству $I_\alpha(u_e, \mathbb{R}^d) \leq 4I_\alpha(u, \mathbb{R}_+^d)$, что вместе с утверждением леммы для $X = \mathbb{R}^d$ дает оценку

$$\|u\|_{H^{l,q}(\mathbb{R}_+^d)}^2 \leq c(I_\alpha(u, \mathbb{R}_+^d) + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}_+^d)}^2).$$

Обратная оценка следует из очевидного неравенства $I_\alpha(u, \mathbb{R}_+^d) \leq I_\alpha(\tilde{u}, \mathbb{R}^d)$, где $\tilde{u} \in H^{l,q}(\mathbb{R}^d)$ — произвольное продолжение функции u на $\mathbb{R}^d$. $\square$

Определим пространство $\tilde{H}^{l,q}(Q_s)$ периодических функций в кубе $Q_s := (0, 2\pi s)^d$. Функция

$$u(x) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x/s}$$

принадлежит этому пространству, если

$$\|u\|_{\tilde{H}^{l,q}(Q_s)}^2 := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |\mathbf{n}|^2)^l \log^{2q}(2 + |\mathbf{n}|) |c_{\mathbf{n}}|^2 < \infty.$$

Пространство $\tilde{H}^{l,q}(Q_s)$ интерполяционное в паре $\tilde{H}^{l_0}(Q_s)$ и $L_2(Q_s)$, $l_0 > l > 0$. Если для областей $X_{\pm}$ с липшицевой границей справедливы включения $X_- \subset Q_s \subset X_+$, то, конечно, справедливы вложения $H^{l,q}(X_-) \hookrightarrow \tilde{H}^{l,q}(Q_s) \hookrightarrow H^{l,q}(X_+)$.

Следующее утверждение является распространением на пространства $H^{l,q}$ известного результата об оценках s -чисел оператора вложения соболевских пространств [12, § 11.8]. Пусть X — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей, J — оператор вложения $H^{l,q}(X) \hookrightarrow L_2(X)$.

Лемма 2.3. 1. Для s -чисел оператора J справедлива оценка

$$s_k(J) \leq C(X) k^{-\frac{l}{d}} \log^{-q} k.$$

2. Пусть

$$(\mathcal{T}u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} T(x, y) u(y) dy$$

— интегральный оператор, действующий из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(X)$, функция $x \rightarrow T(x, y)$ для почти всех $y \in \mathbb{R}^d$ принадлежит пространству $H^{l,q}(X)$ и

$$M^2 := \int_{\mathbb{R}^d} \|T(\cdot, y)\|_{H^{l,q}(X)}^2 dy < \infty.$$

Тогда для s -чисел оператора $\mathcal{T}$ справедлива оценка

$$s_k(\mathcal{T}) \leq C_X M k^{-(\frac{1}{2} + \frac{1}{d})} \log^{-q} k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем куб Q_s , содержащий область X , и обозначим через $\tilde{J}$ оператор вложения $\tilde{H}^{l,q}(Q_s) \hookrightarrow L_2(Q_s)$. Для s -чисел справедливо неравенство $s_k(J) \leq C s_k(\tilde{J})$, C — норма оператора продолжения $H^{l,q}(X) \rightarrow \tilde{H}^{l,q}(Q_s)$. Таким образом, утверждение п. 1 достаточно доказать для s -чисел оператора $\tilde{J}$.

Разложение функции u в ряд Фурье по системе экспонент в Q_s можно записать в виде

$$u = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^d} (1 + |\mathbf{n}|^2)^{-l/2} \log^{-q}(2 + |\mathbf{n}|) (u, \phi_{\mathbf{n}})_{\tilde{H}^{l,q}(Q_s)} \psi_{\mathbf{n}},$$

здесь

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{n}}(x) &:= (2\pi s)^{-d/2} \exp(i\mathbf{n}x/s), \\ \phi_{\mathbf{n}}(x) &:= (2\pi s)^{-d/2} (1 + |\mathbf{n}|^2)^{-l/2} \log^{-q}(2 + |\mathbf{n}|) \exp(i\mathbf{n}x/s) \end{aligned}$$

— ортонормированные базисы в пространствах $L_2(Q_s)$ и $\tilde{H}^{l,q}(Q_s)$ соответственно. Это разложение является рядом Шмидта оператора $\tilde{J}$, а набор коэффициентов $(1 + |\mathbf{n}|^2)^{-l/2} \log^{-q}(2 + |\mathbf{n}|)$ — множеством его s -чисел. После упорядочивания этого набора получаем утверждение п. 1 леммы.

Условие п. 2 означает (см. [12, § 11.8]), что оператор $\mathcal{T}$ является оператором Гильберта — Шмидта, действующим из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $H^{l,q}(X)$ с нормой, не превосходящей M . Для его s -чисел как оператора в этих пространствах имеется оценка $\limsup s_k k^{1/2} \leq \sqrt{2}M$. Таким образом,

$$\mathcal{T} : L_2(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\mathcal{T}} H^{l,q}(X) \xrightarrow{J} L_2(X),$$

и утверждение п. 2 следует из оценок п. 1 леммы и предложения 2.1. $\square$

§ 3. Асимптотика спектра регулярной части

Определим регулярную часть оператора (1), символ которого удовлетворяет условию (4). Зафиксируем срезки $\theta, \theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\theta(s) = 0, s < 1, \quad \text{и} \quad \theta(s) = 1, s > 2; \quad \theta_1(s) := 1 - \theta(s). \quad (17)$$

Построим функцию $\theta(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'})$, $\delta \geq \delta' > 0$. Из (2) следует, что $\theta(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'}) \in S_{1,\delta'}^0$, а из неравенств (4) — что

$$a_0(x, \xi) := a(x, \xi) \theta(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'}) \in S_{\rho, \delta_0}^{-m+\varepsilon}$$

для любого $\varepsilon > 0$, $\delta_0 := \delta + \delta'$. Параметр $\delta' > 0$ выберем настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\delta_0 < \rho$.

Назовем оператор A_0 с символом $a_0(x, \xi)$ *регулярной частью* оператора A , оператор $A_1 := A - A_0$ — *сингулярной частью*.

Оператор $A_\Omega : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ таким же образом представим как сумму регулярной и сингулярной частей, $A_{0,\Omega} + A_{1,\Omega}$.

Асимптотические свойства спектра регулярной части по существу получены в [6], где рассматривались операторы с вейлевскими символами. Обозначим через W ПДО с вейлевским символом $w(x, \xi)$,

$$(Wu)(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} w((x+y)/2, \xi) u(y) dy d\xi, \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (18)$$

Напомним, что самосопряженность W эквивалентна вещественности его вейлевского символа.

Предложение 3.1 [6, теоремы 4.1, 4.2]. Пусть для объема больших значений вещественного символа $b \in \tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m}$ справедливо равенство

$$\text{vol}_{2d}\{x, \xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid b(x, \xi) > t^{-1}\} = t^{\frac{d}{m}} V(t, b),$$

где $V(t, b)$ является медленно меняющейся функцией, а вейлевский символ w представлен в виде

$$w(x, \xi) = b(x, \xi) \theta(d(x) \langle \xi \rangle^{\delta'}) + b_1(x, \xi), \quad b_1 \in S_{\rho, \delta_0}^{-m_1}, \quad m_1 > m.$$

Тогда для функции распределения положительных собственных чисел оператора W в $L_2(\Omega)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} N_+(t, W) &= (2\pi)^{-d} \text{vol}_{2d}\{x, \xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid b(x, \xi) > t^{-1}\} + O(t^{\frac{d}{m} - \nu_0}) \\ &= (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V(t, b) + O(t^{\frac{d}{m} - \nu_0}), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (19)$$

$\nu_0 = \nu_0(m, d, \rho, \delta_0, \delta', \varkappa) > 0$, $\varkappa$ — параметр из условия (3).

Тем самым срезка θ и младшие члены символа сказываются лишь ухудшением оценки остатка асимптотики.

Из этого предложения сразу вытекает утверждение об асимптотике $N(t, A_0)$ и $N_+(t, \text{Re } A_{0, \Omega})$.

Следствие 3.1. В условиях теорем 1.1 и 1.2 соответственно

$$N(t, A_0) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V(t, a) (1 + O(t^{-\nu_0})), \quad t \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$N_+(t, \text{Re } A_{0, \Omega}) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V_+(t, \text{Re } a) (1 + O(t^{-\nu_0})), \quad t \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$\nu_0 = \nu_0(m, d, \rho, \delta_0, \delta', \varkappa) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $N(t, A_0) = N_+(t^2, A_0^* A_0) = N_+(t^2, A_0 A_0^*)$, а оператор $A_0 A_0^* : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ является ПДО с амплитудой $a_0(x, \xi) \overline{a_0(y, \xi)}$:

$$(A_0 A_0^* u)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \times \Omega} e^{i(x-y)\xi} a_0(x, \xi) \overline{a_0(y, \xi)} u(y) dy d\xi.$$

Этот оператор можно записать в виде (18) с помощью вейлевского символа

$$w(x, \xi) = |a_0(x, \xi)|^2 \theta(d(x) \langle \xi \rangle^{\delta'})^2 + b_1(x, \xi), \quad b_1 \in S_{\rho, \delta_0}^{-m_1}, \quad 2m < m_1 < 2m + \rho - \delta_0.$$

Таким образом, формула (20) следует из равенства (12).

Точно так же исчисление ПДО позволяет представить оператор $\text{Re } A_{0, \Omega}$ как оператор с вейлевским символом $w_R(x, \xi) = \text{Re } a(x, \xi) \theta(d(x) \langle \xi \rangle^{\delta'}) + b_1(x, \xi)$, $b_1 \in S_{\rho, \delta_0}^{-m_1}$, $m < m_1 < m + \rho - \delta_0$. Это дает формулу (21).

§ 4. Оценки спектра сингулярной части

Рассмотрим оператор $A_1 := A - A_0$. Для применения леммы 2.1 получим оценки функции $N(t, A_1)$. Оператор A_1 является интегральным оператором, действующим из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega)$, с ядром $T(x, y) = K(x, x - y)$,

$$K(x, z) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz\xi} a(x, \xi) \theta_1(d(x) \langle \xi \rangle^{\delta'}) d\xi,$$

где срезка θ_1 введена в (17). Функция $K(x, z)$ определена для всех $x, z \in \mathbb{R}^d$, $K(x, z) = 0$ при достаточно больших $|x|$, когда $d(x) \geq 2$.

Доказательства в случаях $m < d/2$ и $m \geq d/2$ различны.

Теорема 4.1. Пусть $a \in \tilde{S}_{1,\delta}^{-m}$, $m < d/2$. Тогда для достаточно больших t справедлива оценка

$$N(t, A_1) \leq C(p)t^p, \quad p > \max\{2, (d - \kappa\delta')/m\}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для операторов с вейлевскими символами такое же утверждение получено в [6, теорема 5.1]. Доказательство для операторов с левыми символами мало меняется.

Для параметра $\sigma > 0$ определим ядра

$$T_\sigma(x, y) = \begin{cases} T(x, y), & |x - y| < \sigma, \\ 0, & |x - y| > \sigma, \end{cases} \quad T^\sigma(x, y) = T(x, y) - T_\sigma(x, y),$$

$\mathcal{T}^\sigma$, $\mathcal{T}_\sigma$ — соответствующие операторы, действующие из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega)$.

Для функции $K(x, z)$ справедливы оценки [6, лемма 5.1]

$$|K(x, z)| \leq \begin{cases} \frac{C(l)}{|z|^l}, & l > d - m, \\ \frac{C(l, \varepsilon)}{|z|^l d(x)^{(d-m-l+\varepsilon)/\delta'}}, & 0 < l \leq d - m, \forall \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (23)$$

Тест Шура и неравенства (23) при $l = m + \varepsilon$ дают оценку нормы оператора $\mathcal{T}_\sigma$:

$$\|\mathcal{T}_\sigma\| \leq C(\varepsilon)\sigma^{m-\varepsilon}.$$

Оценим с помощью неравенств (23) норму Гильберта — Шмидта оператора $\mathcal{T}^\sigma$. Для $d/2 < l < d - m$ (такой выбор возможен ввиду условия $m < d/2$) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}^\sigma\|_2^2 &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}^d} |T^\sigma(x, y)|^2 dx dy \leq \int_{\Omega} \int_{|z| > \sigma} |K(x, z)|^2 dz dx \\ &\leq C + \int_{d(x) < 2, |z| > \sigma} \frac{c_\varepsilon}{|z|^{2l} (d(x))^{2(d-m-l+\varepsilon)/\delta'}} dx dz \\ &\leq C(\varepsilon)\sigma^{d-2l} \int_0^2 t^{-2(d-m-l+\varepsilon)/\delta'} d\mu_d(t) \stackrel{(*)}{\leq} C\sigma^{d-2l}. \end{aligned}$$

Неравенство (*) справедливо в силу условия (3), если $l > d - m - \kappa\delta'/2$. Пользуясь известными неравенствами для s -чисел, получаем, что

$$s_k(A_1) \leq s_k(\mathcal{T}^\sigma) + \|\mathcal{T}_\sigma\| \leq \sqrt{2}k^{-1/2} \|\mathcal{T}^\sigma\|_2 + \|\mathcal{T}_\sigma\| \leq C_\varepsilon \sigma^{m-\varepsilon} (1 + k^{-\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{d}{2}-l-m+\varepsilon}). \quad (24)$$

Положим

$$l = l(\varepsilon') := \max\{d/2, d - m - \kappa\delta'/2\} + \varepsilon' < d - m, \quad \varepsilon' > 0, \quad (25)$$

и выберем σ так, чтобы выражение в скобках (24) было равно 2. Тогда $s_k(A_1) \leq c_l k^{-1/p(\varepsilon')}$, где параметр

$$p(\varepsilon') = 2 + \frac{2l(\varepsilon') - d}{m - \varepsilon}$$

может быть любым большим $\max\{2, (d - \kappa\delta')/m\}$. Полученная оценка s -чисел эквивалента оценке функции распределения (22). $\square$

Рассмотрим случай $m \geq d/2$.

Теорема 4.2. Пусть $a(x, \xi) \in \tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m}$ и для какого-то $l \in (0, 1)$ выполнено условие (6). Тогда

$$N(t, A_1) \leq C(p)t^p, \quad 1/p < m/d + \delta' \varkappa/2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем функцию $b(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $b(y) = 1$ для y в окрестности Ω . Представим оператор A_1 в виде суммы: $A_1 = \mathcal{T}_b + \mathcal{T}_{1-b}$,

$$\mathcal{T}_b u(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) b(y) \theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'}) u(y) dy d\xi,$$

где срезка θ_1 введена в (17). Так как амплитуда $a(x, \xi)(1 - b(y))$ обращается в нуль вблизи диагонали $\{x = y\}$, ядро оператора $\mathcal{T}_{1-b}$ является бесконечно гладкой функцией по y . Интегрированием по частям получаем, что она убывает быстрее любой степени $|y|$ на бесконечности. Отсюда следует, что

$$s_k(\mathcal{T}_{1-b}) \leq C(N)k^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

(см. [11, теорема 4.8]). Таким образом, основной вклад в оценку $s_k(A_1)$ вносит оператор $\mathcal{T}_b$,

$$s_k(A_1) \leq C s_k(\mathcal{T}_b) + O(k^{-N}) \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Фиксируем параметр m_1 ,

$$m_1 := l + (d - \delta' \varkappa)/2 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, m_1 < m. \quad (27)$$

Положим $m_2 := m - m_1$. Запишем оператор $\mathcal{T}_b$ в виде произведения $\mathcal{T}_b = RQ$, где $Q : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ и $R : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\Omega)$:

$$(Qu)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\xi} \langle \xi \rangle^{-m_2} b(y) u(y) dy, \quad (28)$$

$$(Rf)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} r(x, \xi) \theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'}) f(\xi) d\xi,$$

$$r(x, \xi) := a(x, \xi) \langle \xi \rangle^{m_2} \in \tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m_1}.$$

Лемма 4.1. Для s -чисел оператора R справедливы оценки

$$s_k(R) \leq C(\varepsilon) k^{-(1/2+l/d)+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу п. 2 леммы 2.3 для доказательства оценки (29) достаточно показать, что сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|T(\cdot, \xi)\|_{H^\ell(\Omega)}^2 d\xi, \quad \ell < l,$$

где $T(x, \xi) = e^{ix\xi} r(x, \xi) \theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'})$. По лемме 2.2 это равносильно сходимости интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|T(x, \xi) - T(y, \xi)|^2}{|x - y|^{d+2\ell}} dx dy d\xi, \quad (30)$$

Разобьем интеграл (30) на три части:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|(e^{i(x-y)\xi} - 1)r(x, \xi)\theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'})|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} dx dy d\xi, \quad (31)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|(r(x, \xi) - r(y, \xi))\theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'})|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} dx dy d\xi, \quad (32)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|r(y, \xi)(\theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'}) - \theta_1(d(y)\langle \xi \rangle^{\delta'}))|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} dx dy d\xi. \quad (33)$$

Рассмотрим интеграл (31). Интеграл по переменной y не превосходит $C(\ell, d)|\xi|^{2\ell}$, где

$$C(\ell, d) = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{iz\xi_0} - 1|^2 |z|^{-(d+2\ell)} dz, \quad |\xi_0| = 1.$$

Учитывая также оценки функции $r \in \tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m_1}$, получаем, что интеграл (31) не превосходит

$$\begin{aligned} C(\varepsilon') \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} \langle \xi \rangle^{-2m_1+2\ell+2\varepsilon'} \theta_1^2(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'}) dx d\xi \\ \leq C(\varepsilon') \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{-2m_1+2\ell+2\varepsilon'} \mu_d(\langle \xi \rangle^{-\delta'}) d\xi \\ \leq C(\varepsilon') \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{-2m_1+2\ell+2\varepsilon'-\delta'\varkappa} d\xi \quad \forall \varepsilon' > 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Последний интеграл сходится, так как в силу (27) показатель степени $\langle \xi \rangle$ меньше $-d$.

Рассмотрим интеграл (32). Из условия (6) следует, что внутренний интеграл по переменной y в (32) не превосходит $\langle \xi \rangle^{-2m_1+2\ell+2\varepsilon}$, и вновь приходим к оценке (34).

Оставшийся интеграл (33) оценивается через

$$C(\varepsilon') \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{-2m_1+2\varepsilon'} \|\theta_1(d(\cdot)\langle \xi \rangle^{\delta'})\|_{H^\ell(\mathbb{R}^d)}^2 d\xi. \quad (35)$$

Оценим норму функции $x \rightarrow \theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'})$ с помощью мультипликативного неравенства

$$\|\theta_1(d(\cdot)\langle \xi \rangle^{\delta'})\|_{H^\ell(\mathbb{R}^d)} \leq C_\ell \|\nabla_x \theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^\ell \|\theta_1(d(x)\langle \xi \rangle^{\delta'})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1-\ell}.$$

Из (2) следует, что первая норма в правой части оценивается через $C\langle \xi \rangle^{2\delta'-\delta'\varkappa}$, вторая — через $C\langle \xi \rangle^{-\delta'\varkappa}$. Таким образом, интеграл (35) не превосходит интеграла

$$C \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{-2m_1+2\varepsilon'+2\ell\delta'-\delta'\varkappa} d\xi,$$

который сходится ввиду (27). Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 4.2. Для s -чисел оператора Q (28) известна оценка

$$s_k(Q) \leq C(b)k^{-m_2/d}$$

(см. [1, 11]). Таким образом, в силу (26) и предложения 2.1 для s -чисел оператора A_1 справедлива оценка

$$s_k(A_1) \leq C s_k(\mathcal{T}_b) + O(k^{-n}) \leq C(\varepsilon)k^{-(1/2+l/d+m_2/d)+\varepsilon} = C(\varepsilon)k^{-(m/d+\delta'\varkappa/2)+\varepsilon} \forall \varepsilon.$$

Это неравенство эквивалентно оценке функции распределения s -чисел (25). $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.1 и 1.2 сразу следует из результатов §3, 4. Для регулярной части A_0 ($A_{0,\Omega}$) оператора A (A_Ω) справедливость асимптотических формул (7), (8) является результатом следствия 3.1; оценки s -чисел сингулярной части, полученные в теоремах 4.1 и 4.2, позволяют с помощью леммы 2.1 сохранить асимптотики (с ухудшением остатка) для оператора A (A_Ω).

§ 5. Оператор переменного порядка

Докажем теорему 1.3 для оператора A с символом (9). Выделение главной части h_0 разложения функции h , $h = h_0 + h_1$, в окрестности Γ ($\Gamma := \partial D$, $D := \{x \in \bar{\Omega} \mid h(x) = 0\}$) задает главную часть оператора A — оператор A_{h_0} с символом

$$(p(x, \xi))^{-(m+h_0(x))} \in \tilde{S}_{\rho, \delta}^{-m}.$$

По теореме 1.1 для функции распределения s -чисел этого оператора справедлива вейлевская асимптотическая формула (7), где объем больших значений символа вычисляется явно:

$$N(t, A_{h_0}) = (2\pi)^{-d} \int_{\Omega} t^{\frac{d}{m+h_0(x)}} v(x) dx (1 + O(t^{-\nu})), \quad t \rightarrow \infty, \quad \nu > 0. \quad (36)$$

Используя (10), получаем асимптотику интеграла Лапласа в (11):

$$N(t, A_{h_0}) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} (\alpha + \beta(\log t)^{-\sigma} \varphi(\log t)(1 + o(1))), \quad (37)$$

$$\alpha = \int_D v(x) dx, \quad \beta = (m^2/d)^\sigma \Gamma(\sigma + 1).$$

Оператор $A_{h_1} = A - A_{h_0}$ является ПДО с символом

$$g(x, \xi) := p(x, \xi)^{-(m+h_0(x))} (p(x, \xi)^{-h_1(x)} - 1). \quad (38)$$

Получим оценки s -чисел оператора A_{h_1} .

Теорема 5.1. В условиях теоремы 1.3 для s -чисел оператора A_{h_1} верна оценка

$$s_k(A_{h_1}) \leq C_q k^{-m/d} (\log k)^{-q}, \quad q < \tau + (\sigma - 1)/2. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 5.1 проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.2. Фиксируем функцию $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $b(y) = 1$ в окрестности Ω , и умножим символ (38) на функции $b(y)$ и $1-b(y)$. Получаем, что $A_{h_1} = \mathcal{S}_b + \mathcal{S}_{1-b}$, и $\mathcal{S}_b = GQ'$, где $Q' : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ и $G : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\Omega)$:

$$(Q'u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\xi} \langle \xi \rangle^{-m'} b(y) u(y) dy, \quad (40)$$

$$Gf(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} g(x, \xi) \langle \xi \rangle^{m'} f(\xi) d\xi. \quad (41)$$

Фиксируем параметр ℓ , $0 < \ell < \min\{l, m - d/2\}$, и положим в формулах (40), (41)

$$m' = m - \ell - d/2, \quad m' > 0. \quad (42)$$

У оператора $\mathcal{S}_{1-b}$ s -числа, как и s -числа оператора $\mathcal{T}_{1-b}$ в доказательстве теоремы 4.2, убывают сверхстепенным образом и не влияют на порядок убывания s -чисел оператора A_{h_1} . Для s -чисел оператора Q' , как и для оператора Q в доказательстве теоремы 4.2, справедливо неравенство

$$s_k(Q') \leq C(b)k^{-m'/d},$$

так что утверждение теоремы вытекает с помощью предложения 2.1 из следующей леммы.

Лемма 5.2. Для s -чисел оператора G верны неравенства

$$s_k(G) \leq Ck^{-(1/2+\ell/d)}(\log k)^{-q}, \quad q < \tau + (\sigma - 1)/2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. В силу лемм 2.2 и 2.3 достаточно проверить конечность нормы ядра оператора G в соответствующих пространствах Соболева:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \|T(\cdot, \xi)\|_{H^{\ell, q}(\Omega)}^2 d\xi \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^d \times \Omega \times \Omega, |x-y| < 1/2} \frac{|T(x, \xi) - T(y, \xi)|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} |\log|x-y||^{2q} dx dy d\xi < \infty, \end{aligned} \quad (43)$$

$$T(x, \xi) = e^{ix\xi} g(x, \xi) \langle \xi \rangle^{m'}.$$

Сходимость интеграла (43) вытекает из сходимости двух интегралов:

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \Omega \times \Omega, |x-y| < 1/2} \frac{|(e^{ix\xi} - e^{iy\xi})g(x, \xi) \langle \xi \rangle^{m'}|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} |\log|x-y||^{2q} dx dy d\xi < \infty, \quad (44)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \Omega \times \Omega, |x-y| < 1/2} \frac{|g(x, \xi) - g(y, \xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2m'}}{|x-y|^{d+2\ell}} |\log|x-y||^{2q} dx dy d\xi < \infty. \quad (45)$$

Сначала рассмотрим интеграл (44). Как показано при доказательстве леммы 2.2, внутренний интеграл по переменной y равен $C(\ell, q) \langle \xi \rangle^{2\ell} \log^{2q} \langle \xi \rangle (1 + o(1))$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Подставив явное выражение (38) для символа g , приходим к оценке интеграла

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \Omega} |p(x, \xi)^{-(m+h_0(x))} (p(x, \xi)^{-h_1(x)} - 1)|^2 \langle \xi \rangle^{2\ell+2m'} \log^{2q} \langle \xi \rangle dx d\xi. \quad (46)$$

Уменьшая параметр τ в оценке $h_1 = O(h_0^{1+\tau})$ при $h_0 \rightarrow 0$, можно считать, что $h_1(x) \geq 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и разделим здесь область интегрирования на две части:

$$\mathcal{O}_1 := \{x, \xi \mid h_0^{1+\varepsilon}(x) \log \langle \xi \rangle < 1\}, \quad \mathcal{O}_2 := \{x, \xi \mid h_0^{1+\varepsilon}(x) \log \langle \xi \rangle \geq 1\}.$$

На части $\mathcal{O}_1$ имеем

$$|p(x, \xi)^{-h_1(x)} - 1| \leq h_1(x) \log |p(x, \xi)| \leq C h_0^{1+\tau}(x) \log \langle \xi \rangle,$$

поскольку $|p(x, \xi)| \leq C \langle \xi \rangle$ (напомним, что $p \in S_{\rho, \delta}^1$). Используя эти неравенства, получаем с учетом (42), что интеграл (46) по $\mathcal{O}_1$ не превосходит

$$C \int_{\mathcal{O}_1} \langle \xi \rangle^{2\ell+2m'-2m-2h_0(x)} \log^{2+2q} \langle \xi \rangle h_0^{2+2\tau}(x) dx d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \langle \xi \rangle^{-d} \log^{2+2q} \langle \xi \rangle I(\xi) d\xi, \quad (47)$$

$$I(\xi) := \int_{h_0^{1+\varepsilon}(x) < 1/\log \langle \xi \rangle} h_0^{2+2\tau}(x) dx.$$

Интеграл $I(\xi)$ выражается через функцию распределения h_0 и оценивается с использованием (11):

$$\begin{aligned} I(\xi) &= \int_0^{\log^{-1/(1+\varepsilon)} \langle \xi \rangle} s^{2+2\tau} d\mu_{h_0}(s) \leq C_{\varepsilon'} \int_0^{\log^{-1/(1+\varepsilon)} \langle \xi \rangle} s^{2+2\tau} s^{\sigma-\varepsilon'-1} ds \\ &\leq C_{\varepsilon'} (\log \langle \xi \rangle)^{-\frac{2+2\tau+\sigma-\varepsilon'}{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Если $q < \tau + (\sigma - 1)/2$, то при достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon' > 0$

$$I(\xi) \leq C \log^{-(2+2q)-r} \langle \xi \rangle$$

для какого-то $r > 1$ и интеграл (47) по $\mathcal{O}_1$ конечен.

Рассмотрим интеграл (46) по оставшейся части $\mathcal{O}_2$. На этом множестве подынтегральное выражение не превосходит $C \langle \xi \rangle^{-(d+2h_0(x))} \log^{2q} \langle \xi \rangle$. Таким образом, достаточно проверить конечность интеграла

$$\int_{\mathcal{O}_2} \langle \xi \rangle^{-(d+2h_0(x))} \log^{2q} \langle \xi \rangle dx d\xi. \quad (48)$$

Выразим интеграл по переменной x через функцию распределения h_0 и сделаем замену $s \log \langle \xi \rangle = w$:

$$\begin{aligned} \int_{h_0^{1+\varepsilon}(x) > 1/\log \langle \xi \rangle} \langle \xi \rangle^{-2h_0(x)} dx &= \int_{s^{1+\varepsilon} > 1/\log \langle \xi \rangle} e^{-2s \log \langle \xi \rangle} d\mu_{h_0}(s) \\ &\leq C(\varepsilon') \int_{s^{1+\varepsilon} > 1/\log \langle \xi \rangle} e^{-2s \log \langle \xi \rangle} s^{\sigma-\varepsilon'-1} ds \\ &\leq C(\varepsilon') \log^{\sigma-\varepsilon'} \langle \xi \rangle \int_{w > (\log \langle \xi \rangle)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}} e^{-2w} w^{\sigma-\varepsilon'-1} dw. \end{aligned}$$

Последний интеграл есть $(O(\log \langle \xi \rangle)^{-\infty})$, и интеграл (48) конечен для любого q . Таким образом, интеграл (44) сходится.

Рассмотрим интеграл (45). Положим

$$b(x, \xi, h) := (p(x, \xi))^{-(m+h)}.$$

В интеграле (45) имеем $g(x, \xi) = b(x, \xi, h(x)) - b(x, \xi, h_0(x))$ и

$$|g(x, \xi) - g(y, \xi)| \leq |b(x, \xi, h(x)) - b(y, \xi, h(y))| + |b(x, \xi, h_0(x)) - b(y, \xi, h_0(y))|.$$

Докажем сходимость интеграла с функцией $h(x)$ (сходимость другого интеграла проверяется так же):

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \Omega \times \Omega, |x-y| < 1/2} \frac{|b(x, \xi, h(x)) - b(y, \xi, h(y))|^2 \langle \xi \rangle^{2m'}}{|x-y|^{d+2\ell}} |\log |x-y||^{2q} dx dy d\xi < \infty.$$

Прибавляя и вычитая в числителе дроби функцию $b(x, \xi, h(y))$, приходим к проверке конечности двух интегралов

$$\int_{\substack{\mathbb{R}^d \times \Omega \times \Omega, \\ |x-y| < 1/2}} \frac{|b(x, \xi, h(x)) - b(x, \xi, h(y))|^2 \langle \xi \rangle^{2m'}}{|x-y|^{d+2\ell}} |\log |x-y||^{2q} dx dy d\xi < \infty, \quad (49)$$

$$\int_{\substack{\mathbb{R}^d \times \Omega \times \Omega, \\ |x-y| < 1/2}} \frac{|b(x, \xi, h(y)) - b(y, \xi, h(y))|^2 \langle \xi \rangle^{2m'}}{|x-y|^{d+2\ell}} |\log |x-y||^{2q} dx dy d\xi < \infty. \quad (50)$$

Рассмотрим сначала интеграл (49). Оценим числитель дроби в подынтегральном выражении:

$$(b(x, \xi, h(y)) - b(y, \xi, h(y))) \langle \xi \rangle^{m'} = p(x, \xi)^{-m} \langle \xi \rangle^{m'} (e^{-h(x) \log p(x, \xi)} - e^{-h(y) \log p(x, \xi)}). \quad (51)$$

Можно считать, что $|p(x, \xi)| > 1$, так что $\operatorname{Re} \log p(x, \xi) > 0$. Выражение в больших скобках оценивается с помощью неравенства $|e^{-z_1} - e^{-z_2}| \leq |z_1 - z_2|$, где $\operatorname{Re} z_1, z_2 > 0$. С учетом соотношения показателей (42) выражение (51) по модулю не превосходит

$$C \langle \xi \rangle^{-(\ell+d/2)} |h(x) - h(y)| \log |p(x, \xi)| \leq C(\varepsilon) \langle \xi \rangle^{-(\ell+d/2)+\varepsilon} |x-y|^l \quad \forall \varepsilon > 0.$$

При $\varepsilon < \ell$ получаем конечность интеграла (49).

Остается доказать сходимость интеграла (50). Поскольку символ $p(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^1$ эллиптичен, символ $b(x, \xi, h)$ принадлежит $S_{\rho, \delta}^{-(m+h)}$ и

$$|\nabla_x b(x, \xi, h)| \leq C \langle \xi \rangle^{-(m+h)+\delta}.$$

Известное мультипликативное неравенство для гёльдеровских норм дает оценку

$$\begin{aligned} |b(x, \xi, h) - b(y, \xi, h)| &\leq C \max_x |\nabla_x b(x, \xi, h)|^l \max_x |b(x, \xi, h)|^{1-l} |x-y|^l \\ &\leq C \langle \xi \rangle^{-(m+h)+\delta l} |x-y|^l. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл (50) не превосходит

$$C \int_{\substack{\mathbb{R}^d \times \Omega \times \Omega, \\ |x-y| < 1/2}} \frac{|\log |x-y||^{2q}}{\langle \xi \rangle^{d+2(1-\delta)\ell} |x-y|^{d-2(l-\ell)}} dx dy d\xi < \infty.$$

Лемма 5.2 и тем самым теорема 5.1 доказаны.

Закончим доказательство теоремы 1.3. В соответствии с замечанием 2 к лемме 2.1 оценка (39) эквивалентна оценке функции распределения $N(t, A_{h_1}) = O(t^{d/m} (\log t)^{-qd/m})$. Утверждение теоремы 1.3 следует из этой оценки и формул (36), (37) с помощью леммы 2.1. $\square$

Благодарность. Автор признателен А. И. Назарову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирман М. Ш. Соломяк М. З. Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами // Вестн. ЛГУ. Сер. мат. 1977. № 13. С. 13–21.
2. Бирман М. Ш. Соломяк М. З. Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами. II // Вестн. ЛГУ. Сер. мат. 1979. № 13. С. 5–10.
3. Dauge M., Robert D. Formule de Weyl pour une classe d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre négatif sur $L_2(\mathbb{R}^n)$ // C. R. Acad. Sc. Paris Ser. I. 1986. V. 302, N 5. P. 175–178.
4. Dauge M., Robert D. Weyl's formula for a class of pseudo-differential operators with negative order in $L_2(\mathbb{R}^n)$ // Lecture Notes Math. 1987. V. 1256. P. 91–122.
5. Karol' A. I. Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators of variable order // J. Math. Sci. 2015. V. 207, N 2. P. 236–248.
6. Karol' A. I. Asymptotics of spectra of compact pseudodifferential operators with nonsmooth symbols with respect to spatial variables // J. Math. Sci. 2017. V. 226, N 4. P. 355–374.
7. Benassi A., Jaffard S., Roux D. Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators // Rev. Mat. Iberoam. 1997. V. 13, N 1. P. 19–81.
8. Coeurjolly J.-F. Identification of multifractional Brownian motion // Bernoulli. 2005. V. 11, N 6. P. 987–1008.
9. Кароль А. И. Асимптотика сингулярных чисел компактных ПДО с символом, негладким по пространственным переменным // Функц. анализ и его прил. 2019. Т. 53, № 4. С. 89–92.
10. Lieberman G. Regularized distance and its applications // Pacific J. Math. 1985. V. 117, N 2. P. 329–352.
11. Бирман М. Ш. Соломяк М. З. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 1. С. 17–84.
12. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. СПб: Лань, 2010.
13. Вайдль Т. Общие операторные идеалы слабого типа // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 3. С. 117–144.
14. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
15. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1986. Т. 2.

Поступила в редакцию 28 октября 2019 г.

После доработки 24 марта 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Кароль Андрей Игоревич

Санкт-Петербургский государственный университет,

Университетский пр., 28, Санкт-Петербург, Старый Петергоф 198504

andrey.i.karol@gmail.com