V. D. Stepanov, G. È. Shambilova, Multidimensional bilinear hardy inequalities, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 4, 913–931

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.413>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:
IP: 54.162.85.209
April 26, 2023, 13:26:50

УДК 517.51

МНОГОМЕРНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ

В. Д. Степанов, Г. Э. Шамбилова

Аннотация. Получена характеристика многомерного билинейного неравенства Харди в весовых пространствах Лебега.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.413

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, неравенства Харди, билинейный оператор.

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}$ — подмножество всех неотрицательных функций. При $v \in \mathfrak{M}^+$ и $0 < p \leq \infty$ определим весовое пространство Лебега

$$L_v^p := \left\{ f \in \mathfrak{M} : \|f\|_{p,v} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$L_v^\infty := \{ f \in \mathfrak{M} : \|f\|_{\infty,v} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} v(x)|f(x)| < \infty \}, \quad p = \infty.$$

Многомерным оператором Харди называется преобразование

$$Hf(x) = \int_{B(|x|)} f(y) dy, \quad (1)$$

где $B(|x|) := \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < |x|\}$. Исследованию ограниченности оператора (1) в весовых пространствах Лебега, а также в других функциональных классах посвящено большое количество работ (см., например, [1–7]).

Для произвольных фиксированных параметров $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$ и весовых функций $v_1, v_2, u \in \mathfrak{M}^+$ рассмотрим задачу характеристики билинейного неравенства

$$\|Hf \cdot Hg\|_{q,u} \leq C \|f\|_{p_1,v_1} \|g\|_{p_2,v_2}, \quad f, g \in \mathfrak{M}^+, \quad (2)$$

где константа C не зависит от функций f, g и полагается наименьшей из возможных.

Работа В. Д. Степанова (теоремы 2, 3, 13, и 14) финансировалась из гранта Российского научного фонда (проект 19–11–00087) и выполнялась в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН. По остальной части статьи работа В. Д. Степанова выполнялась в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для Вычислительного центра ДВО РАН. Результаты работы Г. Э. Шамбиловой частично поддержаны грантом РФФИ (проект 19–01–00223).

В одномерном случае аналогичная задача с операторами интегрирования $\mathcal{H}f(x) := \int_0^x f$ изучалась в [8, 9] как дополнение к некоторым результатам о мультилинейных неравенствах [10, 11]. Для операторов Харди — Стеклова [12] этот случай рассмотрен в [13, 14]. Билинейные весовые неравенства с операторами Вольтерра

$$R_i f(x) := \int_0^x k_i(x, y) f(y) dy, \quad R_i^* f(x) := \int_x^\infty k_i(y, x) f(y) dy, \quad i = 1, 2,$$

изучены в [15–18], а аналогичная задача на конусе монотонных функций — в [19–21].

Неравенство (2) для некоторых значений параметров суммирования независимо изучалось в [22, 23]. В [22] для доказательств использовался метод дискретизации-антидискретизации, заложенный в [24, 25], а в [23] применялась редукция к одномерному неравенству.

В данной работе используется прямой метод характеристики билинейного неравенства (2), основанный на применении критериев ограниченности многомерного оператора Харди. Представлены критерии для всех возможных значений параметров суммирования, включая новый случай $0 < q < 1$, $p_i = 1$, $i = 1, 2$.

Результаты данной статьи анонсированы в [26].

Для характеристики билинейных неравенств (2) применяем критерии выполнения многомерного весового неравенства Харди [2], полученные при $1 < p \leq q < \infty$ и $1 < q < p < \infty$. Дополнительно к этому в данной работе по аналогии с [27] рассмотрены случаи $0 < q < p$, $1 < p < \infty$ и $0 < q < 1$, $p = 1$. Для крайних значений параметров используются классические результаты [28, гл. 11] (см. также [29, теорема 1.1]).

Основные результаты содержатся в § 3.

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0 и $g^\alpha(x) := [g(x)]^\alpha$. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \leq cB$ с константой c , зависящей только от параметров суммирования; $A \approx B$ равносильно $A = cB$ или $A \lesssim B \lesssim A$. Если $1 < p < \infty$, то $p' := \frac{p}{p-1}$.

§ 2. Весовые неравенства Харди

В этом параграфе будут дополнены результаты о неравенстве

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p v \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \quad (3)$$

полученные в [2, § 2] для $1 < p, q < \infty$, новыми случаями отношений параметров p и q , исчерпывающими весь диапазон их возможных изменений $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$. При $0 < p < 1$ неравенство (3) выполняется лишь в тривиальном случае.

Теорема 1. Пусть $0 < q < p$, $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Тогда для наилучшей константы C в неравенстве (3) выполнено соотношение

$$C \approx \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v^{1-p'} \right)^{\frac{r}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{p}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} =: D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ОЦЕНКА СНИЗУ. Предположим, что неравенство (3) верно, и обозначим

$$w := v^{1-p'}, \quad \mathbf{u}(t) := \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} u(t\tau) d\tau, \quad \mathbf{w}(t) := \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} w(t\tau) d\tau.$$

Пусть

$$f(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_{B(|y|)} w \right)^{\frac{r}{pq'}} w(y),$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_{B(|x|)} f(y) dy &= \int_{B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_{B(|y|)} w \right)^{\frac{r}{pq'}} w(y) dy \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{pq}} \int_{B(|x|)} \left(\int_{B(|y|)} w \right)^{\frac{r}{pq'}} w(y) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{pq}} \int_0^{|x|} \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} w(t\tau) \left(\int_0^t \int_{\Sigma_{n-1}} s^{n-1} w(s\sigma) ds d\sigma \right)^{\frac{r}{pq'}} dt d\tau \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{pq}} \int_0^{|x|} \mathbf{w}(t) \left(\int_0^t \mathbf{w}(s) ds \right)^{\frac{r}{pq'}} dt \\ &= \frac{p'q}{r} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_0^{|x|} \mathbf{w}(t) dt \right)^{\frac{r}{p'q}} = \frac{p'q}{r} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_{B(|x|)} w \right)^{\frac{r}{p'q}}. \end{aligned}$$

Применяя полученную оценку в неравенстве (3), получим

$$\begin{aligned} D^{\frac{rp}{q}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_{B(|x|)} w \right)^{\frac{r}{p'}} u(x) dx \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{p}{q}} \leq C^p \int_{\mathbb{R}^n} f^p v \\ &= C^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{B(|x|)} w \right)^{\frac{r}{q'}} w(x) dx \\ &= C^p \int_0^\infty \mathbf{w}(t) \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^t \mathbf{w} \right)^{\frac{r}{q'}} dt \\ &\approx C^p \int_0^\infty \mathbf{u}(s) \left(\int_s^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{r}{p}} \int_0^s \left(\int_0^t \mathbf{w} \right)^{\frac{r}{q'}} \mathbf{w}(t) dt ds \\ &\lesssim C^p \int_0^\infty \left(\int_s^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_0^s \mathbf{w} \right)^{\frac{r}{p'}} \mathbf{u}(s) ds \end{aligned}$$

$$= C^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_{B(|x|)} w \right)^{\frac{r}{p'}} u(x) dx = C^p D^r.$$

Разделив обе части неравенства на D^r , имеем $D \lesssim C$.

ОЦЕНКА СВЕРХУ. Пусть $D < \infty$, обозначим

$$\mathbf{f}(s) := \int_{\Sigma_{n-1}} s^{n-1} f(s\sigma) d\sigma, \quad \mathbf{W}(s) := \int_0^s \mathbf{w}(t) dt$$

и временно предположим, что

$$\int_0^\infty \mathbf{w}(t) dt = \infty. \quad (4)$$

Воспользуемся утверждениями 2.2, 2.3 из [27]. Тогда в левой части неравенства (3) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} u(t\tau) d\tau \left(\int_0^t \int_{\Sigma_{n-1}} s^{n-1} f(s\sigma) ds d\sigma \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \mathbf{u}(t) \left(\int_0^t \mathbf{f}(s) ds \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_t^\infty \mathbf{W}^{-p} \mathbf{w} \right)^{-\frac{r}{q}} \mathbf{W}^{-p}(t) \mathbf{w}(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t \mathbf{f} \right)^p \mathbf{W}^{-p}(t) \mathbf{w}(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^t \mathbf{w} \right)^{\frac{r}{q'}} \mathbf{w}(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\infty \mathbf{f}^p \mathbf{w}^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_0^t \mathbf{w} \right)^{\frac{r}{p'}} \mathbf{u}(t) dt \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\infty \mathbf{f}^p \mathbf{w}^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} u(t\tau) d\tau \left(\int_t^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} u(s\sigma) ds d\sigma \right)^{\frac{r}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} w(s\sigma) ds d\sigma \right)^{\frac{r}{p'}} dt \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\int_0^\infty \left(\int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} f(t\tau) d\tau \right)^p \left(\int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} w(t\tau) d\tau \right)^{1-p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v^{1-p'} \right)^{\frac{r}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r}{p}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p w^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве применяется неравенство Гёльдера

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} f(t\tau) d\tau \right)^p \left(\int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} w(t\sigma) d\sigma \right)^{1-p} dt \\ & = \int_0^\infty t^{n-1} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} f(t\tau) w^{\frac{1-p}{p}}(t\tau) w^{-\frac{1-p}{p}}(t\tau) d\tau \right)^p \left(\int_{\Sigma_{n-1}} w(t\sigma) d\sigma \right)^{1-p} dt \\ & \leq \int_0^\infty t^{n-1} \left(\int_{\Sigma_{n-1}} f^p(t\tau) w^{1-p}(t\tau) d\tau \right) dt = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p w^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Для того чтобы снять ограничение (4), достаточно воспользоваться рассуждением из доказательства теоремы 2.4 в [27]. Таким образом, $C \lesssim D$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\underline{v}(x) := \operatorname{ess\,inf}_{|t| < |x|} v(t)$, $v \in \mathfrak{M}^+$.

Теорема 2. Пусть $0 < q < 1$, $p = 1$. Тогда наилучшая константа C в неравенстве

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} f v, \quad f \in \mathfrak{M}^+, \quad (5)$$

не изменится, если v заменить на $\underline{v}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\underline{C}$ — наилучшая константа в неравенстве (5) с $\underline{v}$ вместо v . Так как $\underline{v} \leq v$ п. в., то $C \leq \underline{C}$. Докажем обратное.

Фиксируем $f \in \mathfrak{M}^+$ и $\varepsilon \in (0, 1)$. Положим

$$A := \{x : v(x) < \varepsilon + \underline{v}(x)\},$$

$$B_j := \{x : j\varepsilon \leq \underline{v}(x) < (j+1)\varepsilon\} \subseteq \{x : a_j \leq |x| \leq b_j\}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$a_j := \inf B_j, \quad b_j := \sup B_j, \quad J := \{j : a_j < b_j\}.$$

Тогда $\operatorname{mes}(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in J} B_j) = 0$. Так как $\underline{v}$ невозрастающая, то

$$|x| < a_j, \quad j \in J \Rightarrow \underline{v}(x) \geq \varepsilon(j+1) \Rightarrow \underline{v}(a_j) \geq \varepsilon(j+1),$$

$$|x| < b_j, \quad j \in J \Rightarrow \underline{v}(x) \geq \varepsilon j \Rightarrow \underline{v}(b_j) \geq \varepsilon j,$$

$B_j = \{x : a_j < |x| \leq b_j\}$. Имеем

$$A_j := A \cap \{x : a_j < |x| < a_j + \varepsilon(b_j - a_j)\} \subset B_j.$$

Покажем, что $\operatorname{mes}(A_j) > 0$, $j \in J$. Поскольку $v \geq \underline{v}$ п. в., то

$$\begin{aligned} \underline{v}(a_j) &= \operatorname{ess\,inf}_{|t| < a_j} v(t) \geq (j+1)\varepsilon > \underline{v}(a_j + \varepsilon(b_j - a_j)) = \operatorname{ess\,inf}_{|t| < a_j + \varepsilon(b_j - a_j)} v(t) \\ &= \min \left\{ \operatorname{ess\,inf}_{|t| < a_j} v(t), \operatorname{ess\,inf}_{a_j < |t| < a_j + \varepsilon(b_j - a_j)} v(t) \right\} = \operatorname{ess\,inf}_{a_j < |t| < a_j + \varepsilon(b_j - a_j)} v(t) =: z_j. \end{aligned}$$

По определению

$$\operatorname{ess\,inf}_{t \in E} v(t) = \sup\{c \in \mathbb{R} : \operatorname{mes}(t \in E : v(t) < c) = 0\}.$$

Тогда существует $c_j \in (z_j, (j+1)\varepsilon)$ такое, что если $E_j := \{t \in (z_j, (j+1)\varepsilon) : v(t) < c_j\}$, то $E_j \subset (a_j < |x| < a_j + \varepsilon(b_j - a_j))$ и $\operatorname{mes}(E_j) > 0$. Тем самым для любого $t \in E_j$ имеем

$$v(t) < (j+1)\varepsilon \leq \underline{v}(t) + \varepsilon \Rightarrow E_j \subset A \Rightarrow \operatorname{mes}(A_j) > 0.$$

Пусть $|A| := \operatorname{mes} A$. Определим

$$f_\varepsilon(x) := \sum_{j \in J} \left(\int_{a_j < |x| < b_j} f \right) |A_j|^{-1} \chi_{A_j}(x).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon v &= \sum_{j \in J} \left(\int_{a_j < |x| < b_j} f \right) |A_j|^{-1} \int_{A_j} v \leq \sum_{j \in J} \left(\int_{a_j < |x| < b_j} f \right) (j+2)\varepsilon \\ &\leq \sum_{j \in J} \left(\int_{a_j < |x| < b_j} f \underline{v} + 2\varepsilon \int_{a_j < |x| < b_j} f \right) = \int_{\mathbb{R}^n} f \underline{v} + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} f. \end{aligned}$$

Покажем, что $\int_{B(|x|)} f \leq \int_{B(|x|)} f_\varepsilon$ п. в. Так как

$$x \in \bigcup_{j \in J} (a_j + \varepsilon(b_j - a_j) < |x| < b_j) \Rightarrow \exists j_0 \in J : x \in (a_{j_0} + \varepsilon(b_{j_0} - a_{j_0}) < |x| < b_{j_0}),$$

то

$$\begin{aligned} \int_{B(|x|)} f &\leq \sum_{j_0 \leq j} \int_{a_j < |x| < b_j} f = \sum_{j_0 \leq j} \left(\int_{a_j < |x| < b_j} f \right) |A_j|^{-1} \int_{a_j < |x| < a_j + \varepsilon(b_j - a_j)} \chi_{A_j} \\ &= \sum_{j_0 \leq j} \int_{a_j < |x| < b_j} f_\varepsilon \leq \int_{B(|x|)} f_\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{B(|x|)} f \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{B(|x|)} f_\varepsilon,$$

откуда, используя лемму Фату, получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f_\varepsilon \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} C \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon v \leq C \liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \underline{v} + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} f \right) = C \int_{\mathbb{R}^n} f \underline{v}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\underline{C} \leq C$, и получаем $\underline{C} = C$. $\square$

Теорема 3. Пусть $0 < q < 1$, $p = 1$. Тогда для наилучшей константы C в неравенстве (5) выполнено соотношение

$$C \approx \left(\int_{\mathbb{R}^n} \underline{v}^{\frac{q}{q-1}}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} =: B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 следует, что неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \underline{v} \right), \quad f \in \mathfrak{M}^+,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} u(t\tau) d\tau \left(\int_0^t \int_{\Sigma_{n-1}} s^{n-1} f(s\sigma) ds d\sigma \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C \left(\int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} f(t\tau) \underline{v}(t) dt d\tau \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\underline{v}(x) = \underline{v}(|x|) = \underline{v}(t)$ при $t = |x|$, имеем

$$\left(\int_0^\infty \mathbf{u}(t) \left(\int_0^t \mathbf{f}(s) ds \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \int_0^\infty \mathbf{f} \underline{v}.$$

Используя рассуждения теоремы 3.3 из [27], имеем

$$\begin{aligned} C & \approx \left(\int_0^\infty \underline{v}^{\frac{q}{q-1}}(t) \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{q}{1-q}} \mathbf{u}(t) dt \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ & = \left(\int_0^\infty \underline{v}^{\frac{q}{q-1}}(t) \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} u(t\tau) d\tau \left(\int_t^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} s^{n-1} u(s\sigma) ds d\sigma \right)^{\frac{q}{1-q}} dt \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ & = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \underline{v}^{\frac{q}{q-1}}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) dx \right)^{\frac{1-q}{q}}. \quad \square \end{aligned}$$

В дальнейшем для крайних значений параметров суммирования применяем критерии, которые находятся по общей теореме (см. [28, гл. 11; 29, теорема 1.1]).

Лемма. Пусть $0 < q \leq \infty$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда для наилучшей константы C в неравенстве (3) выполнены следующие соотношения:

- (i) $1 \leq q < \infty$, $p = 1$, $C = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{|y| \geq |x|} u(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \operatorname{ess\,sup}_{|y| < |x|} v^{-1}(y)$;
- (ii) $0 < q < \infty$, $p = \infty$, $C = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|x| \leq |z|} v^{-1}(x) dx \right)^q u(z) dz \right)^{\frac{1}{q}}$;

- (iii) $1 < p < \infty, q = 1, C = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|x| \geq |z|} u(x) dx \right)^{p'} v^{1-p'}(z) dz \right)^{\frac{1}{p'}}$;
 (iv) $1 < p < \infty, q = \infty, C = \operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{R}^n} u(z) \left(\int_{|x| \leq |z|} v^{1-p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}}$;
 (v) $p = q = \infty, C = \operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{R}^n} u(z) \left(\int_{|x| \leq |z|} v^{-1}(x) dx \right)$;
 (vi) $p = 1, q = \infty, C = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{ess\,sup}_{|y| > |x|} u(y) \operatorname{ess\,sup}_{|y| < |x|} v^{-1}(y)$.

§ 3. Многомерные билинейные неравенства Харди

Для характеристики билинейного весового неравенства (2) разделим область значений параметров суммирования на следующие зоны.

- $I_1.$ $1 < \max(p_1, p_2) \leq q < \infty$.
 $I_2.$ $1 < \max(p_1, p_2) < q = \infty$.
 $I_3.$ $q = \infty, p_1 = p_2 = \infty$.
 $II_1.$ $1 < \min(p_1, p_2) \leq q < \max(p_1, p_2) < \infty$.
 $II_2.$ $1 < \min(p_1, p_2) \leq q < \max(p_1, p_2) = \infty$.
 $II_3.$ $0 < \min(p_1, p_2) < q = \infty, \max(p_1, p_2) = \infty$.
 $III_1.$ $0 < q < \min(p_1, p_2), \min(p_1, p_2) > 1$.
 $III_2.$ $0 < q < \min(p_1, p_2) < \infty, \min(p_1, p_2) > 1, \max(p_1, p_2) = \infty$.
 $IV_1.$ $0 < q < 1, p_1 = p_2 = 1$.
 $IV_2.$ $0 < q < 1 = \min(p_1, p_2) < \infty, 1 < \max(p_1, p_2) < \infty$.
 $IV_3.$ $0 < q < 1 = \min(p_1, p_2), \max(p_1, p_2) = \infty$.

В дальнейшем будем использовать сокращения типа $\int_{|x| \leq \alpha} g := \int_{|x| \leq \alpha} g(x) dx$.

Теорема 4 (случай I_1). Пусть $1 < \max(p_1, p_2) \leq q < \infty$. Тогда $C \approx A_1$, где

$$A_1 := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}} \left(\int_{|x| \geq \alpha} u \right)^{\frac{1}{q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дважды используя теорему 2.1 из [2], получим

$$\begin{aligned} C &= \sup_g \sup_f \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{p_1, v_1} \|g\|_{p_2, v_2}} \\ &\approx \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \geq \alpha} \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \\ &\approx \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \sup_{\beta > \alpha} \left(\int_{|y| \geq \beta} u \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{|y| \leq \beta} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}} = A_1. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 5 (случай I_2). Пусть $1 < \max(p_1, p_2) < q = \infty$. Тогда $C \approx A_2$, где

$$A_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}} u(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму (iv) дважды, имеем $C \approx A_2$. $\square$

Теорема 6 (случай I_3). Пусть $q = \infty, p_1 = p_2 = \infty$. Тогда $C \approx A_3$, где

$$A_3 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{-1} \right) \left(\int_{B(|x|)} v_2^{-1} \right) u(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму (v) дважды, получим $C \approx A_3$. $\square$

Теорема 7 (случай II_1). Пусть $1 < \min(p_1, p_2) \leq q < \max(p_1, p_2) < \infty$ и $\frac{1}{r_i} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}$. Тогда $C \approx A_4$, где

(a) $1 < p_1 \leq q < p_2 < \infty$,

$$A_4 := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \left(\int_{|x| \geq \alpha} \left(\int_{|y| \geq |x|} u \right)^{\frac{r_2}{p_2}} \left(\int_{|y| \leq |x|} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{p'_2}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}},$$

(b) $1 < p_2 \leq q < p_1 < \infty$,

$$A_4 := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}} \left(\int_{|x| \geq \alpha} \left(\int_{|y| \geq |x|} u \right)^{\frac{r_1}{p_1}} \left(\int_{|y| \leq |x|} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{p'_1}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 2.1 из [2] и теорему 1, получим

$$\begin{aligned} C &= \sup_g \sup_f \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{p_1, v_1} \|g\|_{p_2, v_2}} \\ &\approx \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \geq \alpha} \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \\ &\approx \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \left(\int_{|x| \geq \alpha} \left(\int_{|y| \geq |x|} u \right)^{\frac{r_2}{p_2}} \left(\int_{|y| \leq |x|} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{p'_2}} u(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}}. \end{aligned}$$

Случай $1 < p_2 \leq q < p_1 < \infty$ доказывается аналогично. $\square$

Теорема 8 (случай II_2). Пусть $1 < \min(p_1, p_2) \leq q < \max(p_1, p_2) = \infty$. Тогда $C \approx A_5$, где

(a) $1 < p_1 \leq q < p_2 = \infty$,

$$A_5 := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \left(\int_{|x| \geq \alpha} u(x) \left(\int_{|y| < |x|} v_2^{-1} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $1 < p_2 \leq q < p_1 = \infty$,

$$A_5 := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}} \left(\int_{|x| \geq \alpha} u(x) \left(\int_{|y| < |x|} v_1^{-1} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение теоремы 2.1 из [2] и леммы (ii) влечет $C \approx A_5$. $\square$

Теорема 9 (случай II_3). Пусть $1 < \min(p_1, p_2) < q = \infty$, $\max(p_1, p_2) = \infty$. Тогда $C \approx A_6$, где

(а) $1 < p_1 < q = p_2 = \infty$,

$$A_6 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{-1} \right) u(x),$$

(б) $1 < p_2 \leq q < p_1 = \infty$,

$$A_6 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{-1} \right) u(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму в случаях (iv) и (v), получим $C \approx A_6$. $\square$

Теорема 10 (случай III_1). Пусть $0 < q < \min(p_1, p_2) < \infty$, $\min(p_1, p_2) > 1$ и $\frac{1}{r_i} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. Тогда $C \approx A_{7.1} + A_{7.2}$, где

(а) $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$,

$$A_{7.1} := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}} \left(\int_{|x| \geq \alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}},$$

$$A_{7.2} := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \leq \alpha} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}} \left(\int_{|x| \geq \alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r_1}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{q'}} v_1^{1-p'_1}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}},$$

(б) $\frac{1}{q} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$,

$$A_{7.1}^s := \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(y) dy \right)^{\frac{s}{r_2}} \times \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{s}{r_2'}} v_1^{1-p'_1}(x) dx,$$

$$A_{7.2}^s := \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{\frac{r_1}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{q'}} v_1^{1-p'_1}(y) dy \right)^{\frac{s}{r_1}} \times \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{s}{r_1'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Применяя теорему 1, неравенство Гёльдера и теорему Фубини, получим

$$C = \sup_g \sup_f \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{p_1, v_1} \|g\|_{p_2, v_2}} \approx \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right)^{\frac{r_1}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{q'}} v_1^{1-p'_1}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
& = \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left[\sup_h \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q \left(\int_{B(|x|)} h \right) u(x) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p_1}{q}}(x) \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{-p_1}{q'}} v_1^{\frac{p'_1}{r_1}}(x) dx \right)^{\frac{q}{p_1}}} \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \approx \sup_h \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{B(|y|)} h \right) u(y) dy \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p_1}{q}}(x) \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{-p_1}{q'}} v_1^{\frac{p'_1}{r_1}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p_1}}} \\
& \approx \sup_h \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} h \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p_1}{q}}(x) \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{-p_1}{q'}} v_1^{\frac{p'_1}{r_1}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p_1}}} \\
& + \sup_h \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} h \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p_1}{q}}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{-p_1}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{-p_1}{q'}} v_1^{\frac{p'_1}{r_1}}(x) dx \right)^{\frac{1}{p_1}}} =: H_1 + H_2. \quad (6)
\end{aligned}$$

Для оценки констант H_1 и H_2 применим теорему 2.1 из [2] с параметрами $\tilde{p} \leq \tilde{q}$, где $\tilde{p} = \frac{p_1}{q}$, $\tilde{q} = \frac{r_2}{q}$, и получим $H_1 \approx A_{7.1}$ и $H_2 \approx A_{7.2}$.

II. (b) доказывается аналогично применением теоремы 1. $\square$

Теорема 11 (случай III₂). Пусть $0 < q < \min(p_1, p_2) < \infty$, $\min(p_1, p_2) > 1$, $\max(p_1, p_2) = \infty$ и $\frac{1}{r_i} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. Тогда $C \approx A_8$, где

(a) $0 < q < p_1 < \infty$, $p_1 > 1$, $p_2 = \infty$,

$$A_8 := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{q'}} v_1^{1-p'_1}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u(y) \left(\int_{B(|y|)} v_2^{-1} \right)^q dy \right)^{\frac{r_1}{q}} dx \right)^{\frac{1}{r_1}},$$

(b) $0 < q < p_2 < \infty$, $p_2 > 1$, $p_1 = \infty$,

$$A_8 := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u(y) \left(\int_{B(|y|)} v_1^{-1} \right)^q dy \right)^{\frac{r_2}{q}} dx \right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Применяя теорему 1, принцип двойственности и утверждения леммы (ii) и (iii), получим

$$\begin{aligned}
C &= \sup_g \sup_f \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{p_1, v_1} \|g\|_{p_2, v_2}} \approx \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \\
&\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right)^{\frac{r_1}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{q'}} v_1^{1-p'_1}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left[\sup_h \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q \left(\int_{B(|x|)} h \right) u(x) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p_1}{q}}(x) \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{-p_1}{q'}} v_1^{\frac{p'_1}{r_1}}(x) dx \right)^{\frac{q}{p_1}}} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_h \left[\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} h \right) \left(\int_{B(|x|)} v_2^{-1} \right)^q u(x) dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^{\frac{p_1}{q}}(x) \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{-p_1}{q'}} v_1^{\frac{p'_1}{r_1}}(x) dx \right)^{\frac{q}{p_1}}} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{q'}} v_1^{1-p'_1}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u(y) \left(\int_{B(|y|)} v_2^{-1} \right)^q dy \right)^{\frac{r_1}{q}} dx \right)^{\frac{1}{r_1}}.
\end{aligned}$$

Случай (b) доказывается аналогично. $\square$

Пусть $v_i \in \mathfrak{M}^+, i = 1, 2$. Положим

$$\underline{v}_i(x) := \operatorname{ess\,inf}_{|t| < |x|} v_i(t) = \frac{1}{\operatorname{ess\,sup}_{|t| < |x|} \frac{1}{v_i(t)}} =: \frac{1}{\bar{v}_i(t)}.$$

Заметим, что $\underline{v}_i(x) = \underline{v}_i(|x|)$ и $\bar{v}_i(x) = \bar{v}_i(|x|)$, будем использовать эти обозначения для функций $\bar{v}_i(t) := \bar{v}_i(|x|)$, $t = |x|$ при $t \in [0, \infty)$. Без потери общности предположим, что функция $\bar{v}_i(t)$ непрерывна справа. Тогда существует мера Бореля $d\varphi_i$ такая, что

$$[\bar{v}_i(t)]^{\frac{q}{1-q}} = \int_{[0, t]} d\varphi_i + [\bar{v}_i(0)]^{\frac{q}{1-q}}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f v_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g v_2 \right), \quad f, g \in \mathfrak{M}^+, \quad (7)$$

и предположим для простоты, что $\bar{v}_i(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \bar{v}_i(t) = 0$, $i = 1, 2$.

Теорема 12 (случай IV_1). Пусть $0 < q < 1$, $p_1 = p_2 = 1$. Тогда $C \approx A_{9.1} + A_{9.2}$, где

(a) $\frac{1}{2} \leq q < 1$,

$$A_{9.1} := \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_2(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} \bar{v}_1(t),$$

$$A_{9.2} := \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} \bar{v}_2(t),$$

(b) $0 < q < \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
A_{9.1}^{\frac{q}{1-2q}} &:= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(y) dy ([\bar{v}_2(|y|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-q}}) \right)^{\frac{1-q}{1-2q}} \\
&\quad \times d[\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-2q}},
\end{aligned}$$

$$A_{9,2}^{\frac{q}{1-2q}} := \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(y) dy ([\bar{v}_1(|y|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}}) \right)^{\frac{1-q}{1-2q}} \times d[\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-2q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Введем обозначения, пусть

$$\mathbf{h}(t) := \int_{\Sigma_{n-1}} t^{n-1} h(t\tau) d\tau,$$

и аналогично определим функции $\mathbf{u}$ и $\mathbf{g}$. Воспользовавшись теоремой 3, неравенством Гёльдера и теоремой 3.3 из [27], получим

$$\begin{aligned} C &= \sup_g \sup_f \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{1,v_1} \|g\|_{1,v_2}} \\ &\approx \sup_g \|g\|_{1,v_2}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right)^{\frac{q}{1-q}} \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ &= \sup_g \|g\|_{1,v_2}^{-1} \left(\int_0^\infty \bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t) \left(\int_t^\infty \left(\int_0^s \mathbf{g} \right)^q \mathbf{u}(s) ds \right)^{\frac{q}{1-q}} \left(\int_0^t \mathbf{g} \right)^q \mathbf{u}(t) dt \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ &\approx \sup_g \|g\|_{1,v_2}^{-1} \left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_t^\infty \left(\int_0^s \mathbf{g} \right)^q \mathbf{u}(s) ds \right)^{\frac{q}{1-q}} d\varphi_1(t) \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ &= \sup_g \|g\|_{1,v_2}^{-1} \left[\sup_h \frac{\int_0^\infty \left(\int_0^t \mathbf{g} \right)^q \left(\int_{[0,t]} \mathbf{h} d\varphi_1 \right) \mathbf{u}(t) dt}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}} d\varphi_1 \right)^q} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\approx \sup_h \frac{\left(\int_0^\infty \bar{v}_2^{\frac{q}{1-q}}(t) \left(\int_t^\infty \left(\int_{[0,s]} \mathbf{h} d\varphi_1 \right) \mathbf{u}(s) ds \right)^{\frac{q}{1-q}} \left(\int_{[0,t]} \mathbf{h} d\varphi_1 \right) \mathbf{u}(t) dt \right)^{\frac{1-q}{q}}}{\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}} d\varphi_1} \\ &= \sup_h \frac{\left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_t^\infty \left(\int_{[0,s]} \mathbf{h} d\varphi_1 \right) \mathbf{u}(s) ds \right)^{\frac{q}{1-q}} d\varphi_2(t) \right)^{\frac{1-q}{q}}}{\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}} d\varphi_1} \\ &\approx \left(\sup_h \frac{\left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{[0,t]} \mathbf{h} d\varphi_1 \right)^{\frac{1}{1-q}} \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(t) \right)^{1-q}}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}} d\varphi_1 \right)^q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\sup_h \frac{\left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{[t,\infty]} \mathbf{h}(s) \left(\int_s^\infty \mathbf{u} \right) d\varphi_1(s) \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(t) \right)^{1-q}}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}} d\varphi_1 \right)^q} \right)^{\frac{1}{q}} =: H_1^{\frac{1}{q}} + H_2^{\frac{1}{q}}. \quad (8) \end{aligned}$$

Чтобы оценить константы H_1 и H_2 , применим теорему 1 из [30] при $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{1-q} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq q < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} H_1 &\approx \sup_{t>0} \left(\int_{[t,\infty]} \left(\int_s^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(s) \right)^{1-q} \left(\int_{[0,t]} d\varphi_1 \right)^{1-q} \\ &\approx \sup_{t>0} \left(\int_{[t,\infty]} \left(\int_s^\infty \left(\int_z^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{q}{1-q}} \mathbf{u}(z) dz \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(s) \right)^{1-q} (\bar{v}_1(t))^q \\ &= \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \left(\int_z^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{q}{1-q}} \mathbf{u}(z) dz \left(\int_{[t,z]} d\varphi_2 \right) \right)^{1-q} (\bar{v}_1(t))^q \\ &= \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_2(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{1-q} (\bar{v}_1(t))^q. \end{aligned}$$

Аналогично

$$H_2 \approx \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{1-q} (\bar{v}_2(t))^q.$$

(b) Используя те же рассуждения, получим

$$\begin{aligned} C &= \sup_g \sup_f \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{1,v_1} \|g\|_{1,v_2}} \\ &\approx \left(\sup_h \frac{\left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{[0,t]} \mathbf{h} d\varphi_1 \right)^{\frac{1}{1-q}} \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(t) \right)^{1-q}}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}} d\varphi_1 \right)^q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\sup_h \frac{\left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{[t,\infty]} \mathbf{h}(s) \left(\int_s^\infty \mathbf{u} \right) d\varphi_1(s) \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(t) \right)^{1-q}}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}} d\varphi_1 \right)^q} \right)^{\frac{1}{q}} =: H_1^{\frac{1}{q}} + H_2^{\frac{1}{q}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Для оценки констант H_1 и H_2 применим теорему 2 из [30] при $\frac{1}{1-q} < \frac{1}{q} \Leftrightarrow 0 < q < \frac{1}{2}$. Имеем

$$\begin{aligned} H_1^{\frac{1}{1-2q}} &\approx \int_{[0,\infty]} \left(\int_{[0,t]} d\varphi_1 \right)^{\frac{1-q}{1-2q}} \left(\int_{[t,\infty]} \left(\int_s^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(s) \right)^{\frac{q}{1-2q}} \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(t) \\ &= \int_{[0,\infty]} \int_{[0,t]} \left(\int_{[0,s]} d\varphi_1 \right)^{\frac{q}{1-2q}} d\varphi_1(s) \left(\int_{[t,\infty]} \left(\int_s^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(s) \right)^{\frac{q}{1-2q}} \\ &\quad \times \left(\int_t^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(t) \approx \int_{[0,\infty]} \left(\int_{[t,\infty]} \left(\int_s^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{1}{1-q}} d\varphi_2(s) \right)^{\frac{1-q}{1-2q}} \left(\int_{[0,t]} d\varphi_1 \right)^{\frac{q}{1-2q}} d\varphi_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0, \infty]} \left(\int_t^\infty \left(\int_z^\infty \mathbf{u} \right)^{\frac{q}{1-q}} \mathbf{u}(z) dz \left(\int_{[t, z]} d\varphi_2 \right) \right)^{\frac{1-q}{1-2q}} d[\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-2q}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(y) dy ([\bar{v}_2(|y|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-q}}) \right)^{\frac{1-q}{1-2q}} \\
&\quad \times d[\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-2q}}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
H_2^{\frac{1}{1-2q}} &\approx \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(y) dy ([\bar{v}_1(|y|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}}) \right)^{\frac{1-q}{1-2q}} \\
&\quad \times d[\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-2q}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Теорема 13 (случай IV_2). Пусть $0 < q < 1 = \min(p_1, p_2)$, $1 < \max(p_1, p_2) < \infty$ и $\frac{1}{r_i} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. Тогда $C \approx A_{10.1} + A_{10.2}$, где

(a) $0 < q < 1 = p_1$, $p_2 > 1$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p_2} - 1$, $r_2 \geq 1$,

$$A_{10.1} := \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{|y|<|x|} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}} \bar{v}_1(t),$$

$$\begin{aligned}
A_{10.2} &:= \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_{|x|<t} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}};
\end{aligned}$$

$r_2 < 1$,

$$A_{10.1} := \left(\int_{[0, \infty]} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{|y|<|x|} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{s}{r_2}} d\bar{v}_1^s(t) \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\begin{aligned}
A_{10.2}^s &:= \int_{[0, \infty]} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{s \frac{1-q}{q}} \\
&\quad \times d \left(\int_{|x|<t} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{s}{p'_2}};
\end{aligned}$$

(b) $0 < q < 1 = p_2$, $p_1 > 1$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1} - 1$, $r_1 \geq 1$,

$$A_{10.1} := \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{r_1}{q}} \left(\int_{|y|<|x|} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{q'}} v_1^{1-p'_1}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \bar{v}_2(t),$$

$$A_{10.2} := \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_2(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ \times \left(\int_{|x|<t} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{1}{p'_1}};$$

$$r_1 < 1,$$

$$A_{10.1} := \left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{r_1}{1-q}} \left(\int_{|y|<|x|} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{r_1}{q'}} v_1^{1-p'_1}(x) dx \right)^{\frac{s}{r_1}} d\bar{v}_2^s(t) \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$A_{10.2}^s := \int_{[0,\infty]} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_2(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{s \frac{1-q}{q}} \\ \times d \left(\int_{|x|<t} v_1^{1-p'_1} \right)^{\frac{s}{p'_1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя теорему 3, принцип двойственности и теорему 1, получим

$$C = \sup_g \sup_f \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{p_1, v_1} \|g\|_{p_2, v_2}} \\ \approx \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right)^{\frac{q}{1-q}} \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ \approx \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{|y|>t} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right)^{\frac{1}{1-q}} d(\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t)) \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ = \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left[\sup_h \frac{\int_{[0,\infty]} \left(\int_{|y|>t} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right) \mathbf{h}(t) d\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t)}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}}(t) d\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t) \right)^q} \right]^{\frac{1}{q}} \\ = \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left[\sup_h \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) \left(\int_{t<|y|} \mathbf{h}(t) d\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t) \right) dy}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}}(t) d\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t) \right)^q} \right]^{\frac{1}{q}} \\ = \sup_h \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u(y) \left(\int_{t<|y|} \mathbf{h}(t) d\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t) \right) dy \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}}}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}}(t) d\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t) \right)^q} \\ \approx \sup_h \left[\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{t<|x|} \mathbf{h}(t) d\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t) \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{q}{r_2}}}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}}(t) d\bar{v}_1^{-\frac{q}{1-q}}(t) \right)^q} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \sup_h \left[\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{t>|x|} \mathbf{h}(t) d\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t) \left(\int_{|y|>t} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{q}{r_2}}}{\left(\int_{[0,\infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}}(t) d\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t) \right)^q} \right]^{\frac{1}{q}} =: \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2.$$

При $\frac{1}{q} \leq \frac{r_2}{q} \Leftrightarrow r_2 \geq 1$ оценим константы $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Для константы $\mathcal{H}_2$ используем те же рассуждения, что для H_1 в теореме 12(a):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{|y|<|x|} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{1}{r_2}} \bar{v}_1(t), \\ \mathcal{H}_2 &= \sup_{t>0} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} \\ &\quad \times \left(\int_{|x|<t} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{1}{p'_2}}. \end{aligned}$$

При $\frac{r_2}{q} < \frac{1}{q} \Leftrightarrow r_2 < 1$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p_2} - 1$ используем теорему 2 из [30], находим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{r_2}{q}} \left(\int_{|y|<|x|} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{r_2}{q'}} v_2^{1-p'_2}(x) dx \right)^{\frac{s}{r_2}} d\bar{v}_1^s(t) \right)^{\frac{1}{s}}, \\ \mathcal{H}_2^s &= \int_{[0,\infty]} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|>|x|} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) ([\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}}) dx \right)^{s\frac{1-q}{q}} \\ &\quad \times d \left(\int_{|x|<t} v_2^{1-p'_2} \right)^{\frac{s}{p'_2}}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 14 (случай IV_3). Пусть $0 < q < 1 = \min(p_1, p_2)$, $\max(p_1, p_2) = \infty$. Тогда $C \approx A_{12}$, где

(a) $0 < q < 1 = p_1$, $p_2 = \infty$,

$$A_{11} := \left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|<|x|} v_2^{-1} \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{1-q}} d[\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}} \right)^{\frac{1-q}{q}},$$

(b) $0 < q < 1 = p_2$, $p_1 = \infty$,

$$A_{11} := \left(\int_{[0,\infty]} \left(\int_{|x|>t} \left(\int_{|y|<|x|} v_1^{-1} \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{1-q}} d[\bar{v}_2(t)]^{\frac{q}{1-q}} \right)^{\frac{1-q}{q}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя те же рассуждения, что в теореме 13, и используя лемму из § 2 в случаях (ii) и (iii), получим

$$C = \sup_g \sup_f \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{p_1, v_1} \|g\|_{p_2, v_2}}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right)^{\frac{q}{1-q}} \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{1-q}{q}} \\
&\approx \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left(\int_{[0, \infty]} \left(\int_{|y| > t} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right)^{\frac{q}{1-q}} d(\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t)) \right)^{\frac{1-q}{q}} \\
&= \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left[\sup_h \frac{\int_{[0, \infty]} \left(\int_{|y| > t} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) dy \right) \mathbf{h}(t) d\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t)}{\left(\int_{[0, \infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}}(t) d\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t) \right)^q} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_g \|g\|_{p_2, v_2}^{-1} \left[\sup_h \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|y|)} g \right)^q u(y) \left(\int_{t < |y|} \mathbf{h}(t) d\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t) \right) dy}{\left(\int_{[0, \infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}}(t) d\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t) \right)^q} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\sup_h \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|y|)} v_2^{-1} \right)^q u(y) \left(\int_{t < |y|} \mathbf{h}(t) d\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t) \right) dy}{\left(\int_{[0, \infty]} \mathbf{h}^{\frac{1}{q}}(t) d\bar{v}_1^{\frac{q}{1-q}}(t) \right)^q} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\approx \left(\int_{[0, \infty]} \left(\int_{|x| > t} \left(\int_{|y| < |x|} v_2^{-1} \right)^q u(x) dx \right)^{\frac{q}{1-q}} d[\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}} \right)^{\frac{1-q}{q}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Christ M., Grafakos L. Best constants for two nonconvolution inequalities // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123, N 6. P. 1687–1693.
2. Drábek P., Heinig H. P., Kufner A. Higher dimensional Hardy inequality. Birkhäuser-Verl.: Basel, 2012.
3. Sinnamoni G. One-dimensional Hardy-type inequalities in many dimensions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1998. V. 128, N 4. Sec. A. P. 833–848.
4. Persson L.-E., Samko S. G. A note on the best constants in some Hardy inequalities // J. Math. Inequal. 2015. V. 9, N 2. P. 437–447.
5. Mamedov F. I., Harman A. On a weighted inequality of Hardy type in spaces $L^{p(\cdot)}$ // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 353, N 2. P. 521–530.
6. Mamedov F. I., Harman A. On a Hardy type general weighted inequality in spaces $L^{p(\cdot)}$ // Integral Equations Operator Theory. 2010. V. 66, N 4. P. 565–592.
7. Cruz-Uribe D., Mamedov F. I. On a general weighted Hardy type inequality in the variable exponent Lebesgue spaces // Rev. Mat. Complut. 2012. V. 25, N 2. P. 335–367.
8. Aguilar Cañestro M. I., Ortega Salvador P., Ramírez Torreblanca C. Weighted bilinear Hardy inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 387, N 1. P. 320–334.
9. Krepeš M. Iterating bilinear Hardy inequalities // Proc. Edinb. Math. Soc. 2017. V. 60. P. 955–971.
10. Cwikel M., Kerman R. Positive multilinear operators acting on weighted L_p spaces // J. Funct. Anal. 1992. V. 106, N 1. P. 130–144.
11. Grafakos L., Torres R. H. A multilinear Schur test and multiplier operators // J. Funct. Anal. 2001. V. 187, N 1. P. 1–24.
12. Прохоров В. Д., Степанов В. Д., Ушакова Е. П. Интегральные операторы Харди — Стеклова // Современные проблемы математики. МИАН. 2016. Т. 22, № 6. С. 1–186.

13. Джейн П., Канжилал С., Степанов В. Д., Ушакова Е. П. О билинейных операторах Харди — Стеклова // Докл. АН. 2018. Т. 483. С. 602–605.
14. Jain P., Kanjilal S., Stepanov V. D., Ushakova E. P. Bilinear Hardy–Steklov operators // Math. Notes. 2018. V. 104, N 6. P. 823–832.
15. Прохоров Д. В. Об одном классе весовых неравенств, содержащих квазилинейные операторы // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 280–295.
16. Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э. О билинейных весовых неравенствах с интегральными операторами Вольтерра // Докл. АН. 2019. Т. 486, № 4. С. 416–420.
17. Stepanov V. D., Shambilova G. E. On iterated and bilinear integral Hardy-type operators // Math. Inequal. Appl. 2019. V. 8. P. 47–73.
18. Stepanov V. D., Ushakova E. P. Bilinear Hardy-type inequalities in weighted Lebesgue spaces // Nonlinear Stud. 2018. V. 26, N 4. P. 939–953.
19. Krepela M. Bilinear weighted Hardy inequality for nonincreasing functions // Publ. Mat. 2017. V. 61. P. 3–50.
20. Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э. О билинейных весовых неравенствах на конусе неубывающих функций // Докл. АН. 2017. Т. 477, № 6. С. 652–656.
21. Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э. Редукция билинейных весовых неравенств с операторами интегрирования на конусе неубывающих функций // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 639–658.
22. Bigicli N., Mustafayev R. Ch., Ė Unver T. Multidimensional bilinear Hardy inequalities // Azerbaijan J. Math. 2020. V. 10, N 1. P. 127–161.
23. Jain P., Kanjilal S., Persson L.-E. Hardy-type inequalities over balls in $\mathbb{R}^N$ for some bilinear and iterated operators // J. Inequal. Special Functions. 2019. V. 10, N 2. P. 35–48.
24. Goldman M. L., Heinig H. P., Stepanov V. D. On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. V. 48, N 5. P. 959–979.
25. Gogatishvili A., Pick L. Discretization and antidiscretization of rearrangement-invariant norms // Publ. Mat. 2003. V. 47, N 2. P. 311–358.
26. Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э. Многомерные билинейные неравенства Харди // Докл. АН. 2019. Т. 487, № 5. С. 496–498.
27. Sinnamon G., Stepanov V. D. The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. V. 54, N 2. P. 89–101.
28. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
29. Гогатишвили А., Степанов В. Д. Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, № 4. С. 3–68.
30. Прохоров Д. В. Неравенство Харди с тремя мерами // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 233–245.

Поступила в редакцию 28 января 2020 г.

После доработки 18 марта 2020 г.

Принята к публикации 8 апреля 2020 г.

Степанов Владимир Дмитриевич
Вычислительный центр ДВО РАН,
ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000
stepanov@mi-ras.ru

Шамбилова Гульдарья Эрмаковна
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский пер., 9, г. Долгопрудный 141701 Московской области
shambilova@mail.ru