S. S. Kutateladze, A class of second order tangent sets, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 5, 1060–1063

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.507>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.207.199.55

April 26, 2023, 16:07:24

УДК 517.972.8

ОДИН КЛАСС КАСАТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. С. Кутателадзе

Аннотация. Рассматриваются представление и свойства специального класса касательных множеств второго порядка с помощью средств инфинитезимального анализа.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.507

Ключевые слова: касательная второго порядка, конус Кларка, теория внутренних множеств Нельсона.

Пусть X — вещественное векторное пространство. В этом пространстве наряду с фиксированной почти векторной топологией $\sigma := \sigma_X$ с фильтром окрестностей нуля $\mathcal{N}_\sigma := \sigma(0)$ выделим почти векторную топологию τ с фильтром $\mathcal{N}_\tau := \tau(0)$.

Напомним, что почти векторная топология σ на пространстве X характеризуется теми свойствами, что, во-первых, непрерывно умножение векторов из X на каждый скаляр из основного поля и, во-вторых, сложение непрерывно по совокупности переменных. Очевидно, что на X существует почти векторная топология σ такая, что $\sigma(0)$ совпадает с фиксированным фильтром $\mathcal{N}$ в том и только в том случае, если монада $\mu(\mathcal{N})$ является внешним векторным пространством над внешним полем стандартных скаляров.

Ниже, если явно не оговорено противное, σ будет векторной топологией. Удобно работать в условиях стандартного антуража теории внутренних множеств Нельсона IST (см. [1]). Напомним, что монада $\mu(\mathcal{F})$ стандартного фильтра F есть внешнее пересечение всех стандартных элементов $\mathcal{F}$. Как обычно, введем отношение *бесконечной близости*, ассоциированное с соответствующей равномерностью в X , т. е. $x_1 \approx_\sigma x_2 \leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mu(\mathcal{N}_\sigma)$. Подобное правило действует для τ . При этом для монады $\mu_\sigma(x)$ фильтра окрестностей $\sigma(x)$ в топологии σ будет $\mu_\sigma(x) := x + \mu(\mathcal{N}_\sigma)$. Аналогично вводится $\mu_\tau(x)$. Символ $\approx$ обозначает, как обычно, бесконечную близость элементов поля вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Напомним, что для фиксированных множества F в X и точки $\bar{x}$ из X в субдифференциальном исчислении (см. [2]) рассматривают, в частности, следующие *конусы Адамара, Кларка и Булигана*:

$$\text{Ha}(F, \bar{x}) := \bigcup_{\substack{U \in \sigma(\bar{x}), \\ \lambda > 0}} \text{int}_\tau \left(\bigcap_{\substack{x' \in F \cap U, \\ 0 < \lambda' \leq \lambda}} \frac{F - x'}{\lambda'} \right);$$

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314–2019–0005).

$$\text{Cl}(F, \bar{x}) := \bigcap_{V \in \mathcal{N}_\tau} \bigcup_{\substack{U \in \sigma(\bar{x}), \\ \lambda > 0}} \bigcap_{\substack{x' \in F \cap U, \\ 0 < \lambda' \leq \lambda}} \left(\frac{F - x'}{\lambda'} + V \right);$$

$$\text{Bo}(F, \bar{x}) := \bigcap_{\substack{U \in \sigma(x'), \\ \lambda > 0}} \text{cl}_\tau \left(\bigcup_{\substack{x \in F \cap U, \\ 0 < \lambda' \leq \lambda}} \frac{F - x'}{\lambda'} \right),$$

где, как обычно, $\sigma(\bar{x}) := \bar{x} + \mathcal{N}_\sigma$. Если $h \in \text{Ha}(F, \bar{x})$, то иногда говорят, что F *эллиптичево* в $\bar{x}$ по отношению к h . Ясно, что

$$\text{Ha}(F, \bar{x}) \subset \text{Cl}(F, \bar{x}) \subset \text{Bo}(F, \bar{x}).$$

Для расширенной функции $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в [3] предложено определение *верхней субпроизводной второго порядка* в точке $\bar{x}$ по направлениям $\bar{v}$, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ в следующем виде:

$$f_{\bar{x}}^{(2)}(\bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) := \limsup_{\substack{(x, \alpha) \rightarrow \bar{x}, \\ \lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0}} \inf_{\substack{v \rightarrow \bar{v}, \\ v_1 \rightarrow \bar{v}_1, \\ v_2 \rightarrow \bar{v}_2}} O_f^2(x, \alpha, \lambda, \mu, v, v_1, v_2),$$

где использована конструкция предела, связанная с именами Пенлеве, Куратовского и Рокафеллара (см., например, [1, разд. 5.3], [4] или [5]), и считается, что

$$\begin{aligned} O_f^2(x, \alpha, \lambda, \mu, v, v_1, v_2) \\ := \lambda^{-1} \mu^{-1} (f(x + \lambda v_1 + \mu v_2 + \lambda \mu v) - f(x + \lambda v_1) - f(x + \mu v_2) + \alpha). \end{aligned}$$

Здесь $(x, \alpha) \rightarrow \bar{x}$ означает сходимость к $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ в индуцированной топологии надграфика f . В [6] предложен подход к явному представлению касательных множеств, отвечающих такой конструкции, с помощью средств IST.

Как видно из дальнейшего, удобно несколько модифицировать приведенную конструкцию, добавив множитель 4 и сохранив прежние обозначения:

$$f_{\bar{x}}^{(2)}(\bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2) := \limsup_{\substack{(x, \alpha) \rightarrow \bar{x}, \\ \lambda \downarrow 0, \mu \downarrow 0}} \inf_{\substack{v \rightarrow \bar{v}, \\ v_1 \rightarrow \bar{v}_1, \\ v_2 \rightarrow \bar{v}_2}} O_f^2(x, \alpha, \lambda, \mu, v, v_1, v_2),$$

где теперь

$$\begin{aligned} O_f^2(x, \alpha, \lambda, \mu, v, v_1, v_2) \\ := \lambda^{-1} \mu^{-1} (f(x + \lambda v_1 + \mu v_2 + 4\lambda \mu v) - f(x + \lambda v_1) - f(x + \mu v_2) + \alpha). \end{aligned}$$

Для множества F в X обозначим символом δ_F *индикаторную функцию* F , т. е. $\delta_F(x) := 0$ при $x \in F$ и $\delta_F(x) := \infty$ при $x \notin F$. Введем множество $\text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$ соотношением

$$v \in \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2) \leftrightarrow (v, v_1, v_2) \in \text{dom}(\delta_F)_{\bar{x}}^{(2)}.$$

Легко видеть, что в случае нормированного пространства, где в качестве τ взята топология нормы, а в качестве σ фигурирует дискретная топология, $\text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v, v)$ совпадает с $A^{(2)}(F, \bar{x}, v)$ — *множеством достижимых направлений второго порядка к F в точке $\bar{x}$ в направлении v* при условии, что $\bar{x} + \text{cnt}(v)$ лежит в F . Как обычно, $\text{cnt}(v) := \{\lambda v : \lambda > 0, \lambda \approx 0\}$ — *конатус* v (см. [1, п. 5.1.2]). Напомним (см., например, [7]), что

$$A^{(2)}(F, \bar{x}, v) := \left\{ h \in X : (\forall \lambda_n \downarrow 0)(\exists h_n \rightarrow h) \bar{x} + \lambda_n v + \frac{1}{2} \lambda_n^2 h_n \in F \right\}.$$

Для упрощения формул будем считать, что функция f непрерывна в точке $\bar{x} \in F$ относительно топологии τ .

Теорема 1. Справедливо следующее представление:

$$\text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2) = \bigcap_{\substack{V \in \mathcal{N}_\sigma, \\ V_1 \in \sigma(v_1), \\ V_2 \in \sigma(v_2)}} \bigcup_{\substack{U \in \tau(\bar{x}), \\ \lambda_1 > 0, \\ \lambda_2 > 0}} \bigcap_{\substack{x' \in F \cap U, \\ 0 < \lambda' \leq \lambda_1, \\ 0 < \lambda'' \leq \lambda_2}} \bigcup_{\substack{v' \in \frac{F-x'}{\lambda'} \cap V_1, \\ v'' \in \frac{F-x'}{\lambda''} \cap V_2}} \left(\frac{F - x' - \lambda' v' - \lambda'' v''}{4\lambda' \lambda''} + V \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу принципа переноса достаточно разобрать случай стандартных параметров. Привлекая теорему 5.3.11 из [1], видим

$$\begin{aligned} v \in \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2) \\ \Leftrightarrow (\forall x' \approx_\sigma \bar{x}, x' \in F)(\forall \lambda' \approx 0, \lambda'' \approx 0, \lambda' > 0, \lambda'' > 0) \\ (\exists v'_1 \approx_\tau v_1)(\exists v'_2 \approx_\tau v_2)(\exists v' \approx_\tau v) \\ x' + \lambda' v'_1 \in F \wedge x' + \lambda'' v'_2 \in F \wedge x' + \lambda' v'_1 + \lambda'' v'_2 + 4\lambda' \lambda'' v' \in F. \end{aligned}$$

Обозначим через A множество, стоящее в правой части доказываемого равенства. Сначала возьмем $v \in \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$ и стандартные окрестности $V \in \mathcal{N}_\sigma$, $V_1 \in \sigma(v_1)$ и $V_2 \in \sigma(v_2)$. Для бесконечно малых строго положительных λ_1 и λ_2 и бесконечно малой внутренней окрестности U точки $\bar{x}$ при любых $x' \in F \cap U$ и $0 < \lambda' \leq \lambda_1$, $0 < \lambda'' \leq \lambda_2$ для некоторых $v'_1 \approx_\tau v_1$, $v'_2 \approx_\tau v_2$ и $v' \approx_\tau v$ будет верно $x' + \lambda' v'_1 \in F$, $x' + \lambda'' v'_2 \in F$ и $x' + \lambda' v'_1 + \lambda'' v'_2 + 4\lambda' \lambda'' v' \in F$. Иными словами, найдутся $v'_1 \in (F - x')/\lambda' \cap V_1$, $v'_2 \in (F - x')/\lambda'' \cap V_2$ и $v' \in v + V$ с нужными свойствами. Учитывая стандартность параметров, заключаем, что $v \in A$.

Пусть заранее известно, что $v \in A$. Вновь возьмем произвольные стандартные окрестности $V \in \mathcal{N}_\sigma$, $V_1 \in \sigma(v_1)$ и $V_2 \in \sigma(v_2)$. В силу принципа переноса имеются стандартная окрестность $U \in \tau(\bar{x})$ и стандартные числа $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ такие, что для всех $x' \in F \cap U$ и $0 < \lambda' \leq \lambda_1$, $0 < \lambda'' \leq \lambda_2$ при некоторых $v'_1 \in (F - x')/\lambda' \cap V_1$, $v'_2 \in (F - x')/\lambda'' \cap V_2$ и $v' \in v + V$ будет $x' + \lambda' v'_1 + \lambda'' v'_2 + 4\lambda' \lambda'' v' \in F$. Учитывая, что при $x' \approx_\tau \bar{x}$ будет $x' \in U$, и апеллируя к свойствам бесконечно малых чисел и принципу идеализации, выводим $v \in \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$. Тем самым доказательство закончено.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

- (1) Если $\text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2) \neq \emptyset$, то v_1 и v_2 лежат в конусе Кларка $\text{Cl}(F, \bar{x})$.
- (2) Если $v_1, v_2 \in \text{Na}(F, \bar{x})$, то $\text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$ — это замкнутая полугруппа в топологии σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) станет очевидным, если вспомнить, что в случае стандартных параметров

$$h \in \text{Cl}(F, \bar{x}) \Leftrightarrow (\forall x' \approx_\sigma \bar{x}, x' \in F)(\forall \alpha' > 0, \alpha' \approx 0)(\exists h' \approx_\tau h) x' + \alpha' h' \in F.$$

Пусть $u_1, u_2 \in \text{Na}(F, \bar{x})$. Не нарушая общности, будем по-прежнему работать в стандартном антураже. Тогда

$$v_1 \in \text{Na}(F, \bar{x}) \Leftrightarrow (\forall x' \approx_\sigma \bar{x}, x' \in F)(\forall \alpha > 0, \alpha \approx 0)(\forall v'_1 \approx_\tau v_1) x' + \alpha' v'_1 \in F;$$

$$v_2 \in \text{Na}(F, \bar{x}) \Leftrightarrow (\forall x' \approx_\sigma \bar{x}, x' \in F)(\forall \alpha > 0, \alpha \approx 0)(\forall v'_2 \approx_\tau v_2) x' + \alpha' v'_2 \in F.$$

Допустим, что $u_1, u_2 \in \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$. Привлекая теорему 1, можно сначала записать

$$\begin{aligned} (\forall x' \approx_\sigma \bar{x}, x' \in F)(\forall \lambda' > 0, \lambda' \approx 0)(\forall \lambda'' > 0, \lambda'' \approx 0) \\ (\exists v'_1 \approx_\tau v_1)(\exists v'_2 \approx_\tau v_2)(\exists u' \approx_\tau u_1) \\ x'' := x' + \lambda' v'_1 + \lambda'' v'_2 + 4\lambda' \lambda'' u' \in F. \end{aligned}$$

В силу свойств векторной топологии σ и ее монады ясно, что $x'' \approx_\sigma \bar{x}$. Вновь апеллируя к теореме 1, находим $v_1'' \approx_\tau v_1$, $v_2'' \approx_\tau v_2$ и $u'' \approx_\tau u_2$, для которых $x''\lambda'v_1'' + \lambda''v_2'' + 4\lambda'\lambda''u'' \in F$. Пусть $v' := v_1' + v_2'$, $v'' := v_1'' + v_2''$ и $u := u' + u''$. Нет сомнений, что $v' \approx_\tau v_1$; $v'' \approx_\tau v_2$; $u \approx_\tau u_1 + u_2$ и при этом $x' + \lambda'v' \in F$, $x' + \lambda''v'' \in F$ в силу того, что v_1, v_2 — гиперкасательные направления суть элементы $\text{Ha}(F, \bar{x})$. Кроме того,

$$\begin{aligned} x' + \lambda'v' + \lambda''v'' + 4\lambda'\lambda''u &= x' + \lambda'v_1' + \lambda'v_2' + \lambda''v_1'' + \lambda''v_2'' + 4\lambda'\lambda''u' + 4\lambda'\lambda''u'' \\ &= (x' + \lambda'v_2' + \lambda''v_2'' + 4\lambda'\lambda''u') + \lambda'v_1' + \lambda''v_1'' + 4\lambda'\lambda''u'' \\ &= x'' + \lambda'v_1' + \lambda''v_1'' + 4\lambda'\lambda''u'' \in F. \end{aligned}$$

Следовательно, $u_1 + u_2 \in \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$.

Для доказательства замкнутости возьмем $u_0 \in \text{cl}_\sigma \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$ и стандартные окрестности $V, V_1, V_2 \in \mathcal{N}_\tau$, для которых $V_1 + V_2 \subset V$. Найдется стандартный элемент $u \in \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$ такой, что $u - u_0 \in V_1$. Кроме того, ввиду теоремы 1 для $x' \approx_\sigma \bar{x}$, $x' \in F$; $\lambda' \approx 0$, $\lambda' > 0$, $\lambda'' \approx 0$, $\lambda'' > 0$ имеются $u' \in u + V_2$ и $v' \in v_1 + W_1$, $v'' \in W_2 + v_2$ для наперед заданных стандартных $W_1, W_2 \in \mathcal{N}_\tau$, удовлетворяющие соотношениям $v' + \lambda'v' \in F$, $v' + \lambda''v'' \in F$ и $x' + \lambda'v' + \lambda''v'' + 4\lambda'\lambda''u' \in F$. Ясно, что при этом будет $u' \in u + V_2 \subset u_0 + V_1 + V_2 \subset u_0 + V$. Применяя принцип идеализации, находим $v' \approx_\tau v_1$, $v'' \approx_\tau v_2$ и $u'_0 \approx_\tau u_0$ такие, что $x' + \lambda'v' \in F$, $x' + \lambda''v'' \in F$ и $x' + \lambda'v' + \lambda''v'' + 4\lambda'\lambda''u'_0 \in F$. Это означает, что $u_0 \in \text{Cl}^{(2)}(F, \bar{x})(v_1, v_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 1 и 2 можно обобщить на случай эппроизводных, определяемых набором инфинитезимальей, по схемам из [4, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Инфинитезимальный анализ: избранные темы. М.: Наука, 2011.
2. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисление. Теория и приложения. М.: Наука, 2007.
3. Бедельбаев Ф. Ф. Некоторые вопросы субдифференциального анализа и их приложения: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата: Ин-т математики и механики АН КазССР, 1984.
4. Rockafellar R. T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions // Canad. J. Math. 1980. V. 80, N 2. P. 257–280.
5. Bonnans F., Cominetti R., Shapiro A. Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets // SIAM J. Optimization. 1999. V. 9, N 2. P. 466–492.
6. Кутателадзе С. С. Об одном конусе кларковского типа // Оптимизация. 1985. Т. 35. С. 10–15.
7. Jimenéz B., Novo V. Second order necessary conditions in set constrained differentiable vector optimization // Math. Meth. Oper. Res. 2003. V. 58. P. 299–317.
8. Кутателадзе С. С. Эппроизводные, определяемые набором инфинитезимальей // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 4. С. 140–144.

Поступила в редакцию 10 июня 2020 г.

После доработки 10 июня 2020 г.

Принята к публикации 17 июня 2020 г.

Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sskut@math.nsc.ru