L. N. Bondar', G. V. Demidenko, On solvability of one class of quasielliptic systems,
Sibirsk. Mat. Zh., 2020, Volume 61, Number 6, 1212–1233

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.602>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.187.69

April 26, 2023, 18:30:56

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. Н. Бондарь, Г. В. Демиденко

Аннотация. Рассматривается класс систем дифференциальных уравнений, определяемых одним классом матричных квазиэллиптических операторов. Устанавливаются условия разрешимости для систем в $\mathbb{R}^n$, а также краевых задач в $\mathbb{R}_+^n$ в специальных шкалах весовых соболевских пространств $W_{p,\sigma}^l$. Построены интегральные представления решений, получены их оценки.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.602

Ключевые слова: квазиэллиптические операторы, краевые задачи, интегральные представления решений, весовые соболевские пространства.

§ 1. Введение

В работе рассматривается класс квазиэллиптических систем во всем пространстве

$$\mathcal{L}(D_x)U = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

и краевые задачи для них в полупространстве

$$\begin{cases} \mathcal{L}(D_x)U = F(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \mathcal{B}(D_x)U|_{x_n=0} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Эти системы определяются одним классом матричных квазиэллиптических операторов $\mathcal{L}(D_x)$.

Укажем условия на операторы $\mathcal{L}(D_x)$ и $\mathcal{B}(D_x)$. Обозначим через $l_{j,r}(i\xi)$, $b_{j,r}(i\xi)$ элементы матриц $\mathcal{L}(i\xi)$, $\mathcal{B}(i\xi)$, являющихся символами соответствующих дифференциальных операторов.

Условие 1. Пусть матрица $\mathcal{L}(i\xi)$ имеет размер $\nu \times \nu$. Предположим, что существуют векторы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_\nu)$, $t_r > 0$, $t_r/\alpha_j \in \mathbb{N}$, такие, что для любого $c > 0$

$$l_{j,r}(c^\alpha i\xi) = c^{t_r} l_{j,r}(i\xi), \quad j, r = 1, \dots, \nu.$$

Условие 2. Равенство

$$\det \mathcal{L}(i\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075–15–2019–1613.

имеет место тогда и только тогда, когда $\xi = 0$.

Матричные операторы $\mathcal{L}(D_x)$, удовлетворяющие условиям 1, 2, входят в класс *квазиэллиптических* операторов, введенных Л. Р. Волевичем [1]. В рассматриваемый класс операторов входят, в частности, однородные эллиптические операторы, эллиптические и параболические операторы по Петровскому, параболические операторы по Эйдельману, параболические операторы «с противоположными временами», а также однородные квазиэллиптические операторы (см. [2]).

Из условия 2 следует, что уравнение

$$\det \mathcal{L}(is, i\lambda) = 0, \quad s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \quad (1.3)$$

не имеет вещественных корней по λ . Обозначим через μ число корней, лежащих в верхней полуплоскости. Будем считать, что μ не зависит от $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$.

Условие 3. Пусть матрица $\mathcal{B}(i\xi)$ имеет размер $\mu \times \nu$. Предположим, что существует вектор $(m_1, \dots, m_\mu)$, $t_r - t_{\min} \leq t_r - m_j \leq t_r - \alpha_n$, $t_{\min} = \min(t_1, \dots, t_\nu)$, такой, что

$$b_{j,r}(c^\alpha i\xi) = c^{t_r - m_j} b_{j,r}(i\xi), \quad c > 0, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad r = 1, \dots, \nu.$$

Условие 4. Краевая задача (1.2) удовлетворяет условию Лопатинского, т. е. краевая задача на полуоси

$$\begin{cases} \mathcal{L}(is, D_{x_n})v = 0, & x_n > 0, \\ \mathcal{B}(is, D_{x_n})v|_{x_n=0} = \varphi, \\ \sup_{x_n > 0} |v| < \infty \end{cases} \quad (1.4)$$

при $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ однозначно разрешима для любых φ .

Целями работы являются получение условий разрешимости и построение решений квазиэллиптических систем в $\mathbb{R}^n$ (1.1), а также краевых задач для них в $\mathbb{R}_+^n$ (1.2). Решение рассматриваемых задач будем искать в специальных шкалах весовых соболевских пространств $W_{p,\sigma}^l$, введенных в [3].

Напомним определение пространств $W_{p,\sigma}^{\mathbf{k}/\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{k}/\alpha = (k/\alpha_1, \dots, k/\alpha_n)$, $k/\alpha_i \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $\sigma \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что локально суммируемая функция $u(x)$ принадлежит весовому соболевскому пространству $W_{p,\sigma}^{\mathbf{k}/\alpha}(\mathbb{R}^n)$, если $u(x)$ имеет обобщенные производные $D_x^\beta u(x)$ в $\mathbb{R}^n$, $\beta\alpha \leq k$, и

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(k-\beta\alpha)} D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| < \infty, \quad \langle x \rangle^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Норма в пространстве $W_{p,\sigma}^{\mathbf{k}/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом:

$$\|u(x), W_{p,\sigma}^{\mathbf{k}/\alpha}(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{0 \leq \beta\alpha \leq k} \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(k-\beta\alpha)} D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\|. \quad (1.5)$$

В изотропном случае, когда $k/\alpha_1 = \dots = k/\alpha_n = \bar{l}$, норма (1.5) эквивалентна следующей:

$$\sum_{0 \leq |\beta| \leq \bar{l}} \|(1 + |x|)^{-\sigma(\bar{l}-|\beta|)} D_x^\beta u(x), L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

В этом случае при $\sigma = 1$ рассматриваемые пространства совпадают с пространствами, которые часто называют пространствами Ниренберга — Уолкера — Кантора $M_{l,m}^p(\mathbb{R}^n)$, $m = -\bar{l}$ (см., например, [4–6]).

Будем рассматривать общий случай, когда компоненты k/α_i вектора гладкости могут быть различными.

Напомним, что множество функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $W_{p,\sigma}^{k/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ при $\sigma \leq 1$ (см. [3]). В дальнейшем будем считать, что $1 \geq \sigma \geq 0$.

Введем весовые соболевские пространства $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ для вектор-функций, где параметры гладкости определяются векторами $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ из условия 1.

Будем говорить, что вектор-функция $U(x) = (U^1(x), \dots, U^\nu(x))^T$ принадлежит пространству

$$\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n) = \prod_{k=1}^{\nu} W_{p,\sigma}^{t_k/\alpha}(\mathbb{R}^n), \quad t_k/\alpha = (t_k/\alpha_1, \dots, t_k/\alpha_n), \quad 1 < p < \infty, \quad \sigma \geq 0,$$

если каждая ее компонента $U^k(x)$ принадлежит $W_{p,\sigma}^{t_k/\alpha}(\mathbb{R}^n)$, и по определению

$$\|U(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{k=1}^{\nu} \|U^k(x), W_{p,\sigma}^{t_k/\alpha}(\mathbb{R}^n)\|.$$

Будем также писать

$$\mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) = \prod_{r=1}^{\nu} L_p(\mathbb{R}^n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ весовое пространство с нормой

$$\|f(x), L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)\| = \|(1 + \langle x \rangle)^{-\gamma} f(x), L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Будем говорить, что вектор-функция $F(x) = (F^1(x), \dots, F^\nu(x))^T$ принадлежит пространству

$$\mathbf{L}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n) = \prod_{r=1}^{\nu} L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n),$$

если каждая ее компонента $F^k(x)$ принадлежит $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, и по определению

$$\|F(x), \mathbf{L}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)\| = \sum_{r=1}^{\nu} \|F^r(x), L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^n)\|.$$

Аналогичным образом определяются пространства $\mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)$, $\mathbf{L}_{p,\gamma}(\mathbb{R}_+^n)$ и весовые соболевские пространства $W_{p,\sigma}^{t_k/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$.

§ 2. Формулировка основных результатов

Сначала напомним, что с использованием свойства весовых пространств $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ была доказана [7] первая теорема об изоморфизме для класса квазиэллиптических операторов $\mathcal{L}(D_x)$ в случае, когда $t_1 = \dots = t_\nu = 1$. Из этой теоремы вытекает однозначная разрешимость «однородных» квазиэллиптических систем. Дальнейшее изучение свойств квазиэллиптических операторов при $t_1 = \dots = t_\nu = 1$ проводилось в [8]. Теоремы об изоморфизме для более широких классов квазиэллиптических операторов были доказаны в [2, 9–11].

Отметим, что в теоремах об изоморфных свойствах эллиптических операторов также используются соболевские пространства со степенными весами (см., например, [5, 6, 12–15]).

Приведем формулировку теоремы об изоморфизме для рассматриваемого класса квазиэллиптических операторов, установленную в [2]. Введем следующие обозначения:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad t_{\max} = \max\{t_1, \dots, t_\nu\}.$$

Теорема 1. Пусть оператор $\mathcal{L}(D_x)$ удовлетворяет условиям 1, 2. Если $|\alpha|/p > t_{\max}$, то оператор

$$\mathcal{L}(D_x) : \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty, \quad \sigma = 1,$$

устанавливает изоморфизм.

Из этой теоремы непосредственно вытекает утверждение об однозначной разрешимости системы (1.1). А именно, если $|\alpha|/p > t_{\max}$, то для любой вектор-функции $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $U(x) \in \mathbf{W}_{p,1}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ системы (1.1) и выполнено неравенство

$$\|U(x), \mathbf{W}_{p,1}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)\| \leq c \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\|$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $F(x)$.

Условие $|\alpha|/p > t_{\max}$ существенно для однозначной разрешимости системы (1.1) в пространстве $\mathbf{W}_{p,1}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Однако оно предполагает жесткие ограничения на степень суммируемости p и $\sigma = 1$. В следующей теореме установим условия однозначной разрешимости системы (1.1) во всей шкале весовых соболевских пространств $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ при существенно меньших ограничениях на параметры p и σ .

Сформулируем теорему об однозначной разрешимости системы (1.1).

Теорема 2. Пусть оператор $\mathcal{L}(D_x)$ удовлетворяет условиям 1, 2. Если

$$|\alpha|/p > \sigma t_{\max}, \quad |\alpha|/p' > (1 - \sigma)t_{\max}, \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad (2.1)$$

то для любой вектор-функции $F(x) \in \mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $U(x) \in \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ системы (1.1), при этом выполнено неравенство

$$\|U(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)\| \leq C \|F(x), \mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n)\| \quad (2.2)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от $F(x)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любой вектор-функции $U(x) = (U^1(x), \dots, U^\nu(x))^T \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta U^k(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\| &\leq c \|\langle x \rangle^{(1-\sigma)(t_k - \beta\alpha)} \mathcal{L}(D_x) U(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\|, \quad (2.3) \\ 0 &\leq \beta\alpha \leq t_k, \quad k = 1, \dots, \nu, \end{aligned}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $U(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 2 обобщает теорему об однозначной разрешимости «однородных» квазиэллиптических систем ($t_1 = \dots = t_\nu = 1$) из [7, 8].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показывают примеры, в ряде случаев условия (2.1) необходимы и достаточны для однозначной разрешимости систем (1.1) в весовых соболевских пространствах $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Например, для полигармонического

уравнения

$$\Delta^m u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n > 2m,$$

в этом нетрудно убедиться, используя результаты из [16, гл. 12]. Отметим, что для разрешимости уравнения в соболевском пространстве $W_p^{2m}(\mathbb{R}^n)$ при $p \leq \frac{n}{n-2m}$, т. е. $|\alpha|/p' \leq 1$, $\sigma = 0$, нужно, чтобы правая часть $f(x)$ удовлетворяла условиям ортогональности вида

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) x^\beta dx = 0, \quad |\beta| \leq s(n, m, p).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для эллиптических операторов неравенство вида (2.3) при $\sigma = 1$ получено в [4]. Для «однородных» квазиэллиптических операторов неравенство (2.3) установлено в [7].

Сформулируем теорему об однозначной разрешимости краевой задачи (1.2).

Теорема 4. Пусть $\mathcal{L}(D_x)$, $\mathcal{B}(D_x)$ удовлетворяют условиям 1–4. Если выполнено (2.1), то для любой вектор-функции $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathbf{L}_{1, -\sigma t_{\max}}(\mathbb{R}_+^n)$ краевая задача (1.2) имеет единственное решение $U(x) \in \mathbf{W}_{p, \sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, при этом справедлива оценка

$$\|U(x), \mathbf{W}_{p, \sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c(\|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\| + \|F(x), \mathbf{L}_{1, -\sigma t_{\max}}(\mathbb{R}_+^n)\|) \quad (2.4)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $F(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема 4 обобщает теоремы о разрешимости краевых задач для квазиэллиптических уравнений [17, 18] и систем [19–21].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Условия (2.1) важны для однозначной разрешимости краевых задач в $\mathbb{R}_+^n$ для квазиэллиптических уравнений и систем. В частности, при $|\alpha|/p < \sigma t_{\max}$ однородная задача может иметь нетривиальные решения. Если $|\alpha|/p' \leq (1 - \sigma)t_{\max}$, то существуют краевые задачи, которые не имеют решений в $\mathbf{W}_{p, \sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ даже для финитных бесконечно дифференцируемых $F(x)$ (см. [18, 22–24]). Так, например, при $\sigma = 0$, $t_1 = \dots = t_\nu = 1$ если

$$\int_{\Gamma(s)} \mathcal{B}(is, i\lambda) \mathcal{L}^{-1}(is, i\lambda) d\lambda \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\},$$

где $\Gamma(s)$ — контур в комплексной плоскости, охватывающий все корни уравнения (1.3), то для разрешимости краевой задачи (1.2) в $\mathbf{W}_p^{1/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ при $1 \geq |\alpha|/p' > 1 - \alpha_{\min}$, $p \in (1, 2]$, необходимо условие

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} F(x) dx = 0.$$

§ 3. Доказательство разрешимости системы (1.1)

При доказательстве теоремы 2 будем следовать схеме из [2, 7]. Кратко укажем схему доказательства и остановимся на существенных отличиях.

Для доказательства разрешимости системы (1.1), как и в [2, 7], будем использовать метод построения приближенных решений, описанный в [25] и основанный на использовании интегрального представления С. В. Успенского [26] для суммируемых функций (см. также [25, гл. 1]).

Сначала будем предполагать, что компоненты $F^j(x)$ вектор-функции из правой части системы (1.1) $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ имеют компактные носители.

Рассмотрим семейство интегральных операторов $P_{k,h}$, $k = 1, \dots, \nu$, $0 < h < 1$, следующего вида:

$$P_{k,h}F(x) = (2\pi)^{-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \frac{x-y}{v^{\alpha/t_k}} \xi\right) \times G_k(\xi) \left(\sum_{r=1}^{\nu} l^{k,r}(\xi) F^r(y) \right) d\xi dy dv, \quad (3.1)$$

где $l^{k,r}(\xi)$ — элементы обратной матрицы $(\mathcal{L}(i\xi))^{-1}$ и

$$G_k(\xi) = 2m \langle \xi \rangle_k^{2m} \exp(-\langle \xi \rangle_k^{2m}), \quad \langle \xi \rangle_k^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^{2t_k/\alpha_i}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

В [2] показано, что вектор-функция

$$U_h(x) = P_h F(x) = (P_{1,h}F(x), \dots, P_{\nu,h}F(x))^T \quad (3.3)$$

является приближенным решением системы (1.1).

Из определения (3.1) и условий 1, 2 следует, что функции $U_h^k(x) = P_{k,h}F(x)$ бесконечно дифференцируемы и, очевидно, можно указать натуральное число m_1 такое, что при $m \geq m_1$ в (3.2) функции $U_h^k(x)$ суммируемы в любой степени $p \geq 1$. В дальнейшем будем считать, что в (3.2) $m \geq m_1$.

Из приведенных ниже лемм вытекает, что при условиях (2.1) справедливы оценка

$$\|U_h(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)\| \leq C \|F(x), \mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n)\| \quad (3.4)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от $F(x)$ и h , а также сходимость

$$\|U_{h_1}(x) - U_{h_2}(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)\| \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Сначала приведем оценки старших производных компонент вектор-функции (3.3) из [2].

Лемма 3.1. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = t_k$, $k = 1, \dots, \nu$. Тогда имеет место оценка

$$\|D_x^\beta U_h^k(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq C_\beta \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\| \quad (3.6)$$

с константой $C_\beta > 0$, не зависящей от $F(x)$ и h , при этом

$$\|D_x^\beta U_{h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{h_2}^k(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

При получении оценок норм производных

$$D_x^\beta U_h^k(x), \quad 0 \leq \beta\alpha < t_k, \quad k = 1, \dots, \nu, \quad (3.8)$$

понадобятся некоторые оценки следующих интегралов:

$$\mathcal{K}_{\beta,h}^{k,r}(x) = \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \frac{x\xi}{v^{\alpha/t_k}}\right) G_k(\xi) (i\xi)^\beta l^{k,r}(\xi) d\xi dv, \quad (3.9)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < h < 1.$$

Имеет место аналог леммы 3.3 из [9].

Лемма 3.2. Пусть $|\alpha| + \beta\alpha > t_k$. Тогда существует m_2 такое, что при $m \geq m_2$ в определении (3.2) выполнена оценка

$$\langle x \rangle^{|\alpha| + \beta\alpha - t_k} |\mathcal{K}_{\beta, h}^{k, r}(x)| \leq c, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.10)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от h и x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$J(x) = \langle x \rangle^{|\alpha| + \beta\alpha - t_k} \mathcal{K}_{\beta, h}^{k, r}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Сделаем в интеграле (3.9) замену $v = \omega \langle x \rangle^{t_k}$ при $x \neq 0$, перепишем эту функцию в виде

$$J(x) = \int_{h/\langle x \rangle^{t_k}}^{h^{-1}/\langle x \rangle^{t_k}} \omega^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(i \frac{x\xi}{\langle x \rangle^\alpha \omega^{\alpha/t_k}}\right) G_k(\xi) (i\xi)^{\beta} l^{k, r}(\xi) d\xi d\omega.$$

В силу условий 1, 2 функция $\mu(\xi) = (i\xi)^{\beta} l^{k, r}(\xi)$ квазиоднородна относительно вектора α . Поэтому ввиду определения ядра (3.2) можно указать число $m_2 \in \mathbb{N}$ такое, что выполнена оценка

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\xi} G_k(\xi) (i\xi)^{\beta} l^{k, r}(\xi) d\xi \right| \leq c' (1 + \langle z \rangle)^{-|\alpha|}, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

с константой, не зависящей от z . Используя эту оценку, получим

$$|J(x)| \leq c' \int_0^\infty \omega^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} (1 + \omega^{-1/t_k})^{-|\alpha|} d\omega.$$

Отсюда, учитывая условия $|\alpha| + \beta\alpha > t_k$, $0 \leq \beta\alpha < t_k$, приходим к неравенству $|J(x)| \leq c < \infty$, т. е. (3.10).

Лемма доказана.

В дальнейшем будем считать, что $m \geq \max\{m_1, m_2\}$.

Получим оценки норм производных (3.8).

Лемма 3.3. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $0 \leq \beta\alpha < t_k$ и

$$|\alpha|/p > \sigma(t_k - \beta\alpha) > t_k - \beta\alpha - |\alpha|/p', \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\|\langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta U_h^k(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq c \|\langle x \rangle^{(1-\sigma)(t_k - \beta\alpha)} F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)\| \quad (3.11)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $F(x)$ и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание формулы (3.1), (3.2) и (3.9), производную $D_x^\beta U_h^k(x)$ можно записать в виде

$$D_x^\beta U_h^k(x) = \sum_{r=1}^{\nu} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_{\beta, h}^{k, r}(x - y) F^r(y) dy.$$

Учитывая лемму 3.2, имеем

$$\begin{aligned} & \|\langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta U_h^k(x), L_p(\mathbb{R}^n)\| \\ & \leq c \sum_{r=1}^{\nu} \left\| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - y \rangle^{-(|\alpha| + \beta\alpha - t_k)} |F^r(y)| dy, L_p(\mathbb{R}^n) \right\|. \end{aligned}$$

Из условий вытекает, что $|\alpha| + \beta\alpha - t_k > 0$, поэтому

$$\begin{aligned} & \left\| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta U_h^k(x), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \\ & \leq c_1 \sum_{r=1}^{\nu} \left\| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n |x_i - y_i|^{(t_k - \beta\alpha)/|\alpha| - 1} |F^r(y)| dy, L_p(\mathbb{R}^n) \right\|. \end{aligned}$$

Учитывая также, что $t_k - \beta\alpha > 0$, $1 \geq \sigma \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta U_h^k(x), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \\ & \leq c_2 \sum_{r=1}^{\nu} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n |x_i|^{\sigma(\beta\alpha - t_k)/|\alpha|} |x_i - y_i|^{(t_k - \beta\alpha)/|\alpha| - 1} |y_i|^{(1-\sigma)(\beta\alpha - t_k)/|\alpha|} \right. \\ & \quad \left. \times \langle y \rangle^{(1-\sigma)(t_k - \beta\alpha)} |F^r(y)| dy, L_p(\mathbb{R}^n) \right\|. \end{aligned}$$

Введем обозначения $a = \sigma(t_k - \beta\alpha)/|\alpha|$, $b = (1 - \sigma)(t_k - \beta\alpha)/|\alpha|$. Из условий леммы вытекает, что $a < 1/p$, $b < 1/p'$, $a + b > 0$. Применяя неравенство Харди – Литтлвуда [27], получаем оценку (3.11).

Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $0 \leq \beta\alpha < t_k$. Тогда для любой финитной вектор-функции $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ имеет место сходимость

$$\left\| (1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} (D_x^\beta U_{h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{h_2}^k(x)), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

$$h_1, h_2 \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, \nu.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$K_\beta^{k,r}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\xi) G_k(\xi) (i\xi)^\beta l^{k,r}(\xi) d\xi. \quad (3.13)$$

Учитывая определения (3.1), (3.3) и (3.9), имеем

$$D_x^\beta U_h^k(x) = \sum_{r=1}^{\nu} (2\pi)^{-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \int_{\mathbb{R}^n} K_\beta^{k,r} \left(\frac{x-y}{v^{\alpha/t_k}} \right) F^r(y) dy dv.$$

Используя это представление и неравенство Минковского, при $h_2 > h_1 > 0$ получим

$$\begin{aligned} & \left\| (1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} (D_x^\beta U_{h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{h_2}^k(x)), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \\ & \leq \sum_{r=1}^{\nu} \int_{h_1}^{h_2} v^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \left\| (1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} K_\beta^{k,r} \left(\frac{x-y}{v^{\alpha/t_k}} \right) F^r(y) dy, L_p(\mathbb{R}^n) \right\| dv \\ & + \sum_{r=1}^{\nu} \int_{h_2^{-1}}^{h_1^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \left\| (1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} K_\beta^{k,r} \left(\frac{x-y}{v^{\alpha/t_k}} \right) F^r(y) dy, L_p(\mathbb{R}^n) \right\| dv \\ & = \sum_{r=1}^{\nu} J_r^1(h_1, h_2) + \sum_{r=1}^{\nu} J_r^2(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Сначала оценим слагаемые $J_r^1(h_1, h_2)$. Применяя неравенство Юнга, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} J_r^1(h_1, h_2) &\leq \int_{h_1}^{h_2} v^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \left\| K_\beta^{k,r} \left(\frac{x}{v^{\alpha/t_k}} \right), L_1(\mathbb{R}^n) \right\| \|F^r(y), L_p(\mathbb{R}^n)\| dv \\ &= \int_{h_1}^{h_2} v^{-\beta\alpha/t_k} dv \|K_\beta^{k,r}(z), L_1(\mathbb{R}^n)\| \|F^r(y), L_p(\mathbb{R}^n)\|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу определения функции (3.13), а также условия $\beta\alpha < t_k$ следует

$$J_r^1(h_1, h_2) \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Оценим слагаемые $J_r^2(h_1, h_2)$. Используя оценку

$$(1 + \langle x \rangle)^{-1} \langle x - y \rangle \leq a(1 + \langle y \rangle), \quad a = \text{const}, \quad (3.15)$$

имеем

$$\begin{aligned} J_r^2(h_1, h_2) &\leq \int_{h_2^{-1}}^{h_1^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - y \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} K_\beta^{k,r} \left(\frac{x - y}{v^{\alpha/t_k}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times (1 + \langle y \rangle)^{\sigma(t_k - \beta\alpha)} F^r(y) dy, L_p(\mathbb{R}^n) \right\| dv. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга, очевидно, получим

$$\begin{aligned} J_r^2(h_1, h_2) &\leq \int_{h_2^{-1}}^{h_1^{-1}} v^{-|\alpha|/t_k - \beta\alpha/t_k} \left\| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} K_\beta^{k,r} \left(\frac{x}{v^{\alpha/t_k}} \right), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| dv \\ &\quad \times \|(1 + \langle y \rangle)^{\sigma(t_k - \beta\alpha)} F^r(y), L_1(\mathbb{R}^n)\| \\ &= \int_{h_2^{-1}}^{h_1^{-1}} v^{-|\alpha|/p' t_k - \beta\alpha/t_k - \sigma(1 - \beta\alpha/t_k)} dv \left\| \langle z \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} K_\beta^{k,r}(z), L_p(\mathbb{R}^n) \right\| \\ &\quad \times \|(1 + \langle y \rangle)^{\sigma(t_k - \beta\alpha)} F^r(y), L_1(\mathbb{R}^n)\|. \end{aligned}$$

Учитывая условия $|\alpha|/p > \sigma t_{\max}$, $t_k > \beta\alpha$, определение (3.13) и финитность функций $F^r(y)$, будем иметь

$$J_r^2(h_1, h_2) \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

Из (3.14), (3.16) следует (3.12).

Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Из полученных оценок (3.6), (3.11) вытекает неравенство (3.4), а из (3.7), (3.12) — сходимость (3.5).

В силу полноты пространства $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ из (3.4), (3.5) следует, что существует линейный непрерывный оператор

$$P : \mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

определенный на финитных вектор-функциях $F(x)$ по формуле

$$PF(x) = \lim_{h \rightarrow 0} P_h F(x),$$

при этом вектор-функция $U(x) = PF(x) \in \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ будет решением системы (1.1). В силу плотности множества финитных вектор-функций в $\mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n)$ оператор P можно единственным образом продолжить на все пространство $\mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n)$ с сохранением нормы. Для продолженного оператора будем использовать то же обозначение P .

Из неравенства (3.4) следует, что линейные операторы

$$P_h : \mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n), \quad 1 < p < \infty, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

непрерывны и совокупность их норм ограничена: $\|P_h\| \leq C$. Следовательно, по теореме Банаха — Штейнгауза сходимость

$$\|P_h F(x) - PF(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

имеет место для любой вектор-функции $F(x) \in \mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n)$.

Из изложенного выше вытекает существование решения $U(x) \in \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ системы (1.1) для любой правой части $F(x) \in \mathbf{L}_{p,(\sigma-1)t_{\max}}(\mathbb{R}^n)$, при этом имеет место оценка (2.2).

Единственность решения системы (1.1) в рассматриваемом пространстве доказывается по аналогии с [9].

Теорема 2 доказана.

Докажем теорему 3. Из теоремы 2 непосредственно вытекает оценка (2.3) при $\beta\alpha = t_k$, $k = 1, \dots, \nu$.

Пусть $\beta\alpha < t_k$. Учитывая обозначение

$$U_h^k(x) = P_{k,h} F(x), \quad F(x) = \mathcal{L}(D_x)U(x),$$

из леммы 3.3 имеем

$$\begin{aligned} & \| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta P_{k,h}(\mathcal{L}(D)U)(x), L_p(\mathbb{R}^n) \| \\ & \leq c \| \langle x \rangle^{(1-\sigma)(t_k - \beta\alpha)} \mathcal{L}(D_x)U(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) \| \end{aligned}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $U(x)$ и h . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned} J_{k,\varepsilon} &= \| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta U^k(x), L_p(\{\langle x \rangle \geq \varepsilon\}) \| \\ &\leq \| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta P_{k,h}(\mathcal{L}(D)U)(x), L_p(\{\langle x \rangle \geq \varepsilon\}) \| \\ &\quad + \| \langle x \rangle^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta (P_{k,h}(\mathcal{L}(D)U)(x) - U^k(x)), L_p(\{\langle x \rangle \geq \varepsilon\}) \| \\ &\leq c \| \langle x \rangle^{(1-\sigma)(t_k - \beta\alpha)} \mathcal{L}(D_x)U(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) \| \\ &\quad + c(\varepsilon) \| (1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta (P_{k,h}(\mathcal{L}(D)U)(x) - U^k(x)), L_p(\{\langle x \rangle \geq \varepsilon\}) \|, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $c(\varepsilon) = (1 + 1/\varepsilon)^{\sigma(t_k - \beta\alpha)}$. В силу доказательства теоремы 2

$$\| (1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta (P_{k,h}(\mathcal{L}(D)U)(x) - U^k(x)), L_p(\mathbb{R}^n) \| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Переходя в (3.17) к пределу при $h \rightarrow 0$, имеем

$$J_{k,\varepsilon} \leq c \| \langle x \rangle^{(1-\sigma)(t_k - \beta\alpha)} \mathcal{L}(D_x)U(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) \|.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем неравенство (2.3).

Теорема 3 доказана.

§ 4. Построение приближенных решений краевой задачи (1.2)

Доказательство теоремы 4 основано на использовании конструкции приближенных решений краевых задач для систем с постоянными коэффициентами, построенной в [19]. В данном параграфе приведем эту конструкцию.

Будем предполагать, что $F(x) \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ и $F(x) \equiv 0$ при $|x| \gg 1$.

Рассмотрим краевую задачу вида (1.4) на полуоси для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(is, D_{x_n})\omega = \tilde{F}(s, x_n), & x_n > 0, \\ \mathcal{B}(is, D_{x_n})\omega|_{x_n=0} = 0, \\ \sup_{x_n > 0} |\omega| < \infty, \end{cases} \quad (4.1)$$

где через $\tilde{F}(s, x_n)$ обозначено преобразование Фурье вектор-функции $F(x', x_n)$ по x' .

В силу условия Лопатинского эта задача однозначно разрешима. Ее решение можно представить в виде

$$\omega(s, x_n) = \omega_0(s, x_n) + v(s, x_n), \quad (4.2)$$

где $\omega_0(s, x_n)$ — ограниченное решение системы

$$\mathcal{L}(is, D_{x_n})\omega = \tilde{F}(s, x_n), \quad x_n > 0,$$

и вектор-функция $v(s, x_n)$ — решение краевой задачи (1.4) с

$$\varphi(s) = -\mathcal{B}(is, D_{x_n})\omega_0(s, x_n)|_{x_n=0}.$$

Введем следующие обозначения:

$$a(is, i\lambda) = \det \mathcal{L}(is, i\lambda), \quad \tilde{\mathcal{L}}(is, i\lambda) — \text{взаимная матрица к } \mathcal{L}(is, i\lambda).$$

Для достаточно гладких вектор-функций $\omega(x_n)$, очевидно, справедливо тождество

$$\mathcal{L}(is, D_{x_n})\tilde{\mathcal{L}}(is, D_{x_n})\omega(x_n) \equiv a(is, D_{x_n})\omega(x_n).$$

Уравнение (1.3) не имеет вещественных корней, поэтому при $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ краевая задача на числовой оси

$$\begin{cases} a(is, D_{x_n})u = g(x_n), & -\infty < x_n < \infty, \\ \sup_{-\infty < x_n < \infty} |u| < \infty \end{cases} \quad (4.3)$$

имеет единственное решение для любой ограниченной $g(x_n) \in C(\mathbb{R})$. Следовательно, используя формулу решения задачи (4.3) (см., например, [25, гл. 1]), в качестве $\omega_0(s, x_n)$ можно взять ограниченную вектор-функцию

$$\omega_0(s, x_n) = \tilde{\mathcal{L}}(is, D_{x_n})R\tilde{F}(s, x_n), \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} R\tilde{F}(s, x_n) &= \int_0^{x_n} J_+(s, x_n - y_n)\tilde{F}(s, y_n) dy_n + \int_{x_n}^\infty J_-(s, x_n - y_n)\tilde{F}(s, y_n) dy_n, \\ J_+(s, x_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{\exp(ix_n \lambda)}{a(is, i\lambda)} d\lambda, \quad J_-(s, x_n) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^-} \frac{\exp(ix_n \lambda)}{a(is, i\lambda)} d\lambda, \end{aligned} \quad (4.5)$$

при этом контур $\Gamma^+ = \Gamma^+(s)$ охватывает все корни уравнения (1.3), лежащие в верхней полуплоскости, а контур $\Gamma^- = \Gamma^-(s)$ — корни, лежащие в нижней полуплоскости. Обозначим через $\{\omega_1(s, x_n), \dots, \omega_\mu(s, x_n)\}$ канонический базис краевой задачи (1.4), т. е. каждая вектор-функция $\omega_j(s, x_n)$ является решением (1.4) с единичным граничным вектором $\varphi = e_j$, j -я компонента которого равна единице. Тогда вектор-функцию $v(s, x_n)$ из (4.2) можно представить следующим образом:

$$v(s, x_n) = \sum_{j=1}^{\mu} \varphi^j(s) \omega_j(s, x_n), \quad (4.6)$$

где $\varphi(s) = -\mathcal{B}(is, D_{y_n})\omega_0(s, y_n)|_{y_n=0}$.

Используя формулы (4.2), (4.4), (4.6), получим представление решения краевой задачи (4.1) в следующем виде:

$$\omega(s, x_n) = \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{x_n}) R \widetilde{F}(s, x_n) + \sum_{j=1}^{\mu} \varphi^j(s) \omega_j(s, x_n). \quad (4.7)$$

Перейдем к построению решения краевой задачи (1.2). Применяя обратный оператор Фурье по s к вектор-функции (4.7), можно получить формальное решение задачи (1.2). Однако контурные интегралы (4.5) и компоненты канонического базиса краевой задачи (1.4) имеют, вообще говоря, неинтегрируемые особенности при $s = 0$. Поэтому для получения формулы решения задачи (1.2) необходимо регуляризовать обратный оператор Фурье. Для этой цели используем интегральное представление С. В. Успенского [26] для функций $f(x') \in L_p(\mathbb{R}^{n-1})$:

$$f(x') = \lim_{h \rightarrow 0} (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(i(x' - y')s) G(sv^{\alpha'}) f(y') ds dy' dv, \quad (4.8)$$

где

$$G(s) = 2m \langle s \rangle^{2m} \exp(-\langle s \rangle^{2m}), \quad \langle s \rangle^2 = \sum_{i=1}^{n-1} s_i^{2/\alpha_i}, \quad (4.9)$$

и предел понимается в смысле сходимости в $L_p(\mathbb{R}^{n-1})$ (см. [25, гл. 1]). Натуральное число m можно взять сколь угодно большим.

По аналогии с [19] вводим вектор-функцию

$$U_h(x) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \omega(s, x_n) ds dv, \quad (4.10)$$

где вектор-функция $\omega(s, x_n)$ определена в (4.7). Из предыдущих рассуждений вытекает, что

$$\begin{cases} \mathcal{L}(D_x)U_h(x) = F_h(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \mathcal{B}(D_x)U_h(x', x_n)|_{x_n=0} = 0, \end{cases}$$

где

$$F_h(x) = (2\pi)^{1-n} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(i(x' - y')s) G(sv^{\alpha'}) F(y', x_n) ds dy' dv.$$

В силу (4.8) вектор-функцию $U_h(x)$ можно рассматривать в качестве приближенного решения краевой задачи (1.2), и проблема существования решения

краевой задачи (1.2) сводится к доказательству сходимости последовательности $\{U_h(x)\}$ в пространстве $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$.

При получении L_p -оценок для вектор-функции $U_h(x)$ используется

Лемма 4.1. При $x_n > 0$ и $s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ для любых $\gamma_n, \kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1})$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |D_s^\kappa (D_{x_n}^{\gamma_n} \widetilde{\mathcal{L}}_{r,l}(is, D_{x_n}) J_+(s, x_n))| &\leq c \langle s \rangle^{(\gamma_n+1)\alpha_n - \kappa\alpha' - t_r} \exp(-\delta x_n \langle s \rangle^{\alpha_n}), \\ |D_s^\kappa (D_{x_n}^{\gamma_n} \widetilde{\mathcal{L}}_{r,l}(is, D_{x_n}) J_-(s, -x_n))| &\leq c \langle s \rangle^{(\gamma_n+1)\alpha_n - \kappa\alpha' - t_r} \exp(-\delta x_n \langle s \rangle^{\alpha_n}), \\ |D_{x_n}^{\gamma_n} D_s^\kappa \omega_j^r(s, x_n)| &\leq c \langle s \rangle^{\gamma_n \alpha_n - \kappa\alpha' + m_j - t_r} \exp(-\delta x_n \langle s \rangle^{\alpha_n}), \\ r, l &= 1, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, \mu, \end{aligned}$$

где $c, \delta > 0$ — константы, $\widetilde{\mathcal{L}}_{r,l}(is, i\xi_n)$ — элементы матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}(is, i\xi_n)$, $\omega_j^r(s, x_n)$ — компоненты вектор-функции $\omega_j(s, x_n)$.

Доказательство повторяет рассуждения из доказательства леммы 4.2 из [25, гл. 4].

§ 5. Разрешимость краевой задачи (1.2)

Рассмотрим вектор-функцию $U_h(x)$ из (4.10) и представим ее, следуя [19], в виде

$$U_h(x) = U_{0,h}(x) + \sum_{j=1}^{\mu} U_{j,h}(x), \quad (5.1)$$

где

$$U_{0,h}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) \mathcal{G}(s, h) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{x_n}) R\tilde{F}(s, x_n) ds, \quad (5.2)$$

$$U_{j,h}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) \mathcal{G}(s, h) \varphi^j(s) \omega_j(s, x_n) ds, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{G}(s, h) = (2\pi)^{(1-n)/2} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} G(sv^{\alpha'}) dv, \quad (5.4)$$

$$\varphi^j(s) = -\mathcal{B}_j(is, D_{y_n}) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{y_n}) R\tilde{F}(s, y_n)|_{y_n=0},$$

$$\mathcal{B}_j(is, D_{y_n}) = (b_{j,1}(is, D_{y_n}), \dots, b_{j,\nu}(is, D_{y_n})).$$

Обозначим через $U_{0,h}^k(x)$ k -ю компоненту вектор-функции $U_{0,h}(x)$.

Лемма 5.1. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = t_k$, $k = 1, \dots, \nu$. Тогда имеет место оценка

$$\|D_x^\beta U_{0,h}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|, \quad 0 < h < 1, \quad (5.5)$$

где $c > 0$ не зависит от h и $F(x)$, при этом

$$\|D_x^\beta U_{0,h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{0,h_2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Доказательство повторяет рассуждения из [19], остановимся на отличиях.

Продолжим вектор-функцию $F(x', x_n)$ нулем при $x_n < 0$. Обозначим через $\widehat{F}(\xi)$ преобразование Фурье вектор-функции $F(x)$ по $x = (x', x_n)$. В [19] показано, что справедливо тождество

$$\widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{x_n})R\widetilde{F}(s, x_n) \equiv (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_n \xi_n} (\mathcal{L}(is, i\xi_n))^{-1} \widehat{F}(s, \xi_n) d\xi_n, \quad (5.7)$$

$s \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. Учитывая (5.7), при $\beta\alpha = t_k$ получим

$$D_x^\beta U_{0,h}^k(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_h^{h^{-1}} v^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\xi) G(sv^{\alpha'}) \times (i\xi)^\beta ((\mathcal{L}(i\xi))^{-1})_k \widehat{F}(\xi) d\xi dv, \quad \xi = (s, \xi_n),$$

где $((\mathcal{L}(i\xi))^{-1})_k$ — k -я строка матрицы $(\mathcal{L}(i\xi))^{-1}$. По теореме Лизоркина [28] с учетом условий 1 и 2 элементы строки $\xi^\beta ((\mathcal{L}(i\xi))^{-1})_k$, $\beta\alpha = t_k$ являются мультипликаторами. Используя это и свойства представления Успенского [25], получим (5.5) и (5.6).

Лемма 5.2. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta\alpha = t_k$, $k = 1, \dots, \nu$. Тогда

$$\|D_x^\beta U_{j,h}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|, \quad 0 < h < 1, \quad (5.8)$$

где $c > 0$ не зависит от h и $F(x)$, при этом

$$\|D_x^\beta U_{j,h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{j,h_2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим k -ю компоненту вектор-функции $U_{j,h}(x)$ из (5.3). Оценим функцию $D_x^\beta U_{j,h}^k(x)$, $\beta\alpha = t_k$. Будем следовать схеме, указанной в [19]. Представим $D_x^\beta U_{j,h}^k(x)$ в виде суммы двух слагаемых:

$$\begin{aligned} D_x^\beta U_{j,h}^k(x) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \exp(ix's) (is)^{\beta'} \mathcal{G}(s, h) \\ &\quad \times B_j(is, D_{y_n}) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{y_n}) R\widetilde{F}(s, y_n) D_{y_n}^{\beta_n+1} \omega_j^k(s, x_n + y_n) dy_n ds dv \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \exp(ix's) (is)^{\beta'} \mathcal{G}(s, h) \\ &\quad \times B_j(is, D_{y_n}) D_{y_n} \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{y_n}) R\widetilde{F}(s, y_n) D_{x_n}^{\beta_n} \omega_j^k(s, x_n + y_n) dy_n ds \\ &= \Phi_{j,h,k}^1(x) + \Phi_{j,h,k}^2(x), \quad (5.10) \end{aligned}$$

где $\mathcal{G}(s, h)$ определена в (5.4). Для определенности рассмотрим первое слагаемое. Воспользовавшись свойством преобразования Фурье, при $x_n > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{j,h,k}^1(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix's) (is)^{\beta'} \mathcal{G}(s, h) \\ &\quad \times B_j(is, D_{y_n}) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{y_n}) R\widetilde{F}(s, y_n) \theta(y_n) D_{y_n}^{\beta_n+1} \omega_j^k(s, x_n + y_n) \theta(x_n + y_n) dy_n ds \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix's - ix_n \xi_n) \langle s \rangle^{m_j - t_k + \beta_n \alpha_n} (is)^{\beta'} \mu_{j,k}(s, \xi_n) \\ &\quad \times \left(\int_R \exp(-it_n \xi_n) \mathcal{G}(s, h) B_j(is, D_{t_n}) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{t_n}) R\widetilde{F}(s, t_n) \theta(t_n) dt_n \right) ds d\xi_n, \end{aligned}$$

где

$$\mu_{j,k}(s, \xi_n) = \langle s \rangle^{t_k - m_j - \beta_n \alpha_n} \int_0^\infty \exp(i y_n \xi_n) D_{y_n}^{\beta_n + 1} \omega_j^k(s, y_n) dy_n.$$

Из условий 1–4 имеем

$$\omega_j^k(s, x_n) = c^{t_k - m_j} \omega_j^k(c^{\alpha'} s, c^{-\alpha_n} x_n), \quad c > 0.$$

По теореме Лизоркина [28], используя равенство выше, получаем, что функция $\mu_{j,k}(s, \xi_n)$ является мультипликатором. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Phi_{j,h,k}^1(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| &\leq c_1 \left\| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) (is)^{\beta'} \mathcal{G}(s, h) \right. \\ &\quad \times \langle s \rangle^{m_j - t_k + \beta_n \alpha_n} B_j(is, D_{x_n}) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{x_n}) R\widetilde{F}(s, x_n) \theta(x_n) ds, L_p(\mathbb{R}^n) \Big\| dv. \end{aligned}$$

Учитывая, что элементы

$$(\langle s \rangle^{\alpha_n} + i\xi_n) \langle s \rangle^{m_j - \alpha_n} B_j(is, i\xi_n) \mathcal{L}^{-1}(is, i\xi_n) \quad (5.11)$$

— мультипликаторы, получим

$$\begin{aligned} \|\Phi_{j,h,k}^1(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| &\leq c_2 \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix's + ix_n \xi_n) \mathcal{G}(s, h) (is)^{\beta'} \langle s \rangle^{-t_k + \beta_n \alpha_n} \right. \\ &\quad \times \frac{\langle s \rangle^{\alpha_n}}{\langle s \rangle^{\alpha_n} + i\xi_n} \widehat{F}(s, \xi_n) d\xi_n ds, \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n) \Big\|. \end{aligned}$$

Применяя равенство

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(ix_n \xi_n)}{\langle s \rangle^{\alpha_n} + i\xi_n} \widehat{F}(s, \xi_n) d\xi_n = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{x_n} \exp(-(x_n - y_n) \langle s \rangle^{\alpha_n}) \widetilde{F}(s, y_n) dy_n$$

и неравенство Юнга, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Phi_{j,h,k}^1(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| &\leq c_4 \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(i(x' - y')s) \exp(-(x_n - y_n) \langle s \rangle^{\alpha_n}) \theta(x_n - y_n) \right. \\ &\quad \times (is)^{\beta'} \langle s \rangle^{\alpha_n - t_k + \beta_n \alpha_n} \mathcal{G}(s, h) F(y) \theta(y_n) ds dy, \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n) \Big\| \\ &\leq c_5 \left\| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) \exp(-x_n \langle s \rangle^{\alpha_n}) \theta(x_n) \right. \\ &\quad \times \mathcal{G}(s, h) (is)^{\beta'} \langle s \rangle^{\alpha_n - t_k + \beta_n \alpha_n} ds, L_1(\mathbb{R}^n) \Big\| \|F(y), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|. \end{aligned}$$

Поскольку имеет место тождество

$$\int_h^{h^{-1}} v^{-1} G(sv^{\alpha'}) dv \equiv \exp(-h^{2m} \langle s \rangle^{2m}) - \exp(-h^{-2m} \langle s \rangle^{2m}),$$

применяя неравенство Минковского и учитывая, что $\beta' \alpha' + \beta_n \alpha_n = t_k$, получим

$$\begin{aligned} \|\Phi_{j,h,k}^1(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| &\leq c_6 \left\| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) \exp(-x_n \langle s \rangle^{\alpha_n}) \theta(x_n) \right. \\ &\quad \times \exp(-\langle s \rangle^{2m}) (is)^{\beta'} \langle s \rangle^{\alpha_n - t_k + \beta_n \alpha_n} ds, L_1(\mathbb{R}^n) \left. \right\| \|F(y), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|. \end{aligned}$$

Выбирая m в (4.9) достаточно большим, приходим к требуемой оценке для $\Phi_{j,h,k}^1(x)$. Повторяя аналогичные рассуждения для $\Phi_{j,h,k}^2(x)$, получим (5.8). Сходимость (5.9) доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 5.3. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $0 \leq \beta \alpha < t_k$ и

$$|\alpha|/p > \sigma(t_k - \beta \alpha) > t_k - \beta \alpha - |\alpha|/p', \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta \alpha)} D_x^\beta U_{0,h}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \\ &\leq c(\|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\| + \|(1 + \langle x \rangle)^{\sigma(t_k - \beta \alpha)} F(x), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n)\|), \quad 0 < h < 1, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $F(x)$, h , при этом

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta \alpha)} (D_x^\beta U_{0,h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{0,h_2}^k(x)), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0. \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем все рассуждения при $|\beta| = 0$.

Рассмотрим k -ю компоненту вектор-функции $U_{0,h}(x)$ из (5.2) и представим ее в виде суммы двух слагаемых:

$$U_{0,h}^k(x) = U_{0,h,1}^k(x) + U_{0,h,2}^k(x), \quad (5.14)$$

где

$$\begin{aligned} U_{0,h,1}^k(x) &= (2\pi)^{(1-n)/2} \int_h^1 v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \widetilde{\mathcal{L}}_k(is, D_{x_n}) R\widetilde{F}(s, x_n) ds dv, \\ U_{0,h,2}^k(x) &= (2\pi)^{(1-n)/2} \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \widetilde{\mathcal{L}}_k(is, D_{x_n}) R\widetilde{F}(s, x_n) ds dv, \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathcal{L}}_k(is, i\xi_n)$ — k -я строка матрицы $\widetilde{\mathcal{L}}(is, i\xi_n)$. В силу однородности элементов матрицы $\mathcal{L}(is, i\xi_n)$, учитывая определение $R\widetilde{F}(s, x_n)$, получим

$$\begin{aligned} U_{0,h,1}^k(x) &= (2\pi)^{1-n} \int_h^1 v^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} K_{0,k}(v, x' - y', x_n - y_n) \theta(y_n) F(y) dy dv, \\ U_{0,h,2}^k(x) &= (2\pi)^{1-n} \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} K_{0,k}(v, x' - y', x_n - y_n) \theta(y_n) F(y) dy dv, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где

$$\begin{aligned} &K_{0,k}(v, x', x_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \widetilde{\mathcal{L}}_k(is, D_{x_n}) [J_+(s, x_n) \theta(x_n) + J_-(s, x_n) \theta(-x_n)] ds, \end{aligned}$$

$\theta(x_n)$ — функция Хевисайда.

Рассмотрим функцию $U_{0,h,1}^k(x)$. Поскольку $\sigma t_k \geq 0$, то

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma t_k} U_{0,h,1}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq \|U_{0,h,1}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\|.$$

В силу условий 1, 2 имеем

$$K_{0,k}(v, x', x_n) = v^{t_k - |\alpha|} K_{0,k}(1, x' v^{-\alpha'}, x_n v^{-\alpha_n}),$$

после замены $z_j = x_j v^{-\alpha_j}$, $j = 1, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} & \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma t_k} U_{0,h,1}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \\ & \leq c_1 \int_h^1 v^{-1+t_k} dv \|K_{0,k}(1, z', z_n), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)\| \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|. \end{aligned}$$

Следуя [17, 18], можно показать, что, выбирая достаточно большое число m в (4.9) из определения $G(s)$, получим

$$\|K_{0,k}(1, z', z_n), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}^n)\| \leq c < \infty.$$

Тогда

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma t_k} U_{0,h,1}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|. \quad (5.16)$$

Рассмотрим функцию $U_{0,h,2}^k(x)$ из (5.15). Применяя оценку (3.15), а также неравенства Минковского и Юнга, получим

$$\begin{aligned} & \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma t_k} U_{0,h,2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \\ & \leq c \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \|\langle x \rangle^{-\sigma t_k} K_{0,k}(v, x', x_n), L_p(\mathbb{R}^n)\| dv \|(1 + \langle y \rangle)^{\sigma t_k} F(y), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n)\|. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения, как при оценивании $U_{0,h,1}^k(x)$, и учитывая, что $|\alpha|/p > \sigma t_{\max}$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma t_k} U_{0,h,2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \\ & \leq c_1 \int_1^{h^{-1}} v^{-1+(1-\sigma)t_k-|\alpha|/p'} dv \|(1 + \langle y \rangle)^{\sigma t_k} F(y), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n)\|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия $|\alpha|/p' > (1-\sigma)t_k$ вытекает, что

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma t_k} U_{0,h,2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c \|(1 + \langle y \rangle)^{\sigma t_k} F(y), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n)\|, \quad (5.17)$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $F(x)$, h .

Из (5.14), (5.16), (5.17) получим требуемую оценку (5.12) при $|\beta| = 0$. Доказательство (5.12) при $t_k > \beta\alpha > 0$, а также (5.13) проводится точно так же.

Лемма доказана.

Лемма 5.4. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $0 \leq \beta\alpha < t_k$ и

$$|\alpha|/p > \sigma(t_k - \beta\alpha) > t_k - \beta\alpha - |\alpha|/p', \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} D_x^\beta U_{j,h}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \\ & \leq c (\|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\| + \|(1 + \langle x \rangle)^{\sigma(t_k - \beta\alpha)} F(x), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n)\|), \quad 0 < h < 1, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где $c > 0$ — константа, не зависящая от $F(x)$, h , при этом

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(t_k - \beta\alpha)} (D_x^\beta U_{j,h_1}^k(x) - D_x^\beta U_{j,h_2}^k(x)), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0. \quad (5.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основной трудностью при установлении оценок (5.18) является случай, когда $|\beta| = 0$. Остановимся на нем.

Рассмотрим k -ю компоненту вектор-функции $U_{j,h}(x)$ из (5.3) и представим ее, следуя [19], в виде

$$U_{j,h}^k(x) = U_{j,h,1}^k(x) + U_{j,h,2}^k(x), \quad (5.20)$$

где

$$\begin{aligned} U_{j,h,1}^k(x) &= (2\pi)^{(1-n)/2} \int_h^1 v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \int_0^\infty \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \\ &\quad \times D_{y_n}(B_j(is, D_{y_n}) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{y_n}) R\tilde{F}(s, y_n) \omega_j^k(s, x_n + y_n)) dy_n ds dv, \\ U_{j,h,2}^k(x) &= (2\pi)^{(1-n)/2} \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \\ &\quad \times \int_0^\infty W_j(s, z_n) \tilde{F}(s, z_n) dz_n \omega_j^k(s, x_n) ds dv, \end{aligned}$$

$$W_j(s, x_n) = -\mathcal{B}_j(is, D_{y_n}) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{y_n}) J_-(s, y_n - x_n)|_{y_n=0}.$$

Поскольку $\sigma t_k \geq 0$, имеем

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-t_k \sigma} U_{j,h,1}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq \|U_{j,h,1}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\|. \quad (5.21)$$

Оценим первое слагаемое $U_{j,h,1}^k(x)$ из (5.20). По аналогии с [19], представим эту функцию в виде

$$\begin{aligned} U_{j,h,1}^k(x) &= (2\pi)^{(1-n)/2} \int_h^1 v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \\ &\quad \times B_j(is, D_{y_n}) \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{y_n}) R\tilde{F}(s, y_n) D_{y_n} \omega_j^k(s, x_n + y_n) dy_n ds dv \\ &\quad + (2\pi)^{(1-n)/2} \int_h^1 v^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \exp(ix's) G(sv^{\alpha'}) \\ &\quad \times B_j(is, D_{y_n}) D_{y_n} \widetilde{\mathcal{L}}(is, D_{y_n}) R\tilde{F}(s, y_n) \omega_j^k(s, x_n + y_n) dy_n ds dv \\ &= \Phi_{j,h,k}^1(x) + \Phi_{j,h,k}^2(x). \quad (5.22) \end{aligned}$$

Рассуждая, как и при оценивании $\Phi_{j,h,k}^1(x)$ в лемме 5.2, и учитывая, что функция

$$\langle s \rangle^{t_k - m_j} \int_0^\infty \exp(iy_n \xi_n) D_{y_n} \omega_j^k(s, y_n) dy_n$$

и элементы строки (5.11) являются мультипликаторами, для $\Phi_{j,h,k}^1(x)$ получим

$$\|\Phi_{j,h,k}^1(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c_5 \int_h^1 v^{-1} \|K_k^{\alpha_n}(v, x', x_n), L_1(\mathbb{R}^n)\| dv \|F(y), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|,$$

где

$$K_k^{\alpha_n}(v, x', x_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(ix's) \exp(-x_n \langle s \rangle^{\alpha_n}) \theta(x_n) G(sv^{\alpha'}) \langle s \rangle^{\alpha_n - t_k} ds.$$

Поскольку

$$K_k^{\alpha_n}(v, x', x_n) = v^{t_k - |\alpha|} K_k^{\alpha_n}(1, x' v^{-\alpha'}, x_n v^{-\alpha_n}),$$

сделав замену

$$z_i = x_i v^{-\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

будем иметь

$$\|\Phi_{j,h,k}^1(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c_5 \int_h^1 v^{-1+t_k} dv \|K_k^{\alpha_n}(1, z', z_n), L_1(\mathbb{R}^n)\| \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|.$$

Учитывая определение функции $K_k^{\alpha_n}(1, z', z_n)$, получим

$$\|\Phi_{j,h,k}^1(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|,$$

где константа $c > 0$ не зависит от $F(x)$ и h . Проводя аналогичные рассуждения для второго слагаемого в (5.22), приходим к оценке

$$\|\Phi_{j,h,k}^2(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|.$$

Из (5.21), (5.22) и полученных неравенств вытекает, что

$$\|(1 + \langle x \rangle)^{-t_k \sigma} U_{j,h,1}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| \leq c \|F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n)\|, \quad (5.23)$$

где константа $c > 0$ не зависит от $F(x)$ и h .

Проведем оценку функции $U_{j,h,2}^k(x)$ из (5.20). Используя оценку (3.15) и неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} \|(1 + \langle x \rangle)^{-t_k \sigma} U_{j,h,2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n)\| &\leq c_2 \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \left\| \int_{\mathbb{R}_+^n} \langle x - y \rangle^{-t_k \sigma} \right. \\ &\quad \times \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(i(x' - y')s) G(sv^{\alpha'}) W_j(s, y_n) \omega_j^k(s, x_n) ds \right| \\ &\quad \times (1 + \langle y \rangle)^{t_k \sigma} |F(y)| dy, L_p(\mathbb{R}_+^n) \Big\| dv = c_2 \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \left\| \int_{\mathbb{R}_+^n} |K_{j,k}(v, x' - y', x_n, y_n)| \right. \\ &\quad \times ((1 + \langle y \rangle)^{t_k \sigma} |F(y)|)^{(1/p+1/p')} dy, \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n) \Big\| dv, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_{j,k}(v, x' - y', x_n, y_n) &= \langle x - y \rangle^{-t_k \sigma} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(i(x' - y')s) G(sv^{\alpha'}) W_j(s, y_n) \omega_j^k(s, x_n) ds. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \| (1 + \langle x \rangle)^{-t_k \sigma} U_{j,h,2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n) \| \\ & \leq c_2 \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \left\| \int_{\mathbb{R}_+^n} |K_{j,k}(v, x' - y', x_n, y_n)|^p (1 + \langle y \rangle)^{t_k \sigma} |F(y)| dy, L_1(\mathbb{R}_+^n) \right\|^{1/p} dv \\ & \quad \times \| (1 + \langle y \rangle)^{t_k \sigma} |F(y)|, \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n) \|^{1/p'}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремой Тонелли, перепишем это неравенство в виде

$$\begin{aligned} & \| (1 + \langle x \rangle)^{-t_k \sigma} \Phi_{j,h,k}^2(x), L_p(\mathbb{R}_+^n) \| \\ & \leq c_2 \int_1^{h^{-1}} v^{-1} \left\| \int_{\mathbb{R}_+^n} |K_{j,k}(v, x' - y', x_n, y_n)|^p dx (1 + \langle y \rangle)^{t_k \sigma} |F(y)|, L_1(\mathbb{R}_+^n) \right\|^{1/p} dv \\ & \quad \times \| (1 + \langle y \rangle)^{t_k \sigma} F(y), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n) \|^{1/p'}. \quad (5.25) \end{aligned}$$

Положим

$$A_{j,k}(v, y) = \int_{\mathbb{R}^n} |K_{j,k}(v, x' - y', x_n, y_n)|^p \theta(x_n) \theta(y_n) dx.$$

Повторяя рассуждения из леммы 2 в [18, § 4], учитывая лемму 4.1 и неравенство $|\alpha|/p > t_k \sigma$, будем иметь

$$A_{j,k}(v, y) \leq c v^{p((1-\sigma)t_k - |\alpha|/p')} \quad (5.26)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от v, y . Подставляя (5.26) в (5.25), получим

$$\begin{aligned} & \| (1 + \langle x \rangle)^{-t_k \sigma} U_{j,h,2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n) \| \\ & \leq c \int_1^{h^{-1}} v^{-1+(1-\sigma)t_k - |\alpha|/p'} dv \| (1 + \langle x \rangle)^{t_k \sigma} F(x), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n) \|. \end{aligned}$$

В силу условий леммы $(1 - \sigma)t_k - |\alpha|/p' < 0$. Отсюда

$$\| (1 + \langle x \rangle)^{-t_k \sigma} U_{j,h,2}^k(x), L_p(\mathbb{R}_+^n) \| \leq c \| (1 + \langle x \rangle)^{t_k \sigma} F(x), \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+^n) \|, \quad (5.27)$$

где константа $c > 0$ не зависит от $F(x)$ и h .

Учитывая, что

$$U_{j,h}^k(x) = U_{j,h,1}^k(x) + U_{j,h,2}^k(x),$$

а также неравенства (5.23), (5.27), приходим к требуемой оценке (5.18) при $|\beta| = 0$. Получение оценки (5.18) при $t_k > \beta \alpha > 0$, а также вывод (5.19) проводятся аналогично.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 вытекает из лемм 5.1–5.4.

Действительно, в силу доказанных лемм при выполнении условий (2.1) для любой $F(x) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ такой, что $F(x) \equiv 0$ при $|x| \gg 1$, вектор-функция $U_h(x)$, определенная в (4.10), (5.1), принадлежит $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ и имеет место оценка

$$\| U_h(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n) \| \leq c (\| F(x), \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n) \| + \| F(x), \mathbf{L}_{1,-\sigma t_{\max}}(\mathbb{R}_+^n) \|)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от $F(x)$, h , при этом имеет место сходимость

$$\| U_{h_1}(x) - U_{h_2}(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n) \| \rightarrow 0, \quad h_1, h_2 \rightarrow 0.$$

В силу полноты пространства $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ существует вектор-функция $U(x) \in \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ такая, что

$$\|U_h(x) - U(x), \mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Она является решением краевой задачи (1.2), и для нее выполнена оценка (2.4). Поскольку множество функций из $C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, равных нулю при больших $|x|$, всюду плотно в пространстве $L_p(\mathbb{R}_+^n) \cap L_{1,-\sigma t_{\max}}(\mathbb{R}_+^n)$, краевая задача (1.2) разрешима в $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$ для любой вектор-функции $F(x) \in \mathbf{L}_p(\mathbb{R}_+^n) \cap \mathbf{L}_{1,-\sigma t_{\max}}(\mathbb{R}_+^n)$ и для решения выполняется неравенство (2.4).

Доказательство единственности решения краевой задачи (1.2) в $\mathbf{W}_{p,\sigma}^{t/\alpha}(\mathbb{R}_+^n)$, $\sigma \in [0, 1]$, повторяет рассуждения из доказательства единственности решений краевой задачи для квазиэллиптических уравнений (см. [18]).

Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волевич Л. Р. Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 3. С. 3–52.
2. Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076.
3. Демиденко Г. В. О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. АН. 1994. Т. 334, № 4. С. 420–423.
4. Nirenberg L., Walker H. F. The null spaces of elliptic partial differential operators in R^n // J. Math. Anal. Appl. 1973. V. 42, N 2. P. 271–301.
5. Cantor M. Spaces of functions with asymptotic conditions on R^n // Indiana Univ. Math. J. 1975. V. 24, N 9. P. 897–902.
6. Cantor M. Elliptic operators and decomposition of tensor fields // Bulletin AMS. 1981. V. 5, N 3. P. 235–262.
7. Демиденко Г. В. О квазиэллиптических операторах в R_n // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.
8. Hile G. N. Fundamental solutions and mapping properties of semielliptic operators // Math. Nachr. 2006. V. 279, N 13–14. P. 1538–1572.
9. Демиденко Г. В. Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1036–1056.
10. Демиденко Г. В. Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа. II // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1060–1069.
11. Demidenko G. V. Mapping properties of one class of quasielliptic operators // Commun. Computer Information Sci. 2017. V. 655. P. 339–348.
12. Багиров Л. А., Кондратьев В. А. Об эллиптических уравнениях в $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 3. С. 498–504.
13. McOwen R. C. The behavior of the Laplacian on weighted Sobolev spaces // Comm. Pure Appl. Math. 1979. V. 32, N 6. P. 783–795.
14. Choquet-Bruhat Y., Christodoulou D. Elliptic systems in $H_{s,\sigma}$ spaces on manifolds which are Euclidean at infinity // Acta Math. 1981. V. 146, N 1–2. P. 129–150.
15. Lockhart R. B., McOwen R. C. Elliptic differential operators on noncompact manifolds // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1985. V. 12, N 3. P. 409–447.
16. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
17. Демиденко Г. В. О корректной разрешимости краевых задач в полупространстве для квазиэллиптических уравнений // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 4. С. 54–67.
18. Демиденко Г. В. Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.
19. Demidenko G. V. On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in R_+^n // J. Anal. Appl. 2006. V. 4, N 1. P. 1–11.
20. Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В. Краевые задачи для квазиэллиптических систем // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 256–273.

21. Бондарь Л. Н. Разрешимость краевых задач для квазиэллиптических систем в весовых соболевских пространствах // Вестн. НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 1. С. 3–17.
22. Бондарь Л. Н. Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 341–350.
23. Бондарь Л. Н. Необходимые условия разрешимости одного класса краевых задач для квазиэллиптических систем // Мат. тр. 2018. Т. 21, № 1. С. 3–16.
24. Бондарь Л. Н. О необходимых условиях разрешимости одного класса эллиптических систем в полупространстве // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 8–23.
25. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
26. Успенский С. В. О представлении функций, определяемых одним классом гипоеллиптических операторов // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1972. Т. 117. С. 292–299.
27. Харди Г. Г., Литлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: КомКнига, 2006.
28. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1969. Т. 105. С. 89–167.

Поступила в редакцию 2 сентября 2020 г.

После доработки 2 сентября 2020 г.

Принята к публикации 9 октября 2020 г.

Бондарь Лина Николаевна, Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
b_lina@ngs.ru, demidenk@math.nsc.ru