A. I. Budkin, On the quasivarieties generated by a finite group and lacking any independent bases of quasi-identities, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1234–1246

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.603>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.227.88.159

April 26, 2023, 13:01:23

О КВАЗИМНООБРАЗИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ И НЕ ИМЕЮЩИХ НЕЗАВИСИМЫХ БАЗИСОВ КВАЗИТОЖДЕСТВ

А. И. Будкин

Аннотация. Пусть $\mathcal{R}_{p^k}$ — многообразие 2-ступенно нильпотентных групп экспоненты p^k с коммутантом экспоненты p (p — простое число). Доказано, что множество подквазимногообразий $\mathcal{R}_{p^k}$ ($k \geq 2$), порожденных конечной группой и не имеющих независимых базисов квазитожеств, бесконечно.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.603

Ключевые слова: квазимногообразие, квазитожество, независимый базис, нильпотентная группа.

Введение

В работе рассматривается вопрос о существовании независимых базисов квазитожеств групп и исследуется сложность решеток квазимногообразий групп. Изучению независимых базисов квазитожеств групп посвящено значительное количество работ. Приведем некоторые из них. В [1] доказано, что если квазимногообразие групп содержит бесконечную циклическую группу и не содержит бесконечного множества групп простого порядка, то оно имеет независимый базис квазитожеств. Ввиду этого для квазимногообразий групп без кручения рассматривается задача о существовании независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения. В [2] найдены условия существования независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения. В частности, оказалось, что некоторые широко изучаемые квазимногообразия (например, квазимногообразие, порожденное неабелевой свободной разрешимой группой, всех линейно упорядочиваемых групп) имеют независимые базисы квазитожеств в классе групп без кручения. В [3] показано, что множество квазимногообразий разрешимых групп, не имеющих независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения, имеет мощность континуума. В [4] построены континуальные серии квазимногообразий нильпотентных групп, не имеющих независимых базисов квазитожеств. В [1] построено квазимногообразие групп, не имеющее независимого базиса квазитожеств, которое можно задать независимой системой $\forall$ -формул.

В [5] доказано, что свободная 2-нильпотентная группа ранга $n \geq 2$ не имеет независимого базиса квазитожеств в классе групп без кручения. В [6] также показано, что аналогичным свойством обладает квазимногообразие, порожденное неабелевой группой порядка p^3 , где p — простое число, $p \neq 2$. Пусть $\mathcal{R}_{p^k}$ — многообразие 2-ступенно нильпотентных групп экспоненты p^k с коммутантом экспоненты p (p — простое число, $k \geq 2$). Из [7] следует, что квазимногообразие,

порожденное свободной неабелевой $\mathcal{R}_{p^k}$ -группой, не имеет независимого базиса квазитождеств.

В процессе развития теории квазимногообразий достаточно быстро стало известно, что решетки квазимногообразий имеют весьма сложное строение. На сложность решеток квазимногообразий универсальных алгебр указывают, например, статьи [8–11]. Информацию о сложности решеток квазимногообразий групп можно найти в [7, 12–15]. Отметим работы [13, 14, 16], в которых установлено, что лишь одно неабелево квазимногообразие 2-ступенно нильпотентных групп без кручения и только конечное множество квазимногообразий 2-ступенно нильпотентных групп экспоненты p^k с коммутантом простой экспоненты имеют конечную решетку подквазимногообразий.

Нами получена теорема, характеризующая сложность решетки подквазимногообразий квазимногообразия $\mathcal{R}_{p^k}$ ($k > 1$), а именно установлено, что существует бесконечное множество подквазимногообразий $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$, порожденных конечной группой, таких, что для любого квазимногообразия $\mathcal{N}$ ($\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$) промежуток $[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$ в решетке квазимногообразий континуален. С учетом этого результата установлено, что множество квазимногообразий, порожденных конечной группой, содержащихся в $\mathcal{R}_{p^k}$ ($k \geq 2$) и не имеющих независимых базисов квазитождеств, бесконечно.

§ 1. Предварительные замечания

Отметим, что необходимую информацию о квазимногообразиях можно найти в [16, 17]. Введем следующие определения и обозначения.

$\langle S \rangle$ — группа, порожденная множеством S , $\langle a \rangle$ — циклическая группа, порожденная элементом a , G' — коммутант группы G , $Z(G)$ — центр G , $\ker \varphi$ — ядро гомоморфизма φ . Если x, y — элементы группы, то $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Как обычно, если A, B — подгруппы группы G , то $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$.

$\mathcal{R}_{p^k}$ (p — простое число, $k \geq 2$) — многообразие, заданное тождествами

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y, z] = 1), \quad (\forall x)(x^{p^k} = 1), \quad (\forall x)(\forall y)([x, y]^p = 1),$$

qG — квазимногообразие, порожденное группой G ,

$\mathcal{M}(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа группы G , фактор-группа по которой принадлежит квазимногообразию $\mathcal{M}$,

$[\mathcal{M}, \mathcal{N}] = \{\mathcal{R} \mid \mathcal{M} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{N}\}$ — замкнутый промежуток в решетке квазимногообразий групп,

$\vee$ — решеточная сумма,

F_2 — свободная $\mathcal{R}_{p^k}$ -группа со свободными порождающими a, b ,

Z_{p^n} — циклическая группа порядка p^n .

Будем пользоваться тем, что в любой 2-ступенно нильпотентной группе истинны тождества

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)([xy, z] = [x, z][y, z]), \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, yz] = [x, y][x, z]).$$

Будем говорить, что коммутирование на нецентральных элементах группы G транзитивно, если для любых $x, y, z \in G$, не содержащихся в центре G , из $[x, y] = 1$, $[x, z] = 1$ следует $[y, z] = 1$.

Предположим, что группы A и B имеют в $\mathcal{R}_{p^k}$ следующие представления:

$$A = \langle \{x_i \mid i \in I_1\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \rangle, \quad B = \langle \{y_i \mid i \in I_2\}; \{r_j = 1 \mid j \in J_2\} \rangle,$$

в непересекающихся множествах порождающих символов. Тогда группа, имеющая в $\mathcal{R}_{p^k}$ представление

$$\langle \{x_i \mid i \in I_1\} \cup \{y_i \mid i \in I_2\}; \{t_j = 1 \mid j \in J_1\} \cup \{r_j = 1 \mid j \in J_2\} \rangle,$$

называется *свободным произведением* в $\mathcal{R}_{p^k}$ групп A и B и обозначается через $A *_{\mathcal{R}_{p^k}} B$. Часто вместо $A *_{\mathcal{R}_{p^k}} B$ будем писать $A * B$, опуская индекс $\mathcal{R}_{p^k}$. Отметим, что множество порождающих символов группы $A *_{\mathcal{R}_{p^k}} B$ совпадает с объединением множеств порождающих символов групп A и B , а множество ее определяющих соотношений — с объединением множеств определяющих соотношений этих групп.

Будем пользоваться следующей теоремой Дика [18, п. 11.2, теорема 5].

Лемма 1. Пусть группа A имеет в данном квазимногообразии $\mathcal{M}$ представление

$$A = \langle \{x_i \mid i \in I\}; \{r_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_{l(j)}}) = 1 \mid j \in J\} \rangle.$$

Предположим, что $H \in \mathcal{M}$ и группа H содержит множество элементов $\{g_i \mid i \in I\}$ такое, что для всякого $j \in J$ равенство $r_j(g_{j_1}, \dots, g_{j_{l(j)}}) = 1$ истинно в H . Тогда отображение $x_i \rightarrow g_i$ ($i \in I$) продолжается до гомоморфизма A в H .

Ниже понадобится следующий признак принадлежности конечно определенной группы G квазимногообразию $q\mathcal{R}$, порожденному классом $\mathcal{R}$ [16, теорема 2.3.9; 17, следствие 2.1.21].

Лемма 2. Конечно определенная в квазимногообразии $\mathcal{N}$ группа G принадлежит квазимногообразию, порожденному классом групп $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subseteq \mathcal{N}$), тогда и только тогда, когда для любого элемента $g \in G$ ($g \neq 1$) существует гомоморфизм φ_g группы G в некоторую группу из класса $\mathcal{R}$ такой, что $g^{\varphi_g} \neq 1$.

Лемма 3. Пусть $G \in \mathcal{R}_{p^k}$ — конечная неединичная группа. Тогда группу G в $\mathcal{R}_{p^k}$ можно задать представлением вида

$$G = \langle x_1, \dots, x_n; x_1^{p^{n_1}} c_1 = 1, \dots, x_l^{p^{n_l}} c_l = 1, c_{l+1} = 1, \dots, c_s = 1 \rangle,$$

где $c_1, \dots, c_s$ — элементы коммутанта свободной группы, $n_i \geq 1, i = 1, \dots, l$ (соотношения $x_1^{p^{n_1}} c_1 = 1, \dots, x_l^{p^{n_l}} c_l = 1$ либо $c_{l+1} = 1, \dots, c_s = 1$ могут отсутствовать).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G/G' разлагается в прямое произведение своих неединичных циклических подгрупп: $G/G' = \langle x_1 G' \rangle \times \dots \times \langle x_n G' \rangle$. Элементы $x_1, \dots, x_n$, порождающие G по модулю коммутанта, порождают G . В этих порождающих G имеет требуемое представление. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$ — произвольное квазимногообразие групп такое, что $Z_p * Z_p \in \mathcal{M}$. Предположим, что группы A и B из $\mathcal{M}$ в порождающих $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ соответственно имеют в $\mathcal{R}_{p^k}$ представления, аналогичные представлению из формулировки леммы 3. Если N — подгруппа (возможно, единичная) группы $A * B$, порожденная некоторыми коммутаторами вида $[a_i, b_j]$, то $(A * B)/N \in \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = (A * B)/N$, $[A, B] = \langle [a_i, b_j] \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \rangle$. Так как $G/[A, B] \cong A \times B$, то $G/[A, B] \in \mathcal{M}$. Возьмем произвольный неединичный элемент $g \in [A, B]$. Достаточно (ввиду леммы 2) показать, что $g^\varphi \neq 1$ для некоторого гомоморфизма φ группы G в подходящую группу из $\mathcal{M}$.

Элемент g можно записать в виде

$$g = \prod [a_i, b_j]^{m_{ij}}.$$

Зафиксируем пару индексов u, v таких, что $m_{uv} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Пусть $Z_p * Z_p = \langle a, b \rangle$. По лемме 1 отображение

$$a_u \rightarrow a, \quad b_v \rightarrow b,$$

$$a_i \rightarrow 1 \text{ при } i \neq u; \quad b_j \rightarrow 1 \text{ при } j \neq v$$

продолжается до гомоморфизма $\varphi : G \rightarrow Z_p * Z_p \in \mathcal{M}$, при этом $g^\varphi = [a, b]^{m_{uv}} \neq 1$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$ — квазимногообразие групп такое, что $Z_{p^k} \in \mathcal{M}$ и $Z_p * Z_p \in \mathcal{M}$, то $Z_{p^s} * Z_{p^t} \in \mathcal{M}$ при $s, t \leq k$.

Пусть A_{rm} ($r, m \geq 1$) — группа, заданная в $\mathcal{R}_{p^k}$ порождающими

$$a_{jl}, b_{jt} \quad (j = 1, \dots, 2r; l = 1, \dots, 2m, t = 1, \dots, 2w)$$

и определяющими соотношениями

$$\prod_{j=1}^w [b_{1j}, b_{1,w+j}] \prod_{j=1}^m [a_{1j}, a_{1,m+j}] = \dots = \prod_{j=1}^w [b_{2r,j}, b_{2r,w+j}] \prod_{j=1}^m [a_{2r,j}, a_{2r,m+j}],$$

$$[a_{lj}, a_{ti}] = 1 \quad (\text{при всех } l \neq t).$$

$$\text{Пусть } c_1 = \prod_{j=1}^w [b_{1j}, b_{1,w+j}] \prod_{j=1}^m [a_{1j}, a_{1,m+j}].$$

Группы с таким же представлением, но относительно других квазимногообразий рассматривались в [7, 15, 19], при $k = 1$ — в [14].

Лемма 5. Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$ — произвольное квазимногообразие групп такое, что $Z_{p^k}, Z_p * Z_p \in \mathcal{M}$. Тогда $A_{rm}/\langle c_1 \rangle, A_{rm} \in \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа B_i имеет в $\mathcal{R}_{p^k}$ представление

$$B_i = \left\langle \{a_{il}, b_{it} \mid l = 1, \dots, 2m, t = 1, \dots, 2w\}; \prod_{j=1}^w [b_{ij}, b_{i,w+j}] \prod_{j=1}^m [a_{ij}, a_{i,m+j}] = 1 \right\rangle.$$

Эти группы изучались в [16, теорема 4.2.24; 19] в многообразии $\mathcal{R}_p$. Доказательство того, что $B_i \in \mathcal{M}$ (индукцией по $m + w$ с применением леммы 4), является почти дословным повторением доказательств аналогичных утверждений из [16, теорема 4.2.24; 19], поэтому его опустим. Группу $A_{rm}/\langle c_1 \rangle$ можно собрать из групп B_i с помощью повторения несколько раз конструкции, рассмотренной в лемме 4. По лемме 4 $A_{rm}/\langle c_1 \rangle \in \mathcal{M}$.

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : A_{rm} \rightarrow F_2$, при котором $b_{j1}^\varphi = a$, $b_{j,w+1}^\varphi = b$ ($j = 1, \dots, 2r$), образы остальных порождающих равны единице. Существование φ следует из теоремы Дика (лемма 1). Видим, что $c_1^\varphi = [a, b] \neq 1$. Следовательно, $\langle c_1 \rangle \cap \ker \varphi = 1$. Отсюда группа A_{rm} вложима в группу $A_{rm}/\langle c_1 \rangle \times A_{rm}/\ker \varphi$, значит, $A_{rm} \in \mathcal{M}$. Лемма доказана.

Обозначим через $C_p^t(w)$ ($1 \leq t \leq k - 1$) группу, имеющую в $\mathcal{R}_{p^k}$ представление

$$C_p^t(w) = \left\langle a_0, a_1, \dots, a_{2w}; a_0^{p^t} \prod_{i=1}^w [a_i, a_{w+i}] = 1 \right\rangle.$$

Лемма 6. В группе $C_p^t(w)$ коммутирование на нецентральных элементах транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно увидеть, что коммутант группы $C_p^t = C_p^t(w)$ — это свободная абелева группа экспоненты p со свободными порождающими $[a_i, a_j]$ ($0 \leq i < j \leq 2w$). Пусть $a, b, c \notin Z(C_p^t)$ и $[a, b] = 1$, $[a, c] = 1$. Эти элементы могут быть представлены так:

$$a = a_0^{k_0} a_1^{k_1} \dots a_{2w}^{k_{2w}} c_1, \quad b = a_0^{l_0} a_1^{l_1} \dots a_{2w}^{l_{2w}} c_2, \quad c = a_0^{m_0} a_1^{m_1} \dots a_{2w}^{m_{2w}} c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 из коммутанта свободной группы. Тогда

$$[a, b] = \prod_{0 \leq i < j \leq 2w} [a_i, a_j]^{k_i l_j - k_j l_i} = 1, \quad [a, c] = \prod_{0 \leq i < j \leq 2w} [a_i, a_j]^{k_i m_j - k_j m_i} = 1,$$

откуда $k_i l_j - k_j l_i \equiv 0 \pmod{p}$, $k_i m_j - k_j m_i \equiv 0 \pmod{p}$ для всех $0 \leq i < j \leq 2w$. Отсюда следует, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \dots & k_{2w} \\ l_0 & l_1 & l_2 & \dots & l_{2w} \\ m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_{2w} \end{pmatrix}$$

равен 1. Следовательно, $l_i m_j - l_j m_i \equiv 0 \pmod{p}$ для всех $0 \leq i < j \leq 2w$. Это означает, что $[b, c] = 1$. Лемма доказана.

Лемма 7. Если $w_1 < w_2$, то при любом гомоморфизме $\varphi : C_p^t(w_1) \rightarrow C_p^s(w_2)$ имеем $(a_0^t)^\varphi = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $(a_0^t)^\varphi \neq 1$. Пусть F — $\mathcal{R}_p^k$ -свободная группа со свободными порождающими $a_0, a_1, \dots, a_{2w_2}$, b_i — прообраз элемента a_i^φ при естественном гомоморфизме группы F на $C_p^s(w_2)$. Поскольку

$$(a_0^t)^{p^t} \prod_{i=1}^{w_1} [a_i^\varphi, a_{w_1+i}^\varphi] = 1,$$

в F справедливо равенство

$$b_0^{p^t} \prod_{i=1}^{w_1} [b_i, b_{w_1+i}] = a_0^{mp^s} \prod_{i=1}^{w_2} [a_i, a_{w_2+i}]^m$$

для некоторого m ($0 \leq m < p$). Если $m = 0$, то $b_0^{p^t} \in F'$, откуда $b_0^{p^t} = 1$. Значит, $(a_0^t)^\varphi = 1$, что не так. Итак, предполагаем, что $m \neq 0$.

Рассмотрим группу $\bar{F} = F/F^{p^2} \langle a_0^F \rangle$, свободную в многообразии $\mathcal{R}_{p^2}$ со свободными порождающими $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{2w_2}$. Пусть $\bar{b}_i$ — образ b_i при естественном гомоморфизме F на $\bar{F}$. Имеем

$$\bar{b}_i^{p^t} \prod_{i=1}^{w_1} [\bar{b}_i, \bar{b}_{w_1+i}] = \prod_{i=1}^{w_2} [\bar{a}_i, \bar{a}_{w_2+i}]^m.$$

Так как $\bar{b}_i^{p^t} \in \bar{F}'$ ($t \geq 1$), то $\bar{b}_i^{p^t} = 1$. Получили противоречие с тем, что, как доказано в [16, теорема 4.2.3] (см. также [6, лемма 3]), элемент $\prod_{i=1}^{w_2} [\bar{a}_i, \bar{a}_{w_2+i}]$ и, следовательно, любую его степень, отличную от единицы, нельзя записать в виде произведения меньше чем w_2 коммутаторов. Лемма доказана.

Следствие 2. Если $w_1 < w_2$, то квазитождество

$$\Phi_{t, w_1} = (\forall x_0) \dots (\forall x_{2w_1}) \left(x_0^{p^t} \prod [x_i, x_{w_1+i}] = 1 \rightarrow x_0^{p^t} = 1 \right)$$

истинно в группе $C_p^s(w_2)$.

§ 2. Группа H_{rm}

Зафиксируем квазимногообразия $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$. Предполагаем, что $\mathcal{M}$ порождается множеством конечных групп, в каждой из которых коммутирование на нецентральных элементах транзитивно. Кроме того, полагаем, что группы Z_{p^k} , $Z_p * Z_p$, принадлежат $\mathcal{M}$.

Если существует конечная группа из $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$, заданная в $\mathcal{R}_{p^k}$ представлением, в котором все определяющие слова — элементы из коммутанта свободной группы (т. е. коммутаторные слова), то фиксируем группу $G \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ с наименьшим числом таких соотношений. Если такой группы в $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ не существует, то в качестве фиксированной группы G берем конечную группу из $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$, в которой число соотношений в ее представлении (относительно $\mathcal{R}_{p^k}$) из формулировки леммы 3 наименьшее.

Итак, G порождается элементами $x_1, \dots, x_n$ и задается в $\mathcal{R}_{p^k}$ определяющими соотношениями $r_1 = 1, \dots, r_s = 1$, где

$$r_1 = x_1^{p^{n_1}} w_1, \dots, r_d = x_d^{p^{n_d}} w_d,$$

$$r_{d+1} = [x_{f(d+1)}, x_{g(d+1)}] w_{d+1}, \dots, r_s = [x_{f(s)}, x_{g(s)}] w_s,$$

$n_1, \dots, n_d$ — натуральные числа, отличные от нуля и меньшие k , $w_1, \dots, w_s$ — элементы из коммутанта свободной группы.

Будем говорить, что группа G обладает свойством (P_1) , если r_1 не принадлежит коммутанту свободной группы, и G имеет свойство (P_2) , если все ее определяющие соотношения — элементы коммутанта свободной группы (т. е. коммутаторные слова). Отметим, что если G обладает свойством (P_2) , то ее определяющие соотношения имеют вид

$$[x_{f(1)}, x_{g(1)}] w_1 = 1, [x_{f(2)}, x_{g(2)}] w_2 = 1, \dots, [x_{f(s)}, x_{g(s)}] w_s = 1.$$

Можно и будем считать, что коммутатор $[x_{f(i)}, x_{g(i)}]$ входит в ненулевой степени только в слово r_i .

Возьмем произвольный неединичный элемент $v \in \mathcal{M}(G)$. Поскольку $G/G' \in \mathcal{M}$, то $\mathcal{M}(G) \subseteq G'$. Если коммутатор $[x_{f(i)}, x_{g(i)}]$ входит в v в ненулевой степени, то его можно исключить из записи элемента v при помощи определяющего соотношения $r_i = 1$. Таким образом, фиксируем элемент $v \in \mathcal{M}(G)$, $v \neq 1$, $v = \prod_{i=1}^q [x_{h(i)}, x_{h(q+i)}]^{\gamma_i}$, $\gamma_i \not\equiv 0 \pmod{p}$ ($i = 1, \dots, q$), в запись которого входят коммутаторы $[x_{f(i)}, x_{g(i)}]$ в нулевой степени ($i = d+1, \dots, s$).

Пусть $H_{rm}(w)$ — группа (как правило, будем обозначать ее через H_{rm}), заданная в $\mathcal{R}_{p^k}$ порождающими $x_1, \dots, x_n$, a_{jl}, b_{jt} ($j = 1, \dots, 2r$; $l = 1, \dots, 2m$, $t = 1, \dots, 2w$) и следующими определяющими соотношениями:

- (i) все соотношения группы A_{rm} ;
- (ii) $r_1 c_1 = 1$;
- (iii) если группа G обладает свойством (P_1) , то в каждом коммутаторе $[x_{h(i)}, x_{h(q+i)}]$ ($i = 1, \dots, q$) фиксируем ровно один элемент (это $x_{h(i)}$ либо $x_{h(q+i)}$), отличный от x_1 (обозначим его через $\bar{x}_i$), и вводим соотношения: $[\bar{x}_i, b_{tj}] = 1$, $[\bar{x}_i, b_{t, w+j}] = 1$ для всех $j = 1, \dots, w$ и для всех t таких, что $t \equiv i \pmod{q}$; если группа G обладает свойством (P_2) , то вводим соотношения: $[x_{h(i)}, b_{tj}] = 1$, $[x_{h(q+i)}, b_{tj}] = 1$ для всех $j = 1, \dots, w$ и для всех t таких, что $t \equiv i \pmod{q}$;
- (iv) $r_2 = 1, \dots, r_s = 1$.

Напомним, что $c_1 = \prod_{j=1}^w [b_{1j}, b_{1,w+j}] \prod_{j=1}^m [a_{1j}, a_{1,m+j}]$ — слово из определения группы A_{rm} . Определение группы H_{rm} зависит от того, каким из свойств (P_1) либо (P_2) обладает группа G .

Элемент $\prod_{i=1}^q [x_{h(i)}, x_{h(q+i)}]^{\gamma_i} \in H_{rm}$ снова будем обозначать через v .

Через H всюду в работе будем обозначать группу, имеющую в $\mathcal{R}_{p^k}$ представление $H = \langle x_1, \dots, x_n; r_2 = 1, \dots, r_s = 1 \rangle$.

Лемма 8. *Справедливо следующее: $H \in \mathcal{M}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $H/\langle r_1 \rangle \cong G$, поэтому $H/\langle r_1 \rangle \in \mathcal{N}$. Пусть $\langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^k . По лемме 1 отображение $x_1 \rightarrow a, x_i \rightarrow 1$ ($i \geq 2$) продолжаемо до гомоморфизма $\varphi : H \rightarrow \langle a \rangle \in \mathcal{N}$, при этом $r_1^\varphi = a^{p^{n_1}}$. Группы $\langle r_1 \rangle, \langle a^{p^{n_1}} \rangle$ имеют одинаковые порядки, равные p^{k-n_1} , поэтому φ отображает $\langle r_1 \rangle$ на $\langle a^{p^{n_1}} \rangle$ изоморфно. (Если G обладает свойством (P_2) , то рассматриваем отображение φ , при котором $x_{f(1)} \rightarrow a \in F_2, x_{g(1)} \rightarrow b \in F_2, x_i \rightarrow 1$ при $i \notin \{x_{f(1)}, x_{g(1)}\}$.) Видим, что $\langle r_1 \rangle \cap \ker \varphi = 1$. Значит, группа H вложима в группу $H/\langle r_1 \rangle \times H/\ker \varphi \in \mathcal{N}$. Поскольку определяющих соотношений у H меньше, чем у G , то из выбора G получаем, что $H \in \mathcal{M}$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если для некоторого w_1 ($1 \leq w_1 < w$) группы $C_p^1(w_1), C_p^2(w_1), \dots, C_p^{k-1}(w_1)$ принадлежат $\mathcal{M}$, то $H_{rm}(w) \in \mathcal{M} \vee qG$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$H_{rm}/\langle c_1 \rangle \cong (G * A_{rm}/\langle c_1 \rangle)/N,$$

где $N = \langle [\bar{x}_i, b_{tj}], [\bar{x}_i, b_{t,w+j}] \mid i = 1, \dots, q, \text{ все } t \equiv i \pmod{q}, j = 1, \dots, w \rangle$ либо $N = \langle [x_{h(i)}, b_{tj}], [x_{h(q+i)}, b_{tj}] \mid i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, w, \text{ все } t \equiv i \pmod{q} \rangle$, если G обладает свойством (P_1) либо (P_2) соответственно.

По лемме 4 (примененной к квазимногообразию $\mathcal{M} \vee qG$) $H_{rm}/\langle c_1 \rangle \in \mathcal{M} \vee qG$. Теперь достаточно построить гомоморфизм $\varphi : H_{rm} \rightarrow M$ в подходящую группу $M \in \mathcal{M}$ такой, что $c_1^\varphi \neq 1$.

Если G обладает свойством (P_1) , то берем $M = C_p^{n_1}(w_1) \in \mathcal{M}$. Полагаем $x_1^\varphi = a_0, (b_{tj})^\varphi = a_j, (b_{t,w+j})^\varphi = a_{w_1+j}$ для $j = 1, \dots, w_1$ и для всех t . Образы остальных порождающих считаем равными единице. Поскольку $\bar{x}_i^\varphi = 1$ при каждом i , видим, что применима лемма 1, по которой отображение φ продолжаемо до гомоморфизма (который снова обозначим буквой φ) группы H_{rm} на группу $C_p^{n_1}(w_1)$, при этом $c_1^\varphi = \prod_{i=1}^{w_1} [a_i, a_{w_1+i}] \neq 1$.

Если G обладает свойством (P_2) , то берем $M = F_2 = \langle a, b \rangle \in \mathcal{M}$ и полагаем $x_{f(1)}^\varphi = a, x_{g(1)}^\varphi = b$. Если соотношение $[x_{f(1)}, b_{l1}] = 1$ или соотношение $[x_{g(1)}, b_{u1}] = 1$ присутствует среди определяющих соотношений группы H_{rm} , то полагаем $b_{l1}^\varphi = a, b_{l,w+1}^\varphi = b^{-1}$ или $b_{u1}^\varphi = b, b_{u,w+1}^\varphi = a$ соответственно. Если ни одно из соотношений $[x_{f(1)}, b_{t1}] = 1, [x_{g(1)}, b_{t1}] = 1$ не присутствует в списке (iii), то полагаем $b_{t1}^\varphi = a, b_{t,w+1}^\varphi = b^{-1}$ для всех t . Образы остальных порождающих считаем равными единице. Поскольку коммутатор $[x_{f(1)}, x_{g(1)}]$ не входит в запись v , соотношения $[x_{f(1)}, b_{l1}] = 1, [x_{g(1)}, b_{l1}] = 1$ не могут одновременно присутствовать в списке определяющих соотношений группы H_{rm} . Это означает, что отображение φ определено корректно. По лемме 1 это отображение продолжаемо до гомоморфизма (который снова обозначим буквой φ) на F_2 , при этом $c_1^\varphi = [a, b]^{-1} \neq 1$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 9 следует, что если группа G задана только коммутаторными определяющими соотношениями, то предположение о наличии в $\mathcal{M}$ групп $C_p^1(w_1), C_p^2(w_1), \dots, C_p^{k-1}(w_1)$ лишнее. В этом случае имеет место

Следствие 3. Если группа G задана в $\mathcal{R}_{p^k}$ только коммутаторными определяющими соотношениями и $Z_{p^k}, Z_p * Z_p \in \mathcal{M}$, то $H_{rm} \in \mathcal{M} \vee qG$.

Лемма 10. Пусть R — любая группа из $\mathcal{M}$, $\varphi : H_{rm} \rightarrow R$ — произвольный гомоморфизм и $r \geq q$. Тогда $v^\varphi = 1$, где $v = \prod_{i=1}^q [x_{h(i)}, x_{h(q+i)}]^{\gamma_i} \in H_{rm}$. В частности, $H_{rm} \notin \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $v^\varphi \neq 1$. Поскольку $\mathcal{M}$ порождается группами, в которых коммутирование на нецентральных элементах транзитивно, по признаку принадлежности (лемма 2) существует гомоморфизм ψ группы R в некоторую такую группу, при котором $v^{\varphi\psi} \neq 1$. Ввиду этого можно и будем считать, что коммутирование на нецентральных элементах группы R транзитивно.

Так как $v^\varphi \neq 1$, найдется число i ($1 \leq i \leq q$) такое, что $[x_{h(i)}, x_{h(q+i)}]^\varphi \neq 1$. В частности, $\bar{x}_i^\varphi \notin Z(R)$. Поскольку в группе H_{rm} имеют место соотношения

$$[\bar{x}_i, b_{tj}] = 1, \quad [\bar{x}_i, b_{t,w+j}] = 1 \quad (t \equiv i \pmod{q}, j = 1, \dots, w)$$

и коммутирование транзитивно на нецентральных элементах, получим

$$[b_{tj}, b_{t,w+j}]^\varphi = 1 \quad (t \equiv i \pmod{q}, j = 1, \dots, w).$$

В случае, когда G обладает свойством (P_2) , из соотношений

$$[x_{h(i)}, x_{h(q+i)}]^\varphi \neq 1, \quad [x_{h(i)}, b_{tj}]^\varphi = 1,$$

$$[x_{h(q+i)}, b_{tj}]^\varphi = 1 \quad (t \equiv i \pmod{q}, j = 1, \dots, w)$$

и транзитивности коммутирования на нецентральных элементах следует, что $b_{tj}^\varphi \in Z(R)$, откуда также

$$[b_{tj}, b_{t,w+j}]^\varphi = 1 \quad (t \equiv i \pmod{q}, j = 1, \dots, w).$$

Допустим, что существует l такое, что $[a_{il}, a_{i,m+l}]^\varphi \neq 1$. Возьмем любой коммутатор $[a_{tf}, a_{t,m+f}]^\varphi$ ($t \neq i$). Из определяющих соотношений группы A_{rm} следует, что элементы, входящие в разные коммутаторы, перестановочные. Транзитивность коммутирования теперь влечет, что $[a_{tf}, a_{t,m+f}]^\varphi = 1$. Вышеизложенное означает, что

$$\prod_{j=1}^m [a_{tj}, a_{t,m+j}]^\varphi = 1 \quad \text{при } t \equiv i \pmod{q} \quad (t \neq i),$$

т. е. $c_1^\varphi = 1$.

Если $[a_{il}, a_{i,m+l}]^\varphi = 1$ при любом l , то также получаем, что $c_1^\varphi = 1$. Итак, доказано, что $c_1^\varphi = 1$.

Пусть $\psi : H_{rm} \rightarrow H_{rm}/\langle c_1 \rangle$ — естественный гомоморфизм. Поскольку $\langle c_1 \rangle \subseteq \ker \varphi$, существует гомоморфизм $\xi : H_{rm}/\langle c_1 \rangle \rightarrow R$ такой, что $\varphi = \psi\xi$, в частности, $(g\langle c_1 \rangle)^\xi = g^\varphi$ для каждого элемента $g\langle c_1 \rangle \in H_{rm}/\langle c_1 \rangle$. При доказательстве леммы 9 заметили, что $H_{rm}/\langle c_1 \rangle \cong (G * A_{rm}/\langle c_1 \rangle)/N$. Это, в частности, означает, что $\langle x_1, \dots, x_n \rangle^\psi \cong G$. Так как $v^\psi \in \mathcal{M}(G)$, заключаем, что $v^{\psi\xi} = 1$, т. е. $v^\varphi = 1$. Лемма доказана.

Обозначим через B_{rm} группу, заданную в $\mathcal{R}_{p^k}$ порождающими

$$a_{jl}, b_{jt} \quad (j = 1, \dots, 2r; \quad l = 1, \dots, 2m, \quad t = 1, \dots, 2w), \quad x_1, \dots, x_n$$

и определяющими соотношениями (это часть определяющих соотношений группы H_{rm})

$$(i') \quad [a_{li}, a_{tj}] = 1 \text{ для всех } l, j, t, i \text{ таких, что } l \neq t,$$

(ii') $[x_i, b_{tj}] = 1, [\bar{x}_i, b_{t, w+j}] = 1$ для всех t таких, что $t \equiv i \pmod{q}$ ($j = 1, \dots, w, i = 1, \dots, q$), если группа G обладает свойством (P_1) , и $[x_{h(i)}, b_{tj}] = 1, [x_{h(q+i)}, b_{tj}] = 1$ для всех t таких, что $t \equiv i \pmod{q}$ ($j = 1, \dots, w, i = 1, \dots, q$), если группа G обладает свойством (P_2) ;

$$(iii') \quad r_2 = 1, \dots, r_s = 1.$$

Пусть $c_t = \prod_{j=1}^w [b_{tj}, b_{t, w+j}] \prod_{j=1}^m [a_{tj}, a_{t, m+j}] \in B_{rm}$ и

$$N_{rm} = \langle r_1 c_1, c_1 c_2^{-1}, \dots, c_1 c_{2r}^{-1} \rangle$$

— подгруппа группы B_{rm} . Ясно, что $H_{rm} \cong B_{rm}/N_{rm}$.

Лемма 11. $B_{rm} \in \mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа B задана в $\mathcal{R}_{p^k}$ порождающими a_{jl}, b_{jt} ($j = 1, \dots, 2r; \quad l = 1, \dots, 2m, \quad t = 1, \dots, 2w$) и определяющими соотношениями $[a_{lj}, a_{ti}] = 1$ для всех l, j, t, i таких, что $l \neq t$ (это часть определяющих соотношений группы B_{rm}). По лемме 4 $B \in \mathcal{M}$. Как легко заметить, $B_{rm} = (H * B)/N$, где

$$N = \langle [\bar{x}_i, b_{tj}], [\bar{x}_i, b_{t, w+j}] \mid t \equiv i \pmod{q} \quad (i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, w) \rangle,$$

если G обладает свойством (P_1) , и

$$N = \langle [x_{h(i)}, b_{tj}], [x_{h(q+i)}, b_{tj}] \mid t \equiv i \pmod{q} \quad (i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, w) \rangle,$$

если G обладает свойством (P_2) .

По лемме 8 $H \in \mathcal{M}$, следовательно, по лемме 4 $B_{rm} \in \mathcal{M}$. Лемма доказана.

Лемма 12. Пусть B — l -порожденная подгруппа группы B_{rm} . Если $m > C_l^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, то $\Phi(B) \cap N_{rm} = 1$, где $\Phi(B)$ — подгруппа Фраттини группы B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \Phi(B) \cap N_{rm}$, $g \neq 1$. Поскольку $\Phi(B) = B^p B'$, элемент g можно представить в виде $g = g_1^p c$ для некоторых элементов $g_1 \in B$, $c \in B'$. Так как B — l -порожденная группа, $B' = C_l^2$ -порожденная группа, следовательно, элемент c можно записать в виде произведения C_l^2 коммутаторов. Таким образом, элемент g имеет вид

$$g = g_1^p \prod_{i=1}^{C_l^2} [f_i, f_{C_l^2+i}].$$

Так как $g \in N_{rm}$, то g можно записать следующим образом:

$$g = (r_1 c_1)^{t_1} \prod_{i=2}^{2r} (c_1 c_i^{-1})^{t_i}.$$

Следовательно, g можно представить так:

$$g = r_1^{t_1} c_1^{t_1+t_2+\dots} \prod_{i=2}^{2r} c_i^{-t_i}.$$

Поскольку $g \neq 1$, видим, что некоторый элемент c_i (пусть для удобства это c_1) входит в g в ненулевой степени. Пусть $F_{2m} = \langle y_1, \dots, y_{2m} \rangle$ — свободная $\mathcal{R}_{p^k}$ -группа ранга $2m$, $\pi : B_{rm} \rightarrow F_{2m}$ — гомоморфизм, при котором $(a_{11})^\pi = y_1, \dots, (a_{1,2m})^\pi = y_{2m}$, образы остальных порождающих группы B_{rm} равны 1 (существование такого гомоморфизма следует из леммы 1). Отсюда выводим, что

$$(g_1^\pi)^p \prod_{i=1}^{C_l^2} [f_i^\pi, f_{C_l^2+i}^\pi] = \prod_{j=1}^m [(a_{1j})^\pi, (a_{1,m+j})^\pi]^{t_1+t_2+\dots}.$$

Так как в F_{2m} истинны квазитождества

$$(\forall x)(\forall x_1) \dots (\forall x_{2n}) \left(x^p \prod_{i=1}^n [x_i, x_{n+i}] = 1 \rightarrow x^p = 1 \right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

получаем в F_{2m} следующее равенство:

$$\prod_{i=1}^{C_l^2} [f_i^\pi, f_{C_l^2+i}^\pi] = \prod_{j=1}^m [y_j, y_{m+j}]^{t_1+t_2+\dots}.$$

Это противоречит [16, теорема 4.2.3] (см. также [6, лемма 3]) тому, что элемент $\prod_{j=1}^m [y_j, y_{m+j}]$ и, следовательно, всякую его неединичную степень нельзя в F_{2m} записать в виде произведения меньшего чем m числа коммутаторов. Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть A — l -порожденная подгруппа группы H_{rm} . Если $m > C_l^2$, то $A \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $\varphi : B_{rm} \rightarrow H_{rm}$ — естественный гомоморфизм с ядром N_{rm} , B — произвольный минимальный прообраз группы A при гомоморфизме φ . (Аналогичный прием применялся в [20].) Покажем, что $B \cap N_{rm} \leq \Phi(B)$.

Предположим, что это не так. Тогда $B \cap N_{rm} \not\leq M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы B . Отсюда $B = (B \cap N_{rm})M$. Поскольку $(B \cap N_{rm})^\varphi = 1$, получаем, что $M^\varphi = A$. Это противоречит минимальности прообраза. Итак, $B \cap N_{rm} \leq \Phi(B)$.

По лемме 12 $B \cap N_{rm} = 1$, значит, $B \cong A$. Осталось воспользоваться леммой 11, из которой следует, что $B \in \mathcal{M}$. Лемма доказана.

Смысл достаточно громоздких неравенств в лемме 14 следующий: числа, в ней встречающиеся «достаточно большие» или «одно намного больше другого» и $l = n + 4rm + 4rw$ — число порождающих группы H_{rm} , $n + 4wq + 4q$ — число порождающих группы H_{q1} .

Лемма 14. Пусть $\varphi : H_{rm} \rightarrow H_{xy}$ — гомоморфизм, причем $y > C_{n+4wq+4q}^2$, $f = 2^{|H_{xy}|}$. Положим $l = n + 4rm + 4rw$. Если $r > 4mqf$ либо $y > C_l^2$, то $v^\varphi = 1$, где $v = \prod_{i=1}^q [x_{h(i)}, x_{h(q+i)}]^{\gamma_i}$ и q — число коммутаторов в этом разложении.

Доказательство. Пусть сначала $y > C_l^2$. Поскольку группа H_{rm} является l -порожденной, H_{rm}^φ также порождается l элементами. Из леммы 13 следует, что $H_{rm}^\varphi \in \mathcal{M}$. В силу леммы 10 $v^\varphi = 1$.

Предполагаем теперь, что $r > 4mqf$. Наша цель — построить гомоморфизм $\psi : H_{q1} \rightarrow H_{xy}$ такой, что $v^\psi = v^\varphi$. Отметим, что f больше числа подгрупп группы H_{xy} . Для каждого i ($1 \leq i \leq q$) рассмотрим следующие подгруппы группы H_{rm} :

$$B_i = \langle a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,2m} \rangle.$$

Отметим, что подгруппы B_i, B_j при $i \neq j$ перестановочны.

Пусть

$$C_t = B_t B_{t+q}, B_{t+2q} \dots B_{t+(2f-1)q} \quad (t = 1, 2, \dots, q).$$

Существование всех этих групп B_i и C_t следует из неравенства $r > 4mqf$.

Исследуем C_t^φ . Поскольку число групп $B_t^\varphi, B_{t+q}^\varphi, B_{t+2q}^\varphi, \dots, B_{t+(f-1)q}^\varphi$ равно f , а число подгрупп группы H_{xy} меньше f , то некоторые из этих подгрупп совпадают. Пусть $B_{t+qi}^\varphi = B_{t+qj}^\varphi$ ($i < j$). Из равенства $[B_{t+qi}, B_{t+qj}] = 1$ следует

$$1 = [B_{t+qi}^\varphi, B_{t+qj}^\varphi] = [B_{t+qi}^\varphi, B_{t+qi}^\varphi],$$

т. е. группа B_{t+qi}^φ абелева. Поэтому

$$c_1^\varphi = \prod_{u=1}^w [b_{t+qi,u}, b_{t+qi,w+u}]^\varphi \prod_{u=1}^m [a_{t+qi,u}, a_{t+qi,m+u}]^\varphi = \prod_{u=1}^w [b_{t+qi,u}, b_{t+qi,w+u}]^\varphi.$$

Введем обозначения: $d_{tj} = b_{t+qi,j}^\varphi$ ($j = 1, \dots, 2w$).

Сначала предположим, что G обладает свойством (P_1) . Поскольку

$$[\bar{x}_t, b_{t+qi,1}] = 1, \quad [\bar{x}_t, b_{t+qi,w+1}] = 1,$$

то

$$[\bar{x}_t^\varphi, d_{tj}] = 1 \quad (j = 1, \dots, 2w).$$

Аналогично, рассматривая подгруппы $B_{t+f}^\varphi, B_{t+(f+1)q}^\varphi, B_{t+(f+2)q}^\varphi, \dots, B_{t+(2f-1)q}^\varphi$ группы C_t^φ , найдем элементы, обозначаемые через $d_{t+q,j}$ ($j = 1, \dots, 2w$), из какой-нибудь из этих групп такие, что $[\bar{x}_t^\varphi, d_{t+q,j}] = 1$ ($j = 1, \dots, 2w$).

Пусть G обладает свойством (P_2) . Так как

$$[x_{h(i)}, b_{t+qi,1}] = 1, \quad [x_{h(q+i)}, b_{t+qi,1}] = 1,$$

то

$$[x_{h(i)}^\varphi, d_{tj}] = 1, \quad [x_{h(q+i)}^\varphi, d_{tj}] = 1 \quad (j = 1, \dots, 2w).$$

Аналогично

$$[x_{h(i)}^\varphi, d_{t+q,j}] = 1, \quad [x_{h(q+i)}^\varphi, d_{t+q,j}] = 1 \quad (j = 1, \dots, 2w).$$

В обоих случаях

$$c_1^\varphi = \prod_{u=1}^w [d_{t+q,u}, d_{t+q,w+u}].$$

Отсюда

$$\prod_{u=1}^w [d_{t,u}, d_{t,w+u}] = \prod_{u=1}^w [d_{t+q,u}, d_{t+q,w+u}].$$

Воспользуемся леммой 1, по которой отображение

$$b_{tj} \rightarrow d_{tj}, \quad b_{t+q,j} \rightarrow d_{t+q,j} \quad (t = 1, \dots, q, j = 1, \dots, 2w),$$

$$x_i \rightarrow x_i^\varphi \quad (i = 1, \dots, n), \quad a_{ij} \rightarrow 1$$

продолжаемо до гомоморфизма $\psi : H_{q1} \rightarrow H_{xy}$. Видим, что $v^\psi = v^\varphi$. Так как H_{q1} порождается $n + 4wq + 4q$ элементами и $y > C_{n+4wq+4q}^2$, по лемме 13 $H_{q1}^\psi \in \mathcal{M}$. В силу леммы 10 $v^\psi = 1$, откуда $v^\varphi = 1$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — квазимногообразия групп, $\mathcal{M}$ порождается конечными группами, коммутирование на нецентральных элементах в которых транзитивно, $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$. Предположим, что $Z_p *_{\mathcal{R}_{p^k}} Z_p \in \mathcal{M}$ и для некоторого w_1 группы $C_p^1(w_1), C_p^2(w_1), \dots, C_p^{k-1}(w_1)$ принадлежат $\mathcal{M}$. Тогда промежуток $[\mathcal{M}, \mathcal{N}]$ в решетке квазимногообразий групп континуален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем конечную группу $G \notin \mathcal{M}$, $G \in \mathcal{N}$. Предполагаем, что среди групп из $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ группа G задана наименьшим числом определяющих соотношений (относительно $\mathcal{R}_{p^k}$) таких, как в лемме 3.

Будем строить счетную последовательность групп $H_1, H_2, \dots$, содержащихся в $\mathcal{N}$. Фиксируем любое число w ($w \geq w_1$). Во всех в дальнейшем рассматриваемых группах H_{rm} присутствует это w . В качестве H_1 берем произвольную группу H_{rm} из $\mathcal{M} \vee qG$. Пусть группа H_{i-1} уже построена. В качестве H_i берем группу $H_{r_i m_i}$ такую, что

- 1) при любом гомоморфизме группы H_i в группу H_j ($j < i$) образ элемента v равен единице;
- 2) если q_{i-1} — число порождающих группы H_{i-1} , то всякая q_{i-1} -порожденная подгруппа группы H_i принадлежит квазимногообразию $\mathcal{M}$ (существование H_i вытекает из лемм 13, 14).

Пусть $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел. Для подмножества $I \subseteq \mathbf{N}$ пусть $\mathcal{M}_I = q\{H_i \mid i \in I\}$ — квазимногообразие, порожденное всеми группами H_i ($i \in I$). Если $H_i \in \mathcal{M}_I$ ($i \notin I$), то по признаку принадлежности (лемма 2) группа H_i аппроксимируется группами из множества $\{H_i \mid i \in I\}$, что противоречит леммам 13, 14. Поэтому $H_i \notin \mathcal{M}_I$ при $i \notin I$, откуда получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Присутствие групп $C_p^1(w_1), C_p^2(w_1), \dots, C_p^{k-1}(w_1)$ в $\mathcal{M}$ нужно только в лемме 9. Если группа G из доказательства теоремы 1 задана только коммутаторными определяющими соотношениями, то вместо леммы 9 можно воспользоваться следствием 3. Следствием доказательства теоремы 1 является

Теорема 2. Пусть квазимногообразие $\mathcal{M}$ порождается конечными группами, коммутирование на нецентральных элементах в которых транзитивно, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$. Предположим, что $Z_{p^k}, Z_p *_{\mathcal{R}_{p^k}} Z_p \in \mathcal{M}$. Если группу $G \notin \mathcal{M}$ можно задать в $\mathcal{R}_{p^k}$ только коммутаторными определяющими соотношениями, то промежуток $[\mathcal{M}, \mathcal{M} \vee qG]$ в решетке квазимногообразий групп континуален.

Теорема 3. Множество подквазимногообразий $\mathcal{R}_{p^k}$ ($k \geq 2$), порожденных конечной группой и не имеющих независимых базисов квазитождеств, бесконечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M}_w$ — квазимногообразие, порожденное группами $C_p^t(w)$ ($t = 1, \dots, k-1$), $Z_p * Z_p$, т. е. $\mathcal{M}_w = q\left(\left(\prod_{t=1}^{k-1} C_p^t(w)\right) \times (Z_p * Z_p)\right)$. При $w_1 < w_2$ квазитождество Φ_{t, w_1} ложно в $C_p^t(w_1)$ и по следствию 2 истинно в каждой $C_p^s(w_2)$, значит, $\mathcal{M}_{w_1} \neq \mathcal{M}_{w_2}$ при $w_1 < w_2$.

Если предположить, что $\mathcal{M}_w$ имеет независимый базис квазитождеств, то, как известно [17, предложение 6.3.1], $\mathcal{M}_w$ имеет покрытие в решетке $L_q(\mathcal{K})$ квазимногообразий, содержащихся в $\mathcal{K}$, для любого конечно аксиоматизируемого квазимногообразия $\mathcal{K}$, содержащего $\mathcal{M}_w$. Но по теореме 1 любой промежуток $[\mathcal{M}_w, \mathcal{N}]$ континуален при $\mathcal{M}_w \subsetneq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}_{p^k}$, следовательно, $\mathcal{M}_w$ не имеет покрытий в $L_q(\mathcal{R}_{p^k})$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Будкин А. И. Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий групп // Мат. заметки. 1982. Т. 40, № 6. С. 817–826.
2. Будкин А. И. Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий обобщенно разрешимых групп // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 3. С. 249–266.
3. Медведев Н. Я. О квазимногообразиях Z -групп и групп // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 5. С. 111–117.
4. Будкин А. И. О квазимногообразиях групп, не имеющих покрытий // Мат. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 609–616.
5. Федоров А. Н. Квазитождества свободной 2-нильпотентной группы // Мат. заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 590–597.
6. Федоров А. Н. О подквазимногообразиях nilпотентных минимальных неабелевых многообразий групп // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 6. С. 117–131.
7. Shakhova S. A. On the lattice of quasivarieties of nilpotent groups of class 2 // Sib. Adv. Math. 1997. V. 7, N 3. P. 98–125.
8. Кравченко А. В., Нуракунов А. М., Швидефски М. В. О строении решеток квазимногообразий. I. Независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 6. С. 684–710.
9. Кравченко А. В., Нуракунов А. М., Швидефски М. В. О строении решеток квазимногообразий. II. Неразрешимые проблемы // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 2. С. 179–199.
10. Adams M. E., Dziobiak W. Q-universal quasivarieties of algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120, N 4. P. 1053–1059.
11. Sapir M. V. The lattice of quasivarieties of semigroups // Algebra Univers. 1985. V. 21, N 2/3. P. 172–180.
12. Шахова С. А. О квазимногообразии, порожденном конечной p -группой // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 1. С. 144–148.
13. Шахова С. А. К вопросу о мощности решетки квазимногообразий nilпотентных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 368–375.
14. Будкин А. И. О решетке квазимногообразий nilпотентных групп // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 25–36.
15. Будкин А. И. О квазимногообразиях, содержащих nilпотентные группы без кручения // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 6. С. 629–650.
16. Будкин А. И. Квазимногообразия групп. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2002.
17. Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
18. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
19. Федоров А. Н. Квазитождества конечных 2-нильпотентных групп. Деп. в ВИНТИ. М., 1987. № 5489–В87.
20. Ольшанский А. Ю. Условные тождества в конечных группах // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1409–1413.

Поступила в редакцию 24 января 2020 г.

После доработки 5 мая 2020 г.

Принята к публикации 17 июня 2020 г.

Будкин Александр Иванович
Алтайский государственный университет,
ул. Ленина, 61, Барнаул 656064
budkin@math.asu.ru