A. Yu. Vesnin, M. E. Ivanov, The polynomials of prime virtual knots of genus 1 and complexity at most 5, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1247–1256

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.604>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.90.164.192

April 26, 2023, 08:25:43

УДК 515.162.8

ПОЛИНОМЫ ПРОСТЫХ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ РОДА ОДИН И СЛОЖНОСТИ НЕ БОЛЕЕ ПЯТИ

А. Ю. Веснин, М. Э. Иванов

Аннотация. Простые виртуальные узлы рода один, допускающие диаграммы с не более, чем пятью классическими перекрестками, были классифицированы А. А. Акимовой и С. В. Матвеевым в 2017 г. В 2018 г. К. Каур, М. Прабхакар и А. Веснин ввели семейства L - и F -полиномов виртуальных узлов, обобщающие аффинный индексный полином Кауффмана. В работе вводится понятие вполне плоско-тривиального виртуального узла. Доказывается, что для таких узлов L - и F -полиномы совпадают с аффинным индексным полиномом. Устанавливается, что все узлы Акимовой и Матвеева вполне плоско-тривиальны, и вычисляются их аффинные индексные полиномы.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.604

Ключевые слова: виртуальный узел, узел в утолщенном торе, аффинный индексный полином.

Введение

Табулирование виртуальных узлов и построение их инвариантов относятся к центральным проблемам современной топологии малых размерностей. Таблицы виртуальных узлов с малым количеством классических перекрестков можно найти в [1] и на электронном ресурсе [2]. В силу эквивалентности теории виртуальных узлов и теории узлов в утолщенных поверхностях представляет интерес перечисление узлов в трехмерных многообразиях, являющихся утолщениями поверхностей заданного рода. К настоящему времени имеется лишь несколько результатов в этом направлении. В данной работе мы будем рассматривать простые виртуальные узлы рода один, допускающие диаграммы с малым числом классических перекрестков, которые перечислялись А. А. Акимовой и С. В. Матвеевым в [3].

Нас будет интересовать поведение некоторых полиномиальных инвариантов на классе узлов Акимовой — Матвеева. Напомним, что в [4] Кауффман определил инвариант виртуального узла — аффинный индексный полином, который обладает важными свойствами [5]. В [6] предложены обобщения аффинного индексного полинома, а именно были определены семейства полиномов $\{L_K^n(t, \ell)\}_{n=1}^{\infty}$ от переменных t и ℓ , названных L -полиномами, и семейство полиномов $\{F_K^n(t, \ell)\}_{n=1}^{\infty}$, названных F -полиномами. Ранее в [7], используя разработанные программные средства, авторы вычислили F -полиномы для виртуальных узлов, табулированных в [1, 2]. В данной работе исследуются полиномиальные инварианты для узлов в утолщенном торе, построенных в [3].

Работа выполнена при поддержке лаборатории топологии и динамики Новосибирского государственного университета (грант 14.Y26.31.0025 Министерства образования и науки Российской Федерации).

© 2020 Веснин А. Ю., Иванов М. Э.

Рис. 1. Классические движения Рейдемейстера.

Рис. 2. Виртуальные движения Рейдемейстера.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 1 напоминаются основные определения и факты, которые будут использованы в дальнейшем. В разд. 2 вводится понятие вполне плоско-тривиального виртуального узла и устанавливается, что для таких узлов L - и F -полиномы сводятся к аффинному индексному полиному (лемма 2.2). В разд. 3 исследуются полиномиальные инварианты узлов Акимовой — Матвеева, диаграммы которых приведены в табл. 1 и 2. В теореме 3.1 устанавливается, что эти узлы вполне плоско-тривиальны, а в следствии 3.2 и табл. 2 приводятся их аффинные индексные полиномы. Исследование свойств узлов Акимовой — Матвеева привело авторов к следующей гипотезе, содержащейся в первоначальной версии статьи: каждый виртуальный узел рода один является вполне плоско-тривиальным.

Авторы признательны В. В. Таркаеву, который обратил наше внимание на то, что верность гипотезы следует из [8].

1. Основные определения

Виртуальные узлы и зацепления введены Кауффманом в [9] как естественное обобщение классических узлов. Диаграммы виртуальных узлов могут содержать как классические, так и виртуальные перекрестки. Два виртуальных узла эквивалентны тогда и только тогда, когда диаграмму одного можно перевести в диаграмму другого при помощи конечной последовательности преобразований, каждое из которых является классическим движением Рейдемейстера (движения RI, RII, RIII на рис. 1) или виртуальным движением Рейдемейстера (движения VRI, VRII, VRIII и SV на рис. 2).

Диаграмму, полученную из диаграммы виртуального узла забыванием информации о проходах/переходах в классических перекрестках, будем называть *диаграммой плоского виртуального узла*. Эквивалентность плоских виртуальных узлов определяется относительно *плоских преобразований Рейдемейстера*, которые отличаются от преобразований Рейдемейстера для виртуальных узлов тем, что забывается информация о проходах/переходах в классических перекрестках.

Пусть D — диаграмма ориентированного виртуального узла. Обозначим множество классических перекрестков диаграммы D через $C(D)$. Знак классического перекрестка $c \in C(D)$, обозначаемый через $\text{sgn}(c)$, определяется как на рис. 3.

Рис. 3. Знаки классических перекрестков.

Рис. 4. Раскраска Ченга.

Каждой дуге диаграммы виртуального узла сопоставим целое число так, чтобы для каждого перекрестка выполнялись соотношения, приведенные на рис. 4. В [4] Кауффман доказал, что такая раскраска диаграммы ориентированного виртуального узла, называемая *раскраской Ченга*, всегда существует. Действительно, дуге α из диаграммы D можно сопоставить значение $\lambda(\alpha) = \sum_{c \in O(\alpha)} \text{sgn}(c)$, где $O(\alpha)$ — множество таких перекрестков, которые впервые встречаются как переходы «над», если начинаем движение от дуги α и движемся в соответствии с ориентацией диаграммы.

В [10] Ченг и Гао сопоставили каждому классическому перекрестку c целочисленное значение $\text{Ind}(c)$, которое можно определить следующим образом:

$$\text{Ind}(c) = \text{sgn}(c)(a - b - 1), \quad (1)$$

где a и b задаются раскраской Ченга. Отметим, что раскраска Ченга не учитывает тип классического перекрестка и, по сути, строится для диаграммы плоского ориентируемого виртуального узла. Напомним, что *аффинный индексный полином* из [4] может быть определен следующим образом:

$$P_D(t) = \sum_{c \in C(D)} \text{sgn}(c)(t^{\text{Ind}(c)} - 1), \quad (2)$$

где суммирование ведется по множеству $C(D)$ всех классических перекрестков диаграммы D .

В [11] Сато и Танигучи ввели понятие n -скрученности. Для каждого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ определим n -скрученность $J_n(D)$ диаграммы ориентированного виртуального узла как разность числа положительных и числа отрицательных перекрестков индекса n . Отметим, что $J_n(D)$ представляет собой коэффициент при t^n в аффинном индексном полиноме и является инвариантом ориентированного виртуального узла. Подробнее об n -скрученности см. в [11]. На основе n -скрученности в [6] определен новый инвариант — n -разностная скрученность $\nabla J_n(D)$:

$$\nabla J_n(D) = J_n(D) - J_{-n}(D).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. $\nabla J_n(D)$ — инвариант ориентированного виртуального узла, поскольку $J_n(D)$ является инвариантом ориентированного виртуального узла. Более того, $\nabla J_n(D) = 0$ для любого классического узла.

Как показано в [6], по сути $\nabla J_n(D)$ отражает структуру плоского ориентируемого узла. А именно, имеет место следующий результат.

Лемма 1.2 [6, лемма 2.4]. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ n -разностная скрученность $\nabla J_n(D)$ является инвариантом плоского виртуального узла.

Пусть $\bar{D}$ — диаграмма, полученная из D изменением ориентации на противоположную, а D^* — заменой перекрестков перекрестками противоположного знака.

Лемма 1.3 [6, лемма 2.5]. Пусть D — диаграмма ориентированного виртуального узла. Тогда $\nabla J_n(D^*) = \nabla J_n(D)$ и $\nabla J_n(\bar{D}) = -\nabla J_n(D)$.

Пусть c — классический перекресток. Мы рассматриваем сглаживание по правилу, изображенному на рис. 5. Будем называть такое сглаживание *сглаживанием против ориентации*. Ориентация на D_c индуцируется сглаживанием. Поскольку D — диаграмма виртуального узла, D_c также диаграмма виртуального узла.

Рис. 5. Сглаживание.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 [6]. Пусть D — диаграмма ориентированного виртуального узла K , а n — положительное целое число. Полином $L_K^n(t, \ell)$ узла K определяется следующим образом:

$$L_K^n(t, \ell) = \sum_{c \in C(D)} \text{sgn}(c) (t^{\text{Ind}(c)} \ell^{|\nabla J_n(D_c)|} - \ell^{|\nabla J_n(D)|}). \quad (3)$$

Отметим, что L -полиномы обобщают аффинный индексный полином, поскольку $P_K(t) = L_K^n(t, 1)$ для каждого n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 [6]. Пусть D — диаграмма ориентированного виртуального узла K и n — положительное целое число. Тогда полином $F_K^n(t, \ell)$ определяется следующим образом:

$$F_K^n(t, \ell) = \sum_{c \in C(D)} \text{sgn}(c) t^{\text{Ind}(c)} \ell^{|\nabla J_n(D_c)|} - \sum_{c \in T_n(D)} \text{sgn}(c) \ell^{|\nabla J_n(D_c)|} - \sum_{c \notin T_n(D)} \text{sgn}(c) \ell^{|\nabla J_n(D)|}, \quad (4)$$

где $T_n(D) = \{c \in C(D) : |\nabla J_n(D_c)| = |\nabla J_n(D)|\}$.

Теорема 1.6 [6]. Для каждого целого $n \geq 1$ полиномы $L_K^n(t, \ell)$ и $F_K^n(t, \ell)$ являются инвариантами ориентированного виртуального узла.

2. Вполне плоско-тривиальные виртуальные узлы

Пусть, как и выше, D — диаграмма ориентированного виртуального узла K , а $C(D)$ — множество всех классических перекрестков в D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем называть D *вполне плоско-тривиальной*, если диаграммы, полученные из D и из всех D_c , $c \in C(D)$, забыванием информации о проходах/переходах, плоско-эквивалентны диаграмме тривиального узла. Виртуальный узел K будем называть *вполне плоско-тривиальным*, если он обладает плоско-тривиальной диаграммой.

Лемма 2.2. Пусть виртуальный узел K вполне плоско-тривиален. Тогда

- (1) для всех $n \geq 1$ имеют место $L_K^n(t, \ell) = P_K(t)$ и $F_K^n(t, \ell) = P_K(t)$;
- (2) полином $P_K(t)$ палиндромный.

Доказательство. (1) Пусть D — вполне плоско-тривиальная диаграмма узла K , $C(D)$ — множество ее классических перекрестков и D_c — диаграмма, полученная при сглаживании против ориентации в перекрестке $c \in C(D)$. В силу определения все указанные диаграммы плоско-эквивалентны тривиальному узлу. Ввиду леммы 1.3 имеют место равенства $\nabla J_n(D) = 0$ и $\nabla J_n(D_c) = 0$ для всех $c \in C(D)$. Подставляя эти равенства в формулы (3), (4) и сравнивая с формулой (2), получаем, что $L_K^n(t, \ell) = P_K(t)$ и $F_K^n(t, \ell) = P_K(t)$.

(2) Как отмечено выше, $J_n(D)$ является коэффициентом при t^n в аффинном индексном полиноме. В силу равенства $\nabla J_n(D) = J_n(D) - J_{-n}(D) = 0$ коэффициенты при t^n и t^{-n} совпадают, следовательно, полином $P_K(t)$ палиндромный. $\square$

Напомним следующее свойство аффинного индексного полинома. Обозначим через $\overline{K}$ диаграмму, полученную обращением ориентации на диаграмме K , а через K^* — диаграмму, полученную заменой типа пересечения противоположным во всех классических перекрестках.

Лемма 2.3 [4]. *Имеют место равенства*

$$P_{\overline{K}}(t) = P_K(t^{-1}) \quad \text{и} \quad P_{K^*}(t) = -P_K(t).$$

3. Полиномиальные инварианты узлов Акимовой — Матвеева

Простые узлы в утолщенном торе $T \times I$, произведении двумерного тора T на интервал $I = [0, 1]$, допускающие диаграммы с не более, чем пятью перекрестками перечислены в [3]. Общее число таких диаграмм равно 90. В силу результата Куперберга [12] это эквивалентно перечислению простых виртуальных узлов рода один, имеющих диаграммы с не более чем пятью классическими перекрестками. Для доказательства попарной различности построенных узлов авторы ввели аналог скобочного полинома Кауффмана для диаграмм, нарисованных на торе, и вычислили этот полином для всех построенных узлов. Диаграммы этих узлов на плоскости, использующие виртуальные перекрестки, приведены в [3] на рис. 17. Для удобства читателя воспроизводим эти диаграммы в табл. 3.

Теорема 3.1. *Каждый узел Акимовой — Матвеева вполне плоско-тривиален.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что забывание информации о проходах/переходах в классических перекрестках диаграмм, приведенных в табл. 3, приводит к сорока различным классам плоских виртуальных узлов, у которых плоские диаграммы совпадают. Разбиение виртуальных узлов на эти классы приведено в табл. 1. Далее рассматриваются представители этих классов и для каждого из них доказывается свойство вполне плоско-тривиальности. Отметим,

Таблица 1. Разбиение на классы

	узел		узел		узел		узел		узел
1	2.1	9	4.10, 4.11	17	5.10	25	5.23, 5.24	33	5.40–5.42
2	3.1	10	4.12–4.14	18	5.11	26	5.25, 5.26	34	5.43–5.46
3	3.2, 3.3	11	4.15–4.17	19	5.12	27	5.27–5.29	35	5.47–5.50
4	4.1	12	5.1, 5.2	20	5.13	28	5.30	36	5.51–5.53
5	4.2	13	5.3, 5.4	21	5.14	29	5.31	37	5.54–5.59
6	4.3	14	5.5	22	5.15, 5.16	30	5.32, 5.33	38	5.60–5.65
7	4.4, 4.5	15	5.6, 5.7	23	5.17, 5.18	31	5.34–5.37	39	5.66–5.68
8	4.6–4.9	16	5.8, 5.9	24	5.19–5.22	32	5.38, 5.39	40	5.69

Таблица 2. Полиномиальные инварианты

узел K	полином $P_K(t)$
4.4, 4.5, 5.15, 5.16, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.45, 5.47, 5.48, 5.67, 5.69	0
2.1, 3.1, 4.2, 5.6, 5.7*, 5.10*, 5.13*, 5.19, 5.20, 5.21*, 5.22, 5.23, 5.24*, 5.43, 5.46	$t^{-1} - 2 + t$
4.1*, 4.3, 5.5, 5.12, 5.44	$2t^{-1} - 4 + 2t$
3.2, 3.3, 4.6, 4.9, 4.10, 4.11, 5.3, 5.4*, 5.8, 5.9*, 5.14, 5.17, 5.18*, 5.32, 5.33, 5.34, 5.37, 5.49, 5.66	$t^{-2} - 2 + t^2$
5.1, 5.2, 5.11, 5.25, 5.26, 5.50, 5.68	$2t^{-2} - 4 + 2t^2$
4.8, 5.35*, 5.39*	$t^{-2} - t^{-1} - t + t^2$
4.7, 5.36, 5.38	$t^{-2} + t^{-1} - 4 + t + t^2$
4.13, 4.15, 4.16, 4.17, 5.40, 5.41, 5.42*, 5.52, 5.53*	$t^{-3} - 2 + t^3$
4.14	$t^{-3} - t^{-1} - t + t^3$
4.12, 5.51	$t^{-3} + t^{-1} - 4 + t + t^3$
5.54, 5.57, 5.60, 5.61, 5.62, 5.63, 5.64*, 5.65	$t^{-4} - 2 + t^4$
5.56, 5.68*	$t^{-4} - t^{-2} - t^2 + t^4$
5.55, 5.59	$t^{-4} + t^{-2} - 4 + t^2 + t^4$

что смена типа пересечения в классическом перекрестке приведет при сглаживании против ориентации лишь к тому, что у полученного узла поменяется ориентация. Таким образом, для доказательства вполне плоско-тривиальности всех 90 виртуальных узлов достаточно рассмотреть лишь 40 представителей классов эквивалентности из табл. 1.

В качестве примера рассмотрим виртуальный узел $K = 5.17$, представляющий класс эквивалентности под номером 23, изображенный на рис. 6. Забывая типы пересечений в классических перекрестках, получим диаграмму плоского виртуального узла. Применяя плоские аналоги преобразований Рейдемейстера RII, RI и преобразования VRII и VRI, нетрудно убедиться, что плоская версия диаграммы, приведенной на рис. 6, плоско-эквивалентна диаграмме тривиального узла.

Удостоверимся, что и диаграмма, и полученные сглаживания против ориентации в классических перекрестках также плоско-эквивалентны тривиально-

Таблица 3. Диаграмма узлов Акимовой — Матвеева

2 ₁	3 ₁	3 ₂	3 ₃	4 ₁
4 ₂	4 ₃	4 ₄	4 ₅	4 ₆
4 ₇	4 ₈	4 ₉	4 ₁₀	4 ₁₁
4 ₁₂	4 ₁₃	4 ₁₄	4 ₁₅	4 ₁₆
4 ₁₇	5 ₁	5 ₂	5 ₃	5 ₄
5 ₅	5 ₆	5 ₇	5 ₈	5 ₉
5 ₁₀	5 ₁₁	5 ₁₂	5 ₁₃	5 ₁₄
5 ₁₅	5 ₁₆	5 ₁₇	5 ₁₈	5 ₁₉
5 ₂₀	5 ₂₁	5 ₂₂	5 ₂₃	5 ₂₄
5 ₂₅	5 ₂₆	5 ₂₇	5 ₂₈	5 ₂₉

му узлу. В самом деле, диаграмма узла $K = 5.17$ имеет пять классических перекрестков, обозначенных через a_1, a_2, b_1, b_2, c . Диаграммы, получаемые сглаживаниями в точках a_1, b_2 и c приведены на рис. 7. Нетрудно убедиться непосредственно, что каждая из диаграмм, приведенных на рис. 7, является диаграммой виртуального узла, плоско-эквивалентного тривиальному. Аналогично диаграммы, полученные сглаживанием против ориентации в перекрестках a_2 и b_2 , также плоско-эквивалентны диаграмме тривиального узла. Таким

Рис. 6. Диаграмма виртуального узла 5.17.

Рис. 7. Диаграммы, полученные сглаживаниями в перекрестках a_1 , b_1 и c соответственно.

образом, виртуальный узел $K = 5.17$ является вполне плоско-тривиальным узлом.

Аналогичные рассуждения, проведенные для виртуальных узлов, представляющих остальные классы эквивалентности, показывают, что все они являются вполне плоско-тривиальными, а следовательно, и все узлы Акимовой — Матвеева вполне плоско-тривиальны. $\square$

Теорема 3.1 и лемма 2.2 позволяют установить следующие свойства L -, F -полиномов и аффинного индексного полинома для узлов Акимовой — Матвеева.

Следствие 3.2. Пусть K — узел рода один, допускающий диаграмму с не более, чем пятью двойными точками. Тогда для каждого $n \geq 1$ его L - и F -полиномы совпадают с аффинным индексным полиномом, приведенным в табл. 2, где узлы сгруппированы в соответствии со значением полинома для узла K или его зеркального образа K^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Dye H. An invitation to knot theory: virtual and classical. New York: Chapman and Hall/CRC, 2016. <https://doi.org/10.1201/9781315370750>.
2. Green J. A table of virtual knots. <https://www.math.toronto.edu/~drorbn/Students/GreenJ/> last updated August 10, 2004.
3. Akimova A. A., Matveev S. V. Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings // J. Knot Theory Ramifications. 2014. V. 23, N 6. 1450031 (19 p.).
4. Kauffman L. An affine index polynomial invariant of virtual knots // J. Knot Theory Ramifications 2013. V. 22, N 04. 1340007.
5. Kauffman L. Virtual knot cobordism and the affine index polynomial // J. Knot Theory Ramifications. 2018. V. 27, N 11. 1843017.
6. Kaur K., Prabhakar M., Vesnin A. Two-variable polynomial invariants of virtual knots arising from flat virtual knot invariants // J. Knot Theory Ramifications. 2018. V. 27, N 13. 1842015.
7. Ivanov M., Vesnin A. F -polynomials of tabulated virtual knots. J. Knot Theory Ramifications. 2020. V. 29, N 8. 2050054.
8. Turaev V. Virtual strings // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 2004. V. 54, N 7. P. 2455–2525.
9. Kauffman L. Virtual knot theory // Europ. J. Comb. 1999. V. 20, N 7. P. 663–691.
10. Cheng Z., Gao H. A polynomial invariant of virtual links // J. Knot Theory Ramifications. 2013. V. 22, N 12. 1341002.
11. Satoh S., Taniguchi K. The writhes of a virtual knot // Fund. Math. 2014. V. 225. P. 327–341.

12. Kuperberg G. What is a virtual knot? // Algebr. Geom. Topol. 2003. V. 3. P. 587–591.

Поступила в редакцию 6 августа 2019 г.

После доработки 6 августа 2019 г.

Принята к публикации 18 октября 2019 г.

Веснин Андрей Юрьевич
Новосибирский государственный университет,
лаборатория топологии и динамики,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Томский государственный университет,
пр. Ленина, 36, Томск 634050
`vesnin@math.nsc.ru`

Иванов Максим Эдуардович
Новосибирский государственный университет,
лаборатория топологии и динамики,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`m.ivanov2@g.nsu.ru`