Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. A. Grechkoseeva, M. A. Zvezdina, On recognition of $l_4(q)$ and $u_4(q)$ by spectrum,
Sibirsk. Mat. Zh., 2020, Volume 61, Number 6, 1300–1330

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.606>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.162.27.143

April 26, 2023, 16:58:30

УДК 512.542

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ
ПО СПЕКТРУ ГРУПП $L_4(q)$ И $U_4(q)$
М. А. Гречкосеева, М. А. Звездина

Аннотация. Группы называются *изоспектральными*, если множества порядков их элементов совпадают. Пусть L — конечная простая линейная или унитарная группа размерности 4 над полем нечетной характеристики. Показано, что любая конечная группа, изоспектральная L , является почти простой группой с цоколем L .

DOI 10.33048/smzh.2020.61.606

Ключевые слова: простая классическая группа, порядок элемента, распознавание по спектру.

Введение

Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков ее элементов. Группы с одинаковыми спектрами называются *изоспектральными*. Проблема распознаваемости по спектру для данной группы G состоит в нахождении всех (с точностью до изоморфизма) конечных групп, изоспектральных G .

Проблема распознаваемости по спектру решена для многих конечных неабелевых простых групп, в том числе для всех спорадических групп, знакопеременных групп, исключительных групп лиева типа, классических групп в характеристике 2, а также для классических групп больших размерностей в нечетной характеристике (см. обзоры в [1, 2]). Суммируя результаты, упомянутые в [1, 2], с недавними результатами из [3, 4], можно видеть, что проблема распознаваемости решена для всех простых групп, кроме следующих классических групп в нечетной характеристике:

- (i) $L_n(q)$, где $4 \leq n \leq 26$ и n — не простое число;
- (ii) $U_n(q)$, где $4 \leq n \leq 26$;
- (iii) $O_{2n}^+(q)$, где $5 \leq n \leq 18$;
- (iv) $O_{2n}^-(q)$, где $5 \leq n \leq 17$ и $n \neq 8, 16$;
- (v) $S_{2n}(q)$ и $O_{2n+1}(q)$, где $5 \leq n \leq 15$ и $n \neq 8$;
- (vi) $S_8(7^m)$.

Все простые группы с решенной проблемой распознаваемости можно разделить на три класса: группы $O_7(q)$ и $O_8^+(q)$, где $q = 2, 3$, нераспознаваемые группы и почти распознаваемые группы. Для $q = 2, 3$ группы $O_7(q)$ и $O_8^+(q)$ изоспектральны друг другу и других изоспектральных им конечных групп нет. Группа L *нераспознаваема*, если существует бесконечно много конечных групп, изоспектральных L . К нераспознаваемым относятся, например, группы A_6 , A_{10} , J_2 и ${}^3D_4(2)$. Наконец, неабелева простая группа L называется *почти распознаваемой*, если любая конечная группа, изоспектральная L , является почти

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18–31–20011.

простой группой с цоклем L , т. е. заключена между L и группой ее автоморфизмов. Почти распознаваемыми являются все знакопеременные, спорадические и исключительные группы, кроме A_6 , A_{10} , J_2 и ${}^3D_4(2)$, и все классические группы достаточно большой размерности.

Существует гипотеза, что все классические группы из пп. (i)–(v) также почти распознаваемы по спектру. В настоящей работе доказывается часть этой гипотезы, касающаяся групп $L_4(q)$ и $U_4(q)$.

Теорема 1. Пусть $L = L_4(q)$ или $L = U_4(q)$, где q нечетно, и G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда G является почти простой группой с цоклем L .

Теорема 1 и теоремы 2, 3 из [5] дают явное описание конечных групп, изоспектральных группам $L_4(q)$ и $U_4(q)$, где q нечетно. Мы не приводим это описание, поскольку оно довольно громоздкое.

Отметим, что до недавнего времени не было известно, являются ли группы $L_4(q)$ и $U_4(q)$, где q нечетно, распознаваемыми по спектру среди своих накрытий. В [6] был получен положительный ответ на этот вопрос. По модулю этого результата и других полученных ранее результатов теорема 1 вытекает из следующей теоремы 2, которую мы и будем доказывать.

Теорема 2. Пусть $L = L_4(q)$ или $L = U_4(q)$, где q нечетно, и G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда группа лиева типа в характеристике, не делящей q , не может быть композиционным фактором группы G .

Статья организована следующим образом. В §1 содержатся теоретико-числовые определения и леммы, результаты о строении групп, изоспектральных простым, а также результаты о порядках элементов в расширениях групп. В §2 приведены необходимые сведения о спектрах и модулярных представлениях групп лиева типа. В частности, в леммах 2.7 и 2.8 рассматриваются неподвижные точки полупростых элементов групп $G_2(q)$ и ${}^2B_2(q)$ в кросс-характеристических представлениях. Некоторые рассуждения из доказательства теоремы 2 неспецифичны для групп $L_4(q)$ и $U_4(q)$ и могут быть без серьезных изменений применены ко всем группам из пп. (i)–(v). Эти рассуждения содержатся в §3, и их итог выделен в предложении 3.8. Основная часть доказательства теоремы 2 дана в §4.

§ 1. Предварительные сведения

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел a и b обозначаются через (a, b) и $[a, b]$ соответственно. Если r — простое число, то r -часть $(a)_r$ ненулевого числа a — это наибольшая степень числа r , делящая a , а r' -часть — это отношение $|a|/(a)_r$. Если r — нечетное простое число и $(a, r) = 1$, то $e(r, a)$ — мультипликативный порядок числа a по модулю r . Если a нечетно, то $e(2, a) = 1$ при $a \equiv 1 \pmod{4}$ и $e(2, a) = 2$ в противном случае.

Если $m \geq 1$ и $|a| > 1$, то примитивным простым делителем для $a^m - 1$ называется простое число r такое, что $e(r, a) = m$. Множество всех таких примитивных делителей обозначается через $R_m(a)$, и через $r_m(a)$ обозначается произвольный примитивный делитель. Наибольшим примитивным делителем $k_m(a)$ называется произведение чисел $(a^m - 1)_r$ по всем $r \in R_m(a)$.

Через $\varphi(x)$ и $\Phi_m(x)$ обозначаются функция Эйлера и m -й круговой многочлен соответственно. Через $F(m)$ обозначается сумма $\sum_{i=1}^m \varphi(i)$. Целая часть

числа x обозначается через $[x]$.

Лемма 1.1 (Бэнг — Жигмонди). Пусть a и m — целые числа, $|a| > 1$ и $m \geq 1$. Тогда $R_m(a) \neq \emptyset$, исключая случаи, когда пара (a, m) лежит в множестве

$$\{(2, 1), (2, 6), (-2, 2), (-2, 3), (3, 1), (-3, 2)\}.$$

Лемма 1.2. Пусть a и m — целые числа, $|a| > 1$ и $m \geq 3$. Если r — наибольший простой делитель числа m и $l = (m)_{r'}$, то

$$k_m(a) = \frac{\Phi_m(a)}{(r, \Phi_l(a))}.$$

Более того, если l не делит $r - 1$, то $(r, \Phi_l(a)) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из [7, предложение 2]. $\square$

Лемма 1.3. Если $m > 1$, то $F(m) > \left[\frac{m+1}{2}\right]^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4, лемма 3.4]. $\square$

Лемма 1.4. Пусть $a \geq 2$ и $5 \leq m \leq 14$. Тогда

$$\prod_{i=1}^m \Phi_i(a) > a^{F(m)}/2, \quad \prod_{i=1}^m \Phi_i(-a) > c(m)a^{F(m)},$$

где $c(m)$ задано следующим образом:

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$c(m)$	1/3	1/2	1/3	1/3	2/9	1/3	2/9	2/9	4/27	2/9

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $2 \leq i \leq 14$ и $i \neq 6, 10, 12, 14$, то $\Phi_i(a) > a^{\varphi(i)}$. Если $i = 3, 5, 7$, то $\Phi_i(a)\Phi_{2i}(a) > a^{2\varphi(i)}$. Наконец, $\Phi_4(a)\Phi_{12}(a) > a^6$. Поскольку $\Phi_1(a) \geq a/2$, получаем первую оценку.

Обозначим $\prod_{i=1}^m \Phi_i(-a)$ через $X_m(a)$ и $a^{F(m)}$ — через $Y_m(a)$. Для любого нечетного l выполнено $(a^l + 1)/(a + 1) > 2a^{l-1}/3$, поэтому $\Phi_i(-a) > 2a^{\varphi(i)}/3$ для $i = 3, 5, 7, 9, 11$. Таким образом,

$$X_5(a) = (a - 1)(a^5 + 1)(a^2 + 1)\Phi_3(-a) > Y_5(a)/3,$$

$$X_6(a) = (a - 1)(a^5 + 1)(a^2 + 1)\Phi_3(a)\Phi_6(a) > Y_6(a)/2.$$

Умножая последнее неравенство последовательно на $\Phi_7(-a)$, $\Phi_8(-a)$ и $\Phi_9(-a)$, получаем $c(m)$ для $m = 7, 8, 9$. Для остальных m оценка получается аналогично. $\square$

Обозначим множество максимальных по делимости порядков элементов группы G через $\mu(G)$. Наибольший (по абсолютному значению) порядок элемента обозначается через $\text{тео}(G)$, период группы — через $\text{exp}(G)$. Для простого числа r числа $(\text{exp}(G))_r$ и $(\text{exp}(G))_{r'}$ называются r - и r' -периодами группы G соответственно.

Множество простых делителей порядка группы G обозначается через $\pi(G)$. Граф $GK(G)$ — это граф, множеством вершин которого является $\pi(G)$ и в котором две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$.

Кокликой графа называется некоторое множество его вершин, попарно не смежных между собой. Максимальный размер коклики называется *неплотностью графа*, и $t(G)$ — это неплотность графа $GK(G)$. Для $r \in \pi(G)$ максимальный размер коклики графа $GK(G)$, содержащей r , обозначается через $t(r, G)$, а не содержащей r — через $t(r', G)$.

Критерии смежности вершин в графах простых чисел неабелевых простых групп даны в [8, 9], и мы будем пользоваться этими результатами без явных ссылок.

Лемма 1.5. Пусть L — конечная неабелева простая группа такая, что $t(L) \geq 3$ и $t(2, L) \geq 2$, а G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

(i) Существует неабелева простая группа S такая, что

$$S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut } S,$$

где K — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G .

(ii) Для каждой коклики ρ графа $GK(G)$, порядок которой больше 2, не более чем одно число из ρ делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(L) - 1$.

(iii) Каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(2, S) \geq t(2, L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [10, 11]. $\square$

Лемма 1.6. Пусть L — конечная неабелева простая группа, отличная от $L_3(3)$, $U_3(3)$, $S_4(3)$ и A_{10} , и G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда разрешимый радикал группы G нильпотентен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12, следствие 2]. $\square$

Лемма 1.7. Пусть G , S , K и $\overline{G}$ такие, как в лемме 1.5. Предположим, что $r \in \pi(\overline{G}/S)$, $t \in \pi(S)$, $t \notin (\pi(K) \cap \pi(\overline{G}/S))$, $rt \notin \omega(G)$ и силовская t -подгруппа группы S является гомоциклической группой ранга l . Тогда r делит $t^l - 1$. В частности, r делит $\exp_t^l(G) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T — силовская t -подгруппа группы S . В силу аргумента Фраттини $\overline{G} = SN_{\overline{G}}(T)$, поэтому в $N_{\overline{G}}(T)$ есть элемент порядка r и он действует на $\Omega_1(T)$ без неподвижных точек. Значит, r делит $|\Omega_1(T)| - 1 = t^l - 1$. $\square$

Лемма 1.8. Пусть G — конечная группа, K — нормальная подгруппа в G и $r \in \pi(K)$. Если G/K содержит секцию, изоморфную нециклической абелевой r -группе для некоторого простого нечетного числа $p \neq r$, то $rp \in \omega(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [13, лемма 1.5]. $\square$

Лемма 1.9. Пусть G — конечная группа, K — нормальная r -подгруппа в G для некоторого простого числа r и G/K — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C . Если $(|F|, r) = 1$ и F не лежит в $KC_G(K)/K$, то $r|C| \in \omega(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [14, лемма 1]. $\square$

Лемма 1.10. Пусть S — конечная простая классическая группа над полем характеристики v и $s \neq v$ — нечетное простое число, делящее порядок собственной параболической подгруппы группы S . Предположим, что G действует на векторном пространстве W положительной характеристики r , где r отлично от v и s . Тогда $sr \in \omega(W \rtimes S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12, лемма 2.16]. $\square$

Лемма 1.11. Пусть S — конечная простая классическая группа над полем характеристики v и r, s — различные простые числа из $\pi(S) \setminus \{v\}$. Если $rs \notin \omega(S)$, то либо одно из чисел r и s делит порядок собственной параболической подгруппы группы S , либо $S = U_3(u)$ и $(u+1)_3 = 3 \in \{r, s\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что оба числа r и s не делят порядки собственных параболических подгрупп группы S . Если S отлична от групп $L_2(u)$, $L_3(u)$, $U_3(u)$ и $S_4(u)$, то $rs \in \omega(S)$ по [15, лемма 3.8].

Если S равна $L_3(u)$ или $S_4(u)$, то в S есть максимальная параболическая подгруппа, v' -часть порядка которой делится на $(u-1)(u^2-1)/(3, u-1)$ или $(u^2-1)/(2, u-1)$ соответственно. Значит, оба числа r и s лежат в $R_3(u)$ или $R_4(u)$ соответственно, следовательно, $rs \in \omega(S)$.

Если $S = U_3(u)$, то v' -части порядков собственных параболических подгрупп группы S делят $(u^2-1)/(3, u+1)$, поэтому либо $r, s \in R_3(u)$, и тогда $rs \in \omega(S)$, либо $(u+1)_3 = 3 \in \{r, s\}$.

Если $S = L_2(u)$, то r и s не делят $(u-1)/(2, u-1)$, тем самым они делят $(u+1)/(2, u-1)$ и, значит, $rs \in \omega(S)$. $\square$

§ 2. Спектры групп лиева типа, их расширений и накрытий

Для удобства иногда используем сокращения $L_n^\varepsilon(q)$ и $E_6^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $L_n^+(q) = L_n(q)$, $L_n^-(q) = U_n(q)$, $E_6^+(q) = E_6(q)$, $E_6^-(q) = {}^2E_6(q)$. Также для любого $\varepsilon \in \{+, -\}$ пишем ε вместо $\varepsilon 1$ в арифметических выражениях.

Спектры классических групп найдены в [16, 17], и мы будем постоянно использовать эти описания без явных ссылок. Необходимые для доказательства спектры исключительных групп даны ниже.

Лемма 2.1. Пусть q — степень простого числа p . Тогда $\omega(G_2(q))$ состоит из всех делителей чисел $q^2 \pm q + 1$, $q^2 - 1$ и $p(q \pm 1)$, а также всех делителей чисел

- (i) 8, 12 при $p = 2$;
- (ii) p^2 при $p = 3, 5$.

В частности, $\exp_{p'}(G_2(q)) = (q^6 - 1)/(3, q^2 - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [18]. $\square$

Лемма 2.2. Если $q = 2^{2m+1}$, то $\omega({}^2B_2(q))$ состоит из всех делителей чисел 4 , $q - 1$ и $q \pm \sqrt{2q} + 1$. В частности, $\exp({}^2B_2(q)) = 4(q - 1)(q^2 + 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [19]. $\square$

Лемма 2.3. Пусть q — степень простого числа p . Тогда $\omega({}^3D_4(q))$ состоит из всех делителей чисел $q^4 - q^2 + 1$, $(q^2 \pm q + 1)(q^2 - 1)$ и $p(q^3 \pm 1)$, а также всех делителей чисел

- (i) $4(q^2 \pm q + 1)$, 8 при $p = 2$;
- (ii) p^2 при $p = 3, 5$.

В частности, $\exp_{p'}({}^3D_4(q)) = (q^6 - 1)(q^4 - q^2 + 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [20], а также [21, теорема 3.2]. $\square$

Лемма 2.4. Пусть S — неабелева простая группа лиева типа над полем порядка q . Если S — одна из групп ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^2F_4(q)$, то пусть $l = 1, 1, 2$ соответственно, в противном случае пусть l — нескрученный лиев ранг группы S .

(i) Если S — исключительная группа и $S \neq E_8(2)$, то $\text{meo}(S) \leq 2q^l$. Если $S = E_8(2)$, то $\text{meo}(S) < 3q^l$.

(ii) Если S — классическая группа и $S \neq L_2(4)$, то $\text{meo}(\text{Aut } S) \leq q^{l+1}/(q-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Следует из [22, лемма 1.3], (ii) — из [23, теорема 2.16]. $\square$

Лемма 2.5. Пусть S — группа лиева типа над полем порядка q , $S \leq G \leq \text{Aut } S$, $a \in \omega(G) \setminus \omega(S)$ и a нечетно.

(i) Если $a = rb$, где $r \in \pi(G) \setminus \pi(S)$ и $\pi(b) \cap \pi(G/S) = \emptyset$, то $q = q_0^r$ и $b \leq \text{meo}(S(q_0))$, где $S(q_0)$ — группа того же лиева типа, что и S , но над полем порядка q_0 .

(ii) Если $(3, a) = 1$ при $S = E_6^\pm(q)$, ${}^3D_4(q)$, $O_8^+(q)$ и $a \notin \omega(\text{Inndiag } S)$, то $a \leq 3cq^{l/3}$, где $c = 2$ при $S \neq E_8(2^s)$ и $c = 3$ в противном случае, а l имеет тот же смысл, что и в лемме 2.4. Если к тому же $l > 1$ или q нечетно, то $a \leq rcq^{l/r}$, где r — наименьший простой делитель числа a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку $r \notin \text{Inndiag}(S)$ и $r \neq 2, 3$, найдется полевой автоморфизм α группы S такой, что $a \in \omega(\alpha \text{Inndiag } S)$. Более того, из условия $\pi(b) \cap \pi(G/S) = \emptyset$ вытекает, что порядок α равен r и $a \in \omega(\alpha S)$. Тогда $b \in \omega(S(q_0))$ в силу [24, теорема 2], и требуемое доказано.

(ii) Найдется полевой автоморфизм α группы S такой, что $a \in \omega(\alpha \text{Inndiag } S)$, более того, если S — исключительная группа, то $a \in \omega(\alpha S)$. Пусть порядок автоморфизма α равен k и $q^{1/k} = q_0$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 2 из [24], получаем, что $a \in k \cdot \omega(\text{Inndiag } S(q_0))$, а если S — исключительная группа, то $a \in k \cdot \omega(S(q_0))$. Поскольку a нечетно, группа S отлична от $L_4(2)$, поэтому $a \leq ckq_0^l$ по лемме 2.4.

Для завершения доказательства достаточно показать, что $kq_0^l \leq 3q_0^{lk/3}$ при любом значении q_0^l и что $kq_0^l \leq rq_0^{lk/r}$ при $q_0^l \neq 2$. Функция q_0^{lx}/x возрастает при $x \geq 1/(l \ln q_0)$. Если $q_0^l \neq 2$, то эта функция возрастает при любом $x \geq 1$, и мы получаем второе из неравенств, поскольку k делит a и, значит, $r \leq k$. Если $k \neq 3$, то $k/3 \geq 5/3$ и в силу того, что $5/3 > 1/\ln 2 \geq 1/(l \ln q_0)$, получаем первое неравенство. $\square$

Лемма 2.6. Пусть S — неабелева простая классическая группа над полем характеристики p и порядка q .

(i) Пусть $S = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, $n \geq 3$, и p^l — наименьшая степень числа p , большая $n - 1$. Положим $c = r$, если $r \in \pi(q - \varepsilon)$ и $n = r^s$, и $c = 1$ в противном случае. Тогда

$$\exp(S) = \frac{p^l}{c} \prod_{i=1}^n \Phi_i(\varepsilon q) > \frac{p^l}{c} q^{3F(n)/4}.$$

(ii) Пусть S — одна из групп $S_{2n}(q)$, $O_{2n+1}(q)$, где $n \geq 2$, или $O_{2n+2}^+(q)$, где $n \geq 3$ нечетно, или $O_{2n}^-(q)$, где $n \geq 4$ четно. Пусть p^l — наименьшая степень

числа p , большая $2n - 3$ в последнем случае и $2n - 1$ в остальных. Положим $c = (2, q - 1)^2$ при $n = 2^s$ и $c = (2, q - 1)$ при $n \neq 2^s$. Тогда

$$\exp(S) = \frac{p^l}{c} \prod_{i=1}^n \Phi_i(q^2) > \frac{p^l}{c} q^{3F(n)/2}.$$

(iii) Пусть $S = O_{2n}^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, $n \geq 5$ нечетно, и p^l — наименьшая степень числа p , большая $2n - 3$. Тогда

$$\exp(S) = \frac{p^l}{(2, q - 1)} \Phi_n(\varepsilon q) \prod_{i=1}^{n-1} \Phi_i(q^2) > \frac{p^l}{(2, q - 1)} q^{3F(n) + 3F(n-1)/4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4, лемма 3.5]. $\square$

Лемма 2.7. Пусть $S = G_2(q)$, где $q > 2$ — степень простого числа p , действует на векторном пространстве W над полем нечетной характеристики r . Тогда для любого $m \in \{(q^2 - q + 1)/(3, q + 1), (q^2 + q + 1)/(3, q - 1), q^2 - 1, p\}$ число $[r, m]$ лежит в $\omega(W \rtimes S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что в случае $r = 3$, $q \equiv 1 \pmod{3}$ и $m = q^2 - q + 1$ лемма доказана в [25, предложение 6], но не исключаем этот случай из рассмотрения для полноты картины.

Очевидно, можно считать, что r не делит m . Если $r = p$, то требуемое следует из унисингулярности группы S [26, теорема 1.3]. Если $m = p$, то требуемое вытекает из леммы 1.8. Если $m = q^2 - 1$ и $r \neq p$, то требуемое следует из леммы 1.9 и того факта, что в S есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка q^2 и циклическим дополнением порядка $q^2 - 1$ [27, лемма 1.4]. Таким образом, далее $m = (q^2 + \tau q + 1)/(3, q - \tau)$, где $\tau \in \{+, -\}$ и $r \neq p$.

Пусть g — элемент порядка m группы S . Поскольку $q^2 + \tau q + 1 \in \omega(S)$, можно считать, что r не делит $q^2 + \tau q + 1$. Для доказательства леммы достаточно проверить, что для любого абсолютно неприводимого r -модулярного характера φ группы S скалярное произведение $(\varphi|_{\langle g \rangle}, 1)$ положительно. Для этого сначала покажем, что φ удовлетворяет одному из следующих условий:

$$(i) \sum_{1 \neq h \in \langle g \rangle} \varphi(h) = -6;$$

$$(ii) \text{ если } 1 \neq h \in \langle g \rangle, \text{ то } \varphi(h) \geq 1 - q \text{ при } q > 3 \text{ и } \varphi(h) \geq -1 \text{ при } q = 3.$$

Будем использовать таблицы обыкновенных характеров группы S из [28–30] и информацию об r -модулярных характерах группы S из [31] (для $r = 3$) и [32, 33] (для $r > 3$). Классы сопряженных элементов и характеры обозначаются для всех q одинаково, как в [28], с тем соглашением, что характеры X_{31} , X_{32} , X_{33} не определены при $p = 3$ (см. таблицы в [34, приложение] по поводу соответствия между обозначениями из [28] и [29, 30]).

Все неединичные элементы из $\langle g \rangle$ лежат в классах типа h_3 при $\tau = +$ и типа h_6 при $\tau = -$. Кроме того, если $h \in \langle g \rangle$ и $h \neq 1$, то $\langle h \rangle$ содержит шесть сопряженных с h элементов. Обыкновенные характеры группы S , не равные 0 на классах типа h_3 или h_6 , указаны в табл. 1. В этой таблице π_3 и π_6 — некоторые нетривиальные линейные характеры торов порядков $q^2 + q + 1$ и $q^2 - q + 1$ соответственно,

$$\hat{\pi}(h) = \pi(h) + \pi(h)^q + \pi(h)^{q^2} + \pi(h)^{-1} + \pi(h)^{-q} + \pi(h)^{-q^2}$$

и

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} 2, & \text{если } q \equiv \varepsilon \pmod{3}, \\ 0, & \text{если } q \equiv -\varepsilon \pmod{3}. \end{cases}$$

Таблица 1. Обыкновенные характеры, не исчезающие на h_3 или h_6

	$X_3(\pi_3)$	$X_6(\pi_6)$	X_{11}	X_{12}	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	$\overline{X}_{19}$	X_{31}	X_{32}	X_{33}
h_3	$\hat{\pi}_3(h_3)$	0	1	1	-1	0	0	1	-1	-1	ω_+	ω_+	$-\omega_+$
h_6	0	$\hat{\pi}_6(h_6)$	1	1	0	-1	1	0	1	1	ω_-	$-\omega_-$	ω_-

Отметим, что $\hat{\pi}(h)$ — это в точности сумма значений характера π на степенях элемента h , сопряженных с h .

Пусть $\tau = +$ и $\chi = X_3(\pi_3)$. Тогда

$$\sum_{h_3} \chi(h_3) = \sum_{h_3} \hat{\pi}_3(h_3) = \sum_{1 \neq h \in \langle g \rangle} \pi_3(h) = \sum_{i=1}^{m-1} \eta^i = -1,$$

где $\eta = \pi_3(g)$. Поскольку в каждом смежном классе h_3^G содержится шесть элементов из $\langle g \rangle$, получаем, что $\sum_{1 \neq h \in \langle g \rangle} \chi(h) = -6$. Такое же равенство выполнено,

если $\tau = -$ и $\chi = X_6(\pi_6)$. Кроме того, как видно из табл. 1, любой другой обыкновенный характер χ группы S удовлетворяет неравенству $\chi(h) \geq -2$ при $p \neq 3$ и неравенству $\chi(h) \geq -1$ при $p = 3$ для любого $h \in h_3 \cup h_6$. Таким образом, если φ является редукцией обыкновенного неприводимого характера, то φ удовлетворяет (i) или (ii).

Пусть r делит $|S|$ и $h \in \langle g \rangle$, $h \neq 1$.

СЛУЧАЙ $r = 3$. Предположим, что $r = 3$ и 3 делит $q - 1$. Тогда r делит $q^2 + q + 1$ и, значит, можно считать, что $\tau = -$. Согласно [31, разд. 2.2, 3.2] характеры X_{17} и $X_6(\pi_6)$ лежат в r -блоках дефекта 0, а все остальные характеры, не равные 0 на h_6 , лежат в главном блоке, и соответствующие числа разложения приведены в табл. 2 (на всех незаполненных местах стоят нули). Параметры α , β и γ в этой таблице удовлетворяют неравенствам $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq q - 2$ и $1 \leq \gamma \leq q + 1$.

Таблица 2. Брауэровы характеры главного 3-блока, $3 \mid q - 1$

	φ_{11}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{12}
X_{11}	1						
X_{18}		1					
X_{19}			1				
X_{14}		$\alpha + 1$		1			
X_{15}	1				1		
X_{16}		α		1		1	
X_{12}		β	γ		1		1

Имеем

$$\varphi_{14}(h) = (X_{14} - (\alpha + 1)X_{18})(h) = 0, \quad \varphi_{15}(h) = (X_{15} - X_{11})(h_6) = -1,$$

$$\varphi_{16}(h) = (X_{16} - X_{14} + X_{18})(h_6) = -1,$$

$$\varphi_{12}(h) = (X_{12} - X_{15} + X_{11} - \beta X_{18} - \gamma X_{19})(h_6) = 2 - \gamma \geq 2 - q - 1 = 1 - q.$$

Пусть $r = 3$ и 3 делит $q + 1$. Тогда можно считать, что $\tau = +$. В силу [31, разд. 2.3, 3.3] характеры X_{15} и $X_3(\pi_3)$ имеют r -дефект 0, а все остальные

Таблица 3. Брауэровы характеры главного 3-блока, $3 \mid q+1$

	φ_{11}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{14}	φ_{17}	φ_{16}	φ_{12}
X_{11}	1						
X_{18}		1					
X_{19}			1				
X_{14}	1	1		1			
X_{15}					1		
X_{16}	2			1		1	
X_{12}	1	α	β	1	γ	1	1

характеры, не исчезающие на h_3 , лежат в главном блоке, и соответствующие числа разложения приведены в табл. 3. Параметры α , β и γ в этой таблице удовлетворяют неравенствам $1 \leq \alpha \leq q+1$, $1 \leq \beta \leq q-1$ и $1 \leq \gamma \leq q/2$.

Имеем

$$\varphi_{14}(h) = (X_{14} - X_{11} - X_{18})(h_3) = -2,$$

$$\varphi_{16}(h) = (X_{16} - X_{14} - X_{11} + X_{18})(h_3) = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(h) &= (X_{12} - X_{16} + X_{11} - \alpha X_{18} - \beta X_{19} - \gamma X_{17})(h_3) \\ &= 2 - \alpha + \beta \geq 2 - q - 1 + 1 = 2 - q. \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ $r \mid q^2 - 1$, $r \neq 3$. Если r делит $q-1$, то φ поднимается до обыкновенного характера по следствию из теоремы А в [33].

Пусть r делит $q+1$. Тогда $X_3(\pi_3)$, $X_6(\pi_6)$, X_{15} , X_{16} , X_{19} и $\overline{X}_{19}$ лежат в блоках дефекта 0. Строение блоков циклического дефекта и максимального дефекта описано в [32, разд. 5 и 8] и [31, теорема В] соответственно.

Если $q \equiv 1 \pmod{3}$, то X_{33} тоже лежит в блоке дефекта 0, а X_{31} и X_{32} лежат в блоке циклического дефекта с двумя брауэровыми характерами φ_{31} и φ_{32} , где φ_{32} — редукция характера X_{32} и $\varphi_{31}(h) = (X_{31} - X_{32})(h) = 0$.

Если $q \equiv -1 \pmod{3}$, то X_{31} , X_{32} и X_{33} лежат в блоке максимального дефекта с тремя брауэровыми характерами φ_{31} , φ_{32} и φ_{33} , при этом φ_{32} и φ_{33} — редукции характеров X_{32} и X_{33} соответственно, а $\varphi_{31}(h) = (X_{31} - X_{32} - \gamma X_{33})(h)$, где $2 \leq \gamma \leq (q+1)/3$. Имеем $\varphi_{31}(h_6) = 4 - 2\gamma \geq (10 - 2q)/3 > 1 - q$.

Все остальные характеры из табл. 1 лежат в главном блоке. Если φ — брауэров характер из этого блока, то он либо поднимается до обыкновенного, либо исчезает на h , либо $\varphi(h) = (X_{12} + X_{11} - \alpha X_{17} - \beta X_{18})(h)$, где $\alpha \leq q/2$ и $\beta \leq (q+2)/6$. В последнем случае $\varphi(h) \geq 2 - q/2$.

СЛУЧАЙ $r \mid q^4 - q^2 + 1$, $r \neq 3$. В этом случае строение r -блоков описано в [32, разд. 2, 3].

Пусть r делит $q^2 + q + 1$. Тогда $\tau = -$, поэтому нас интересуют характеры, не исчезающие на h_6 . Все такие характеры лежат либо в блоках дефекта 0, либо в главном блоке, и дерево Брауэра главного блока выглядит, как на рис. 1.

Достаточно проверить характеры φ_{15} и φ_{12} , в разложение которых входят редукции характеров X_{15} и X_{12} , и значения этих характеров на h_6 даются следующими выражениями:

$$\varphi_{15}(h_6) = (X_{15} - X_{11})(h_6) = -1, \quad \varphi_{12}(h_6) = (X_{12} - X_{19} - \overline{X}_{19})(h_6) - \varphi_{15}(h_6) = 0.$$

Рис. 1. Главный r -блок, $3 \neq r \mid q^2 + q + 1$. Рис. 2. Главный r -блок, $3 \neq r \mid q^2 - q + 1$.

Аналогичным образом, если r делит $q^2 - q + 1$, то $\tau = +$ и также достаточно рассмотреть характеры из главного блока. Его дерево Брауэра изображено на рис. 2, и требуемое следует из того, что

$$\varphi_{16}(h_3) = (X_{16} - X_{11})(h_3) = -1, \quad \varphi_{12}(h_3) = X_{12}(h_3) - \varphi_{16}(h_3) = 2.$$

Таким образом, для любого φ выполнено одно из условий (i) и (ii) и, значит,

$$\sum_{1 \neq h \in \langle g \rangle} \varphi(h) \geq \begin{cases} (1-q)(q^2+q), & \text{если } q > 3, \\ -(q^2+q), & \text{если } q = 3. \end{cases}$$

Согласно [35, теорема 9.2.1] если $q > 3$, то $\deg \varphi \geq q^3 - 1$, и если $q = 3$, то $\deg \varphi \geq 14$. Значит,

$$(\varphi|_{\langle g \rangle}, 1) \geq q^3 - 1 + (1-q)(q^2+q) = q - 1 \quad \text{при } q > 3,$$

$$(\varphi|_{\langle g \rangle}, 1) \geq 14 - 12 = 2 \quad \text{при } q = 3.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.8. Пусть $S = {}^2B_2(q)$, где $q \geq 8$, действует на векторном пространстве W над полем нечетной характеристики r . Тогда для любого $m \in \{q-1, q+\sqrt{2q}+1, q-\sqrt{2q}+1\}$ число $[r, m]$ лежит в $\omega(W \rtimes S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что r не делит m , и пусть $g \in S$ — элемент порядка m . Как и в доказательстве леммы 2.7, достаточно проверить, что для любого абсолютно неприводимого r -модулярного характера φ группы S скалярное произведение $(\varphi|_{\langle g \rangle}, 1)$ положительно. Обыкновенные характеры группы S найдены в [19]. Брауэровы характеры описаны в [36].

Пусть r не делит $|S|$. Тогда можно считать, что φ — обыкновенный характер. В табл. 4 приведены значения обыкновенных характеров группы S на элементах нечетных порядков в обозначениях из [36]. Так x, y, z — элементы группы S порядков $q-1$, $q+\sqrt{2q}+1$ и $q-\sqrt{2q}+1$ соответственно, а ω, ζ и η — примитивные корни из единицы соответствующих степеней. Также $\epsilon_d = \zeta^d + \zeta^{-d} + \zeta^{qd} + \zeta^{-qd}$, $\delta_e = \eta^e + \eta^{-e} + \eta^{qe} + \eta^{-qe}$, $1 \leq a, s \leq (q-2)/2$, $1 \leq b, l \leq (q+\sqrt{2q})/4$ и $1 \leq c, u \leq (q-\sqrt{2q})/4$.

Таблица 4. Значения обыкновенных характеров группы ${}^2B_2(q)$ на элементах нечетного порядка

	1	x^a	y^b	z^c
Π	q^2	1	-1	-1
Γ_1, Γ_2	$\sqrt{2q}(q-1)/2$	0	1	-1
Ω_s	q^2+1	$\omega^{sa} + \omega^{-sa}$	0	0
Θ_l	$(q-1)(q-\sqrt{2q}+1)$	0	$-\epsilon_{lb}$	0
Λ_u	$(q-1)(q+\sqrt{2q}+1)$	0	0	$-\delta_{uc}$

Из табл. 4 следует, что $\deg \varphi \geq \sqrt{2q}(q-1)/2$. Кроме того, либо $\varphi(h) \geq -1$ для любого $h \in \langle g \rangle$, либо $\sum_{h \in \langle g \rangle, h \neq 1} \varphi(h) \geq -2$. В любом случае

$$\sum_{h \in \langle g \rangle, h \neq 1} \varphi(h) \geq -q - \sqrt{2q}.$$

Значит,

$$(\varphi|_{\langle g \rangle}, 1) \geq \frac{\sqrt{2q}(q-1)}{2} - q - \sqrt{2q} = \frac{\sqrt{2q}}{2}(q - \sqrt{2q} - 3) > 0,$$

где последнее неравенство выполнено в силу того, что $q \geq 8$.

Пусть r делит $|S|$. Как следует из [36], если r делит $q-1$ или если φ не лежит в главном блоке, то φ поднимается до обыкновенного характера. Предположим, что r делит q^2+1 и φ лежит в главном блоке.

Если r делит $q - \sqrt{2q} + 1$, то главный блок состоит из 1, Π , Γ_1 , Γ_2 и Λ_u для некоторых u и дерево Брауэра выглядит, как на рис. 3.

Рис. 3. Главный r -блок, $r \mid q - \sqrt{2q} + 1$.

Рис. 4. Главный r -блок, $r \mid q + \sqrt{2q} + 1$.

Следовательно, если φ не поднимается до обыкновенного характера, то φ является r -редукцией разности $\Pi - 1$, при этом $\deg \varphi = q^2 - 1$, $\varphi(g) = 0$ при $a = q - 1$ и $\varphi(g) = -2$ при $a = q + \sqrt{2q} + 1$. Тогда

$$(\varphi|_{\langle g \rangle}, 1) \geq q^2 - 1 - 2(q + \sqrt{2q}) > q^2 - 4q - 1 > 0.$$

Если r делит $q + \sqrt{2q} + 1$, то главный блок состоит из 1, Π , Γ_1 , Γ_2 и Θ_l для некоторых l и соответствующее дерево Брауэра изображено на рис. 4.

Таким образом, можно считать, что φ — это редукция характера $\Pi - 1 - \Gamma_1 - \Gamma_2$. Но тогда $\varphi(g) = 0$ и, значит, требуемое неравенство выполнено. $\square$

Лемма 2.9. Пусть $S = {}^3D_4(q)$ действует на векторном пространстве W над полем положительной характеристики r , где r не делит q . Тогда число $[r, q^4 - q^2 + 1]$ лежит в $\omega(W \rtimes S)$.

Доказательство. См. [37, предложение 2]. $\square$

§ 3. Композиционные факторы с малой неплотностью

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, рассмотрим более общий случай. В данном параграфе L — произвольная простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p , S — простая группа лиева типа над полем порядка u и характеристики $v \neq p$, G — конечная группа, изоспектральная L и имеющая S в качестве композиционного фактора. Основным результатом параграфа — предложение 3.8, в котором исключены некоторые группы S с малой неплотностью.

Как объяснялось во введении, можно считать, что p нечетно и $L \neq L_2(q)$, $L_3^\pm(q)$, $S_4(q)$, $S_6(q)$, $O_7(q)$, $O_8^\pm(q)$. Более того, учитывая результаты работ

[38, 39], можно считать, что L — одна из следующих групп:

$$\begin{aligned} & L_n(q), \text{ где } n \geq 4 \text{ и } n \text{ не является простым числом;} \\ & U_n(q), \text{ где } n \geq 4; \\ & S_{2n}(q), O_{2n+1}(q), O_{2n}^-(q), \text{ где } n \geq 5 \text{ и } n \text{ не является степенью числа 2;} \\ & O_{2n}^+(q), \text{ где } n \geq 5. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Кроме того, можно считать, что $S \neq {}^2F_4(2)'$ (см. [40, теорема 2; 13, теорема 2]).

На протяжении этого параграфа и далее в статье пользуемся описанием коклик максимального размера в графах простых чисел простых групп из [9, табл. 2–4]. Из этих результатов следует, что все группы из (3.1) удовлетворяют условию $t(L) \geq 3$. Более того, группы L из (3.1) с $t(L) = 3$ — это в точности $L_n^\pm(q)$ для $4 \leq n \leq 6$, кроме $L_5(q)$.

По леммам 1.5 и 1.6 разрешимый радикал K группы G нильпотентен и

$$S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut } S.$$

Кроме того, по лемме 1.5 выполнено неравенство $t(L) \leq t(S) + 1$. Начнем с уточнения этого неравенства.

Лемма 3.1. *Если $t(S) \leq 3$ или S — одна из групп $L_3^\pm(u)$, ${}^2B_2(u)$, то $t(L) = 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $t(3', L_3^\pm(u)) \leq 3$ и $t(2', {}^2B_2(u)) = 3$, поэтому все группы S из условия леммы удовлетворяют неравенству $t(2', S) \leq 3$ или неравенству $t(3', S) \leq 3$. Также отметим, что исключительные группы S с $t(S) \leq 3$ — это в точности $G_2(u)$ и ${}^3D_4(u)$.

Предположим, что $t(L) \geq 4$. Тогда в $GK(L)$ есть коклика ρ размера $t(L)$, не содержащая p и делителей $q^2 - 1$, в частности, не содержащая 2 и 3. Поскольку в S нет коклик размера четыре, не содержащих 2 и 3, получаем, что $t(L) = 4$ и $\rho \cap \pi(S) = \rho \setminus \{r\}$ для некоторого r .

Предположим, что $r \in \pi(K)$. Пусть S — классическая группа. Поскольку $|\rho \cap \pi(S)| = 3$ и ρ не содержит 3, по лемме 1.11 найдется $s \in \rho \cap \pi(S)$ такое, что $s \neq v$ и s делит порядок собственной параболической подгруппы группы S . По лемме 1.10 получаем, что $rs \in \omega(G)$. Если $S = G_2(u)$, то в ρ есть делитель s числа $u^2 + u + 1$ и $rs \in \omega(G)$ по лемме 2.7. Если $S = {}^3D_4(u)$, то в ρ также есть делитель s числа $u^2 + u + 1$, и поскольку силовская s -подгруппа группы S абелева и нециклическая, $rs \in \omega(G)$ по лемме 1.8. Если $S = {}^2B_2(u)$, то $rs \in \omega(G)$ по лемме 2.8. В любом случае $rs \in \omega(G)$, что неверно.

Таким образом, $r \notin \pi(K)$. Более того, если $i = e(r, q)$, то указанное рассуждение верно для любого числа из $R_i(q)$, поэтому $R_i(q) \cap \pi(K) = \emptyset$. Значит, число $k = k_i(q)$ лежит в $\omega(\overline{G}/S)$. Поскольку k взаимно просто с $|S|$, оно является порядком полевого автоморфизма. Следовательно, $u \geq v^k$. Отметим, что $r \neq 2, 3$, поэтому $i \geq 3$ и $(6, k) = 1$.

Если S — одна из групп $L_2(u)$, $L_3^\pm(u)$, $L_4^\pm(u)$, то $v \in \rho \cap \pi(S)$, откуда следует, что $v \geq 5$. Поскольку в S есть элемент порядка $(u + 1)/2$, получаем, что

$$\text{meo}(S) > u/2 \geq 5^k/2.$$

Если S — одна из оставшихся групп и $S \neq {}^2B_2(u)$, то в S есть элемент порядка $(u^2 + 1)/(2, u - 1)$ или $u^2 + u + 1$, поэтому

$$\text{meo}(S) > u^2/2 \geq 4^k/2.$$

Наконец, если $S = {}^2B_2(u)$, то

$$\text{meo}(S) > u \geq 2^k.$$

Кроме того, $k > (q^2 - q + 1)/3$, поскольку $i \geq 3$. С другой стороны, из условия $t(L) = 4$ следует, что лиев ранг группы L не превосходит 7 и, значит, по лемме 2.4

$$\text{meo}(L) < q^8/(q-1) \leq 3q^7/2.$$

Таким образом,

$$4^{(q^2-q+1)/3} < 3q^7, \quad \text{если } S \neq {}^2B_2(u), \quad (3.2)$$

$$2 \cdot 2^{(q^2-q+1)/3} < 3q^7, \quad \text{если } S = {}^2B_2(u). \quad (3.3)$$

Пусть $S \neq {}^2B_2(u)$. Из (3.2) следует, что $q \leq 5$. Если $q = 5$ и $v \neq 2$, то

$$\text{meo}(S) > 7^k/2 > 7^7/2 > 5^8/4 > \text{meo}(L).$$

Пусть $q = 5$ и $v = 2$. Тогда $k \geq 7$ и $v^{2k} + 1 \leq u^2 + 1 \leq \text{meo}(S) < 5^8/4$, откуда $u = v^k = 2^7$. Значит, в S есть элемент порядка $(u+1)/6 = 43$. С другой стороны, $e(43, 5) = 42$, следовательно, $43 \notin \pi(L)$.

Пусть $q = 3$. Тогда $k \geq 5$ и $v^k \leq u \leq 2 \text{meo}(S) < 3^8$, откуда v^k равно 5^5 , 2^5 , 2^7 или 2^{11} . Несложно проверить, что в любом случае у одного из чисел $v^k \pm 1$ найдется простой делитель t такой, что $e(t, 3) \geq 30$ и, значит, $t \notin \pi(L)$. Число t делит $u+1$ или $u-1$, поэтому $t \in \omega(S)$; противоречие.

Пусть $S = {}^2B_2(u)$. Из (3.3) следует, что $q \leq 7$. Значит, $2^k \leq 3 \cdot 7^7/2$, откуда $k \leq 22$. Следовательно, k — одно из чисел 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Поскольку число $2^k - 1$ делит $u - 1$, оно лежит в $\omega(S)$. Несложно проверить, что для указанных q и k для некоторого простого делителя t числа $2^k - 1$ выполнено неравенство $e(t, q) \geq 15$, значит, $2^k - 1 \notin \omega(L)$.

Лемма доказана. $\square$

Если $L = L_4^\varepsilon(q)$, то $t(L) = 3$ и все коклики размера 3 в $GK(L)$ имеют вид $\{p, r_3(\varepsilon q), r_4(\varepsilon q)\}$, при этом хотя бы одно из чисел $r_3(\varepsilon q)$ и $r_4(\varepsilon q)$ не смежно с 2 в $GK(L)$. Коклики подобного вида есть во многих классических группах, и мы немного отвлечемся, чтобы сформулировать некоторые свойства этих коклик.

Таблица 5. Числа $m_z(L)$ и $m_y(L)$

L	Условия на L	$R_z(L)$	$R_y(L)$	$m_z(L)$	$m_y(L)$
$L_n^\varepsilon(q)$, $n \geq 4$	$(n)_2 < (q-\varepsilon)_2$ $(n)_2 \geq (q-\varepsilon)_2$	$R_n(\varepsilon q)$ $R_{n-1}(\varepsilon q)$	$R_{n-1}(\varepsilon q)$ $R_n(\varepsilon q)$	$\frac{q^n - \varepsilon^n}{(q-\varepsilon)(n, q-\varepsilon)}$ $\frac{q^{n-1} - \varepsilon^{n-1}}{(n, q-\varepsilon)}$	$\frac{q^{n-1} - \varepsilon^{n-1}}{(n, q-\varepsilon)}$ $\frac{q^n - \varepsilon^n}{(q-\varepsilon)(n, q-\varepsilon)}$
$S_{2n}(q)$, $O_{2n+1}(q)$, $n \geq 5$ нечетно	$q \equiv \varepsilon \pmod{4}$	$R_{2n}(\varepsilon q)$	$R_n(\varepsilon q)$	$\frac{q^n + \varepsilon}{2}$	$\frac{q^n - \varepsilon}{2}$
$O_{2n}^\varepsilon(q)$, $n \geq 5$ нечетно	$q \equiv \varepsilon \pmod{4}$ $q \equiv -\varepsilon \pmod{4}$	$R_{2n-2}(q)$ $R_n(\varepsilon q)$	$R_n(\varepsilon q)$ $R_{2n-2}(q)$	$\frac{(q^{n-1}+1)(q+\varepsilon)}{4}$ $\frac{q^n - \varepsilon}{2}$	$\frac{q^n - \varepsilon}{4}$ $\frac{(q^{n-1}+1)(q+\varepsilon)}{2}$
$O_{2n}^+(q)$, $n \geq 6$ четно	$q \equiv \varepsilon \pmod{4}$	$R_{2n-2}(\varepsilon q)$	$R_{n-1}(\varepsilon q)$	$\frac{q^{n-1} + \varepsilon}{2}$	$\frac{q^{n-1} - \varepsilon}{2}$
$O_{2n}^-(q)$, $n \geq 6$ четно	нет	$R_{2n}(q)$	$R_{2n-2}(q)$	$\frac{q^n + 1}{2}$	$\frac{(q^{n-1}+1)(q-1)}{2}$

Пусть L — произвольная группа из (3.1) такая, что $t(p, L) \geq 3$ (другими словами, $L \neq S_{2n}(q), O_{2n+1}(q)$, где n четно). Следуя [12, разд. 4], будем рассматривать в $GK(L)$ коклики вида $\{p, r_z(L), r_y(L)\}$, где $r_z(L)$ не смежно с 2 в $GK(L)$. Более точно, определим подмножества $R_z(L), R_y(L)$ в $\pi(L)$ и числа $m_z(L), m_y(L)$ из $\omega(L)$ согласно табл. 5, а числа $k_z(L)$ и $k_y(L)$ определим заменой R на k в $R_z(L)$ и $R_y(L)$ соответственно. Тогда из определений, критерия смежности в графах простых чисел и описания спектров классических групп непосредственно вытекает

Лемма 3.2. Пусть $t(p, L) \geq 3$ и $s \in R_z(L), r \in R_y(L)$. Тогда

- (i) если $t \in \{r, s\}$, то $e(t, q) \geq 3$ и $t \geq 5$;
- (ii) множества $\{2, s\}$ и $\{p, r, s\}$ — коклики в $GK(L)$;
- (iii) $m_z(L)$ и $m_y(L)$ — единственные числа в $\mu(L)$, кратные s и r соответственно;
- (iv) $m_z(L)$ и $m_y(L)$ взаимно просты;
- (v) у вершин s и r нет общих соседей в $GK(L)$.

Лемма 3.3. Пусть $r \in \pi(L)$ не смежно с p в $GK(L)$. Тогда r не делит $\exp_p(L) - 1$.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $e(r, q) = i$, $\exp_p(L) = p^k$. Тогда i делит k . Из [8, предложение 3.1] следует, что $i \geq 3$ и $i \geq (n-1)/2$. Также ясно, что $p^{k-1} < 2n$. Таким образом, $p^{(n-3)/2} < 2n$. Поскольку $3^{n-3} > 4n^2$ при $n \geq 9$, получаем, что $n \leq 8$. Значит, $p^{k-1} < 16$, откуда $p = 3, k = 3$ и $i = 3$. Поскольку $27 \notin \omega(L_8^{\varepsilon}(3^m))$, группа L — симплектическая или ортогональная и $n \geq 5$, но тогда числа из $R_3(q)$ смежны с p в $GK(L)$; противоречие. $\square$

Вернемся к рассмотрению группы S . Следующая лемма является небольшой модификацией леммы 4.1 из [12].

Лемма 3.4. Если $t(p, L) \geq 3$, то $R_y(L) \cap \pi(\overline{G}/S) = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $r \in R_y(L) \cap \pi(\overline{G}/S)$. Тогда $p \notin \pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)$ по лемме 1.5 и, значит, $p \in \pi(S)$. Кроме того, $r_z(L) \in \pi(S)$.

Поскольку $r \geq 5$ в силу леммы 3.2, либо $S = L_m^{\tau}(u)$ для $\tau \in \{+, -\}$ и r делит $u - \tau$, либо $\overline{G}$ содержит полевой автоморфизм группы S порядка r . В первом случае из условий $r \in R_1(\tau u)$ и $t(r, S) \geq 3$ следует, что $(m)_r = (u - \tau)_r$ и $p \in R_m(\tau u) \cup R_{m-1}(\tau u)$. Тогда силовская p -подгруппа группы S циклическая и, значит, r делит $\exp_p(S) - 1$ по лемме 1.7. Поскольку $\exp_p(S) = \exp_p(L)$, это противоречит лемме 3.3.

Таким образом, имеет место второй случай и, значит, $u = u_0^r$ и

$$r \cdot \pi(S(u_0)) \subseteq \omega(G), \quad (3.4)$$

где $S(u_0)$ — простая группа того же типа, что и S , над полем порядка u_0 (см. [24, теорема 2]). Если $e(p, u_0) = e(p, u)$, то $p \in \pi(S(u_0))$ и, значит, $rp \in \omega(G)$; противоречие. Следовательно, $e(p, u_0) = re(p, u)$, откуда вытекает, что r делит $p - 1$. Однако $e(r, q) \geq 3$ по лемме 3.2. $\square$

Лемма 3.5. Пусть $t(p, L) \geq 3$. Если $v \in R_y(L)$, то либо $m_z(L) = k_z(L)$, либо $S = L_2(v)$, $v = k_y(L)$ и $\pi(K) \cap R_y(L) = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что $v \in R_y(L)$. Тогда v нечетно. Пусть $r \in \pi(\overline{G}/S)$ и r нечетно. Покажем, что $rv \in \omega(G)$. Ясно, что это так, если в $\overline{G}$ есть полевой автоморфизм порядка r (см. (3.4)). Если $S = L_m^{\tau}(u)$, где $m \geq 4$,

и r делит $(m, u - \tau)$ или S — одна из групп $E_6^\pm(u)$, ${}^3D_4(u)$, $O_8^+(u)$ и $r = 3$, то $rv \in \omega(S)$. Наконец, если $S = L_3^\tau(u)$, $r = 3 = (u - \tau)_3$ и $PGL_3^\tau(u) \leq \overline{G}$, то $3v \in \omega(G)$, поскольку в $PGL_3^\tau(u)$ есть элемент порядка $v(u - \tau)$. Таким образом, $\pi(\overline{G}/S) \subseteq \{2\} \cup \pi(m_y(L))$.

Если $S \neq L_2(v)$, то силовская v -подгруппа группы S нециклическая, и по лемме 1.8 получаем, что $\pi(K) \subseteq \pi(m_y(L))$. Если $\pi(K) \cap R_y(L) \neq \emptyset$, то в силу нильпотентности группы K опять получаем, что $\pi(K) \subseteq \pi(m_y(L))$. Если $S = L_2(v)$ и $k_y(L) \neq v$, то $\pi(K) \cap R_y(L) \neq \emptyset$ по лемме 3.4.

Пусть $r \in \pi(m_z(L)/k_z(L))$. Тогда r должно лежать в $\pi(S)$ и быть смежно и с p , и с $r_z(L)$ в $GK(S)$. Поскольку $r_z(L)$ не смежно с 2, а p не смежно с v , у чисел $r_z(L)$ и p нет общих соседей в $GK(S)$, исключая случай, когда $S = E_7(u)$ и r делит $u \pm 1$. В этом последнем случае $rv \in \omega(G)$; противоречие. $\square$

Лемма 3.6. Пусть S — классическая группа. Если $r \in \pi(K)$ и $t(r, L) \geq 3$, то либо $r = v$, либо $S = L_2(v)$. Если $t(p, L) \geq 3$ и $R_y(L) \cap \pi(K) \neq \emptyset$, то либо $m_z(L) = k_z(L)$ и $R_y(L) \cap \pi(K) = \{v\}$, либо $S = L_2(v)$, $v = k_z(L)$ и p делит $k_z(L) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \neq v$. Пусть $\{r, s, t\}$ — коклика в $GK(L)$ и $r \in \pi(K)$. Из леммы 1.5 следует, что $s, t \in \pi(S)$. Если хотя бы одно из чисел s и t отлично от v и делит порядок собственной параболической подгруппы группы S , то оно смежно с r в $GK(G)$ по лемме 1.10. Если $v \in \{s, t\}$ и $S \neq L_2(v)$, то $vr \in \omega(G) \setminus \omega(L)$ по лемме 1.8. Значит, $S = L_2(v)$ и $\{s, t\} = \{v, w\}$, где w делит $(v + 1)/2$.

Пусть $t(p, L) \geq 3$. Если в $R_y(L) \cap \pi(K)$ найдется $r \neq v$, то по доказанному выше $S = L_2(v)$, $k_z(L) = v$ и p делит $v + 1$. Если $R_y(L) \cap \pi(K) = \{v\}$, то $m_z(L) = k_z(L)$ по лемме 3.5. $\square$

Лемма 3.7. Пусть $L = L_4^\varepsilon(q)$, где $4 \leq n \leq 6$, $(n, \varepsilon) \neq (5, +)$ и $q = 3, 5$, или $L = L_4^\varepsilon(7)$. Тогда S не может быть группой лиева типа в другой характеристике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группы $L_4(3)$ и $U_4(3)$ распознаваемы, а группы $L_6(3)$ и $U_4(5)$ почти распознаваемы по спектру [41–43]. Для остальных групп предположим противное. Отметим, что $v \neq k_z(L)$, если $S \neq L_2(u)$, поскольку только в $GK(L_2(u))$ вершины 2 и v не смежны.

Пусть $L \in \{U_5(5), U_6(5)\}$. Тогда $k_z(L) = m_z(L) = 521$. Это наибольшее простое число в $\omega(L)$, и оно образует изолированную вершину в $GK(L)$. Поскольку

$$521 \in \omega(S) \subseteq \omega(L) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 31, 521\},$$

в силу [44, табл. 3] получаем, что S — одна из групп $L_2(521)$, $L_2(521^3)$, $L_2(43^4)$ и $S_4(43^2)$. Если $v = 521$, то 29 делит $v + 1$ и, значит, лежит в $\pi(S)$. Если $v = 43$, то $11 \in \pi(S)$. В любом случае $\omega(S) \not\subseteq \omega(L)$; противоречие.

Если $L = U_5(3)$, то $k_z(L) = m_z(L) = 61$ и, значит, $61 \in \pi(S) \subseteq \pi(L) = \{2, 3, 5, 7, 61\}$. Если $L = L_4(5)$, то оба числа $r_z(L) = 31$ и $r_y(L) = 13$ не смежны с 2 в $GK(L)$, поэтому $13, 31 \in \pi(S) \subseteq \pi(L) = \{2, 3, 5, 13, 31\}$. Используя [44, табл. 1], получаем, что в обоих случаях таких групп S нет.

Для оставшихся групп $L_4(7)$, $U_4(7)$, $L_6(5)$ и $U_6(3)$ число $k_z(L)$ отлично от $m_z(L)$ и равно 19, 25, 7 и 13 соответственно. В частности, p не делит $k_z(L) + 1$. Применяя леммы 3.4 и 3.6, получаем, что либо $k_y(L) \in \pi(S)$, либо $r_y(L) \in \pi(K)$ и S — исключительная группа.

Пусть $L = L_4(7)$. Тогда $19 \in \pi(S) \subseteq \pi(L) = \{2, 3, 5, 7, 19\}$. Отсюда следует, что S — одна из групп $L_2(19)$ и $U_3(8)$. Поскольку S — классическая группа, число $k_y(L) = 25$ должно лежать в $\omega(S)$, но это не так.

Пусть $L = U_4(7)$. Тогда $k_y(L) = 43$. Если $43 \in \pi(S)$, то $5, 43 \in \pi(S) \subseteq \pi(L) = \{2, 3, 5, 7, 43\}$, и несложно проверить, что таких групп S нет. Значит, $43 \notin \pi(S)$, S — исключительная группа и $\pi(S) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$. Таких групп S также нет.

Пусть $L = L_6(5)$. Тогда $k_y(L) = 11 \cdot 71$. Кроме того, $\{7, 11, 13\}$ и $\{31, 71, 13\}$ — кокклики в $GK(L)$. Если $71 \in \pi(S)$, то

$$7, 71 \in \pi(S) \subseteq \pi(L) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 31, 71\},$$

откуда $S = L_2(71)$ и $11, 13 \notin \pi(S)$, что противоречит лемме 1.5. Если $71 \notin \pi(S)$, то

$$7, 13, 31 \in \pi(S) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 31\},$$

но таких групп S в характеристике, отличной от 5, нет.

Пусть $L = U_6(3)$. Тогда $k_y(L) = 61$ и $\{5, 7, 61\}$ — коклика в $GK(L)$. Если $61 \in \pi(S)$, то $13, 61 \in \pi(S) \subseteq \pi(L) = \{2, 3, 5, 7, 13, 61\}$, откуда $S = L_3(13)$ и $5 \notin \pi(\text{Aut } S)$. Значит, $5 \in \pi(K)$. Поскольку $t(5, L) = 3$, это противоречит лемме 3.6. Пусть $61 \notin \pi(S)$. Тогда S — исключительная группа и

$$5, 7, 13 \in \pi(S) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\},$$

откуда следует, что S — одна из групп $G_2(4)$ и ${}^2B_2(8)$. Кроме того, $61 \in \pi(K)$. Применяя леммы 2.7 и 2.8, получаем, что $13 \cdot 61 \in \omega(G)$; противоречие. $\square$

Предложение 3.8. Пусть L — одна из групп в (3.1), G — конечная группа, изоспектральная L , и S — группа лиева типа в характеристике $v \neq p$, являющаяся композиционным фактором группы G . Тогда S отлична от групп $L_2(u)$, $S_4(u)$, ${}^2B_2(u)$, ${}^3D_4(u)$ и $G_2(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $t(L) = 3$ по лемме 3.1 и, значит, L — одна из групп $L_n^\varepsilon(q)$, где $n = 4, 6$, или $L = U_5(q)$ (в последнем случае считаем, что $\varepsilon = -$). В частности, $\{k_z(L), k_y(L)\} = \{k_n(\varepsilon q), k_{n-1}(\varepsilon q)\}$. По лемме 3.7 можно считать, что $q \geq 7$. Также отметим, что в силу определений и леммы 1.2 условие $m_z(L) = k_z(L)$ выполнено только, если $L = U_5(q)$ или $L = L_6(7)$. Будем далее для краткости писать k_z и k_y вместо $k_z(L)$ и $k_y(L)$. То же самое касается R_z , R_y , m_z , m_y и т. п.

Начнем с двух вспомогательных лемм, касающихся групп $L_n^\varepsilon(q)$, где $n = 4, 5, 6$.

Лемма 3.9. Пусть $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $4 \leq n \leq 6$, $q \geq 7$, $L \neq L_5(q)$, и пусть $i \in \{n, n-1\}$. Тогда либо $k_i(\varepsilon q)$ не простое число, либо найдется $\tau \in \{+1, -1\}$ такое, что $(k_i(\varepsilon q) + \tau)/2 \notin \omega(L)$, либо выполнено одно из следующих утверждений:

- (i) $L = L_4(7)$, $i = 3$ и $k_i(\varepsilon q) = 19$;
- (ii) $L = U_6(7)$, $i = 6$ и $k_i(\varepsilon q) = 19$;
- (iii) $L = L_6(11)$, $i = 6$ и $k_i(\varepsilon q) = 37$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что число $(k_i(\varepsilon q) \pm 1)/2$ всегда взаимно просто с $k_i(\varepsilon q)$.

Пусть $n = 4, 5$ и $i = 4$. Предположим, что

$$k = (k_4(q) + 1)/2 = (q^2 + 3)/4$$

лежит в спектре группы L . Отметим, что $k \geq 13$, k нечетно и взаимно просто с $q^2 - 1$. Кроме того, $(q^2 + 3, q^6 - 1) = (q^2 + 3, 28)$ и $(q^2 + 3, q^{10} - 1) = (q^2 + 3, 4 \cdot 61)$. Значит, k делит $(3, p) \cdot 7 \cdot 61$. Кроме того, k не может делиться на $3 \cdot 61$ и $7 \cdot 61$,

поскольку p и числа из $R_3(\varepsilon q)$ не смежны с числами из $R_5(\varepsilon q)$ в $GK(L)$. Таким образом, $k = 21$ или $k = 61$. Уравнение $(q^2 + 3)/4 = 61$ не имеет решений, поэтому $k = 21$ и $q = 9$. В силу того, что $e(7, 9) = 3$, получаем, что $L = L_4(9)$, но тогда $21 \notin \omega(L)$.

Пусть $n = 4$ и $i = 3$. Предположим, что 3 не делит $q - \varepsilon$. Положим

$$k = (k_3(\varepsilon q) + 1)/2 = (q^2 + \varepsilon q + 2)/2,$$

и пусть $k \in \omega(L)$. Ясно, что p не делит k . При этом $(q^2 + \varepsilon q + 2, q^2 - 1) = (q + 3\varepsilon, 8)$ и $(q^2 + \varepsilon q + 2, q^2 + 1) = 2$. Поскольку 2-период группы L равен $(q^2 - 1)_2$, число k должно делить 8, однако $k \geq 22$.

Пусть 3 делит $q - \varepsilon$. Тогда

$$(k_3(\varepsilon q) - 1)/2 = (q^2 + \varepsilon q - 2)/6 = (q + 2\varepsilon)(q - \varepsilon)/6.$$

Предположим, что $q + 2\varepsilon \in \omega(L)$. Поскольку $(q + 2\varepsilon, q^2 - 1) = 3$, 3-период группы L равен $3(q - \varepsilon)_3$, число 3 не смежно с числами из $R_4(\varepsilon q)$ в $GK(L)$ и $q + 2\varepsilon \geq 5$, получаем, что $q + 2\varepsilon = 9$. Тогда (q, ε) равно $(7, +)$ или $(11, -)$, при этом $k_3(\varepsilon q) = 19$ или 37 соответственно. В первом случае выполнено (i). Во втором случае $(k_3(\varepsilon q) - 1)/2 = 18$ и $18 \notin \omega(L)$.

Пусть $n = 6$ и $i = 6$. Предположим, что 3 не делит $q + \varepsilon$ и что

$$k = (k_6(\varepsilon q) + 1)/2 = (q^2 - \varepsilon q + 2)/2$$

лежит в $\omega(L)$. Несложно проверить, что числа $(q^2 - \varepsilon q + 2, q^4 - 1)$, $(q^2 - \varepsilon q + 2, q^2 + \varepsilon q + 1)$ и $(q^2 - \varepsilon q + 2, q^{10} - 1)$ делят 16, 7 и $8 \cdot 11$ соответственно. Таким образом, $k \geq 22$ и k делит $16 \cdot 7 \cdot 11$, но не делится на $7 \cdot 11$, $16 \cdot 7$, $16 \cdot 11$. Решая получающиеся уравнения, видим, что (q, ε) равно $(7, +)$ или $(11, +)$, однако 3 не делит $q + \varepsilon$, поэтому $q = 7$, $\varepsilon = +$ и $k = 22$. Тогда $k \notin \omega(L)$, так как $e(11, 7) = 10$.

Пусть 3 делит $q + \varepsilon$. Тогда

$$(k_6(\varepsilon q) - 1)/2 = (q - 2\varepsilon)(q + \varepsilon)/6.$$

Предположим, что $q - 2\varepsilon \in \omega(L)$. Отметим, что $q - 2\varepsilon$ делится на 3 и число 3 не смежно с числами из $R_5(\varepsilon q)$. При этом $(q - 2\varepsilon, q^2 - 1) = 3$, $(q - 2\varepsilon, q^2 + \varepsilon q + 1)$ делит 7 и $(q - 2\varepsilon, q^2 + 1)$ делит 5. Числа из $R_3(\varepsilon q)$ и $R_4(\varepsilon q)$ не смежны, а 3-период группы L равен $3(q + \varepsilon)_3$, поэтому $q - 2\varepsilon$ делит $9 \cdot 5 \cdot 7$, но не делится на 35 и 45. Получаем, что (q, ε) равно $(7, -)$, $(11, +)$, $(13, -)$, $(17, +)$, $(19, -)$, $(23, +)$ или $(61, -)$. Тогда $k_6(\varepsilon q)$ равно 19, 37, 61, $7 \cdot 13$, 127, 13^2 или $13 \cdot 97$ соответственно. Если (q, ε) равно $(13, -)$ или $(19, -)$, то $(k_6(\varepsilon q) + 1)/2 \notin \omega(L)$. В оставшихся случаях если $k_6(\varepsilon q)$ — простое число, то выполнено (ii) или (iii).

Пусть $i = 5$. Предположим, что $(5, q - \varepsilon) = 1$. Положим

$$k = (k_5(\varepsilon q) + 1)/2 = (q^4 + \varepsilon q^3 + q^2 + \varepsilon q + 2)/2.$$

Отметим, что $2k = q(q^2 + 1)(q + \varepsilon) + 2$, поэтому k нечетно и взаимно просто с q , $q + \varepsilon$ и $q^2 + 1$. Кроме того,

$$(q^4 + \varepsilon q^3 + q^2 + \varepsilon q + 2, q - \varepsilon) = (6, q - \varepsilon),$$

$$(q^4 + \varepsilon q^3 + q^2 + \varepsilon q + 2, q^4 + q^2 + 1) = (3, q - \varepsilon).$$

Значит, если $k \in \omega(L)$, то k делит 9, однако $k > q^4/4 > 9$.

Пусть $(5, q - \varepsilon) = 5$. Тогда

$$(k_5(\varepsilon q) - 1)/2 = (q^3 + 2\varepsilon q^2 + 3q + 4\varepsilon)(q - \varepsilon)/10.$$

Положим $k = (q^3 + 2\varepsilon q^2 + 3q + 4\varepsilon)/2$. Тогда k нечетно, делится на 5 и взаимно просто с числами q , $q + \varepsilon$ и $q^2 + 1$. Поскольку 5 не смежно с числами из $R_6(\varepsilon q)$, $(k, q - \varepsilon) = 5$ и $(k, q^2 + \varepsilon q + 1) = (q + 3\varepsilon, 7)$, если $k \in \omega(L)$, то k делит 35, однако $k > (q - 2)q^2/2 > 122$. $\square$

Лемма 3.10. Пусть $q \geq 7$.

(i) Если $L = L_6(\varepsilon q)$, то $q^5/7 < m_z < q^5$ и $\exp(L) < 6q^{13}/5$.

(ii) Если $L = L_4(\varepsilon q)$, то $k_z, k_y > 2q^2/7$, $m_z > q^3/5$ и $\exp(L) < q^8/(2q-2) < q^7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если $m_z = (q^5 - \varepsilon)/(6, q - \varepsilon)$, то $m_z \leq (q^5 + 1)/2 < q^5$ и $m_z \geq (q^5 - 1)/6 > q^5/7$. Если $m_z = (q^6 - 1)/((q - \varepsilon)(6, q - \varepsilon))$, то

$$m_z \leq \frac{q^6 - 1}{2(q - 1)} < \frac{q}{2(q - 1)} q^5 < q^5, \quad m_z \geq \frac{q^6 - 1}{6(q + 1)} > \frac{q^5 - q^4}{6} = \frac{q - 1}{6q} q^5 \geq q^5/7.$$

Применяя лемму 2.6, получаем

$$\exp(L) \leq \frac{q(q^4 - 1)(q^6 - 1)(q^5 - 1)}{(q^2 - 1)(q - 1)} < q^{13} \cdot \frac{q^2}{q^2 - 1} \cdot \frac{q}{q - 1} \leq \frac{343q^{13}}{288} < \frac{6q^{13}}{5}.$$

П. (ii) доказывается аналогично. $\square$

Вернемся к доказательству предложения 3.8.

1. Пусть $S = L_2(u)$. Предположим, что одно из чисел k_z и k_y равно v . Ясно, что $(v \pm 1)/2 \in \omega(S)$, поэтому L — одна из групп, перечисленных в пп. (i)–(iii) леммы 3.9.

Пусть $L = L_4(7)$ и $v = 19$. Тогда $k_z = v$ и $k_y = 25$. Поскольку $R_y \cap \pi(\overline{G}/S) = \emptyset$, либо 25 делит $u^2 - 1$, а значит, 19^5 делит u , либо $5 \in \pi(K)$. В первом случае $(19^5 - 1)/2 \in \omega(S) \setminus \omega(L)$. Во втором случае $5 \cdot (v - 1)/2 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$.

Пусть $L = U_6(7)$ и $v = 19$. Тогда $k_y = v$ и $k_z = 2081$. Поскольку $k_z \in \pi(S)$ и $e(2081, 19) = 2080$, получаем, что 19^{1040} делит u . Значит, $\pi(u^2 - 1) \not\subseteq \pi(L)$.

Пусть, наконец, $L = L_6(11)$ и $v = 37$. Тогда $k_y = v$ и $k_z = 3221$. Используя тот факт, что $e(3221, 37) = 3220$, приходим к противоречию так же, как в предыдущем случае.

Таким образом, ни одно из чисел k_z и k_y не равно v . Значит, k_z делит $(u + \tau)/(2, u - 1)$ для некоторого $\tau \in \{+1, -1\}$.

Предположим, что $r \in R_y \cap \pi(K)$. Тогда $p \in \pi(S)$ и p делит $(u - \tau)/(2, u - 1)$. Кроме того, по лемме 3.6 получаем, что $r = v$ и $m_z = k_z$. Из первого условия следует, что $v \geq 5$, а из второго — что $k_z = (u + \tau)/2$ и либо $L = U_5(q)$, либо $L = L_6(7)$. В любом случае $k_z = k_5(\varepsilon q)$. Если $k_z = (u - 1)/2$, то $(v - 1)/2$ делит k_z , но $v(v - 1)/2 \in \omega(G)$ в силу унисингулярности группы $L_2(v)$ [26, теорема 1.3]. Значит, $k_z = (u + 1)/2$ и p делит $(u - 1)/2 = k_z - 1$. Если $(5, q - \varepsilon) = 5$, то $k_z - 1 = (q^5 - 5q + 4\varepsilon)/5$. Следовательно, $(5, q - \varepsilon) = 1$ и $k_z - 1 = q(q^4 - 1)/(q - \varepsilon)$. Получаем, что $pr_4(q)$ делит $(u - 1)/2$. Однако $pr_4(q) \notin \omega(U_5(q))$, поэтому $L = L_6(7)$ и $k_z = 2801$, откуда $u = 3 \cdot 1867$; противоречие.

Значит, $R_y \cap \pi(K) = \emptyset$. Поскольку $k_y \neq v$, получаем, что k_y делит $(u - \tau)/(2, u - \tau)$. Предположим, что $\{r, r_z, r_y\}$ — коклика в $GK(G)$. Если $r \in \pi(S)$, то $r = v$. Если $r \in \pi(K)$, то опять $r = v$ по лемме 3.6. Если $r \in \pi(\overline{G}/S)$, то, поскольку силовские r_z - и r_y -подгруппы группы S циклические, r делит $k_z - 1$ и $k_y - 1$ по лемме 1.7. В частности, $p \notin \pi(S)$, $p \in \pi(\overline{G}/S)$ и p делит $k_z - 1$ и $k_y - 1$. Ясно, что p не делит $k_4(q) - 1 = (q^2 - 1)/2$, поэтому $L = L_6(\varepsilon q)$.

Несложно проверить, что p делит $(k_5(\varepsilon q) - 1, k_6(\varepsilon q) - 1)$ только при $(5, q - \varepsilon) = (3, q + \varepsilon) = 1$ и тогда

$$(k_z - 1, k_y - 1) = q((q^2 + 1)(q + \varepsilon), q - \varepsilon) = q(4, q - \varepsilon).$$

Следовательно, $R_4(q) \cap \pi(\overline{G}/S) = \emptyset$ и, значит, $R_4(q) = \{v\}$. Тогда $v \equiv 1 \pmod{4}$, поэтому k_z делит $(u + 1)/2$, а k_y делит $(u - 1)/2$. По лемме 1.10 получаем, что

$\pi(K) \subseteq \pi(m_y) \cup R_4(q)$, откуда $\pi(m_z) \cap \pi(K) = \emptyset$. Следовательно, m_z лежит в $\omega(\overline{G})$ и тогда $m_z \leq u + 1$ [23, табл. 3]. Учитывая, что m_z делится на $(u + 1)/2$ и m_z нечетно, получаем, что $m_z = (u + 1)/2$. Поскольку $m_z < q^5$ по лемме 3.10, выполнено неравенство

$$u < 2q^5. \quad (3.5)$$

Отметим, что $p \neq 3$, так как $p \notin \pi(S)$. Если $v \notin \pi(K)$, то $k_4(q) = v$ и

$$u \geq v^p \geq k_4^5(q) > (q^2/2)^5.$$

Если $v \in \pi(K)$, то $R_3(\varepsilon q) \cap \pi(K) = \emptyset$. Кроме того, $R_3(\varepsilon q) \cap \pi(\overline{G}/S) = \emptyset$, поскольку любой автоморфизм нечетного порядка группы S централизует элемент порядка v . Значит, $pk_3(\varepsilon q) \in \omega(\overline{G}) \setminus \omega(S)$, более того, по леммам 2.5 и 2.4

$$k_3(\varepsilon q) \leq \text{meo}(L_2(u^{1/p})) \leq vu^{1/5}/(v-1) \leq 5u^{1/5}/4.$$

Следовательно, $q^2/4 < 5u^{1/5}/4$. В любом случае $u > (q^2/5)^5$. Подставляя это в (3.5), получаем, что $(q^2/5)^5 < 2q^5$, откуда $q^5 < 2 \cdot 5^5$; противоречие с тем, что $q \geq 7$.

2. Пусть $S = S_4(u)$. Тогда k_z делит $(u^2 + 1)/(2, u - 1)$. Если $r \in \pi(L)$ и $t(r, L) \geq 3$, то $r \notin \pi(K)$ в силу лемм 1.5, 3.6 и того, что $t(S) = 2$. В частности, $R_y \cap \pi(K) = \emptyset$ и $p \notin \pi(K)$. Следовательно, $k_y \in \omega(S)$ и $p \in \pi(\overline{G}/S) \setminus \pi(S)$. Из последнего условия вытекает, что $pv \in \omega(G)$, поэтому k_y делит $(u^2 - 1)/(2, u - 1)$. Кроме того, $p \geq 7$.

Для любого r_y силовская r_y -подгруппа группы S является прямым произведением двух циклических групп одного порядка, поэтому p делит $k_y^2 - 1$ по лемме 1.7. По аналогичным соображениям p делит $k_z - 1$. Значит, если $n \neq 6$, то p делит $k_4(q) + 1$ или $k_4(q) - 1$, но это не так. Пусть $L = L_6^\varepsilon(q)$. Тогда $pk_4(q) \in \omega(\overline{G}/S)$ и, значит,

$$u \geq v^{7(q^2+1)/2} > v^{3q^2}.$$

Следовательно, $\text{meo}(S) > u^2/2 > v^{6q^2}/2$. С другой стороны, $\text{meo}(L) \leq 3q^5/2$. Таким образом, $2^{6q^2} < 3q^5$; противоречие с тем, что $q \geq 7$.

3. Предположим, что $S = {}^2B_2(u)$. Тогда k_z делит одно из чисел $u - 1$, $u \pm \sqrt{2u} + 1$, обозначим его через $k(S)$. По лемме 2.2

$$\exp(S) = 4(u^2 + 1)(u - 1) > 7u^3/2.$$

Пусть $r \in \pi(K)$ и $r \neq 2$. Тогда $rk_z \in \omega(G)$ по лемме 2.8. Значит, k_y лежит в $\omega(S)$ и тоже делит одно из чисел $u - 1$, $u \pm \sqrt{2u} + 1$. Еще раз применяя лемму 2.8, получаем, что $rk_y \in \pi(G)$. С учетом леммы 3.2 это означает, что $\pi(K) \subseteq \{2\}$. В частности, $\exp_3(L) \in \omega(\overline{G}/S)$.

Пусть $L = L_6^\varepsilon(q)$. Тогда $\exp_3(L) \geq 9$. Кроме того, в L есть элементы порядков $p(q^4 - 1)/(6, q - \varepsilon)$ и $q^4 - 1$, поэтому $3k_4(q) \in \omega(\overline{G}) \setminus \omega(S)$. Применяя лемму 2.5, получаем, что

$$3q^2/2 < 3k_4(q) < 6u^{1/3},$$

откуда $q < 2u^{1/6}$. Следовательно,

$$7u^3/2 < \exp(S) \leq \exp_{3'}(L) \leq \exp(L)/9 < 2q^{13}/15 < 2^{14}u^{13/6}/15,$$

где оценка на $\exp(L)$ взята из леммы 3.10. Таким образом, $u^{5/6} < 2^{15}/105$, откуда $u \leq 985$. Из условий $u = 2^{2m+1}$ и $9 \in \omega(\overline{G}/S)$ вытекает, что $u = 2^9$, и тогда $q^2 < 4u^{1/3} = 32$; противоречие.

Пусть $L = U_5(q)$. Тогда $k(S) = k_z = k_5(-q)$, откуда

$$\frac{q^5 + 1}{q + 1} = (5, q + 1)k(S).$$

Значит, $k_y = k_4(q)$ делит число $a = (5, q + 1)k(S) - 1$. С другой стороны, $k_y(q) \in \omega(S)$. Стало быть, $k_4(q)$ делит число $(a, \exp_{2'}(S))$. Если $(5, q + 1) = 1$, то $a = u - 2, u \pm \sqrt{2u}$. Поэтому $(a, \exp_{2'}(S))$ делит

$$(u - 2, (u - 1)(u^2 + 1)) = (u - 2, 5),$$

однако $k_4(q) \geq 25$. Если $(5, q + 1) = 5$, то аналогичные подсчеты показывают, что $k_4(q)$ делит 61 при $k(S) = u - 1$ и $31 \cdot 181$ при $k(S) = u \pm \sqrt{2u} + 1$. Поскольку 31 не может лежать в $R_4(q)$ и 5 делит $q + 1$, получаем, что $q = 19$ и $k(S) = 24761$. Уравнения $24761 = u \pm \sqrt{2u} + 1$ не имеют решений.

Пусть $L = L_4^\varepsilon(q)$. Если $p = 3$, то $9 \in \omega(\overline{G}/S)$ и тогда $18 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$. Если $p \neq 3$, то одно из чисел m_z и m_y делится на 3 и, значит, одно из чисел $3k_z$ и $3k_y$ лежит в $\omega(\overline{G}) \setminus \omega(S)$. Поскольку оба числа k_z и k_y оцениваются снизу через $q^2/4$, так же, как и выше, из леммы 2.5 следует, что $q^2/4 \leq 2u^{1/3}$, откуда $q < (8u^{1/3})^{1/2}$. Тогда

$$7u^3/2 < \exp(S) \leq \exp(L) < q^7 < (8u^{1/3})^{7/2} < 1449u^{7/6}.$$

Получаем, что $u = 8$ и $q^2 < 16$; противоречие.

4. Пусть $S = G_2(u)$, где $u > 2$. Тогда k_z делит $u^2 + \tau u + 1$ для некоторого $\tau \in \{+, -\}$ и $u^2 + \tau u + 1$ делит m_z . По лемме 2.1

$$\exp(S) \geq 7(u^6 - 1)/(3, u^2 - 1) > 2u^6.$$

Пусть $r \in \pi(K)$ и $r \neq 2$. Тогда $rk_z \in \omega(G)$ по лемме 2.7. Следовательно, $R_y \subseteq \pi(S)$. Еще раз применяя лемму 2.7, получаем, что $rk_y \in \omega(G)$. Таким образом, $\pi(K) \subseteq \{2\}$.

В частности, $m_z \in \omega(\overline{G})$. Если $m_z \notin \omega(S)$, то $u \geq v^3 \geq 8$ и $m_z < 6u^{2/3}$ по лемме 2.5, откуда

$$6u^{2/3} > u^2 - u + 1 > (u - 1)u \geq 7u;$$

противоречие. Следовательно, $m_z = u^2 + \tau u + 1 \leq 3u^2/2$. Отметим также, что $p \neq 3$. Действительно, в противном случае $\{3, r_z, r_y\}$ — коклика в $GK(S)$ и, значит, $t(3, S) \geq 3$, но $t(3, S) = 2$ при $v \neq 3$.

Пусть $L = L_6^\varepsilon(q)$. Тогда $m_z > q^5/7$ по лемме 3.10 и, значит, $q^5/7 < 3u^2/2$. Следовательно,

$$u \geq (2q^5/21)^{1/2} \geq (2 \cdot 7^4/3)^{1/2} > 40.$$

Тогда $q^5/7 < u^2 + \tau u + 1 < u^2 \cdot u/(u - 1) \leq 41u^2/40$, откуда $u^2 \geq 40q^5/287$. Получаем, что

$$6q^{13}/5 > \exp(L) \geq \exp(S) > 2u^6 \geq 2(40q^5/287)^3,$$

откуда $q^2 < 3 \cdot 287^3/(5 \cdot 40^3) < 222$, т. е. $q = 7, 11, 13$. Несложно проверить, что при этих значениях числа q уравнение $m_z = u^2 + \tau u + 1$ не имеет решений.

Пусть $L = U_5(q)$. Тогда $k_5(-q) = u^2 + \tau u + 1$. Если $(5, q+1) = 1$, то $pr_4(q) \in \omega(S)$, поскольку $pr_4(q)$ делит $u(u + \tau)$, а в S есть элемент порядка $v(u + \tau)$. Если $(5, q+1) = 5$, то $k_4(q)$ делит оба числа $5u^2 + 5\tau u + 4$ и $\exp_{v'}(S)$. Поскольку $\exp_{v'}(S)$ делит $u^6 - 1$, число $(5u^2 + 5\tau u + 4, u^6 - 1)$ делит $8 \cdot 7 \cdot 13$ и $r_4(q) \equiv 1 \pmod{4}$, получаем, что $k_4(q) = 13$, однако $k_4(q) \geq 25$.

Пусть $L = L_4^\varepsilon(q)$. Тогда $m_z > q^3/5$ по лемме 3.10, откуда $q^3 < 15u^2/2$. Следовательно, $u \geq 7$ и $q^3/5 < 7u^2/6$. Значит,

$$q^7 > \exp(L) \geq \exp(S) > 2u^6 \geq 2(6q^3/35)^3,$$

откуда $q^2 < 35^3/(2 \cdot 6^3) < 10^2$, т. е. $q = 7$. Снова уравнение $m_z = u^2 + \tau u + 1$ не имеет решений.

5. Предположим, что $S = {}^3D_4(u)$. Тогда k_z делит $u^4 - u^2 + 1$. По лемме 2.3

$$\exp(S) = \exp_v(S)(u^6 - 1)(u^4 - u^2 + 1) > u^{10}.$$

Если $r \in R_y \cap \pi(K)$, то $p \in \pi(S)$ и $p \notin R_{12}(u)$, следовательно, в S есть нециклическая абелева p -подгруппа (см. описание максимальных торov группы S в [20]). Применяя лемму 1.8, получаем, что $rp \in \omega(G)$; противоречие.

Значит, $k_y \in \omega(S)$. Поскольку любое число из $\pi(S) \setminus R_{12}(u)$ либо делит $v(u^2 - 1)$, либо смежно с делителем числа $v(u^2 - 1)$ в $GK(S)$, все числа из $\pi(v(u^2 - 1))$ лежат в $\pi(m_y)$. В частности, $3 \in \pi(m_y)$. Если $r \in \pi(K)$, то $rr_y \in \omega(G)$ по лемме 1.8, и если к тому же $r \neq v$, то $rr_z \in \omega(G)$ по лемме 2.9. Таким образом, $\pi(K) \subseteq \{v\} \subseteq \pi(m_y)$. В частности, $m_z \in \omega(\overline{G})$. Если $m_z \notin \pi(S)$, то $m_z \leq 10u^{4/5}$ по лемме 2.5 и тогда $u^4 - u^2 + 1 < 10u^{4/5}$, но это неверно. Значит,

$$m_z = u^4 - u^2 + 1.$$

Пусть $L = L_6^\varepsilon(q)$. Предположим, что $r \in R_4(q) \cap \pi(S)$. Тогда $\{r, r_y, r_z\}$ — коклика в $GK(S)$, следовательно, $r \in R_3(\tau u)$ и $R_y \subseteq R_6(\tau u)$ для некоторого $\tau \in \{+, -\}$. В частности, $u > 2$. В $\omega(S)$ есть числа $(u^2 - 1)(u^2 \pm u + 1)$, и в силу предыдущего одно из них делит $p(q^4 - 1)/(6, q - \varepsilon)$ или $q^4 - 1$, а другое — m_y . Следовательно, $u^2 - 1$ делит $(q^4 - 1, m_y)$. Последнее число делит $q + 1$ или $q - 1$, поэтому

$$u^2 - 1 \leq q + 1.$$

С другой стороны, $q^5/7 < m_z < u^4$, откуда $q < (7u^4)^{1/5} < 2u^{4/5}$. Таким образом, $u^2 - 1 < 2u^{4/5} + 1$, что неверно для любого $u \geq 3$.

Если $R_4(q) \cap \pi(S) = \emptyset$, то $k_4(q) \in \omega(\overline{G}/S)$ и, значит, $u^2 > 2q^2$. Тогда

$$6q^{13}/5 > \exp(L) \geq \exp(S) > u^{10} > 2^{5q^2};$$

противоречие.

Пусть $L = U_5(q)$. Тогда

$$\frac{q^5 + 1}{q + 1} = (5, q + 1)(u^4 - u^2 + 1).$$

Если $(5, q + 1) = 1$, то $pr_4(q)$ делит $u^2(u^2 - 1)$. Поскольку в S есть элементы порядков $v(u \pm 1)$ и $u^2 - 1$, получаем, что $pr_4(q) \in \omega(G)$; противоречие. Если $(5, q + 1) = 5$, то $q(q^2 + 1)(q - 1) = 5u^4 - 5u^2 + 4$. Значит, $k_4(q)$ делит $5u^4 - 5u^2 + 4$ и, в частности, $v \notin R_4(q)$. Следовательно, $k_4(q)$ делит $\exp_{v'}(S)/(u^4 - u^2 + 1) = u^6 - 1$. Поскольку

$$(5u^4 - 5u^2 + 4, u^6 - 1) = (5u^4 - 5u^2 + 4, u^2 - 9) = (364, u^2 - 9)$$

и $364 = 4 \cdot 7 \cdot 13$, получаем, что $k_4(q) = 13$; противоречие.

Пусть $L = L_4^\varepsilon(q)$. Тогда $v \notin R_y$ по лемме 3.5. Кроме того, $3 \notin R_y$. Следовательно, для любого r_y силовская r_y -подгруппа группы S является гомоциклической группой ранга 2. Применяя лемму 1.7 с $t = r_z, r_y$ и учитывая, что p не делит $k_4^2(q) - 1$, получаем, что $p \notin \pi(\overline{G}/S)$. Значит, $\{p, r_y, r_z\}$ — коклика в $GK(S)$. Следовательно, $u > 2$ и $p \in R_3(\tau u)$, $R_y \subseteq R_6(\tau u)$ для некоторого $\tau \in \{+, -\}$. В $\omega(S)$ есть числа $(u^2 - 1)(u^2 \pm u + 1)$, и в силу предыдущего одно из них делит $p(q^2 - 1)/2$, а другое — m_y . Таким образом, $u^2 - 1$ делит $((q^2 - 1)/2, m_y)$, что, в свою очередь, делит $q + 1$ или $q - 1$, поэтому

$$u^2 - 1 \leq q + 1.$$

С другой стороны, $q^3/5 < m_z < u^4$, откуда $q < (5u^4)^{1/3} < 2u^{4/3}$. Таким образом, $u^2 - 1 < 2u^{4/3} + 1$, откуда $u = 3$ и тогда $q = 7$. Значит, $u^4 - u^2 + 1 = 73$ и $k_z = 19, 25$; противоречие. $\square$

§ 4. Доказательство основной теоремы

В этом параграфе будет доказана теорема 2, а потом в качестве следствия получена теорема 1. На протяжении всего параграфа $L = L_4^\varepsilon(q)$, где q — степень нечетного простого числа p . Как и ранее, S — простая группа лиева типа над полем характеристики $v \neq p$ и порядка u , G — конечная группа, изоспектральная L , K — разрешимый радикал группы G и $S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut } S$. В силу леммы 3.7 можно считать, что $q \geq 9$.

Напомним, что для $L = L_4^\varepsilon(q)$ выполнено $R_z(L) = R_z(\varepsilon q)$ и $R_y(L) = R_y(\varepsilon q)$, где $z = 4, y = 3$ при $(q - \varepsilon)_2 > 4$ и $z = 3, y = 4$ при $(q - \varepsilon)_2 \leq 4$. Отметим, что при $(q - \varepsilon)_2 = 4$ числа из $R_y(L)$ тоже не смежны с 2 в $GK(L)$. Иногда для удобства будем писать R_z вместо $R_z(L)$, k_z вместо $k_z(L)$ и т. п. Число $k_z(L)$ лежит в $\omega(S)$ по лемме 1.5. Значит, найдется число $k(S) \in \omega(S)$ такое, что $k_z(L)$ делит $k(S)$ и все простые делители числа $k(S)$ не смежны с 2 в $GK(S)$. Ясно, что $k_z(L) \leq k(S)$ и это неравенство дает нижнюю оценку на параметры группы S в терминах q . С другой стороны, $\exp(S) \leq \exp(L)$, и это дает верхнюю оценку. Покажем, что для всех исключительных групп, не рассмотренных в предложении 3.8, а также для классических групп размерностей, больших 9, эти две оценки несовместны. Затем отдельно рассмотрим классические группы небольших размерностей.

Лемма 4.1. Пусть $q \geq 9$ и $k \in \{k_3(\varepsilon q), k_4(\varepsilon q)\}$. Тогда $k > 3q^2/10$ и $\exp(L) < 31k^{7/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что

$$\exp(L) = \exp_p(L) \cdot \frac{(q^4 - 1)(q^2 + \varepsilon q + 1)}{2} < q^3 k_4(q)(q^2 + \varepsilon q + 1).$$

Если $k = k_4(q)$, то $k = (q^2 + 1)/2 > q^2/2$ и

$$\frac{q^2 + \varepsilon q + 1}{k} \leq \frac{2(q^2 + q + 1)}{q^2 + 1} \leq \frac{91}{41}.$$

Следовательно,

$$\exp(L) < 2^{3/2} \cdot \frac{91}{41} k^{7/2} < 7k^{7/2}.$$

Если $k = k_3(\varepsilon q)$, то

$$k \geq \frac{q^2 - q + 1}{3} > \frac{q^3}{3(q + 1)} \geq \frac{3q^2}{10}.$$

Кроме того,

$$\frac{k_4(q)}{k} \leq \frac{3(q^2 + 1)}{2(q^2 - q + 1)} \leq \frac{123}{73}.$$

Таким образом,

$$\exp(L) < 3q^3 k k_4(q) < 3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{3/2} \cdot \frac{123}{73} k^{7/2} < 31k^{7/2}. \quad \square$$

Лемма 4.2. Пусть $q \geq 9$. Тогда $k_z(L) \geq 37$.

(i) Если $k_z(L) \leq 91$ или $k_z(L) = 127$, или $k_z(L) = 271$, то L содержится в следующей таблице:

$k_z(L)$	37	41	61	73	91	127	271
L	$U_4(11)$	$L_4(9)$	$L_4(13)$	$U_4(9)$	$U_4(17)$	$L_4(19)$	$U_4(29)$

(ii) $k_z(L)$ не может быть равно $7 \cdot 31$, 257, 521, 2801.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $k_z(L) \leq 91$. Тогда $3q^2 < 910$ по лемме 4.1 и, значит, $q \leq 17$. Вычисляя $k_z(L)$ для всех $q \leq 17$, получаем соответствующую часть таблицы из п. (i).

Предположим, что $k_z(L) = 127$. Тогда $q^2 = 127 \cdot 2 - 1 = 11 \cdot 23$ или $q(q + \varepsilon) = 126 = 2 \cdot 9 \cdot 7$, или $q(q + \varepsilon) = 126 \cdot 3 - 1 = 4 \cdot 5 \cdot 19$. Поскольку q является наибольшим нечетным примарным делителем числа $q(q + \varepsilon)$, выполнено только последнее равенство, при этом $q = 19$, $\varepsilon = +$ и $127 = k_3(q)$. Осталось отметить, что по определению $k_z(L_4(19)) = k_3(q)$. Случай $k_z(L) = 271$ и случаи из (ii) рассматриваются аналогично. $\square$

Лемма 4.3. Пусть $k \in \omega(S)$ и любой простой делитель числа k не смежен с 2 в $GK(S)$. Тогда выполнены следующие утверждения.

- (i) Если $S = E_8(u)$, то $\exp(S) > k^{10}/29$.
- (ii) Если $S = E_7(u)$, то $\exp(S) > k^8/24$.
- (iii) Если $S = E_6^\pm(u)$, то $\exp(S) > k^{13/3}/3$.
- (iv) Если $S = F_4(u)$, то $\exp(S) > 13k^4/4$.
- (v) Если $S = {}^2F_4(u)$, то $\exp(S) > k^5/4$.
- (vi) Если $S = {}^2G_2(u)$, то $\exp(S) > 2u^4 > k^4/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки на число $\exp(S)$ взяты из [12, лемма 2.11] (отметим, что в ней есть небольшая неточность: $\exp({}^2F_4(u)) > 5u^{10}$ только при $u > 8$, а при $u = 8$ выполнено $\exp({}^2F_4(u)) > 14u^{10}/3$). Возможности для числа k вытекают из критерия смежности с числом 2 [8, предложения 3.2, 3.3 и 4.5]. В частности, если S — группа из случаев (i)–(iv), то k делит $k_j(u)$ для некоторого j .

Пусть $S = E_8(u)$. Тогда $j \in \{30, 24, 20, 15\}$ и, значит, $k \leq u^8 + u^7 \leq 3u^8/2$. С другой стороны, $\exp(S) > 2u^{80}$. Следовательно, $\exp(S) > 2^{11}k^{10}/3^{10} > k^{10}/29$.

Пусть $S = E_7(u)$. Тогда $j \in \{18, 14, 9, 7\}$. Если $u \geq 3$, то $k < 3u^6/2$ и $\exp(S) > 3u^{48}$, поэтому $\exp(S) > 2^8k^8/3^7 > k^8/9$. Если $u = 2$, то $k < 2u^6$ и $\exp(S) > 32u^{48}/3$, следовательно, $\exp(S) > k^8/24$.

Если $S = E_6^\pm(u)$, то $j \in \{18, 12, 9, 8\}$, поэтому $k \leq u^6 + u^3 + 1 < u^9/(u^3 - 1) \leq 8u^6/7$. Значит, $\exp(S) > u^{26} > (7k/8)^{13/3} > k^{13/3}/3$.

Пусть $S = F_4(u)$. Тогда $j \in \{12, 8\}$. Если u нечетно, то $k < u^4$ и

$$\exp(S) \geq 13u^{16}/4 \geq 13k^4/4.$$

Если $v = 2$, то $k \leq u^4 + 1$ и $\exp(S) \geq 16u^{16} \geq 8k^4$.

Пусть $S = {}^2F_4(u)$, где $u \geq 8$. Тогда $k \leq u^2 + \sqrt{2u}u + u + \sqrt{2u} + 1 \leq 109u^2/64$ и $\exp(S) > 14u^{10}/3$. Значит, $\exp(S) > 14(64k/109)^5/3 > k^5/4$.

Если $S = {}^2G_2(u)$, где $u \geq 27$, то $k \leq u + \sqrt{3u} + 1 \leq 37u/27$ и $\exp(S) > 2u^4$, поэтому $\exp(S) > 2(27k/37)^4 > k^4/2$. $\square$

Лемма 4.4. S не является исключительной группой лиева типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. В силу предложения 3.8 можно считать, что S — одна из групп, перечисленных в лемме 4.3.

Если $S \neq F_4(u)$, ${}^2G_2(u)$, то, применяя леммы 4.1 и 4.3, получаем, что

$$k(S)^5/4 < \exp(S) \leq \exp(L) < 31k_z(L)^{7/2} \leq 31k(S)^{7/2},$$

откуда $k(S) < 25$; противоречие с тем, что $k(S) \geq k_z(L) \geq 37$.

Пусть $S = F_4(u)$. Тогда $13k(S)^4/4 < 31k(S)^{7/2}$, следовательно, $k(S) \leq 90$. Значит, $(u^4 + 1)/2 \leq 90$, откуда $u \leq 3$. Если $u = 2$, то $k(S) \leq 17$, что неверно. Если $u = 3$, то $k(S) = 73$ и, значит, $k_z(L) = 73$. Тогда $L = U_4(9)$ по лемме 4.2, но это противоречит тому, что $\pi(F_4(3)) \not\subseteq \pi(U_4(9))$.

Пусть $S = {}^2G_2(u)$. Тогда $k(S)^4/2 < 31k(S)^{7/2}$, поэтому $k(S) < 62^2$. Значит, $u - \sqrt{3u} + 1 < 62^2$, откуда $u \leq 3^7$. Если $u = 3^7$, то $2u^4 > 31(u + \sqrt{3u} + 1)^{7/2}$, что приводит к тому, что $\exp(S) > \exp(L)$. Если $u = 3^5$, то $k(S)$ — одно из чисел 271, $7 \cdot 31$. Тогда из леммы 4.2 следует, что $L = U_4(29)$, однако $31 \notin \pi(U_4(29))$. Если $u = 3^3$, то $k(S) \in \{37, 19\}$. Значит, $L = U_4(11)$, но тогда $19 \notin \pi(L)$. $\square$

В оставшейся части доказательства будем использовать оценки на периоды классических групп из леммы 2.6. В этих оценках участвует функция $F(m) = \sum_i^m \varphi(i)$, и для удобства в табл. 6 приведены значения этой функции для небольших m .

Таблица 6. Значения функции $F(m)$ для $5 \leq m \leq 19$

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$F(m)$	10	12	18	22	28	32	42	46	58	64	72	80	96	102	120

Лемма 4.5. S отлична от $L_m^\tau(u)$, где $m \geq 9$, от $S_{2m}(u)$, $O_{2m+1}(u)$, $O_{2m}^\tau(u)$, где $m \geq 5$, а также от групп $S_6(u)$, $O_7(u)$, $O_8^+(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = L_m^\tau(u)$, где $m \geq 9$. Тогда

$$\exp(S) \geq \frac{m}{c} \prod_{i=1}^m \Phi_i(\tau u) \geq u^{3F(m)/4}, \quad (4.1)$$

где $c = r$, если m — степень простого числа r и r делит $u - \tau$, и $c = 1$ в противном случае. Кроме того,

$$k(S) \leq \max\{k_m(\tau u), k_{m-1}(\tau u)\} < u^m.$$

Применяя (4.1) и лемму 4.1, имеем

$$u^{3F(m)/4} < \exp(S) \leq \exp(L) < 31k_z^{7/2} \leq 31(k(S))^{7/2} < 31u^{7m/2},$$

откуда $3F(m)/4 < 5 + 7m/2$. Используя лемму 1.3 и табл. 6, выводим из последнего неравенства, что $m \leq 16$. Если $m = 15, 16$, то $k(S) < u^9$, поэтому сравнение периодов приводит к тому, что $3F(m)/4 < 5 + 63/2 < 37$, однако $3F(15)/4 = 54$.

Для $m \leq 14$ используем более точную оценку из (4.1) и лемму 1.4. Для $m = 14, 13$ получаем

$$4u^{F(m)}/27 < 31u^{7m/2},$$

откуда $F(m) < 8 + 7m/2 \leq 57$, но это не так. Если $m = 12$, то $k(S) < u^{11}$ и

$$12 \cdot 2u^{F(m)}/9 < 31u^{77/2},$$

откуда $F(m) < 4 + 77/2$, однако $F(12) = 46$.

Пусть $m = 11, 10, 9$. Тогда $k(S) \leq 2u^l$, где $l = 10$ в первом случае и $l = 6$ в двух последних. Значит,

$$2u^{F(m)}/9 < 31(2u^l)^{7/2},$$

откуда следует, что

$$u^{F(m)} < 9 \cdot 31 \cdot 2^{7/2} u^{7l/2} / 2 < 3^7 u^{7l/2}.$$

Если $u \geq 3$, то $F(m) < 7 + 7l/2$, однако $F(11) = 42$ и $F(9) = 28$. Пусть $u = 2$. Тогда $s \leq 3$. Если $k(S) \neq k_{11}(2)$, то $k(S) \leq 8u^l/7$, поэтому

$$3 \cdot 2u^{F(m)}/9 < 31 \cdot (8/7)^{7/2} u^{7l/2} < 64u^{7l/2}$$

и тогда $F(m) < 7 + 7l/2$, но, как отмечено, это не так. Осталось рассмотреть случай $k(S) = k_{11}(2) = 23 \cdot 89$. Поскольку 23 не может делить k_z , получаем, что $k_z = 89$. Это противоречит лемме 4.2.

Пусть $S = O_{2m}^*(u)$, где $m \geq 5$ нечетно. Тогда

$$\exp(S) = \frac{v^l}{(2, u-1)} \Phi_m(\tau u) \prod_{i=1}^{m-1} \Phi_i(u^2) \geq \frac{2m-1}{2} u^{3(F(m)+F(m-1))/4}, \quad (4.2)$$

где v^l — наименьшая степень числа v , большая $2m-3$. При этом

$$k(S) \leq \max\{k_{2m-2}(u), k_m(\tau u)\} < \frac{u^m}{u-1} \leq u^m.$$

Если $m \geq 9$, то

$$17u^{3(F(m)+F(m-1))/4}/2 < 31u^{7m/2},$$

откуда $3(F(m)+F(m-1))/2 < 4+7m$. Используя лемму 1.3 и табл. 6, несложно проверить, что это неверно.

Пусть $m = 7$. Применяя лемму 1.4, из (4.2) получаем

$$\exp(S) > \frac{13}{2} \cdot \frac{2u^6}{3} \cdot \frac{u^{24}}{2} > 2u^{30}$$

и, значит, $2u^{30} < 31u^{49/2}$, откуда $u^{11/2} < 16$; противоречие.

Пусть $m = 5$. Тогда

$$\exp(S) > \frac{v^l}{2} \cdot \frac{2u^4}{3} \cdot \frac{u^{12}}{2} = \frac{v^l u^{16}}{6} \geq \frac{3u^{16}}{2}.$$

Если $u \geq 7$, то $k(S) \leq 7u^4/6$ и, значит,

$$3u^{16} < 62(7/6)^{7/2} u^{14} < 107u^{14},$$

откуда $u^2 < 36$; противоречие. Если $u = 5$, то $25u^{16}/6 < 31(5/4)^{7/2}u^{14}$, откуда $u^2 \leq 16$. Таким образом, $u \leq 4$.

Если $u = 2$, то $k(S) < 37$. Если $u = 3$, то $k(S)$ — одно из чисел $k_8(3) = 41$, $k_5(3) = 11^2$, $k_{10}(3) = 61$, поэтому $k_z = 41$ или $k_z = 61$. По лемме 4.2 группа L равна $L_4(9)$ или $L_4(13)$ соответственно. В первом случае $v = p$, во втором случае $41 \in \pi(S) \setminus \pi(L)$. Если $u = 4$, то $k(S)$ — одно из чисел $41 = k_{10}(4)$, $11 \cdot 31 = k_5(4)$, $257 = k_8(4)$, поэтому $k_z = 41$ или $k_z = 257$. Второй случай невозможен, в первом случае $L = L_4(9)$ и тогда $257 \in \pi(S) \setminus \pi(L)$.

Пусть S — одна из групп $S_{2m}(u)$, $O_{2m+1}(u)$, где $m = 3$ или $m \geq 5$, или $S = O_{2m}^-(u)$, где $m \geq 6$ чётно, или $S = O_{2m+2}^+(u)$, где $m \geq 3$ нечётно. Тогда

$$\exp(S) \geq \frac{v^l}{c} \prod_{i=1}^m \Phi_i(u^2) \geq \frac{v^l}{c} u^{3F(m)/2},$$

где v^l — наименьшая степень числа v , большая $2m-3$, $c = (2, u-1)^2$ при $m = 2^s$ и $c = (2, u-1)$ в противном случае. При этом

$$k(S) \leq \max\{k_{m-1}(u), k_{2m-2}(u), k_m(u), k_{2m}(u)\} < 2u^m \leq u^{m+1}.$$

Если $m \geq 5$, то $v^l/c \geq 4$, поэтому

$$4u^{3F(m)/2} < 31u^{7(m+1)/2},$$

откуда $3F(m) < 6 + 7(m+1)$. Из последнего неравенства вытекает, что $m \leq 8$. Тогда $\prod_{i=1}^m \Phi_i(u^2) > u^{2F(m)}/2$ по лемме 1.4 и, значит, $2u^{2F(m)} < 31u^{7(m+1)/2}$. Следовательно, $2F(m) < 4 + 7(m+1)/2$ и $m = 5, 6$.

Если $m = 5, 6$, то $k(S) \leq 2u^4$ и, значит,

$$u^{2F(m)} < 31(2u^4)^{7/2}/2 < 3^5 u^{14} < 2^8 u^{14}.$$

Следовательно, $2F(m) < 19$ при $u \geq 3$ и $2F(m) < 22$ при $u = 2$. Таким образом, $u = 2$ и $m = 5$. Тогда $k(S) = 11, 31$; противоречие.

Пусть $m = 3$. Тогда $S = S_6(u), O_7(u), O_8^+(u)$, поэтому

$$\exp(S) = \frac{v^l}{(2, u-1)} \prod_{i=1}^3 \Phi_i(u^2) > \frac{v^l}{(2, u-1)} u^8,$$

где v^l — наименьшая степень числа v , большая 5. Предположим, что $u \geq 11$. Тогда $k(S) \leq 11u^2/10$, поэтому

$$7u^8/2 < 31(11u^2/10)^{7/2},$$

откуда $u < 13$. Если $u = 11$, то $v^l = 11$, поэтому

$$11u^8/2 < 31(11u^2/10)^{7/2}$$

и, значит, $u < (7/11) \cdot 13 < 9$; противоречие. Таким образом, $u \leq 9$. Следовательно, $k_z \leq u^2 + u + 1 \leq 91$. Применяя лемму 4.2, видим, что $q = 9$ или L — одна из групп $U_4(11)$, $L_4(13)$, $U_4(17)$.

Если $L = U_4(17)$, то $k_z = 91$, поэтому $u = 9$. В этом случае $\pi(S) \not\subseteq \pi(L)$. Если $L = L_4(13)$ или $L = U_4(11)$, то $2 \cdot 61 \notin \omega(L)$, следовательно, $61 \in \pi(S) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, 61\}$, но согласно [44, табл. 1] ни одна из групп $S_6(u)$, $O_7(u)$, $O_8^+(u)$ с $2 \leq u \leq 9$ этим условиям не удовлетворяет. Если $q = 9$, то, как несложно

убедиться, k_z — самое большое простое число в $\pi(L)$, и этот случай разбирается аналогично. $\square$

Прежде чем рассматривать оставшиеся классические группы, напомним, что $m_z(L) \neq k_z(L)$ при $L = L_4^\varepsilon(q)$ и $q \geq 9$ (это отмечено в начале доказательства предложения 3.8). Следовательно, $(\{p\} \cup R_y(L)) \cap \pi(K) = \emptyset$ по лемме 3.6 и $v \notin R_y(L)$ по лемме 3.5. Таким образом, $k_y(L)$ — порядок некоторого полупростого элемента группы S .

Лемма 4.6. $S \neq S_8(u), O_9(u), O_8^-(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда либо k_z делит $u^4 + 1$, либо $S = O_8^-(u)$ и $v = 2$. В последнем случае k_z также может делить $k_3(u)$ или $k_6(u)$. В любом случае из условия $k_z \geq 37$ вытекает, что $u > 2$.

Поскольку

$$\exp(S) \geq 7(u^8 - 1)(u^4 + u^2 + 1)/4 > 7u^{12}/4$$

и $\exp(L) \leq q^8/(2q - 2) \leq 9q^7/16$ по лемме 3.10, получаем

$$q^7 > 28u^{12}/9 > 3u^{12}. \quad (4.3)$$

Допустим, что $m_z \in \omega(\overline{G})$. Тогда $m_z \leq 3u^4/2$ по лемме 2.4. С другой стороны, $m_z \geq q^3/5$ по лемме 3.10. Значит,

$$u^4 \geq 2q^3/15 \quad (4.4)$$

и, в частности, $u \geq 4$. Подставляя (4.4) в (4.3), получаем, что $q^7 > 3(2q^3/15)^3$, откуда $q \leq 11$. Теперь из последнего неравенства и (4.4) следует, что $u < 4$; противоречие.

Следовательно, найдется $r \in \pi(m_z/k_z) \cap \pi(K)$. Допустим, что k_z делит $u^4 + 1$. Тогда $R_y \cap R_8(u) = \emptyset$, поэтому найдется $s \in R_y$ такое, что s делит порядок собственной параболической подгруппы группы S . Применяя лемму 1.10, получаем, что $r = v$. Если $S \neq O_8^-(u)$, то r смежно с r_y , что невозможно, поэтому $S = O_8^-(u)$ и $R_y \subseteq R_3(u) \cup R_6(u)$, откуда $k_y \leq 2u^2$. Если k_z не делит $u^4 + 1$, то $k_z \leq 2u^2$. В любом случае $3q^2/10 \leq 2u^2$ по лемме 4.1. Вместе с (4.3) это приводит к тому, что $q < 9$; противоречие. $\square$

Лемма 4.7. $S \neq L_m^\tau(u)$, где $3 \leq m \leq 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда k_z делит $k_m(\tau u)$ или $k_{m-1}(\tau u)$.

Предположим, что $p = 3$. Тогда $\{3, r_z, r_y\}$ — коклика в $GK(S)$. Поскольку 3 делит $u^2 - 1$, это возможно, только если $(m)_3 = (u - \tau)_3 > 1$ и $R_y \subseteq R_{m-1}(\tau u) \cup R_m(\tau u)$. Значит, m равно 3 или 6, $(u - \tau)_3 = 3$ и в S есть циклическая холлова R_y -подгруппа. Если $m = 6$, то в S есть элемент порядка $[u^3 - \tau, u^2 - 1]$. Это число кратно, но не равно 9. С другой стороны, $9 \in \mu(L)$. Если $m = 3$, то $\exp_3(S) = 3$, поэтому $3 \in \pi(\overline{G}/S)$. Применяя лемму 1.7, получаем, что 3 делит $k_z - 1$ и $k_y - 1$, а значит, и $k_4(q) - 1$, но это не так. Следовательно, $p \neq 3$. В частности, $q \geq 11$, и, применяя лемму 3.10, получаем $\exp L < 11q^7/20$.

Пусть $m = 7, 8$. Тогда в силу лемм 2.6 и 1.4

$$\exp(S) \geq \frac{m}{c} \prod_{i=1}^m \Phi_i(\tau u) > \frac{m}{c} \cdot \frac{u^{F(m)}}{3},$$

где $c = (2, u - \tau)$ при $m = 8$ и $c = (7, u - \tau)$ при $m = 7$.

Предположим, что $m_z \in \omega(\overline{G})$. Тогда $q^3/5 < m_z \leq 2u^{m-1}$ в силу лемм 3.10 и 2.4. Следовательно,

$$q^3 < 10u^{m-1} \quad (4.5)$$

и

$$\exp(S) < 11(10u^{m-1})^{7/3}/20 < 119u^{7(m-1)/3}.$$

Если $m = 8$, то $4u^{22}/3 < 119u^{49/3}$, откуда $u = 2$. Если $m = 7$, то $u^{18}/3 < 119u^{14}$, откуда $u \leq 4$, но тогда $c = 1$ и, значит, $7u^{18}/3 < 119u^{14}$, что опять дает $u = 2$. Следовательно, $k(S)$ — это одно из чисел 7, 17, 43 и 127. Применяя лемму 4.2, получаем, что $k_z = 127$ и $q = 19$. Тогда $\tau = +$ и $31 \in \omega(S) \setminus \omega(L)$.

Таким образом, $m_z \notin \omega(\overline{G})$ и, значит, найдется $r \in \pi(m_z/k_z) \cap \pi(K)$. Если $r = v$, то $R_y \subseteq R_m(\tau u) \cup R_{m-1}(\tau u)$ в силу критерия смежности с v . Если $r \neq v$, то $R_y \subseteq R_m(\tau u) \cup R_{m-1}(\tau u)$ в силу леммы 1.10. В любом случае R_y лежит в одном из множеств $R_m(\tau u)$ и $R_{m-1}(\tau u)$, а R_z — в другом. Используя оценку на k_z и k_y из леммы 4.1, получаем, что $3q^2/10 < \min\{k_{m-1}(\tau u), k_m(\tau u)\}$. Если $m = 7$, то $3q^2/10 < k_6(\tau u) < 2u^2$, откуда

$$q < 3u. \quad (4.6)$$

Если $m = 8$, то $3q^2/10 < k_8(u) \leq u^4 + 1$ и, значит,

$$q < 2u^2. \quad (4.7)$$

Оба условия (4.6) и (4.7) сильнее, чем условие (4.8), поэтому они также приводят к противоречию.

Пусть $m = 6$. Тогда

$$\exp(S) \geq v^l(u-1)(u^4+u^2+1)(u^2+1)(u^5+1) > 7u^{12} \cdot \frac{u-1}{u},$$

где v^l — наименьшая степень числа v , большая 5.

Предположим, что одно из множеств R_z, R_y лежит в $R_6(\tau u)$. Тогда $u \neq 2$ и $3q^2/10 < 3u^2/2$, откуда $u^2 > q^2/5$ и, значит, $u \geq 5$. Следовательно,

$$11q^7/20 > \exp(L) \geq \exp(S) > 28u^{12}/5 > 28(q^2/5)^6/5,$$

однако это противоречит тому, что $q \geq 11$.

Значит, $R_y \not\subseteq R_6(\tau u)$ и $R_z \subseteq R_5(\tau u)$, в частности, $u \geq 3$. Если число

$$\frac{u^5 - \tau}{(6, u - \tau)k_5(\tau u)}$$

больше единицы, то любой простой делитель этого числа смежен в $GK(S)$ с любым другим числом из $\pi(S) \setminus R_6(\tau u)$. Тогда у некоторых r_z и r_y есть общие соседи в $GK(S)$, но это невозможно. Значит, $u^5 - \tau = (6, u - \tau)k_5(\tau u)$, откуда следует, что $u - \tau$ делит 6. Таким образом, либо $\tau = +$ и $u = 3, 4, 7$, либо $\tau = -$ и $u = 5$. Тогда $k(S) = k_5(\tau u)$ равно одному из чисел $11^2, 11 \cdot 31, 521, 2801$, поэтому $k_z = 521$ или $k_z = 2801$. По лемме 4.2 это невозможно.

Пусть $m = 5$. Тогда

$$\exp(S) \geq \frac{v^l}{(5, u - \tau)}(u-1)(u^2-u+1)(u^2+1)(u^5+1) > \frac{v^l u^{10}}{(5, u - \tau)} \cdot \frac{u-1}{u+1},$$

где v^l — наименьшая степень числа v , большая 4.

Предположим, что одно из множеств R_z и R_y лежит в $R_4(u)$. Тогда $3q^2/10 < u^2 + 1$, откуда $2q^2/7 < u^2$ и, значит, $u \geq 5$. Следовательно, $\exp(S) > 2u^{10}/3$. Тогда

$$11q^7/20 > \exp(L) > 2u^{10}/3 > 2(2q^2/7)^5/3,$$

откуда $q < 11$; противоречие. Значит, $R_z \subseteq R_5(\tau u)$ и $R_y \cap R_i(\tau u) \neq \emptyset$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$.

Допустим, что $p \in \pi(S)$. Тогда $p \in R_4(u)$, поскольку в противном случае p смежно с числом из $R_y \cap R_i(\tau u)$ в $GK(S)$. Более того, $R_y \subseteq R_3(\tau u) \cup \{5\}$, причем если $5 \in R_y \setminus R_3(\tau u)$, то $(u - \tau)_5 = 5$. Также отметим, что $p \equiv 1 \pmod{4}$, в частности, $q \geq 13$.

Если $5 \notin R_y$, то $k_y \leq k_3(\tau u)$ и, значит, $3q^2/10 < 2u^2$. Следовательно, $u \geq 7$ и

$$13q^7/22 > \exp(L) > 3u^{10}/4 > 3(3q^2/20)^5/4,$$

что приводит к тому, что $q \leq 19$. Таким образом, $q = 13$ или 17 . Если $L \neq L_4(17)$, то $y = 4$ и $5 \in R_y$. Если $L = L_4(17)$, то $k_z = 5 \cdot 29$, но это противоречит тому, что $R_z \subseteq R_5(\tau u)$.

Если $5 \in R_y$ и $(u - \tau)_5 = 5$, то $y = 4$, $(k_4(q))_5 = \exp_5(L) = \exp_5(S) = 5$ и $u \geq 4$, поэтому $q^2/10 < (k_y)_{5'} \leq k_3(\tau u) < 4u^2/3$. Следовательно,

$$13q^7/22 > 3u^{10}/5 > 3(3q^2/40)^5/5,$$

откуда $q \leq 73$. Учитывая, что $p \equiv 1 \pmod{4}$ и $5 \in R_4(q)$, получаем, что q — одно из чисел $13, 17, 37, 53, 73$. Тогда из неравенства $13q^7/22 > 3u^{10}/5$ вытекает, что $u \leq 19$, а затем из условий $(u - \tau)_5 = 5$, $p \in R_4(u)$ и $y = 4$ — что $u = 4$, $\tau = -$, $q = 17$ и $\varepsilon = -$. Это приводит к противоречию, поскольку $29 \in R_4(17)$ и $29 \notin R_6(4)$.

Пусть $p \notin \pi(S)$. Тогда $p \geq 7$ и $p \in \pi(\overline{G}/S)$. Если $r \in R_y$, то $r \neq 2, 3, v$, поэтому порядок силовой r -подгруппы группы S равен $\exp_r(S)^j$, где $j \in \{1, 2, 4\}$. Применяя лемму 1.7, получаем, что p делит $k_4^4(q) - 1$. Как отмечалось, p не делит $k_4(q) - 1$ и, кроме того, p не делит ни $k_4(q) + 1 = (q^2 + 3)/2$, ни $k_4^2(q) + 1 = (q^4 + 2q^2 + 5)/4$.

Пусть $m = 3$. Если $p \in \pi(S)$, то $\{p, r_z, r_y\}$ — коклика в $GK(S)$, не содержащая $2, 3, v$, но таких коклик там нет. Значит, $p \in \pi(\overline{G}/S)$. Если $r \in R_y$, то $r \neq 2, 3, v$, поэтому силовая r -подгруппа группы S гомотическая ранга не выше 2. По лемме 1.7 получаем, что p делит $k_z - 1$ и $k_y^2 - 1$. Однако p не делит $k_4^2(q) - 1$.

Пусть $m = 4$. Рассуждая так же, как в предыдущем случае, получаем, что $p \in \pi(\overline{G}/S)$ и для некоторого $r \in R_y$ силовая r -подгруппа группы S не является гомотической ранга не выше 2. Из последнего условия следует, что $r \in R_1(\tau u)$. Тогда $R_z \subseteq R_4(\tau u)$. Если $u + \tau \neq 1$, то любой простой делитель числа $u + \tau$ — общий сосед для r и r_z . Значит, $u = 2$; противоречие с тем, что $p \in \pi(\overline{G}/S)$. $\square$

В предложении 3.8 и леммах 4.4–4.7 рассмотрены все возможности для группы S , значит, теорема 2 доказана.

Теперь докажем теорему 1. Пусть G — конечная группа, изоспектральная L . В силу леммы 1.5 у группы G единственный неабелев композиционный фактор S , другими словами, $S \leq G/K \leq \text{Aut } S$, где K — разрешимый радикал

группы G . Фактор S не может быть знакопеременной или спорадической группой по [13, теоремы 1 и 2], поэтому S — группа лиева типа. По теореме 2 характеристика определения группы S равна p и, значит, $S \simeq L$ по [13, теорема 3]. Если $K \neq 1$, то по [6, следствие 1] группа G не может быть изоспектральна L . Следовательно, $S \leq G \leq \text{Aut } S$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V. On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 5. P. 741–759.
2. Гречкосеева М. А. О спектрах почти простых расширений ортогональных групп четной размерности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 791–813.
3. Staroletov A. On almost recognizability by spectrum of simple classical groups // Int. J. Group Theory. 2017. V. 6, N 4. P. 7–33.
4. Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V., Zvezdina M. A. Recognition of symplectic and orthogonal groups of small dimensions by spectrum // J. Algebra Appl. 2019. V. 18, N 12. 1950230 [33 pages].
5. Grechkoseeva M. A. On orders of elements of finite almost simple groups with linear or unitary socle // J. Group Theory. 2017. V. 20, N 6. P. 1191–1222.
6. Grechkoseeva M. A., Skresanov S. V. On element orders in covers of $L_4(q)$ and $U_4(q)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. V. 17. P. 585–589.
7. Roitman M. On Zsigmondy primes // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125, N 7. P. 1913–1919.
8. Васильев А. В., Вдовин Е. П. Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
9. Васильев А. В., Вдовин Е. П. Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
10. Васильев А. В. О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
11. Васильев А. В., Горшков И. Б. О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 292–299.
12. Yang N., Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V. On the nilpotency of the solvable radical of a finite group isospectral to a simple group // J. Group Theory. 2020. V. 23, N 3. P. 447–470.
13. Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Старолетов А. М. О конечных группах, изоспектральных простым линейным и унитарным группам // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 39–53.
14. Мазуров В. Д. Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
15. Vasil'ev A. V. On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. 2015. V. 423. P. 318–374.
16. Бутурлакин А. А. Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.
17. Бутурлакин А. А. Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.
18. Deriziotis D. I. Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. Essen: Univ. Essen Fachbereich Math., 1984.
19. Suzuki M. On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. (2). 1962. V. 75. P. 105–145.
20. Deriziotis D. I., Michler G. O. Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 303. P. 39–70.
21. Grechkoseeva M. A., Zvezdina M. A. On spectra of automorphic extensions of finite simple groups $F_4(q)$ and ${}^3D_4(q)$ // J. Algebra Appl. 2016. V. 15, N 9. P. 1650168 [13 pages].
22. Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д. Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.
23. Guest S., Morris J., Praeger C. E., Spiga P. On the maximum orders of elements of finite almost simple groups and primitive permutation groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2015. V. 367. P. 7665–7694.
24. Гречкосеева М. А. Порядки элементов конечных почти простых групп // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 6. С. 754–758.
25. Заварницин А. В. О распознавании конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.

26. Guralnick R. M., Tiep P. H. Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. V. 6, N 3. P. 271–310.
27. Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д., Чао Х. П., Чен Г. Ю., Ши В. Д. Распознавание конечных простых групп $F_4(2^m)$ по спектру // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1256–1262.
28. Chang B., Ree R. The characters of $G_2(q)$ // Symposia Mathematica. New York: Acad. Press, 1974. V. 13. P. 395–413.
29. Enomoto H. The characters of the finite Chevalley group $G_2(q)$, $q = 3^f$ // Japan. J. Math. (N. S.) 1976. V. 2, N 2. P. 191–248.
30. Enomoto H., Yamada H. The characters of $G_2(2^n)$ // Japan. J. Math. (N. S.) 1986. V. 12, N 2. P. 325–377.
31. Hiss G., Shamash J. 3-blocks and 3-modular characters of $G_2(q)$ // J. Algebra. 1990. V. 131, N 2. P. 371–387.
32. Shamash J. Blocks and Brauer trees for groups of type $G_2(q)$ // The Arcata conf. on representations of finite groups. 1987. P. 283–295. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 47).
33. Hiss G. On the decomposition numbers of $G_2(q)$ // J. Algebra. 1989. V. 120, N 2. P. 339–360.
34. Shamash J. Blocks and Brauer trees for the groups $G_2(2^k)$, $G_2(3^k)$ // Commun. Algebra. 1992. V. 20, N 5. P. 1375–1387.
35. Hiss G. Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik. Habilitationsschrift. RWTH Aachen, 1990.
36. Burkhardt R. Über die Zerlegungszahlen der Suzukigruppen $Sz(q)$ // J. Algebra. 1979. V. 59. P. 421–433.
37. Заварницин А. В. Конечные группы с пятикомпонентным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 57–64.
38. Гречкосеева М. А., Лыткин Д. В. Почти распознаваемость по спектру конечных простых линейных групп простой размерности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 805–818.
39. Васильев А. В., Горшков И. Б., Гречкосеева М. А., Кондратьев А. С., Старолетов А. М. О распознаваемости по спектру конечных простых групп типов B_n , C_n , 2D_n при $n = 2^k$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 58–73.
40. Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д. О конечных группах, изоспектральных простым симплектическим и ортогональным группам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1225–1247.
41. Lipschutz S., Shi W. J. Finite groups whose element orders do not exceed twenty // Progr. Natur. Sci. 2000. V. 10, N 1. P. 11–21.
42. Shi W. J. A characterization of the finite simple group $U_4(3)$ // An. Univ. Timișoara Ser. Științ. Mat. 1992. V. 30, N 2–3. P. 319–323.
43. Васильев А. В. О распознавании всех конечных неабелевых простых групп, простые делители порядков которых не превосходят 13 // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 315–324.
44. Zavarnitsine A. V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. V. 6. P. 1–12.

Поступила в редакцию 7 июля 2020 г.

После доработки 4 августа 2020 г.

Принята к публикации 10 августа 2020 г.

Гречкосеева Мария Александровна, Звездина Мария Анатольевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
grechkoseeva@gmail.com, maria.a.zvezdina@gmail.com