O. Yu. Dashkova, Solvable groups of finite metabelian rank, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1331–1342

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.607>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.229.108.108

April 26, 2023, 12:45:19

УДК 512.544

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ КОНЕЧНОГО МЕТАБЕЛЕВА РАНГА

О. Ю. Дашкова

Аннотация. Изучаются неабелевы разрешимые группы конечного метабелева ранга. Построен пример разрешимой группы конечного метабелева ранга, имеющей бесконечный специальный ранг. Описано строение разрешимой группы конечного метабелева ранга.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.607

Ключевые слова: разрешимая группа, метабелев ранг группы, специальный ранг группы.

1. Введение

А. И. Мальцевым были введены понятия общего и специального рангов группы [1]. По определению группа имеет конечный общий ранг r , если r — наименьшее число такое, что всякая конечно порожденная подгруппа группы содержится в подгруппе, обладающей не более чем r порождающими элементами. Группа имеет конечный специальный ранг r , если r является наименьшим числом с тем свойством, что всякая конечно порожденная подгруппа группы может быть порождена не более чем r элементами. Условие конечности специального ранга получило широкое распространение, и специальный ранг сейчас обычно называют просто рангом.

Группы конечного ранга исследовались в работах советских и зарубежных авторов. Особо следует отметить выдающуюся работу А. И. Мальцева [2], в которой была намечена программа изучения различных классов разрешимых групп конечного ранга. В. М. Глушков [3], Д. М. Смирнов [4–6], В. С. Чарин [7–11], М. И. Каргаполов [12], Ю. И. Мерзляков [13, 14], Бэр и Хайнекен [15], Ю. М. Горчаков [16] и В. П. Шунков [17] получили ряд глубоких результатов, относящихся к этой области. Достаточно полный обзор результатов о группах конечного ранга содержится в [18; 19, § 25].

Отметим, что класс разрешимых групп конечного ранга охватывает такие виды групп, как полициклические, разрешимые минимаксные группы (т. е. группы, обладающие конечным субнормальным рядом, факторы которого абелевы и удовлетворяют условию минимальности или максимальности), группы с конечным рациональным рядом и др. Эти виды групп тесно связаны с группами конечного ранга. Так, например, Робинсоном установлено, что конечно порожденная разрешимая группа конечного ранга минимаксна [20].

Представляется естественным использовать идею ранга для изучения ограничений на подгруппы различных видов подобно тому, например, как условия минимальности и максимальности рассматривались для абелевых, нормальных,

неабелевых, примарных подгрупп и т. д. В связи с этим Д. И. Зайцевым было введено понятие $\mathcal{F}$ -ранга группы (см. [21]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G — группа и $\mathcal{F}$ — некоторая непустая система ее конечно порожденных подгрупп. $\mathcal{F}$ -рангом группы G называется такое наименьшее число r , что любая подгруппа системы $\mathcal{F}$ может быть порождена не более чем r элементами. В случае, когда такого числа r нет, $\mathcal{F}$ -ранг группы G считается бесконечным.

В [21, 22] изучались неабелевы группы конечного $\mathcal{F}$ -ранга в двух случаях:

- 1) $\mathcal{F}$ — система всех неабелевых конечно порожденных подгрупп группы (группы конечного неабелева ранга);
- 2) $\mathcal{F}$ — система всех неабелевых непериодических конечно порожденных подгрупп непериодической группы (группы конечного неабелева 0-ранга).

В [23–25] рассматривались некоторые обобщения групп конечного $\mathcal{F}$ -ранга. Следует отметить, что ранговые ограничения на некоторые системы подгрупп широко использовались при исследовании бесконечномерных линейных групп [26–28].

В [29] начато изучение групп конечного $\mathcal{F}$ -ранга в случае, когда $\mathcal{F}$ — система всех метабелевых (т. е. неабелевых двуступенно разрешимых) конечно порожденных подгрупп группы (группы конечного метабелева ранга). В [30] автором рассматривались неабелевы локально конечные и неабелевы локально почти нильпотентные группы конечного метабелева ранга. В настоящей работе изучаются неабелевы разрешимые группы конечного метабелева ранга. Основными результатами работы являются теорема 1, в которой устанавливается существование разрешимых групп конечного метабелева ранга, имеющих бесконечный ранг, и теорема 2, описывающая структуру разрешимых групп конечного метабелева ранга.

2. Предварительные сведения

В работе рассматриваются только неабелевы группы. Под метабелевой группой всюду будем понимать неабелеву двуступенно разрешимую группу. Для метабелева ранга группы G будем использовать обозначение $r_{ma}(G)$. Специальный ранг группы G будем обозначать, как общепринято, символом $r(G)$ и называть *рангом группы* G .

Приведем ряд лемм, которые понадобятся при изучении групп конечного метабелева ранга.

Лемма 1. Для фактор-группы метабелевой группы G по ее коммутанту G' справедливо неравенство $r(G/G') \leq r_{ma}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если H/G' — произвольная конечно порожденная подгруппа группы G/G' , то H можно включить в некоторую подгруппу $H_1 = KG'$, где K — метабелева конечно порожденная подгруппа. Так как K порождается не более чем $r_{ma}(G)$ элементами, то же самое можно сказать об абелевой группе H_1/G' и ее подгруппе H/G' . $\square$

Лемма 2. Если K — неабелева нормальная подгруппа метабелевой группы G , то $r(G/K) \leq r_{ma}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H/K — произвольная конечно порожденная подгруппа группы G/K . Представим H в виде произведения $H = SK$, где S — некоторая метабелева конечно порожденная подгруппа. Из определения

метабелева ранга группы G вытекает, что подгруппа S может быть порождена не более чем $r_{ma}(G)$ элементами. Отсюда ввиду соотношения $H = SK$ следует, что фактор-группа H/K порождается не более чем $r_{ma}(G)$ элементами. Это доказывает требуемое соотношение $r(G/K) \leq r_{ma}(G)$. $\square$

Следствие 1. Если метабелева группа G разложима в произведение центральной подгруппы Z и метабелевой подгруппы K , то $r(Z) \leq r(Z \cap K) + r_{ma}(G)$.

Доказательство. Так как $G/K \simeq Z/Z \cap K$, то $r(Z) \leq r(Z \cap K) + r(G/K)$. Отсюда с учетом соотношения $r(G/K) \leq r_{ma}(G)$, доказанного в лемме 2, следует требуемое неравенство. $\square$

Лемма 3. Если G — почти разрешимая группа, то $r(Z(G)) \leq 3 + r_{ma}(G)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай конечной группы G . Выберем в G некоторую минимальную неабелеву подгруппу F (подгруппу Миллера — Морено). Из описания строения конечных минимальных неабелевых групп (см. [31, с. 285, 309]) вытекает, что подгруппа F метабелева и ранг ее центра не превосходит 3. Применяя к подгруппе $Z(G)F$ следствие 1, получаем, что

$$r(Z(G)) \leq r(Z(G) \cap F) + r_{ma}(G) \leq 3 + r_{ma}(G).$$

Пусть группа G разрешима, и предположим, что $r(Z(G)) > 3 + r_{ma}(G)$. Выберем в центре $Z(G)$ группы G конечно порожденную подгруппу Z , удовлетворяющую соотношению

$$r(Z) > 3 + r_{ma}(G), \quad (1)$$

и в группе G — некоторую конечно порожденную метабелеву подгруппу H . Произведение $H_1 = ZH$ — конечно порожденная метабелева подгруппа. Пусть p — простое число такое, что

$$r(Z) = r(Z/Z^p). \quad (2)$$

Из [32] вытекает, что конечно порожденная группа, коммутант которой абелев, финитно аппроксимируема. Поэтому в подгруппе H_1 существует такая нормальная подгруппа M конечного индекса, что фактор-группа H_1/M неабелева, и в группе H_1/Z^p существует такая нормальная подгруппа N/Z^p конечного индекса, что $Z \cap N = Z^p$. Фактор-группа $H_1/M \cap N$ конечная метабелева, и ее центр содержит подгруппу $Z(M \cap N)/(M \cap N)$, изоморфную в силу соотношения $Z \cap N = Z^p$ фактору $Z/(Z^p \cap M)$. Поскольку для метабелевой подгруппы H_1 справедливо неравенство $r_{ma}(H_1/M \cap N) \leq r_{ma}(G)$, из доказанного выше факта о конечных группах следует, что ранг фактора $Z/(Z^p \cap M)$ не превосходит $3 + r_{ma}(G)$, а значит, и $r(Z/Z^p) \leq 3 + r_{ma}(G)$. Это противоречит ввиду соотношения (2) предложению (1) о ранге подгруппы Z .

Пусть группа G почти разрешима. Покажем, что она содержит неабелеву разрешимую подгруппу K . Выделим в G максимальную нормальную разрешимую подгруппу A . Если подгруппа A неабелева, то положим $K = A$. В случае абелевой подгруппы A в неабелевом факторе G/A выберем минимальную неабелеву подгруппу K/A , с учетом (см. [31, с. 285, 309]) подгруппа K разрешима, поэтому неабелева подгруппа $Z(G)K$ разрешима и в силу рассуждений, проведенных в случае разрешимой группы, $r(Z(G)) \leq 3 + r_{ma}(G)$. $\square$

Лемма 4. Если A — абелева нормальная подгруппа неабелевой группы G , имеющей конечный метабелев ранг, то ранг подгруппы A конечен.

Доказательство. Если подгруппа A центральна в G , то согласно лемме 3 справедливо неравенство $r(A) \leq 3 + r_{ma}(G)$. В случае нецентральной

подгруппы A найдется элемент $g \in G$, для которого подгруппа $A\langle g \rangle$ неабелева. Поскольку неабелев ранг подгруппы $A\langle g \rangle$ не превосходит $r_{ma}(G)$, согласно [21] ранг подгруппы A конечен. $\square$

Лемма 5. Пусть группа G представима в виде произведения $G = A\langle g \rangle$, где A — ее абелева нормальная подгруппа, и $g^s \in C_G(A)$ для некоторого натурального числа s . Если группа G неабелева, то $r(A) \leq r_{ma}(G)s + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как любая конечно порожденная подгруппа из A включается в некоторую конечно порожденную подгруппу, содержащуюся в A и нормальную в G , требуемое неравенство будет установлено, если доказать, что ранг произвольной конечно порожденной подгруппы B , содержащейся в A и нормальной в G , не превосходит $r(A) \leq r_{ma}(G)s + 1$.

Если подгруппа $B\langle g \rangle$ абелева, то $B \leq Z(G)$. По лемме 3 $r(B) \leq 3 + r_{ma}(G)$ и тем самым $r(B) \leq r_{ma}(G)s + 3$. Если подгруппа $B\langle g \rangle$ неабелева, то она порождается r элементами $x_1, x_2, \dots, x_r$, $r \leq r_{ma}(G)$. Представим элемент x_i в виде $x_i = a_i g_i$, где $a_i \in B$, $g_i \in \langle g \rangle$, и положим $B_0 = \langle a_1^G \rangle \dots \langle a_r^G \rangle$, здесь $\langle a_i^G \rangle$ обозначает нормальное замыкание элемента a_i . Так как $g^s \in C_G(A)$, то a_i имеет в группе G не более s сопряженных элементов и потому $r(\langle a_i^G \rangle) \leq s$, $r(B_0) \leq rs \leq r_{ma}(G)s$, $r(B) \leq rs \leq r_{ma}(G)s + 1$. $\square$

3. Пример разрешимой группы конечного метабелева ранга, имеющей бесконечный специальный ранг

Пусть заданы векторное пространство V размерности 2 над полем рациональных чисел и некоторая кососимметрическая билинейная форма f на пространстве V со значениями в том же поле. С пространством V и формой f естественно связана группа N , для которой имеют место изоморфизмы $Z \simeq \mathbb{Q}$, $N/Z \simeq \mathbb{Q}^2$, где $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел, Z — центр группы N . Коммутирование связано с формой следующим соотношением:

$$[g, h] = z_0^{f(g', h')}, \quad (3)$$

где z_0 — некоторый фиксированный элемент подгруппы Z , отличный от нейтрального, g, h — произвольные элементы группы N . Смежным классам gZ и hZ при изоморфизме $N/Z \simeq \mathbb{Q}^2$ поставим в соответствие элементы g', h' . Отметим, что каждый элемент g группы N однозначно представим в виде $g = g_0^r h_0^s z_0^t$, где g_0 и h_0 — два фиксированных элемента из N такие, что элементы g_0Z и h_0Z фактор-группы N/Z линейно независимы, r, s, t — некоторые рациональные числа.

Пусть задано невырожденное преобразование $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ пространства V . Этому преобразованию поставим в соответствие преобразование $\bar{\alpha}$ группы N , определяемое по следующему правилу: фиксированным элементам g_0 и h_0 группы N отвечают элементы $g_0^a h_0^b$ и $g_0^c h_0^d$ соответственно, а произвольному элементу $g \in N$, имеющему запись $g = g_0^r h_0^s z_0^t$, — элемент $g = (g_0^{\bar{a}})^r (h_0^{\bar{b}})^s z_0^t$. Такое преобразование $\bar{\alpha}$ будет автоморфизмом, если преобразование α сохраняет форму на пространстве V , т. е. $f(x^\alpha, y^\alpha) = f(x, y)$ для любых двух элементов x и y пространства V . Действительно, для любых двух элементов $g = g_0^r h_0^s z_0^t$ и $h = g_0^{r_1} h_0^{s_1} z_0^{t_1}$ группы N имеют место равенства

$$\begin{aligned} (gh)^{\bar{\alpha}} &= z_0^{t+t_1} (g_0^{\bar{a}})^{r+r_1} (h_0^{\bar{b}})^{s+s_1} [g_0, h_0]^{-sr_1}, \\ g^{\bar{\alpha}} h^{\bar{\alpha}} &= z_0^{t+t_1} (g_0^{\bar{a}})^{r+r_1} (h_0^{\bar{b}})^{s+s_1} [g_0^{\bar{a}}, h_0^{\bar{b}}]^{-sr_1} \end{aligned}$$

В силу (3) и выбора элементов g_0 и h_0 справедливы соотношения

$$[g_0, h_0] = z_0^{f(g'_0, h'_0)}, \quad [g_0^{\bar{\alpha}}, h_0^{\bar{\alpha}}] = z_0^{f((g'_0)^{\bar{\alpha}}, (h'_0)^{\bar{\alpha}})},$$

причем $f((g'_0)^{\bar{\alpha}}, (h'_0)^{\bar{\alpha}}) = f((g'_0)^{\alpha}, (h'_0)^{\alpha}) = f(g'_0, h'_0)$. Отсюда следует, что $(gh)^{\bar{\alpha}} = g^{\bar{\alpha}} h^{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha}$ — гомоморфизм группы N . Из определения гомоморфизма $\bar{\alpha}$ и свойств группы N вытекает, что отображение $\bar{\alpha}$ взаимно однозначно, поэтому $\bar{\alpha}$ — изоморфизм группы N . Следовательно, если мы зададим группу преобразований пространства V , сохраняющих форму f , то ее можно рассматривать как группу автоморфизмов группы N .

Рассмотрим множество K , элементами которого являются матрицы

$$\alpha(n, m) = \begin{pmatrix} \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2} & -\frac{2nm}{n^2 + m^2} \\ \frac{2nm}{n^2 + m^2} & \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2} \end{pmatrix},$$

где n и m — целые числа, не равные нулю одновременно, причем для некоторых целых чисел n, m, l, k возможно равенство $\alpha(n, m) = \alpha(l, k)$. Поскольку имеют место соотношения

$$\alpha(n, m)\alpha(l, k) = \alpha(nl - mk)\alpha(ml + nk), \quad \alpha(n, m)^{-1} = \alpha(n, -m) = \alpha(-n, m),$$

то $\alpha(n, m)\alpha(l, k)$ и $\alpha(n, m)^{-1}$ снова матрицы множества K , поэтому K образует группу. Покажем, что группа K не допускает конечного числа образующих. Пусть это не так, тогда $K = \langle \alpha(n_i, m_i), i = 1, \dots, k \rangle$. Следовательно, знаменатель любого элемента матриц из K может быть представлен в виде произведения $q_1^{l_1} \dots q_s^{l_s}$, где $\{q_i\}_{i=1}^s$ — конечное множество простых чисел, l_i — целые неотрицательные числа. Покажем, что элемент $\frac{2q_1 \dots q_s}{4q_1^2 \dots q_s^2 + 1}$ матрицы $\alpha(2q_1 \dots q_s, 1)$ является несократимой дробью. Предположим, что это не так. Тогда знаменатель $4q_1^2 \dots q_s^2 + 1$ представляется в виде произведения $q_1^{l_1} \dots q_s^{l_s}$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что группа K не допускает конечного числа образующих. Определим отображение $g: K \rightarrow \mathbb{Q}(i)^*$, где $\mathbb{Q}(i)^*$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{Q}(i)$, по следующему правилу:

$$g(\alpha(n, m)) = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2} + \frac{2nm}{n^2 + m^2}i.$$

С учетом равенства

$$\alpha(n, m)\alpha(l, k) = \alpha(nl - mk)\alpha(ml + nk)$$

получаем, что

$$g(\alpha(n, m)\alpha(l, k)) = g(\alpha(n, m))g(\alpha(l, k)).$$

В случае, когда $\alpha(n, m) = \alpha(l, k)$, справедливо соотношение $g(\alpha(n, m)) = g(\alpha(l, k))$. Если $g(\alpha(n, m)) = 1$, то матрица $\alpha(n, m)$ единична. Тем самым доказано, что g — изоморфизм группы K на некоторую подгруппу группы $\mathbb{Q}(i)^*$. Согласно теореме 127.2 из [33] $\mathbb{Q}(i)^*$ является конечным расширением свободной абелевой группы счетного ранга, поэтому всякая подгруппа конечного ранга из $\mathbb{Q}(i)^*$ конечно порождена. Отсюда с учетом изоморфизма g вытекает, что ранг $r(K)$ бесконечен.

Характеристический полином матрицы $\alpha(n, m)$ из K имеет вид

$$\lambda^2 - 2\frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}\lambda + 1.$$

Этот многочлен приводим над полем рациональных чисел лишь в случае, когда $n = 0$ или $m = 0$, т. е. для единичной матрицы E и матрицы $(-E)$. Обозначим через A свободную абелеву подгруппу группы K , имеющую в K конечный индекс. Элемент второго порядка $(-E)$ не содержится в A , поэтому каждый отличный от единицы элемент группы A действует неприводимо на V . Итак, построена двуступенно нильпотентная группа N без кручения и ее группа автоморфизмов A , которая является свободной абелевой группой бесконечного ранга, и каждый элемент из A действует неприводимо на факторе N/Z , где Z — центр группы N . Положим $G = N \rtimes A$.

Лемма 6. *Всякая метабелева подгруппа группы G содержится в N .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H — некоторая метабелева подгруппа группы G и K — коммутант подгруппы H . Предположим, что H не содержится в подгруппе N . Сначала рассмотрим случай, когда K не содержится в центре Z . Если $r(KZ/Z) = 1$, то найдется элемент $h \in H$, $h \notin N$, для которого справедливо равенство $(KZ/Z)^h = KZ/Z$. Поскольку элемент h представим в виде $h = ga$, где $g \in N$, $a \in A$, $a \neq 1$, для элемента a имеет место аналогичное равенство $(KZ/Z)^a = KZ/Z$. Противоречие с неприводимым действием на факторе N/Z любого отличного от единицы элемента группы A .

Если $r(KZ/Z) = 2$, то фактор-группа N/KZ периодическая, поэтому для любых элементов $x, y \in N$ найдутся такие натуральные числа k, l , что x^k и y^l содержатся в подгруппе KZ , и в силу коммутативности KZ имеет место равенство $x^k y^l = y^l x^k$, которое в нильпотентной группе N без кручения эквивалентно соотношению $xy = yx$. Следовательно, группа N абелева; противоречие.

Пусть $K \leq Z$. В этом случае подгруппа H двуступенно нильпотентна. Рассмотрим группу $\bar{G} = N/Z \rtimes AZ/Z = \bar{N} \rtimes \bar{A}$ и ее подгруппу $\bar{H} = HZ/Z$. Покажем, что найдется элемент $g \in \bar{N}$, для которого $\bar{H}^g \leq \bar{A}$. Для произвольного элемента $h \in \bar{H}$, $h = xb$, где $x \in \bar{N}$, $b \in \bar{A}$, справедливо равенство

$$h^g = (xb)^g = x[g, b^{-1}]b. \quad (4)$$

Докажем существование элемента $g \in \bar{N}$, для которого h^g содержится в $\bar{A}$. Для этого достаточно доказать, что для любого элемента $a \in \bar{A}$ отображение $\tau : \bar{N} \rightarrow \bar{N}$, определенное по правилу $\tau(x) = [x, a]$, $x \in \bar{N}$, является изоморфизмом. Рассмотрим значение $\tau(xy)$:

$$\tau(xy) = [xy, a] = [x, a]^y [y, a]. \quad (5)$$

Поскольку y и $[x, a]$ содержатся в абелевой группе $\bar{N}$, то $[x, a]^y = [x, a]$. Отсюда с учетом (5) вытекает равенство $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$. Следовательно, τ — гомоморфизм. Так как любой отличный от единицы элемент группы A действует на $\bar{N}$ неприводимо, ядро отображения τ является единичным, а образ этого отображения совпадает с $\bar{N}$. Поэтому τ — изоморфизм. Следовательно, для любого элемента $h \in \bar{H}$, $h = xb$, $x \in \bar{N}$, $b \in \bar{A}$, найдется элемент $g \in \bar{N}$, для которого $x^{-1} = [g, b^{-1}]$. Для этого элемента g в силу соотношения (4) $h^g \in \bar{A}$.

Рассмотрим подгруппу $\langle \bar{H}^g, \bar{A} \rangle = \bar{N}_1 \rtimes \bar{A}$. Ввиду неприводимого действия группы A на $\bar{N}$ можно утверждать, что либо $\bar{N}_1 = 1$, либо $\bar{N}_1 = \bar{N}$. Если $\bar{N}_1 = 1$, то $\bar{H}^g \leq \bar{A}$ и нужный элемент g найден. В случае, когда $\bar{N}_1 = \bar{N}$, элемент h^g содержится в пересечении $\bar{H}^g \cap \bar{A}$, и в силу коммутативности $\bar{H}^g$ и $\bar{A}$ можно утверждать, что из соотношения $h^g \in \bar{H}^g \cap \bar{A}$ вытекает включение $h^g \in Z(\bar{G})$. Однако центр $Z(\bar{G})$ тривиален; противоречие. Следовательно, $\bar{H}^g \leq \bar{A}$, поэтому

подгруппа H сопряжена с некоторой подгруппой из AZ . Отсюда вытекает, что подгруппа H абелева; противоречие.

Тем самым доказано, что всякая метабелева подгруппа H из G содержится в N . $\square$

Справедлива следующая

Теорема 1. Существует разрешимая группа G со следующими свойствами:

- 1) $G = N \rtimes A$, где N — двуступенно нильпотентная подгруппа без кручения ранга 3, A — свободная абелева подгруппа счетного ранга;
- 2) $Z \simeq \mathbb{Q}$, $N/Z \simeq \mathbb{Q}^2$, где Z — центр подгруппы N ;
- 3) для центра группы G имеет место равенство $Z(G) = Z$;
- 4) каждый отличный от единицы элемент подгруппы A действует неприводимо на факторе N/Z ;
- 5) метабелев ранг группы G равен 3, причем всякая метабелева подгруппа группы G содержится в N .

Основываясь на этом примере, можно строить и другие примеры групп конечного метабелева ранга, имеющих бесконечный специальный ранг.

Утверждение 1. Существуют разрешимые группы бесконечного ранга, метабелев ранг которых равен $3k$, где k — любое натуральное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим группу $G_k = (N_1 \times \cdots \times N_i \times \cdots \times N_k) \rtimes A$, где $N_i \simeq N$, $i = 1, \dots, k$, N и A — соответствующие подгруппы из теоремы 1. Группа A действует на любой подгруппе N_i так же, как и в случае группы $G = N \rtimes A$.

Покажем, что всякая метабелева подгруппа группы G_k содержится в подгруппе $N_1 \times \cdots \times N_k$. Доказательство проведем индукцией по числу k . Для $k = 1$ это утверждение доказано в теореме 1. Предположим, что данное утверждение имеет место для $k = l - 1$.

Обозначим через H произвольную метабелеву подгруппу группы G_l и рассмотрим фактор-группы HN_i/N_i для всех $i = 1, \dots, l$. Предположим, что для некоторого номера j фактор-группа HN_j/N_j неабелева. Зададим отображение

$$\varphi : G_l/N_j \rightarrow (N_1 \times \cdots \times N_{j-1} \times N_{j+1} \times \cdots \times N_l) \rtimes A$$

по следующему правилу $\varphi(g_1 \dots g_j \dots g_l a N_j) = g_1 \dots g_{j-1} g_{j+1} \dots g_l a$, где $g_j \in N_j$, $a \in A$. Непосредственно проверяется, что отображение φ является изоморфизмом, поэтому метабелева подгруппа HN_j/N_j фактор-группы G_l/N_j изоморфна некоторой метабелевой подгруппе группы $(N_1 \times \cdots \times N_{j-1} \times N_{j+1} \times \cdots \times N_l) \rtimes A$. Отсюда с учетом задания изоморфизма φ и однозначности представления любого элемента $h \in G_l$ в виде $h = g_1 \dots g_j \dots g_l a$, $g_j \in N_j$, $a \in A$, вытекает, что $HN_j/N_j \leq (N_1 \times \cdots \times N_l)/N_j$, поэтому $H \leq N_1 \times \cdots \times N_l$.

Если все фактор-группы HN_i/N_i , $i = 1, \dots, l$, абелевы, то для коммутанта

H' имеет место включение $H' \leq N_i$ для любого номера i , поэтому $H' \leq \bigcap_{i=1}^l N_i =$

1. Следовательно, H — абелева подгруппа группы G_l ; противоречие. Тем самым доказано, что среди фактор-групп HN_i/N_i есть хотя бы одна неабелева, поэтому, как установлено выше, всякая метабелева подгруппа H группы G_l содержится в подгруппе $N_1 \times \cdots \times N_l$. Отсюда с учетом соотношения $r_{ma}(N_i) = 3$ для любого номера $i = 1, \dots, k$, вытекает, что метабелев ранг группы G_k равен $3k$. $\square$

4. Строение разрешимых групп конечного метабелева ранга

Теорема 2. Если G — разрешимая группа конечного метабелева ранга, то G либо имеет конечный ранг, либо содержит подгруппу H конечного индекса, обладающую следующими свойствами:

- 1) $H = N \rtimes A$, где N — нильпотентная подгруппа конечного ранга, A — свободная абелева подгруппа бесконечного ранга;
- 2) $Z(H) = Z(N) = Z$;
- 3) N/Z — группа без кручения, H/Z — группа без центра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы следует рассмотреть случай, когда группа G имеет бесконечный ранг. Обозначим через T периодический радикал группы G , через M/T — локально нильпотентный радикал фактор-группы G/T . Если подгруппа M неабелева, то согласно следствию 2 из [30] ранг $r(M)$ конечен. В случае абелевой подгруппы M по лемме 4 $r(M) < \infty$. Согласно теореме 2 из [34] локально нильпотентная группа M/T без кручения, имеющая конечный ранг, нильпотентна, поэтому в соответствии с теоремой 5 из [10] фактор-группа G/M почти свободная абелева.

К фактор-группе G/T , являющейся расширением нильпотентной группы M/T без кручения, имеющей конечный ранг, при помощи почти абелевой группы G/M применим теорему С из [35], согласно которой в G/T найдется такая нильпотентная подгруппа B/T , что подгруппа $K/T = (M/T)(B/T)$ имеет в G/T конечный индекс. Поскольку ранг подгруппы M конечен, а ранг группы G бесконечен, бесконечен ранг $r(B)$, откуда с учетом следствия 2 из [30] вытекает, что подгруппа B абелева.

Обозначим через C централизатор $C_K(T)$. Подгруппа B содержится в C , поэтому имеет место равенство $C = (M \cap C)B$. Так как подгруппы M и C нормальны в K и пересечение $M/(M \cap C) \cap C/(M \cap C)$ равно единице, имеет место соотношение $K/(M \cap C) = M/(M \cap C) \times C/(M \cap C)$, где подгруппа $M/(M \cap C)$ нильпотентна, а подгруппа $C/(M \cap C)$ абелева. Отсюда следует, что подгруппа $K/(M \cap C)$ нильпотентна. Фактор-группа G/T является расширением нильпотентной группы $(M \cap C)/T$ без кручения, имеющей конечный ранг, при помощи почти нильпотентной группы $G/(M \cap C)$, поэтому согласно теореме С из [35] в G/T найдется такая нильпотентная подгруппа B_1/T , что подгруппа $K_1/T = ((M \cap C)/T)(B_1/T)$ имеет в G/T конечный индекс. Поскольку ранг подгруппы M конечен, а ранг группы G бесконечен, с учетом следствия 2 из [30] получаем, что подгруппа B_1 абелева.

Так как $T \leq Z(K_1)$, локально нильпотентный радикал N группы K_1 таков, что N/T — локально нильпотентный радикал фактор-группы K_1/T , откуда с учетом теоремы 5 из [10] следует, что подгруппа K_1/N почти свободная абелева, поэтому фактор-группа $B_1/(B_1 \cap N)$ содержит подгруппу $B_2/(B_1 \cap N)$ конечного индекса, являющуюся свободной абелевой группой. Согласно [19, лемма 7.1.1] подгруппа B_2 включает свободную абелеву подгруппу B_3 , для которой $B_2 = B_3 \times (B_1 \cap N)$. Отсюда и из равенства $K_1 = NB_1$, вытекающего из соотношений $K_1 = (M \cap C)B_1$ и $(M \cap C) \leq N$, следует, что в K_1 найдется нормальная подгруппа H конечного индекса, представимая в виде $H = N \rtimes A$, где A — свободная абелева подгруппа бесконечного ранга, $A \leq B_3$.

Отметим, что N — локально нильпотентный радикал подгруппы H . Действительно, так как локально нильпотентный радикал является инвариантной подгруппой и подгруппа H нормальна в K_1 , локально нильпотентный радикал

подгруппы H содержится в локально нильпотентном радикале N подгруппы K_1 . Отсюда с учетом включения $N \leq H$ следует, что N — локально нильпотентный радикал подгруппы H .

Покажем, что N — нильпотентная группа конечного ранга. Поскольку периодический радикал подгруппы H инвариантен в H и H нормальна в группе K_1 , периодический радикал подгруппы H содержится в подгруппе T . Так как T — нормальная подгруппа H , периодический радикал подгруппы H совпадает с T . Поскольку $T \leq Z(H)$, а локально нильпотентная фактор-группа N/T без кручения, имеющая конечный ранг, по теореме 2 из [34] нильпотентна, N — нильпотентная группа и по теореме 2 из [30] ранг $r(N)$ конечен.

Итак, G содержит подгруппу $H = N \rtimes A$ конечного индекса, где N — локально нильпотентный радикал подгруппы H , являющийся нильпотентной группой конечного ранга, A — свободная абелева подгруппа бесконечного ранга.

Докажем равенство $Z(N) = Z(H)$. Предположим, что $Z(N) \subsetneq Z(H)$. Тогда подгруппа $Z(N)A$ метабелева и в силу конечности метабелева ранга группы G , ранг $r(A)$ конечен; противоречие. Поэтому имеет место включение $Z(N) \leq Z(H)$. С другой стороны, $NZ(H)$ — нормальная локально нильпотентная подгруппа группы H , и так как N — локально нильпотентный радикал подгруппы H , то $Z(H) \leq N$, поэтому $Z(H) \leq Z(N)$. Из включений $Z(N) \leq Z(H)$ и $Z(H) \leq Z(N)$ следует требуемое равенство $Z(N) = Z(H)$.

Рассмотрим фактор-группу $\bar{H} = H/T$. Для нее справедливо равенство $\bar{H} = \bar{N} \rtimes \bar{A}$, где $\bar{N} = N/T$, $\bar{A} = AT/T$. Обозначим через $\bar{Z}_1$ пересечение $\bar{N} \cap Z(\bar{H})$. Так как N — локально нильпотентный радикал группы H , а $T \leq Z(H)$, то $Z(\bar{H}) \leq Z(\bar{N})$, поэтому $\bar{Z}_1 = Z(\bar{H})$. Если $\bar{Z}_1 = 1$, то $Z(H) = T$, и теорема доказана.

Пусть $\bar{Z}_1 \neq 1$. Коммутант подгруппы Z_1A , где Z_1 — полный прообраз фактор-группы $\bar{Z}_1$ в группе H , содержится в T , откуда с учетом конечности метабелева ранга и бесконечности ранга $r(A)$ следует, что подгруппа Z_1A абелева, поэтому для централизатора $C_H(Z_1)$ справедливо равенство $C_H(Z_1) = C_1A$, где $C_1 = N \cap C_H(Z_1)$. Покажем, что фактор-группа $\bar{N}/\bar{Z}_1$ не имеет кручения. Так как фактор $\bar{N}/Z(\bar{N})$ без кручения, достаточно доказать, что фактор $Z(\bar{N})/\bar{Z}_1$ также не имеет кручения. Предположим, что фактор $Z(\bar{N})/\bar{Z}_1$ содержит неединичный элемент конечного порядка. Тогда найдется элемент $\bar{x} \in Z(\bar{N})$ такой, что $\bar{x}^n \in \bar{Z}_1$ для некоторого натурального $n > 1$, $\bar{x} \notin \bar{Z}_1$. Для произвольного элемента $\bar{b} \in \bar{A}$ имеет место соотношение $[\bar{x}, \bar{b}]^n = [\bar{x}^n, \bar{b}] = \bar{1}$, которое получается с учетом того, что элементы $\bar{x}$ и $\bar{x}^{\bar{b}}$ содержатся в абелевой группе $Z(\bar{N})$. Так как абелева группа $Z(\bar{N})$ не имеет кручения, из равенства $[\bar{x}, \bar{b}]^n = \bar{1}$ вытекает равенство $[\bar{x}, \bar{b}] = \bar{1}$, поэтому $\bar{x} \in \bar{Z}_1$; противоречие. Следовательно, фактор $Z(\bar{N})/\bar{Z}_1$ не имеет кручения, тем самым и фактор $\bar{N}/\bar{Z}_1$ без кручения. В силу изоморфизма $\bar{N}/\bar{Z}_1 \simeq N/Z_1$ фактор-группа N/Z_1 также не имеет кручения.

Так как подгруппы N и C_1A нормальны в H и пересечение $(N/C_1) \cap (AC_1/C_1)$ равно единице, справедливо равенство $H/C_1 = N/C_1 \times AC_1/C_1$, из которого следует, что фактор-группа H/C_1 нильпотентна. Следовательно, фактор-группа H/Z_1 является расширением нильпотентной группы C_1/Z_1 без кручения, имеющей конечный ранг, при помощи нильпотентной группы H/C_1 . Поэтому согласно теореме С из [35] H/Z_1 содержит нормальную подгруппу $(C_1/Z_1)(D/Z_1)$ конечного индекса, где D/Z_1 — нильпотентная подгруппа. Из включений $T \leq Z(D)$, $Z_1/T \leq Z(D/T)$ следует, что подгруппа D нильпотентна. С учетом теоремы 2 из [30] и бесконечности ранга $r(D)$ получаем, что D абелева, стало быть,

$$Z_1 \leq Z(C_1 D).$$

Итак, подгруппа H содержит нормальную подгруппу H_1 конечного индекса, представимую в виде $H_1 = N_1 \rtimes A_1$, где $N_1 = N \cap C_1 D$, $A_1 = A \cap C_1 D$, $Z_1 \leq Z(H_1)$. Так как $N_1 = N \cap C_1 D$, то N_1 — нормальная подгруппа N . Отметим, что N_1 — локально нильпотентный радикал подгруппы H_1 . Действительно, поскольку подгруппа H_1 нормальна в H , локально нильпотентный радикал подгруппы H_1 содержится в $N \cap H_1 = N \cap C_1 D = N_1$. С другой стороны, нильпотентная подгруппа N_1 нормальна в H_1 . Следовательно, N_1 — локально нильпотентный радикал подгруппы H_1 .

Покажем, что $Z_1 = Z(N_1)$. Для подгруппы Z_1 имеют место включения $Z_1 \leq Z(H_1)$ и $Z_1 \leq N_1$, поэтому $Z_1 \leq Z(H_1) \cap N_1 \leq Z(N_1)$ и для доказательства требуемого равенства достаточно доказать включение

$$Z(N_1) \leq Z_1. \quad (6)$$

Это включение будет доказано, если установить справедливость следующего утверждения: если элемент x принадлежит центру $Z(N_1)$, то элемент $\bar{x} = xT$ содержится в $\bar{Z}_1$.

Так как индекс $|N : N_1|$ конечен, для любого элемента $\bar{y} \in \bar{N}$ найдется такое натуральное число k , для которого $[\bar{y}^k, \bar{x}] = \bar{1}$. Поскольку $\bar{N}$ — нильпотентная группа без кручения, из соотношения $[\bar{y}^k, \bar{x}] = \bar{1}$ вытекает равенство $[\bar{y}, \bar{x}] = \bar{1}$, поэтому

$$Z(N_1)/T \leq Z(\bar{N}). \quad (7)$$

Кроме того, $Z(N_1)A$ — абелева подгруппа, так как в противном случае согласно [21] ранг A конечен, что невозможно. Отсюда и из (7) следует включение $Z(N_1)/T \leq Z(\bar{H}) = \bar{Z}_1$, значит, $\bar{x} \in \bar{Z}_1$. Тем самым справедливость доказываемого утверждения установлена. Поэтому имеют место включения (6) и равенство $Z_1 = Z(N_1)$.

Докажем равенство $Z(N_1) = Z(H_1)$. Так как N_1 — локально нильпотентный радикал подгруппы H_1 , то $Z(H_1) \leq Z(N_1)$. С другой стороны, имеет место соотношение $Z(N_1) = Z_1 \leq Z(H_1)$. Из включений $Z(H_1) \leq Z(N_1)$ и $Z(N_1) \leq Z(H_1)$ вытекает требуемое равенство.

Рассмотрим фактор-группу $\bar{H} = H/Z_1$. Так как H/Z_1 — группа без кручения, для нее справедливы те же рассуждения, что и для фактор-группы H/T . Повторяя аналогичные рассуждения, с учетом того, что ранг $r(N)$ конечен, а факторы N/Z_i не имеют кручения, на некотором шаге с номером l получаем равенство $Z(\bar{H}) \cap \bar{N} = \bar{Z}_l = \bar{1}$. Следовательно, существует подгруппа H_l , нормальная в H и имеющая в H конечный индекс, такая, что $H_l = N_l \rtimes A_l$, где N_l — нормальная подгруппа N , $A_l \leq A$, $Z(H_l) = \bar{1}$. Таким образом, H_l/Z_l — группа без центра, N_l/Z_l — группа без кручения, $Z(H_l) = Z(N_l) = Z_l$. $\square$

Следствие 2. Локально разрешимая группа конечного метабелева ранга локально минимаксна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 всякая конечно порожденная подгруппа H локально разрешимой группы конечного метабелева ранга либо имеет конечный ранг, либо содержит подгруппу K конечного индекса, представимую в виде $K = N \rtimes A$, где A — свободная абелева подгруппа бесконечного ранга. В силу конечности индекса $|H : K|$ подгруппа K конечно порождена. С другой стороны, имеет место изоморфизм $K/N \simeq A$, где A — свободная абелева подгруппа бесконечного ранга; противоречие. Следовательно, ранг $r(H)$ конечен, и согласно [20] подгруппа H минимаксна. $\square$

Отметим, что существование в разрешимой группе подгруппы конечного индекса, обладающей свойствами 1–3 из теоремы 2, не влечет конечность метабелева ранга этой группы. Об этом свидетельствует следующий пример. Разрешимая группа G представима в виде $G = (N \rtimes A) \rtimes \langle c \rangle$, где $N \rtimes A$ — подгруппа, удовлетворяющая свойствам 1–3 из теоремы 2, c — элемент второго порядка, централизующий нильпотентную подгруппу N и действующий на подгруппе A , для которой имеет место равенство $A = B \times \langle a \rangle$, где B — свободная абелева подгруппа бесконечного ранга, $\langle a \rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа, следующим образом: $a^c = a^{-1}$, $b^c = b$ для любого элемента $b \in B$. Группа G содержит метабелеву подгруппу $A \rtimes \langle c \rangle$ бесконечного ранга, поэтому ее метабелев ранг бесконечен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351–352.
2. Мальцев А. И. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 567–588.
3. Глушков В. М. О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп без кручения // Мат. сб. 1952. Т. 30, № 1. С. 79–104.
4. Смирнов Д. М. Об автоморфизмах разрешимых групп // Докл. АН СССР. 1953. Т. 84, № 5. С. 891–894.
5. Смирнов Д. М. О группах автоморфизмов разрешимых групп // Мат. сб. 1953. Т. 32, № 2. С. 365–384.
6. Смирнов Д. М. О двух классах разрешимых групп конечного ранга // Уч. зап. Иванов. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 67–74.
7. Чарин В. С. К теории локально нильпотентных групп // Мат. сб. 1951. Т. 29, № 2. С. 433–454.
8. Чарин В. С. О группах автоморфизмов некоторых классов разрешимых групп // Укр. мат. журн. 1953. Т. 5, № 4. С. 363–369.
9. Чарин В. С. О локально разрешимых группах конечного ранга // Мат. сб. 1957. Т. 41, № 1. С. 37–48.
10. Чарин В. С. О разрешимых группах типа A_4 // Мат. сб. 1960. Т. 52, № 3. С. 895–914.
11. Чарин В. С. О разрешимых группах типа A_3 // Мат. сб. 1961. Т. 54, № 4. С. 489–499.
12. Каргаполов М. И. О разрешимых группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1962. Т. 1, № 5. С. 37–44.
13. Мерзляков Ю. И. О локально разрешимых группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 2. С. 5–16.
14. Мерзляков Ю. И. О локально разрешимых группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 6. С. 686–690.
15. Baer R., Heineken H. Radical groups with finite abelian subgroup rank // Illinois J. Math. 1972. V. 16, N 4. P. 533–580.
16. Горчаков Ю. М. О существовании абелевых подгрупп бесконечного ранга в локально разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156, № 1. С. 17–20.
17. Шунков В. П. О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 2. С. 199–225.
18. Робинсон Д. Новый подход к разрешимым группам с условиями конечности для абелевых подгрупп // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1. С. 197–215.
19. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
20. Robinson D. J. S. A note on groups of finite rank // Comp. Math. 1969. V. 21, N 3. P. 240–246.
21. Дашкова О. Ю. Разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн. 1990. Т. 42, № 2. С. 159–164.
22. Дашкова О. Ю. Локально почти разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн. 1990. Т. 42, № 4. С. 477–482.
23. Дашкова О. Ю. Локально нильпотентные группы конечного неабелева секционного ранга // Укр. мат. журн. 1995. Т. 47, № 4. С. 452–455.
24. Дашкова О. Ю. Разрешимые группы конечного неабелева секционного ранга // Укр. мат. журн. 1996. Т. 48, № 3. С. 418–421.

25. Дашкова О. Ю. Группы конечного неабелева секционного ранга // Укр. мат. журн. 1997. Т. 49, № 10. С. 1324–1331.
26. Dashkova O. Y., Dixon M. R., Kurdachenko L. A. Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension // J. Pure Appl. Algebra. 2007. V. 208, N 3. P. 785–795.
27. Дашкова О. Ю. Разрешимые бесконечномерные линейные группы с ограничениями на неабелевы подгруппы бесконечных рангов // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1280–1295.
28. Дашкова О. Ю. Локально разрешимые бесконечномерные линейные группы с ограничениями на неабелевы подгруппы бесконечных рангов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 601–616.
29. Дашкова О. Ю. Группы конечного метабелева ранга. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. 90.1. 35 с.
30. Дашкова О. Ю. О некоторых классах групп конечного метабелева ранга // Мат. тр. 2020. Т. 23, № 1. С. 123–136.
31. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin etc.: Springer-Verl., 1967.
32. Холл Ф. О конечности некоторых разрешимых групп // Новое в зарубежной науке. Математика. М.: Мир, 1981. Т. 21. С. 171–206.
33. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2.
34. Мягкова Н. Н. О группах конечного ранга // Изв. АН СССР. 1949. Т. 13, № 6. С. 495–512.
35. Lennox J. C., Robinson D. J. S. Soluble products of nilpotent groups // Rend. Mat. Univ. Padova. 1980. V. 62. P. 261–280.

Поступила в редакцию 28 января 2020 г.

После доработки 22 июля 2020 г.

Принята к публикации 10 августа 2020 г.

Дашкова Ольга Юрьевна
Филиал МГУ в Севастополе,
ул. Героев Севастополя, 7, Севастополь 299001
odashkova@yandex.ua