A. V. Ivanov, On uniform distributions on metric compacta, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1343–1358

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.608>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 16:00:35

О РАВНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НА МЕТРИЧЕСКИХ КОМПАКТАХ

А. В. Иванов

Аннотация. Введено понятие равномерного распределения на метрическом компакте. Искомое распределение определяется как предел последовательности классических равномерных распределений на конечных множествах, которые равномерно распределены на данном компакте в геометрическом смысле. Показано, что равномерное распределение существует на метрически однородных компактах и канонически замкнутых подмножествах евклидова пространства, имеющих границу нулевой меры Лебега. Если на компакте (удовлетворяющем некоторым метрическим ограничениям) существует равномерное распределение, то этим свойством обладает также любое его канонически замкнутое подмножество, у которого равномерная мера границы равна нулю. Доказано, что компакты, допускающие равномерное распределение, размерностно однородны в смысле емкостной размерности.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.608

Ключевые слова: равномерное распределение на компакте, метрика Канторовича — Рубинштейна, емкостная размерность, пространство вероятностных мер.

Введение

В работе вводится и исследуется понятие равномерного распределения на метрическом компакте (X, ρ) (никаких дополнительных структур на X не предполагается). В геометрической теории меры вероятностная мера μ на метрическом пространстве X называется *равномерно распределенной*, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\mu(O(x, \varepsilon)) = \mu(O(y, \varepsilon)) > 0$ для любых точек $x, y \in X$, где $O(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — открытая ε -окрестность точки x (см. [1, гл. 3]). Однако такое определение является слишком жестким: ему не удовлетворяет даже классическое равномерное распределение на отрезке.

В основе предлагаемого подхода лежит идея приближения искомой меры классическими мерами равномерных распределений с конечными носителями, т. е. мерами вида

$$\mu_A^u = \frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} \delta_x,$$

где A — конечное подмножество X , а δ_x — мера Дирака. Нетрудно показать, что в компакте без изолированных точек последовательности вида $(\mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ могут сходиться к любой наперед заданной вероятностной мере μ . Поэтому для получения нужного результата естественно потребовать, чтобы носители мер A_n были «равномерно распределены» на X в геометрическом смысле.

Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Содержательно это означает следующее. Пусть $\varepsilon > 0$ и $N(X, \varepsilon)$ — наименьшее число точек в ε -сети в X . ε -Сеть $A \subset X$ будем называть *оптимальной*, если $|A| = N(X, \varepsilon)$. Множество $\text{as}(X) = \{N(X, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} = \{1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$ будем называть *аппроксимационным спектром* X , а последовательность $\varepsilon_n = \min\{\varepsilon : N(X, \varepsilon) = k_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, — *аппроксимационной последовательностью* для X . Оптимальные ε_n -сети как раз и являются искомыми «равномерно распределенными» в X конечными подмножествами.

Последовательность $(\mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ называем *допустимой*, если множества A_n ($n \in \mathbb{N}$) являются оптимальными ε_n -сетями. Если все допустимые последовательности сходятся, то они имеют общий предел μ_X^u , и если $\text{supp}(\mu_X^u) = X$, то меру μ_X^u называем *мерой равномерного распределения на X* и говорим, что метрический компакт (X, ρ) *допускает равномерное распределение*. Оказывается, что из сходимости одной допустимой последовательности вытекает сходимость всех таких последовательностей, что упрощает работу с введенным понятием.

В данной работе показано, что сходимость допустимых последовательностей и существование равномерного распределения зависят от выбора совместимой с топологией метрики на X . Так, стандартное канторово совершенное множество Π , лежащее на отрезке $[0, 1]$, допускает равномерное распределение. В то же время на Π можно задать метрику ρ_1 , в которой все допустимые последовательности расходятся, а также метрику ρ_2 , для которой μ_Π^u есть мера Дирака. Здесь надо заметить, что сходимость последовательности является топологическим понятием, но само множество допустимых последовательностей зависит от метрики.

Равномерное распределение существует на любом метрически однородном компакте¹⁾. В этом случае мера μ_X^u совпадает с (единственной) инвариантной относительно изометрий мерой, которая является равномерно распределенной и в смысле приведенного выше «жесткого» определения (см. [2]). Равномерное распределение существует также на любом канонически замкнутом²⁾ ограниченном подмножестве $F \subset \mathbb{R}^n$, имеющем нулевую меру Лебега границы $\text{Fr}(F) = \overline{F} \setminus \text{Int}(F)$. При этом $\mu_F^u = \frac{1}{\mu(F)} \mu|_F$ ³⁾, где μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Последнее утверждение является следствием общей теоремы о сохранении свойства существования равномерного распределения при переходе к канонически замкнутому подпространству $F \subset X$ с нулевой мерой границы $\mu_X^u(\text{Fr}(F)) = 0$. Это утверждение доказано для компактов, в которых мощность ε -разделенных множеств локально ограничена.

Показано также, что компакты, допускающие равномерное распределение, не имеют изолированных точек и однородны в смысле емкостной размерности $\dim_B$. А именно, для любого замкнутого подмножества $F \subset X$ с непустой внутренностью имеют место равенства

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\dim}_B X, \quad \overline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B X.$$

1. Определения и примеры

Пусть (X, ρ) — метрический компакт. Через $P(X)$ обозначается простран-

¹⁾Компакт X называется *метрически однородным*, если для любых двух точек $x, y \in X$ существует изометрия, переводящая x в y .

²⁾Подмножество $F \subset X$ называется *канонически замкнутым*, если F совпадает с замыканием своей внутренности.

³⁾Для меры μ , заданной на X , и борелевского подмножества $F \subset X$ через $\mu|_F$ обозначается ограничение μ на F , т. е. $\mu|_F(A) = \mu(A)$ для любого борелевского подмножества $A \subset F$.

ство вероятностных мер на X , наделенное слабой топологией, в которой $P(X)$ является компактом. Носителем $\text{supp}(\mu)$ вероятностной меры μ называется наименьшее замкнутое подмножество $A \subset X$, для которого $\mu(A) = 1$. Для всякого непрерывного отображения компактов $f : X \rightarrow Y$ определено отображение $P(f) : P(X) \rightarrow P(Y)$, действующее по формуле $P(f)(\mu)(A) = \mu(f^{-1}A)$, где $\mu \in P(X)$ и A — борелевское подмножество Y . Конструкция P является ковариантным функтором, действующим из категории компактов и непрерывных отображений в ту же категорию (см. [3]). Для меры $\mu \in P(X)$ и непрерывной функции $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ через $\mu(g)$ обозначается интеграл $\int_X g d\mu$. Пространство $P(X)$ метризуемо метрикой Канторовича — Рубинштейна ρ_P , которая определяется следующим образом (см. [4]). Для мер $\mu_1, \mu_2 \in P(X)$

$$\rho_P(\mu_1, \mu_2) = \sup\{|\mu_1(f) - \mu_2(f)| : f \in \text{Lip}_1(X)\}, \quad (1)$$

где $\text{Lip}_1(X)$ — множество отображений $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию: $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

Пусть $x_0 \in X$ и $\text{Lip}_1(X, x_0) = \{f \in \text{Lip}_1(X) : f(x_0) = 0\}$. Поскольку для $f \in \text{Lip}_1(X)$ разность $f - f(x_0)$ является элементом $\text{Lip}_1(X, x_0)$, легко видеть, что в формуле (1) достаточно рассматривать функции $f \in \text{Lip}_1(X, x_0)$ (для любой фиксированной точки $x_0 \in X$). При этом для любой функции $f \in \text{Lip}_1(X, x_0)$

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \leq \text{diam}(X). \quad (2)$$

Для $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ через $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$ будем обозначать ε -шар точки x . Аналогично обозначается ε -шар множества $A \subset X$: $B(A, \varepsilon) = \{y \in X : \rho(y, A) \leq \varepsilon\}$. Подмножество A называется ε -сетью в X , если $B(A, \varepsilon) = X$. Множество $C \subset X$ называется ε -разделенным, если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых различных точек $x, y \in C$. Любое ε -разделенное подмножество метрического компакта содержится в максимальном (по включению) конечном ε -разделенном подмноестве, которое является ε -сетью.

Пусть

$$N(X, \varepsilon) = \min\{|A| : B(A, \varepsilon) = X\}$$

— наименьшее число точек в ε -сети в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ε -Сеть A называют оптимальной, если $|A| = N(X, \varepsilon)$. Аппроксимационным спектром X назовем множество значений $N(X, \varepsilon)$:

$$\text{as}(X) = \{N(X, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} = \{1, k_2, \dots, k_n, \dots\} \subset \mathbb{N}.$$

В дальнейшем считаем, что элементы $\text{as}(X)$ упорядочены по возрастанию. Очевидно, что всегда $1 \in \text{as}(X)$ и $\text{as}(X)$ бесконечен для бесконечного компакта X (в последующих рассуждениях X считается бесконечным). Например, для отрезка $I = [0, 1]$ (с обычной метрикой) $\text{as}(I) = \mathbb{N}$. В то же время для стандартного канторова совершенного множества $\Pi \subset I$ имеем $\text{as}(\Pi) = \{2^{n-1} : n \in \mathbb{N}\}$.

Предложение 1. Для любого бесконечного подмножества $K = \{k_1 = 1, k_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ существует метрический компакт X такой, что $\text{as}(X) = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$X = \{x_n^i : n \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, k_{n+1} - k_n\} \cup \{p\}$$

и зададим метрику ρ на X следующим образом:

$$\rho(x_n^i, x_m^j) = \frac{1}{2^{\min\{n, m\}}}; \quad \rho(x_n^i, p) = \frac{1}{2^n}.$$

Легко проверить, что $\text{as}(X) = K$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\text{as}(X) = \{1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$. Положим $\varepsilon_n = \inf\{\varepsilon : N(X, \varepsilon) = k_n\}$. Последовательность $(\varepsilon_n : n \in \mathbb{N})$ будем называть *аппроксимационной последовательностью для X* .

Очевидно, что $\lim \varepsilon_n = 0$. К примеру, аппроксимационная последовательность единичного отрезка $I = [0, 1]$ состоит из чисел $\varepsilon_n = \frac{1}{2n}$; для канторова совершенного множества — из $\varepsilon_n = \frac{2}{3^n}$.

Легко показать, что $\varepsilon_n = \rho_H(X, \text{exr}_{k_n} X)$, где ρ_H — метрика Хаусдорфа в пространстве $\text{exr } X$ непустых замкнутых подмножеств X , а $\text{exr}_k X = \{A \in \text{exr } X : |A| \leq k\}$ ($k \in \mathbb{N}$) — замкнутое подпространство $\text{exr } X$. Следовательно, $N(X, \varepsilon_n) = k_n$.

Пусть A — конечное подмножество X . Мету классического равномерного распределения на A обозначим через μ_A^u :

$$\mu_A^u = \frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} \delta_x,$$

где δ_x — мера Дирака с носителем в точке x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Последовательность мер $(\mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ будем называть *допустимой*, если для каждого n множество A_n есть оптимальная ε_n -сеть, где $(\varepsilon_n : n \in \mathbb{N})$ — аппроксимационная последовательность для X . Компакт X будем называть *стабильным*, если все его допустимые последовательности сходятся.

Очевидно, что если компакт стабилен, то все допустимые последовательности сходятся к общему пределу, который обозначим через μ_X^u .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если компакт X стабилен и $\text{supp}(\mu_X^u) = X$, то мету μ_X^u будем называть *мерой равномерного распределения на X* и говорить, что X *допускает равномерное распределение*.

Покажем, что для стабильности компакта достаточно сходимости одной допустимой последовательности.

Лемма 1. Пусть D, E — ε -сети в X , причем D — оптимальная ε -сеть и $F \subset D$. Тогда $|B(F, 2\varepsilon) \cap E| \geq |F|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B(F, 2\varepsilon) \cap E = G$. Тогда $B(E \setminus G, \varepsilon) \cap B(F, \varepsilon) = \emptyset$. Следовательно, $B(F, \varepsilon) \subset B(G, \varepsilon)$. Предположим, что $|G| < |F|$. Тогда $D' = (D \setminus F) \cup G$ — ε -сеть в X и $|D'| < |D|$; противоречие с оптимальностью D . $\square$

Лемма 2. Пусть D, E — оптимальные ε -сети для X . Тогда существует биекция $g : D \rightarrow E$, удовлетворяющая условию

$$\rho(x, g(x)) \leq 2\varepsilon \quad (3)$$

для любого $x \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомую биекцию будем строить по индукции. На шаге 1 в множестве D возьмем точку x_1 , выберем для нее $y_1 \in E$ так, что $\rho(x_1, y_1) \leq \varepsilon$, и положим $g(x_1) = y_1$. Далее предположим, что на некотором собственном подмножестве $F \subset D$ уже задано инъективное отображение $g : F \rightarrow E$, удовлетворяющее условию (3), и покажем, что

(*) F можно дополнить до большего множества $F' \subset D$, для которого также существует инъективное отображение $h : F' \rightarrow E$, удовлетворяющее условию: $\rho(x, h(x)) \leq 2\varepsilon$ при $x \in F'$.

Пусть $G = g(F)$, $H = D \setminus F$, $S = E \setminus G$. Если $B(H, 2\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$, то найдутся точки $y \in H$ и $z \in S$ такие, что $\rho(y, z) \leq 2\varepsilon$. Положим $F' = F \cup \{y\}$, $h|_F = g$ и $h(y) = z$ — утверждение (*) выполнено.

Остается рассмотреть случай, когда $B(H, 2\varepsilon) \cap S = \emptyset$. Тогда $U = B(H, 2\varepsilon) \cap E \subset G$ и $K_1 = B(S, 2\varepsilon) \cap D \subset F$. Положим $T_1 = g(K_1)$. Если $T_1 \cap U = \emptyset$, то $K_2 = B(S \cup T_1, 2\varepsilon) \cap D \subset F$. Пусть $T_2 = g(K_2)$. Если $T_2 \cap U = \emptyset$, то строим $K_3 = B(S \cup T_2, 2\varepsilon) \cap D \subset F$ и $T_3 = g(K_3)$ и т. д. В силу леммы 1 последовательность $T_1, T_2, \dots$ строго возрастает. Следовательно, на некотором шаге i получим $T_i \cap U \neq \emptyset$. Тогда найдутся точки $y_i \in T_i \cap U$ и $s \in H$ такие, что $\rho(s, y_i) \leq 2\varepsilon$. Пусть x_i — точка из K_i , для которой $g(x_i) = y_i$. По построению K_i найдется точка $y_{i-1} \in T_{i-1}$, для которой $\rho(x_i, y_{i-1}) \leq 2\varepsilon$. Для соответствующей точки $x_{i-1} \in K_{i-1}$ найдется $y_{i-2} \in T_{i-2}$ с $\rho(x_{i-1}, y_{i-2}) \leq 2\varepsilon$ и т. д. Процесс остановится на точке $x_1 \in K_1$, для которой можно указать $z \in S$ такую, что $\rho(x_1, z) \leq 2\varepsilon$.

Положим $F' = F \cup \{s\}$ и зададим отображение $h : F' \rightarrow E$ следующим образом: $h(s) = y_i$, $h(x_1) = z$, $h(x_i) = y_{i-1}$ при $i > 1$. Для остальных точек $x \in F$ положим $h(x) = g(x)$.

Итак, существование F' и h доказано. Продолжая индукцию, на некотором шаге получим искомую биекцию между множествами D и E . $\square$

Лемма 3. Если D и E — оптимальные ε -сети, то $\rho_P(\mu_D^u, \mu_E^u) \leq 2\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g : D \rightarrow E$ — биекция, удовлетворяющая условию (3), и $|D| = |E| = k$. Имеем

$$\rho_P(\mu_D^u, \mu_E^u) = \sup \left\{ \left| \sum_{x \in D} \frac{1}{k} (f(x) - f(g(x))) \right| : f \in \text{Lip}_1(X) \right\} \leq 2\varepsilon. \quad \square$$

Из леммы 3 сразу следует

Предложение 2. Компакт X стабилен, если для X существует сходящаяся допустимая последовательность.

Лемма 4. Пусть (X, ρ) — метрический компакт, $a \in X$ и $(s_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Пусть последовательность $(\nu_n : n \in \mathbb{N})$ мер из $P(X)$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(B(a, s_n)) = 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \delta_a.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \text{Lip}_1(X)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\nu_n(f) - \delta_a(f)| &= \left| \int_X (f(x) - f(a)) d\nu_n \right| \leq \int_{X \setminus B(a, s_n)} |f(x) - f(a)| d\nu_n \\ &\quad + \int_{B(a, s_n)} |f(x) - f(a)| d\nu_n \leq \text{diam}(X)(1 - \nu_n(B(a, s_n))) + s_n. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_P(\nu_n, \delta_a) = 0$. $\square$

Предложение 3. Если (X, ρ) — метрический компакт с единственной предельной точкой a , то X стабилен и $\mu_X^u = \delta_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mu_n = \mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ — допустимая последовательность и $(\varepsilon_n : n \in \mathbb{N})$ — аппроксимационная последовательность для X . Для

каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$s_n = \inf\{\delta > 0 : |X \setminus B(a, \delta)| \leq \ln N(X, \varepsilon_n)\}.$$

Легко проверить, что $s_n > 0$ для любого n и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$. Кроме того,

$$\mu_n(B(a, s_n)) \geq \frac{N(X, \varepsilon_n) - \ln N(X, \varepsilon_n)}{N(X, \varepsilon_n)}.$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B(a, s_n)) = 1$. Таким образом, в силу леммы 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \delta_a$. $\square$

Предложение 4. Стандартное канторово совершенное множество Π , лежащее на отрезке $[0, 1]$, допускает равномерное распределение.

Доказательство. Точки Π представимы в виде бесконечных троичных дробей, содержащих только 0 и 2 (см. [5]). Если все цифры 2 в такой дроби заменить на 1, то получится отображение f , переводящее троичную дробь в двоичную, которое является непрерывным отображением канторова множества Π на отрезок $[0, 1]$. Отображение f склеивает концы смежных интервалов (точки «первого рода» множества Π) и взаимно однозначно в точках «второго рода» (см. [5]). Пусть ν — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$. Легко проверить, что существует единственная мера $\mu \in P(\Pi)$, для которой $P(f)(\mu) = \nu$. При этом $\mu(A) = \nu(f(A))$ для любого борелевского множества $A \subset \Pi$.

Покажем, что к мере μ сходится любая допустимая последовательность $(\mu_n = \mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ компакта Π .

Канторово множество Π можно представить как пересечение последовательности вложенных замкнутых подмножеств отрезка $[0, 1]$:

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots,$$

где F_n — объединение непересекающихся отрезков Δ_i^n , $i = 1, \dots, 2^n$, длины $\frac{1}{3^n}$.

Нетрудно показать, что аппроксимационная последовательность для Π имеет вид $\varepsilon_n = \frac{2}{3^{n-1}}$ и любая оптимальная ε_{n+1} -сеть $A_{n+1} \subset \Pi$ пересекается с каждым отрезком Δ_i^n ровно по одной точке, которую обозначим через x_i^n .

Пусть $f \in \text{Lip}_1(\Pi)$. Поскольку $\mu(\Pi \cap \Delta_i^n) = \frac{1}{2^n}$, получаем

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu(f)| &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} f(x_i^n) - \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\Pi \cap \Delta_i^n} f(x) d\mu \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{2^n} \int_{\Pi \cap \Delta_i^n} (f(x_i^n) - f(x)) d\mu \right| \leq \frac{2^n}{2^n 3^n}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_P(\mu_n, \mu) = 0$. $\square$

ПРИМЕР 1. Существует нестабильный метрический компакт (Y, ρ) , гомеоморфный канторову множеству Π .

Доказательство. Пусть

$$Y = \bigcup \{D_j^i : i \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m_i\} \cup \{a, b\}, \quad (4)$$

где D_j^i — попарно дизъюнктивные канторовы совершенные множества, не содержащие точек a и b ($a \neq b$), а последовательность натуральных чисел m_i определяется по индукции следующим образом.

Пусть $m_1 = 1$. Предположим, что числа m_j при $j < i$ уже определены, и положим

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} m_j 2^{i-j}, \quad m_i = ip_i \quad (i \geq 2). \quad (5)$$

Для задания метрики ρ на D_j^i будем считать, что множества D_j^i лежат на отрезках прямой: $D_j^i \subset [0, \frac{1}{4^i}]$, и $\rho(x, y)$ для $x, y \in D_j^i$ есть обычное расстояние между точками прямой. При этом D_j^i отождествляем с подмножеством отрезка $[0, \frac{1}{4^i}]$, которое строится по классической схеме построения канторова множества с той лишь разницей, что на каждом шаге выбрасываем срединные интервалы оставшихся отрезков, равные половине их длины, а не $\frac{1}{3}$, как в классической схеме. Сразу заметим, что при такой метризации множеств D_j^i для каждого i и $k \geq i$ имеет место равенство

$$N(D_j^i, 1/4^k) = 2^{k-i}. \quad (6)$$

Определим расстояние ρ между точками $x_k \in D_{j_k}^{i_k}$ ($k = 1, 2$) при $D_{j_1}^{i_1} \neq D_{j_2}^{i_2}$. Если числа i_1, i_2 имеют разную четность, то положим $\rho(x_1, x_2) = 1$; если четность i_1, i_2 одинакова, то $\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{4^{\min\{i_1, i_2\}}}$. Для четного i и $x \in D_j^i$ положим $\rho(x, b) = 1$, $\rho(x, a) = \frac{1}{4^i}$, для нечетного i — $\rho(x, a) = 1$, $\rho(x, b) = \frac{1}{4^i}$. Проверка аксиом метрики при этом не представляет труда.

Очевидно, что (Y, ρ) — нульмерный метрический компакт без изолированных точек. Таким образом, Y гомеоморфен канторову совершенному множеству.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$B(a, 1/4^k) = \bigcup_{2i \geq k} \bigcup_j D_j^{2i} \cup \{a\}, \quad B(b, 1/4^k) = \bigcup_{2i+1 \geq k} \bigcup_j D_j^{2i+1} \cup \{b\}. \quad (7)$$

В силу определения метрики ρ и равенств (6), (7) аппроксимационная последовательность для Y содержит числа $\frac{1}{4^i}$, $i \in \mathbb{N}$, и $N(X, 1/4^i) = p_i + 2$ для каждого $i \geq 2$. В силу (5) $p_i = 2ip_{i-1}$.

Рассмотрим последовательность $(\mu_{2i+1} = \mu_{A_{2i+1}}^u : i \in \mathbb{N})$, где A_{2i+1} — оптимальные $\frac{1}{4^{2i+1}}$ -сети для Y , и докажем, что эта последовательность сходится к мере Дирака δ_b . Имеем

$$|A_{2i+1} \cap B(b, 1/4^{2i-1})| = 2m_{2i-1} + 1.$$

Следовательно,

$$\mu_{2i+1}(B(b, 1/4^{2i-1})) = \frac{2m_{2i-1} + 1}{p_{2i} + 2} = \frac{2(2i-1)p_{2i-1} + 1}{4ip_{2i-1} + 2}.$$

Значит, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{2i+1}(B(b, 1/4^{2i-1})) = 1$, и в силу леммы 4 $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{2i+1} = \delta_b$.

Так же можно доказать, что аналогичная последовательность $(\mu_{2i} = \mu_{A_{2i}}^u : i \in \mathbb{N})$ сходится к мере δ_a . Обе последовательности μ_{2i+1} и μ_{2i} являются подпоследовательностями допустимой последовательности для Y . Стало быть, допустимая последовательность не имеет предела. $\square$

Для любых двух неотрицательных чисел p и q таких, что $p + q = 1$, нетрудно построить метрический компакт X с двумя предельными точками a и b , который является стабильным, и $\mu_X^u = p\delta_a + q\delta_b$. При этом имеет место

ПРИМЕР 2. Существует метрический компакт (Z, ρ) с двумя предельными точками, который не стабилен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В построенном в примере 1 пространстве Y в каждом множестве $D_j^i \subset Y$ выберем по точке $d_j^i \in D_j^i$ и рассмотрим подпространство $Z = \{d_j^i : i \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m_i\} \cup \{a, b\} \subset Y$. Аппроксимационная последовательность для Z имеет вид $\varepsilon_n = \frac{1}{4^{n-1}}$.

Пусть $(\mu_n = \mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ — допустимая последовательность для (Z, ρ) . По лемме 4 подпоследовательность $(\mu_{2i+1} : i \in \mathbb{N})$ сходится к мере Дирака δ_b . В самом деле, легко проверить, что

$$N(Z, 1/4^{2i}) = \sum_{j=1}^{2i-1} m_j + 2 = |A_{2i+1}|, \quad |A_{2i+1} \cap B(b, 1/4^{2i-1})| = m_{2i-1} + 1.$$

Следовательно, как и в примере 1, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{2i+1}(B(b, 1/4^{2i-1})) = 1$. Поэтому

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{2i+1} = \delta_b.$$

Аналогично $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{2i} = \delta_a$. $\square$

ПРИМЕР 3. Существует стабильный метрический компакт (X, ρ) , гомеоморфный Π , такой, что μ_X^u есть мера Дирака (и, значит, (X, ρ) не допускает равномерного распределения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В метрическом пространстве (Y, ρ) , построенном в примере 1, рассмотрим подпространство

$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j=1}^{m_{2i}} D_j^{2i} \cup \{a\}.$$

Очевидно, что X — нульмерный компакт без изолированных точек, следовательно, X гомеоморфен канторову совершенному множеству. Аппроксимационная последовательность $(\varepsilon_n : n \in \mathbb{N})$ для X имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{3i-2} = \frac{1}{4^{2i}}, \quad \varepsilon_{3i-1} = \frac{3}{4^{2i+1}}, \quad \varepsilon_{3i} = \frac{3}{4^{2i+2}}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

При этом

$$N(X, \varepsilon_{3i-2}) = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} m_{2j} 4^{i-j}, \quad N(X, \varepsilon_{3i-1}) = 1 + \sum_{j=1}^i m_{2j} 4^{i-j},$$

$$N(X, \varepsilon_{3i}) = 1 + 2 \sum_{j=1}^i m_{2j} 4^{i-j}.$$

В силу определения чисел m_i для любой допустимой последовательности μ_n в (X, ρ) получаем, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{3i-l}(B(a, 1/4^{2i-2})) = 1$ при $l = 0, 1, 2$. Следовательно, по лемме 4 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \delta_a$. $\square$

2. Теоремы о существовании равномерных распределений

Компакт (X, ρ) называется *метрически однородным*, если для любых точек $x, y \in X$ существует изометрия $f : X \rightarrow X$, для которой $f(x) = y$. Вероятностная мера μ на метрически однородном компакте называется *инвариантной относительно изометрий*, если для любой изометрии f будет $P(f)(\mu) = \mu$.

Теорема 1. Любой метрически однородный компакт (X, ρ) допускает равномерное распределение, мера которого μ_X^u совпадает с (единственной) инвариантной мерой относительно изометрий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu_{A_n}^u$, $n \in \mathbb{N}$, — допустимая последовательность для X и μ — некоторая предельная точка этой последовательности в пространстве $P(X)$. Выделим подпоследовательность $\mu_{A_{n_i}}^u$, сходящуюся к μ . Покажем, что мера μ инвариантна относительно изометрий. Пусть f — изометрия X . Множества $A'_{n_i} = f(A_{n_i})$, $i \in \mathbb{N}$, являются оптимальными ε_{n_i} -сетями. В силу леммы 3 последовательность $P(f)(\mu_{A_{n_i}}^u) = \mu_{A'_{n_i}}^u$ сходится к мере μ . Следовательно, $P(f)(\mu) = \mu$, что и требовалось. Из инвариантности меры μ сразу следует, что $\text{supp}(\mu) = X$.

Известно, что на метрически однородном компакте существует единственная инвариантная относительно изометрий вероятностная мера (см. [2], а также [6, теорема 3.2]). Следовательно, мера μ является единственной предельной точкой допустимой последовательности $\mu_{A_n}^u$. $\square$

Лемма 5. Пусть X — метризуемый компакт, W — открытое подмножество X и $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность из $P(X)$, сходящаяся к мере μ . Тогда $\varliminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(W) \geq \mu(W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu(W) = 0$, то утверждение леммы очевидно. Предположим, что $\mu(W) = b > a = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(W)$. В последовательности μ_n можно выделить подпоследовательность μ_{n_k} , для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(W) = a. \quad (8)$$

Для упрощения обозначений будем считать, что свойством (8) обладает исходная последовательность μ_n .

Положим $\delta = \frac{b-a}{3}$. Существует n_0 такое, что $\mu_n(W) < a + \delta$ при $n > n_0$. Зафиксируем метрику ρ на X , совместимую с топологией. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $F_k = \{x : \rho(x, X \setminus W) \geq 1/k\}$. Ясно, что $F_1 \subset \dots \subset F_k \subset \dots \subset W$ и $\bigcup_k F_k = W$. Следовательно, существует m такое, что $\mu(F_m) > b - \delta$.

Рассмотрим функцию $g : X \rightarrow \mathbb{R}$, которая определяется по формуле $g(x) = \min\{\rho(x, X \setminus W), 1/m\}$. Очевидно, что $g(x) = 0$ при $x \in X \setminus W$ и $g(x) = 1/m$ при $x \in F_m$. Кроме того, $g \in \text{Lip}_1(X)$. Для любого $n > n_0$ имеем

$$\begin{aligned} \rho_P(\mu, \mu_n) &\geq |\mu(g) - \mu_n(g)| = \left| \int_W g d\mu - \int_W g d\mu_n \right| \\ &\geq \int_{F_m} g d\mu - (1/m)\mu_n(W) \geq \frac{1}{m}(b - \delta) - \frac{1}{m}(a + \delta) = \frac{\delta}{m}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_n \mu_n \neq \mu$; противоречие. $\square$

Подмножество $C \subset X$ называют *канонически открытым*, если $C = \text{Int}(\overline{C})$.

Лемма 6. Пусть последовательность вероятностных мер $(\mu_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к мере μ и C — канонически открытое подмножество X такое, что $\mu(\text{Fr}(C)) = 0$. Пусть в C выделена система открытых подмножеств C_n , $n \in \mathbb{N}$, такая, что $C_k \subset C_n$ при $k < n$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = C$. Тогда $\lim \mu_n(C_n) = \mu(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\mu_n(C_n) \geq \mu_n(C_k)$ при $k < n$. Применяя лемму 5, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C_k) \geq \mu(C_k)$$

для любого k . Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C_n) \geq \sup\{\mu(C_k) : k \in \mathbb{N}\} = \mu(C).$$

Пусть $D = X \setminus \overline{C}$. По лемме 5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(D) \geq \mu(D)$. При этом

$$1 \geq \lim(\mu_n(C_n) + \mu_n(D)) \geq \lim \mu_n(C_n) + \lim \mu_n(D) \geq \mu(C) + \mu(D) = 1.$$

Следовательно, $\lim \mu_n(C_n) = \mu(C)$.

Докажем, что существует $\lim \mu_n(C_n)$. Предположим, что это не так, т. е. $\overline{\lim} \mu_n(C_n) = c > a = \mu(C)$. Выберем подпоследовательность μ_{n_k} , для которой $\lim \mu_{n_k}(C_{n_k}) = c$. К μ_{n_k} применим проведенные выше рассуждения и получим, что $\lim \mu_{n_k}(C_{n_k}) = a$; противоречие. Итак, $\lim \mu_n(C_n) = \mu(C)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях леммы 6 $\lim \mu_n(C) = \mu(C)$ (для доказательства достаточно положить $C_n = C$, $n \in \mathbb{N}$).

Пусть $A \subset X$, $\mu \in P(X)$ и $\mu(A) > 0$. Введем обозначение:

$$\mu^A = \frac{1}{\mu(A)} \mu|_A.$$

Очевидно, что $\mu^A \in P(X)$.

Лемма 7. Пусть последовательность вероятностных мер μ_n сходится к мере μ . Тогда для любого канонически открытого множества $C \subset X$ такого, что $0 < \mu(C) < 1$, $\mu(\text{Fr}(C)) = 0$, и любой системы открытых подмножеств $C_n \subset C$, $n \in \mathbb{N}$, такой, что $C_k \subset C_n$ при $k < n$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = C$, имеет место равенство $\lim \mu_n^{C_n} = \mu^C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу леммы 6 начиная с некоторого n_0 $\mu_n(C_n) > 0$, так что меры $\mu_n^{C_n}$ определены. Пусть ν_1 — некоторая предельная точка последовательности $\mu_n^{C_n}$. Выберем подпоследовательность $\mu_{n_k}^{C_{n_k}}$, сходящуюся к ν_1 , и пусть ν_2 — предельная точка последовательности $\mu_{n_k}^{F_{n_k}}$, где $F_n = X \setminus C_n$. В последовательности $\mu_{n_k}^{F_{n_k}}$ выберем подпоследовательность, сходящуюся к ν_2 . Для упрощения обозначений будем считать, что исходная последовательность μ_n удовлетворяет условиям $\lim \mu_n^{C_n} = \nu_1$, $\lim \mu_n^{F_n} = \nu_2$.

Положим $a_n = \mu_n(C_n)$, $a = \mu(C)$. Следующее равенство очевидно:

$$a_n \mu_n^{C_n} + (1 - a_n) \mu_n^{F_n} = \mu_n. \quad (9)$$

В силу леммы 6 $\lim a_n = a$. Переходя в равенстве (9) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$a \nu_1 + (1 - a) \nu_2 = \mu.$$

При этом в силу леммы 5 $\text{supp}(\nu_2) \subset F = X \setminus C$. Следовательно, для любого борелевского подмножества $E \subset C$ будет $\mu(E) = a \nu_1(E)$. Таким образом, $\mu|_C = a \nu_1$, т. е. $\nu_1 = \mu^C$.

Итак, доказано, что последовательность $\mu_n^{C_n}$ имеет единственную предельную точку μ^C , что и требовалось. $\square$

Пусть (X, ρ) — метрический компакт и $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что мощность ε -разделенных подмножеств X локально ограничена, если существует такое натуральное число p , что для любого $\varepsilon > 0$, любого ε -разделенного подмножества $S \subset X$ и любой точки $x \in X$

$$|B(x, \varepsilon) \cap S| \leq p. \quad (10)$$

Легко проверить, что указанным свойством обладают все компакты, лежащие в $\mathbb{R}^n$ (с метрикой, порожденной любой нормой), и свойство локальной ограниченности ε -разделенных подмножеств наследуется по замкнутым подпространствам. Примером метрического компакта, который не обладает этим свойством, является одноточечная компактификация прямой суммы n -мерных кубов I^n , $n \in \mathbb{N}$, где $I = [0, 1]$, снабженная метрикой ρ , ограничение которой на каждом кубе I^n подобно евклидовой метрике. Метрику ρ можно задать, например, следующим образом. Ограничение ρ на I^n есть $\frac{1}{4^n} \rho_n$, где ρ_n — обычная евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$. Если $x \in I^n$, $y \in I^m$, то $\rho(x, y) = \frac{1}{2^{\min\{n, m\}}}$. Для $x \in I^n$ и точки s , которая компактифицирует прямую сумму I^n , имеем $\rho(x, s) = \frac{1}{2^n}$.

Теорема 2. Пусть (X, ρ) — метрический компакт, в котором мощность ε -разделенных подмножеств локально ограничена. Если на X существует равномерное распределение μ_X^u , то любое канонически замкнутое множество $F \subset X$ с нулевой мерой границы $\mu_X^u(\text{Fr}(F)) = 0$ также допускает равномерное распределение, причем $\mu_F^u = (\mu_X^u)_F^u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $F = X$ тривиален, поэтому будем считать, что $F \neq X$. Положим $C = \text{Int}(F)$, $D = X \setminus F$, $E = \text{Fr}(F)$. Поскольку множества C и D непусты, выполнены неравенства $\mu_X^u(C) > 0$, $\mu_X^u(D) > 0$. Пусть $(\varepsilon_n : n \in \mathbb{N})$ и $(\varepsilon'_k : k \in \mathbb{N})$ — аппроксимирующие последовательности для F и X соответственно и $(\mu_n = \mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ — допустимая последовательность для F . Для каждого n число $N(X, \varepsilon_n)$ является элементом $\text{as}(X)$, который имеет в $\text{as}(X)$ некоторый порядковый номер $k(n)$. Пусть $A'_{k(n)}$ — оптимальная $\varepsilon'_{k(n)}$ -сеть в X . Заметим, что $A'_{k(n)}$ является также оптимальной ε_n -сетью в X . Поскольку X допускает равномерное распределение, последовательность $\mu'_n = \mu_{A'_{k(n)}}^u$ сходится к мере μ_X^u . Положим

$$E_n = B(E, \varepsilon_n), \quad C_n = C \setminus E_n, \quad D_n = D \setminus E_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В силу леммы 7 последовательность $(\mu'_n)^{C_n}$ сходится к мере $(\mu_X^u)^C = (\mu_X^u)^F$. Оценим расстояние $\rho_P((\mu'_n)^{C_n}, \mu_n)$.

Положим $A'_n = A'_{k(n)} \cap C_n$ и покажем, что существует инъективное отображение $g : A'_n \rightarrow A_n$, для которого

$$\rho(x, g(x)) \leq 2\varepsilon_n \quad (11)$$

для любого $x \in A'_n$. Схема рассуждений здесь аналогична доказательству леммы 2. Прежде всего, заметим, что $|A'_n| \leq |A_n|$ (в противном случае множество $(A'_{k(n)} \setminus A'_n) \cup A_n$ есть ε_n -сеть в X мощности, меньшей $N(X, \varepsilon_n)$). Предположим, что отображение g уже задано на некотором собственном подмножестве $K \subset A'_n$, и покажем, что K можно расширить до большего подмножества $K' \subset A'_n$, для которого также существует инъективное отображение в A_n , удовлетворяющее условию (11).

Положим

$$Z = B(A'_n, \varepsilon_n), \quad H = A'_n \setminus K, \quad G = g(K), \quad S = A_n \setminus G.$$

Если $B(H, 2\varepsilon_n) \cap S \neq \emptyset$, то можно выбрать точки $x \in H$ и $y \in S$ так, что $\rho(x, y) \leq 2\varepsilon_n$, и положить $K' = K \cup \{x\}$, $g(x) = y$.

Пусть $B(H, 2\varepsilon_n) \cap S = \emptyset$. Заметим, что $B(S, \varepsilon_n) \cap Z \neq \emptyset$ (иначе $Z \subset B(G, \varepsilon_n)$, что невозможно в силу оптимальности ε_n -сети $A'_{k(n)}$). Следовательно, $P_1 = B(S, 2\varepsilon_n) \cap A'_n \neq \emptyset$ и $P_1 \subset K$. Положим $T_1 = g(P_1)$.

Если $T_1 \cap B(H, 2\varepsilon_n) = \emptyset$, то $B(S \cup T_1, 2\varepsilon_n) \cap A'_n = P_2 \subset K$. При этом включение $P_1 \subset P_2$ строгое. В самом деле, если $B(S \cup T_1, 2\varepsilon_n) \cap (A'_n \setminus P_1) = \emptyset$, то $B(A'_n \setminus P_1, \varepsilon_n) \subset B(G \setminus T_1, \varepsilon_n)$, что также невозможно в силу оптимальности $A'_{k(n)}$.

Положим $T_2 = g(P_2)$. Если $T_2 \cap B(H, 2\varepsilon_n) = \emptyset$, то аналогично строим P_3 , T_3 и т. д. Поскольку $B(H, 2\varepsilon_n) \cap G \neq \emptyset$ и последовательность $P_1 \subset P_2 \subset \dots$ строго возрастает, на некотором шаге i получим $T_i \cap B(H, 2\varepsilon_n) \neq \emptyset$. Дальнейшее построение множества K' и его инъективного отображения в A_n дословно повторяет соответствующие рассуждения из доказательства леммы 2.

Итак, будем считать, что отображение $g : A'_n \rightarrow A_n$, удовлетворяющее условию (11), задано.

Введем обозначения:

$$c_n = |A'_{k(n)} \cap (C \setminus B(E, 3\varepsilon_n))|, \quad d_n = |A'_{k(n)} \cap (D \setminus B(E, 3\varepsilon_n))|,$$

$$e_n = |A'_{k(n)} \cap B(E, 3\varepsilon_n)|.$$

Поскольку $\mu'_n(C \setminus B(E, 3\varepsilon_n)) = \frac{c_n}{N(X, \varepsilon_n)}$, по лемме 6 получаем, что

$$\lim \frac{c_n}{N(X, \varepsilon_n)} = \mu_X^u(C).$$

Аналогично

$$\lim \frac{d_n}{N(X, \varepsilon_n)} = \mu_X^u(D).$$

А так как $c_n + d_n + e_n = N(X, \varepsilon_n)$ и $\mu_X^u(C) + \mu_X^u(D) = 1$, отсюда следует, что

$$\lim \frac{e_n}{c_n} = 0. \quad (12)$$

Пусть теперь $f \in \text{Lip}_1(X, x_0)$. Введем обозначения: $|A'_n| = m$, $|A_n| = k$ (напомним, что $m \leq k$). Имеют место следующие соотношения (см. (2)):

$$\begin{aligned} |(\mu'_n)^{C_n}(f) - \mu_n(f)| &= \left| \frac{1}{m} \sum_{x \in A'_n} f(x) - \frac{1}{k} \sum_{y \in A_n} f(y) \right| \\ &= \left| \sum_{x \in A'_n} \left(\frac{1}{m} f(x) - \frac{1}{k} f(g(x)) \right) - \frac{1}{k} \sum_{y \in A_n \setminus g(A'_n)} f(y) \right| \\ &\leq \left| \sum_{x \in A'_n} f(x) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k} \sum_{x \in A'_n} (f(x) - f(g(x))) \right| + \frac{k-m}{k} \text{diam}(X) \\ &\leq 2\varepsilon_n + 2 \frac{k-m}{k} \text{diam}(X). \quad (13) \end{aligned}$$

Оценим дробь $\frac{k-m}{k}$. Пусть q — наименьшая мощность ε_n -сети в множестве $V = F \cap B(E, 2\varepsilon_n)$. Имеет место неравенство $m+q \geq k$, поскольку A_n — оптимальная

ε_n -сеть для F . Следовательно, $q \geq k - m$. Выберем в V максимальное (по включению) ε_n -разделенное подмножество M . Поскольку M является ε_n -сетью, $|M| \geq q$. Для каждой точки $x \in A'_{k(n)} \cap B(E, 3\varepsilon_n)$ выполнено неравенство $|B(x, \varepsilon_n) \cap M| \leq p$, где p — натуральное число, определенное для X по формуле (10). При этом семейство ε_n -шаров $\{B(x, \varepsilon_n) : x \in A'_{k(n)} \cap B(E, 3\varepsilon_n)\}$ покрывает V . Следовательно, $pe_n \geq |M| \geq q$. Кроме того, очевидно, что $c_n \leq k$. Таким образом, $\frac{k-m}{k} \leq \frac{pe_n}{c_n}$.

Итак, в силу (12) и (13) получаем, что $\rho_P((\mu'_n)^{C_n}, \mu_n)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, последовательности вероятностных мер $(\mu'_n)^{C_n}$ и μ_n имеют одинаковый предел, равный $(\mu_X^u)^F$. $\square$

Теорема 3. r -Мерный куб $X = I^r \subset \mathbb{R}^r$ с метрикой, определяемой по формуле $\rho(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, r\}$, допускает равномерное распределение, причём $\mu'_X = \frac{1}{\mu(X)}(\mu|_X)$, где μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r = 2$, $X = I^2 = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq d\}$, $(\varepsilon_n : n \in \mathbb{N})$ — аппроксимирующая последовательность для X и $(\mu_n = \mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ — допустимая последовательность. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $m = \lfloor \frac{d}{2\varepsilon_n} \rfloor$. Выделим в X семейство квадратов

$$K_{ij} = \{(x, y) : (i-1)2\varepsilon_n \leq x \leq i2\varepsilon_n, (j-1)2\varepsilon_n \leq y \leq j2\varepsilon_n\},$$

где $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \leq m$. Пусть a_{ij} — центр квадрата K_{ij} и $A'_n = \{a_{ij} : i, j \leq m\}$. Легко видеть, что $B(a_{ij}, \varepsilon_n) = K_{ij}$ и

$$|A'_n| = m^2 \leq |A_n| = k.$$

Положим $\mu'_n = \mu_{A'_n}^u$. Мера $\frac{1}{\mu(X)}(\mu|_X)$, фигурирующую в условии теоремы, обозначим для краткости через μ и покажем, что $\lim \mu'_n = \mu$.

Пусть $D = X \setminus \bigcup_{i,j} K_{ij}$. Заметим, что $\mu(K_{ij}) = \frac{1-\mu(D)}{m^2}$. Пусть $f \in \text{Lip}_1(X, x_0)$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |\mu'_n(f) - \mu(f)| &= \left| \sum_{i,j} \frac{f(a_{ij})}{m^2} - \sum_{i,j} \int_{K_{ij}} f(x) d\mu - \int_D f(x) d\mu \right| \\ &\leq \left| \sum_{i,j} f(a_{ij}) \left(\frac{1}{m^2} - \mu(K_{ij}) \right) \right| + \left| \sum_{i,j} \int_{K_{ij}} (f(a_{ij}) - f(x)) d\mu \right| + \left| \int_D f(x) d\mu \right| \\ &\leq \mu(D) \text{diam}(X) + \varepsilon_n(1 - \mu(D)) + \mu(D) \text{diam}(X). \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D) = 0$, отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_P(\mu'_n, \mu) = 0$. Таким образом, $\lim \mu'_n = \mu$.

Оценим величину $\rho_P(\mu'_n, \mu_n)$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2, можно построить инъективное отображение $g : A'_n \rightarrow A_n$, удовлетворяющее условию $\rho(a, g(a)) \leq 2\varepsilon_n$ для любой точки $a \in A'_n$. Для любой функции $f \in \text{Lip}_1(X, x_0)$ по аналогии с формулами (13) получаем

$$\begin{aligned} |\mu'_n(f) - \mu_n(f)| &= \left| \frac{1}{m^2} \sum_{a \in A'_n} f(a) - \frac{1}{k} \sum_{z \in A_n} f(z) \right| \\ &\leq 2\varepsilon_n + 2 \frac{k-m^2}{k} \text{diam}(X). \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку число $k = |A_n|$ удовлетворяет неравенствам: $m^2 \leq k \leq (m+1)^2$, из (14) следует, что $\lim \rho_P(\mu'_n, \mu_n) = 0$. Следовательно, $\lim \mu_n = \mu$.

Проведенные рассуждения легко обобщаются на случай $X = I^r$ при $r > 2$. $\square$

Следствие 1. Пусть F — канонически замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^r$ с метрикой $\rho(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, r\}$, удовлетворяющее условию $\mu(\text{Fr}(F)) = 0$, где μ — мера Лебега. Тогда F допускает равномерное распределение и $\mu_F^u = \frac{1}{\mu(F)}\mu|_F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно поместить F в r -мерный куб и применить теоремы 3 и 2. $\square$

3. Свойства компактов, допускающих равномерное распределение

Предложение 5. Если бесконечный компакт (X, ρ) допускает равномерное распределение, то X не имеет изолированных точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что a — изолированная точка X . Пусть μ_n — допустимая последовательность для X . Компакт X бесконечен, следовательно, число $N(X, \varepsilon_n)$ неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\mu_n(\{x\}) \leq \frac{1}{N(X, \varepsilon_n)}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\{x\}) = 0$. Отсюда в силу леммы 5 следует, что $\mu_X^u(\{x\}) = 0$. Но это невозможно, поскольку $\text{supp}(\mu_X^u) = X$ и $\{x\}$ — непустое открытое подмножество X . $\square$

Пусть F — замкнутое подмножество X и $\varepsilon > 0$. Введем обозначение: $N(F, \varepsilon, X) = \min\{|A| : A \subset X, F \subset B(A, \varepsilon)\}$. Очевидно, что $N(F, \varepsilon, X) \leq N(F, \varepsilon)$.

Предложение 6. Если компакт (X, ρ) допускает равномерное распределение, то X удовлетворяет следующему условию:

(**) для любого замкнутого множества $F \subset X$ с непустой внутренностью существует число $c > 0$ такое, что $N(F, \varepsilon, X) \geq cN(X, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W = \text{Int}(F)$, $(\mu_n = \mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ — допустимая последовательность и $(\varepsilon_n : n \in \mathbb{N})$ — аппроксимационная последовательность для X . Зафиксируем число $p \in \mathbb{N}$ так, что

$$W' = \{x \in W : \rho(x, X \setminus W) > \varepsilon_p\} \neq \emptyset.$$

Поскольку $\text{supp}(\mu_X^u) = X$, то $\mu_X^u(W') > 0$. В силу леммы 5 существуют $c > 0$ и $n_0 > p$ такие, что $\mu_n(W') > c$ для любого $n > n_0$. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_{n_0}$. Тогда существует $m > n_0$ такое, что $\varepsilon \in [\varepsilon_m, \varepsilon_{m-1})$. При этом

$$\mu_m(W') = \frac{|A_m \cap W'|}{N(X, \varepsilon)} > c.$$

Следовательно, $|A_m \cap W'| > cN(X, \varepsilon)$. Покажем, что

$$N(F, \varepsilon_n, X) \geq |A_m \cap W'|. \quad (15)$$

Предположим, что неравенство (15) не выполняется. Пусть $C \subset X$, $|C| = N(F, \varepsilon, X)$ и $F \subset B(C, \varepsilon)$. Тогда $C \cup (A_m \setminus W')$ — ε -сеть в X , число точек в которой меньше $|A_m|$, что невозможно.

Итак, $N(F, \varepsilon, X) \geq cN(X, \varepsilon)$ для всех $\varepsilon < \varepsilon_{n_0}$. Поскольку при $\varepsilon \geq \varepsilon_{n_0}$ множества значений $N(F, \varepsilon, X)$ и $N(X, \varepsilon)$ конечны, отсюда сразу следует утверждение предложения. $\square$

Емкостная размерность $\dim_B X$ метрического компакта X определяется по формуле

$$\dim_B X = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(X, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon} \quad (16)$$

(если указанный предел не существует, то рассматривают нижний или верхний пределы и говорят соответственно о нижней $\underline{\dim}_B X$ или верхней $\overline{\dim}_B X$ емкостных размерностях X , см. [7]). Если F — замкнутое подмножество X , то при определении емкостной размерности F в формуле (16) $N(F, \varepsilon)$ можно заменить на $N(F, \varepsilon, X)$ (см. [8]).

Следствие 2. Если метрический компакт (X, ρ) допускает равномерное распределение, то для любого замкнутого подмножества $F \subset X$ с непустой внутренностью имеют место равенства

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\dim}_B X, \quad \overline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия $(**)$ для F существует $c > 0$, для которого $N(F, \varepsilon, X) \geq cN(X, \varepsilon)$. Следовательно,

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(F, \varepsilon, X)}{-\ln \varepsilon} \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln cN(X, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon} = \underline{\dim}_B X,$$

откуда в силу монотонности емкостных размерностей (см. [7]) сразу вытекает искомое равенство. Совпадение верхних емкостных размерностей доказывается аналогично. $\square$

Предложение 7. Если компакт (X, ρ) стабилен и удовлетворяет условию $(**)$, то X допускает равномерное распределение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W — непустое открытое подмножество X . Покажем, что $\mu_X^u(W) > 0$. Выберем точку $x \in W$ и числа $a > b > 0$ так, что $2b < a$, $\overline{O(x, 2a)} \subset W$ и $\mu_X^u(\text{Fr}(O(x, a))) = 0$. Положим $W_1 = \text{Int}(\overline{O(x, a)})$, $W_2 = \text{Int}(\overline{O(x, b)})$. Пусть $(\mu_n = \mu_{A_n}^u : n \in \mathbb{N})$ — допустимая последовательность для X и n таково, что $\varepsilon_n < b$. Имеем

$$\mu_n(W_1) = \frac{|A_n \cap W_1|}{N(X, \varepsilon_n)}.$$

Поскольку $2b < a$, то $\overline{W_2} \subset B(A_n \cap W_1, \varepsilon_n)$. Следовательно,

$$|A_n \cap W_1| \geq N(\overline{W_2}, \varepsilon_n, X) \geq cN(X, \varepsilon_n),$$

где c — константа для множества $\overline{W_2}$, существующая по условию $(**)$. Итак, $\mu_n(W_1) \geq c$ при больших n . В силу замечания к лемме 6 отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(W_1) = \mu_X^u(W_1) \geq c$. $\square$

Благодарность. Автор выражает благодарность Т. Банаху и Ю. А. Неретину за внимание к проблематике работы и полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mattila P.* Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Fractals and rectifiability. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1995. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 44).
2. *Кайманович В. А.* Равномерное распределение на компактных однородных пространствах и метрика Канторовича — Рубинштейна // Теория вероятностей и ее применения. 1985. Т. 30, № 4. С. 779–782.
3. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
5. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
6. *Неретин Ю. А.* Топологические группы и инвариантные меры. 2014.
<https://arXiv.org/pdf/1510.03082.pdf>.
7. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2013.
8. *Иванов А. В., Фомкина О. В.* О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Тр. Карел. науч. центра РАН. Математическое моделирование и информационные технологии. 2019. № 7. С. 5–14.

Поступила в редакцию 9 января 2020 г.

После доработки 5 августа 2020 г.

Принята к публикации 10 августа 2020 г.

Иванов Александр Владимирович
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск 185910
alvlivanov@krc.karelia.ru