Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. S. Kondrat'ev, On recognition of the sporadic simple groups hs , j_3 , suz , $o'n$, ly , th , fi_{23} , and fi'_{24} by the gruenberg–kegel graph, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1359–1365

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.609>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 52.6.47.48

April 26, 2023, 14:25:13

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ СПОРАДИЧЕСКИХ
ПРОСТЫХ ГРУПП HS , J_3 , Suz , $O'N$, Ly , Th , Fi_{23}
И Fi'_{24} ПО ГРАФУ ГРЮНБЕРГА — КЕГЕЛЯ

А. С. Кондратьев

Аннотация. Графом Грюнберга — Кегеля (графом простых чисел) конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq . Для каждой из спорадических простых групп S , изоморфных HS , J_3 , Suz , $O'N$, Ly , Th , Fi_{23} или Fi'_{24} , определены все конечные группы с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у S . В частности, для этих восьми групп S решена проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.609

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, спорадическая группа, граф Грюнберга — Кегеля, распознавание по графу Грюнберга — Кегеля.

Посвящается 80-летию Юрия Леонидовича Ершова

1. Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ спектр группы G , т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет граф Грюнберга — Кегеля (или граф простых чисел) $\Gamma(G)$ группы G , в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$.

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследований распознаваемости конечных групп по спектру (см. обзор В. Д. Мазурова [1]). Конечная группа G называется *распознаваемой по спектру*, если для любой конечной группы H из равенства $\omega(H) = \omega(G)$ следует изоморфизм $H \cong G$.

С этим направлением тесно связано перспективное направление исследований распознаваемости конечных групп по графу Грюнберга — Кегеля. Конечная группа G называется *распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если для любой конечной группы H равенство графов $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ влечет изоморфизм $H \cong G$ групп. Ясно, что граф $\Gamma(G)$ однозначно определяется по множеству $\omega(G)$, поэтому из распознаваемости конечной группы по графу Грюнберга — Кегеля следует ее распознаваемость по спектру.

Первый необходимый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп по спектру или по графу Грюнберга — Кегеля заключается

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках проекта № 20–51–00007 и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ, соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013.

в доказательстве условия квазираспознаваемости (которое было введено автором в [2]), более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой* по спектру (соответственно по графу Грюнберга — Кегеля), если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ (соответственно $\Gamma(G) = \Gamma(P)$) имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P .

Для конечной группы G через $h_\Gamma(G)$ обозначается число всех попарно не изоморфных конечных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$. Если множество таких групп H бесконечно, то пишем $h_\Gamma(G) = \infty$. Группа G называется *n -распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $h_\Gamma(G) = n < \infty$, *почти распознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $1 < h_\Gamma(G) < \infty$, и *нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля*, если $h_\Gamma(G) = \infty$. Ясно, что распознаваемость группы G по графу Грюнберга — Кегеля равносильна равенству $h_\Gamma(G) = 1$. Говорят, что *проблема распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля решена для конечной группы G* , если найдено значение $h_\Gamma(G)$. Эта проблема имеет смысл только для групп с тривиальным разрешимым радикалом, поскольку известно, что группы с нетривиальным разрешимым радикалом не распознаваемы даже по спектру (см. [1]). Для нераспознаваемой по графу Грюнберга — Кегеля конечной группы G интересен также вопрос об описании конечных групп с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у G .

Первой работой, связанной с распознаваемостью по графу Грюнберга — Кегеля, по-видимому, была работа Чэня [3], в которой он доказал, что каждая из 26 спорадических простых групп однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется в классе конечных групп по своему порядку и графу Грюнберга — Кегеля.

В 2003 г. Хаги [4] исследовала строение конечных групп, граф Грюнберга — Кегеля которых равен графу Грюнберга — Кегеля какой-либо спорадической простой группы. В частности, в этой работе даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графу Грюнберга — Кегеля, а именно спорадические простые группы J_1 , M_{22} , M_{23} , M_{24} , Co_2 , а также доказаны 2-распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля группы M_{11} и квазираспознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля групп J_3 , Suz , O'_N , Ly , Fi_{23} , Fi'_{24} , Th , Ru , Co_1 , B , M . Однако это исследование не было завершено.

В 2006 г. в работе А. В. Заварницина [5] установлена распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля группы J_4 .

Нераспознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля спорадических групп M_{12} и J_2 была известна ранее, она следует из нераспознаваемости этих групп по спектру (см. [6, 7]). Результаты Хаги о строении конечных групп, граф Грюнберга — Кегеля которых равен $\Gamma(M_{12})$ или $\Gamma(J_2)$, существенно усилены в работе автора и И. В. Храмцова [8].

В недавней работе автора [9] завершено исследование Хаги для спорадических простых групп Ru , HN , Fi_{22} , He , M^cL и Co_3 (графы Грюнберга — Кегеля этих групп имеют точно две компоненты связности).

В данной статье продолжено исследование Хаги с использованием ее результатов из [4]. Для каждой из спорадических простых групп S , изоморфных HS , J_3 , Suz , O'_N , Ly , Th , Fi_{23} или Fi'_{24} (графы Грюнберга — Кегеля этих групп имеют точно три или четыре компоненты связности), определены все конечные группы с таким же графом Грюнберга — Кегеля, как у S . Тем самым для этих восьми групп S завершено исследование Хаги и, в частности, решена пробле-

ма распознаваемости по графу Грюнберга — Кегеля. Доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. Группы J_3 , Suz , $O'N$, Ly , Th , Fi_{23} и Fi'_{24} распознаваемы по графу Грюнберга — Кегеля.

Теорема 2. Пусть $S = HS$. Для конечной группы G справедливо равенство $\Gamma(G) = \Gamma(S)$ тогда и только тогда, когда G изоморфна HS или $U_6(2)$. В частности, группа HS 2-распознаваема по графу Грюнберга — Кегеля.

Заметим, что остались до конца не исследованными на распознаваемость по графу Грюнберга — Кегеля только три большие спорадические простые группы: Co_1 , B , M .

Поскольку каждая из спорадических простых групп имеет несвязный граф Грюнберга — Кегеля (см. [10]), используем результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля (см. [10]). Кроме того, используются таблицы модулярных характеров Брауэра конечных простых групп из [11, 12].

2. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [11, 13–16]. Обозначения спорадических простых групп взяты из [15].

Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. По теореме Грюнберга — Кегеля [10, теорема А] либо группа G изоморфна группе Фробениуса или двойной группе Фробениуса, либо фактор-группа $\overline{G} := G/F(G)$ почти проста (т. е. имеет простой неабелев цокль $\text{Soc}(\overline{G})$) и известна ввиду результатов [10, 17, 18]. Предположим, что $F(G) \neq 1$. Тогда $\pi(F(G)) \cup \pi(\overline{G}/\text{Soc}(\overline{G})) \subseteq \pi_1(G)$ (см. [10, теорема А]). Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ при $i > 1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$ -холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G (изолированной подгруппой называется собственная подгруппа, содержащая централизатор каждого своего неединичного элемента). Любой неединичный элемент x из $X_i(G)$ при $i > 1$ действует без неподвижных точек на $F(G)$, т. е. $C_{F(G)}(x) = 1$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G , причем $K < L \leq F(G)$. Тогда (главный) фактор $V = L/K$ является элементарной абелевой p -группой для некоторого простого числа p , называется p -главным фактором группы G и его можно рассматривать как точный неприводимый $GF(p)\overline{G}$ -модуль (так как $C_{G/K}(V) = F(G)/K$), причем каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ при $i > 1$ действует без неподвижных точек на V . Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме описания неприводимых $GF(p)\overline{G}$ -модулей, на которые некоторый элемент простого порядка (отличного от p) из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек.

Рассмотрим некоторые результаты, используемые в доказательстве теорем.

Следующий полезный результат известен (см., например, [19, лемма 4]).

Лемма 1. Пусть H — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FH -модуль и β — характер Брауэра

модуля V . Если g — элемент из H порядка, взаимно простого с p , то

$$\dim C_V(g) = (\beta|_{\langle g \rangle}, 1|_{\langle g \rangle}) = \frac{1}{|g|} \sum_{x \in \langle g \rangle} \beta(x).$$

Лемма 2 [16, теорема VII.1.16]. Пусть G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG -модуля V , $\langle \sigma \rangle = \text{Aut}(F)$, V_0 обозначает модуль V , рассматриваемый как $GF(p)G$ -модуль, и $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$. Тогда

(1) $W = \bigoplus_{i=1}^m V^{\sigma^i}$, где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряженный с V посредством σ^i ;

(2) V_0 является неприводимым $GF(p)G$ -модулем, и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$ -модуль V_0 ;

(3) с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$ -модули находятся во взаимно однозначном соответствии с классами алгебраической сопряженности неприводимых $\overline{GF(p)}G$ -модулей, где $\overline{GF(p)}$ — алгебраическое замыкание поля $GF(p)$.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть S — одна из групп J_3 , Suz , $O'N$, Ly , Th , Fi_{23} и Fi'_{24} , G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Поскольку граф $\Gamma(S)$ не связан (см. [10]), ввиду теоремы Грюнберга — Кегеля [10, теорема A] и [4, теорема 3] имеем $\overline{G} := G/F(G) \cong S$.

Пусть $S = J_3$. Согласно [15] граф $\Gamma(S)$ имеет вид

Ввиду [4, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 5\}$. Пусть $F(G) \neq 1$. Тогда $O_p(G) \neq 1$ для некоторого $p \in \{2, 3, 5\}$. Тем самым элемент порядка 17 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальную p -группу $O_p(G)$, что по лемме 1 противоречит таблице p -модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}$ (см. [12]).

Теорема 1 для случая $S = J_3$ доказана.

Пусть $S = Suz$. Согласно [15] граф $\Gamma(S)$ имеет вид

В силу [4, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 5\}$. Пусть $F(G) \neq 1$. Тогда $O_p(G) \neq 1$ для некоторого $p \in \{2, 3, 5\}$. Поэтому элемент порядка 11 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальную p -группу $O_p(G)$, что по лемме 1 противоречит таблице p -модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}$ (см. [12]).

Теорема 1 для случая $S = Suz$ доказана.

Пусть $S = O'N$. С учетом [15] граф $\Gamma(S)$ имеет вид

Ввиду [4, теорема 3] имеем $F(G) = O_2(G)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то элемент порядка 19 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальную 2-группу $O_2(G)$, что по лемме 1 противоречит таблице 2-модулярных характеров Брауэра группы S (см. [12]).

Теорема 1 для случая $S = O'N$ доказана.

Пусть $S = Ly$. В силу [15] граф $\Gamma(S)$ имеет вид

Ввиду [4, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3\}$. Согласно [15] группа $\overline{G}$ содержит подгруппу H , изоморфную $G_2(5)$. Пусть $F(G) \neq 1$. Тогда $O_p(G) \neq 1$ для некоторого $p \in \{2, 3\}$. Тем самым элемент порядка 31 из H действует без неподвижных точек на нетривиальную p -группу $O_p(G)$, что по лемме 1 противоречит таблице p -модулярных характеров Брауэра группы H (см. [12]).

Теорема 1 для случая $S = Ly$ доказана.

Пусть $S = Th$. В силу [15] граф $\Gamma(S)$ имеет вид

Ввиду [4, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3\}$.

Согласно [15] группа $\overline{G}$ содержит подгруппу H , изоморфную $U_3(8)$, и подгруппу L , изоморфную $G_2(3)$. Если $O_3(G) \neq 1$, то элемент порядка 19 из H действует без неподвижных точек на нетривиальную 3-группу $O_3(G)$, что по лемме 1.1 противоречит таблице 3-модулярных характеров Брауэра группы H (см. [11]).

Если $O_2(G) \neq 1$, то элемент порядка 13 из L действует без неподвижных точек на нетривиальную 2-группу $O_2(G)$, что ввиду леммы 1 противоречит таблице 2-модулярных характеров Брауэра группы L (см. [11]).

Теорема 1 для случая $S = Th$ доказана.

Пусть $S = Fi_{23}$. С учетом [15] граф $\Gamma(S)$ имеет вид

По [4, теорема 3] имеем $F(G) = O_2(G)$. Если $O_2(G) \neq 1$, то элемент порядка 17 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальную 2-группу $O_2(G)$, что ввиду леммы 1.1 противоречит таблице 2-модулярных характеров Брауэра группы S (см. [12]).

Теорема 1 для случая $S = Fi_{23}$ доказана.

Пусть $S = Fi'_{24}$. В силу [15] граф $\Gamma(S)$ имеет вид

Ввиду [4, теорема 3] имеем $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3\}$. Согласно [15] группа $\overline{G}$ содержит подгруппу H , изоморфную He . Пусть $F(G) \neq 1$. Тогда $O_p(G) \neq 1$ для некоторого $p \in \{2, 3\}$. Тем самым элемент порядка 17 из H действует без неподвижных точек на нетривиальную p -группу $O_p(G)$, что по лемме 1 противоречит таблице p -модулярных характеров Брауэра группы H (см. [12]).

Теорема 1 для случая $S = Fi'_{24}$ доказана.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть $S = HS$, G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(S)$. Поскольку граф $\Gamma(S)$ несвязен (см. [10]), ввиду теоремы Грюнберга — Кегеля [10, теорема А] и [4, теорема 3] имеем $\overline{G} := G/F(G) \cong S$ или $U_6(2)$ и $\pi(F(G)) \subseteq \{2, 3, 5\}$.

В силу [15] граф $\Gamma(S) = \Gamma(U_6(2))$ имеет вид

Если $F(G) = 1$, то $G \cong S$ или $U_6(2)$. Пусть $F(G) \neq 1$. Поэтому $O_p(G) \neq 1$ для некоторого $p \in \{2, 3, 5\}$. Но тогда элемент порядка 7 из $\overline{G}$ действует без неподвижных точек на нетривиальную p -группу $O_p(G)$, что ввиду леммы 1 противоречит таблице p -модулярных характеров Брауэра группы $\overline{G}$ (см. [12]).

Теорема 2 доказана.

Благодарность. Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания, позволившие избавиться от некорректностей в статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазуров В. Д. Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36. С. 119–138.
2. Алексеева О. А., Кондратьев А. С. Квазираспознаваемость некоторых конечных простых групп по множеству порядков элементов // Укр. мат. конгр. 2001. Алгебра і теор. чисел. Секція 1: Тез. доп. Киев. 2001. С. 4.
3. Chen G. A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. V. 3, N 1. P. 49–58.
4. Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 9. P. 4405–4424.
5. Заварницин А. В. О распознавании конечных простых групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
6. Mazurov V. D., Shi W. J. A note to the characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1998. V. 5, N 3. P. 285–288.
7. Praeger C. E., Shi W. J. A characterization of some alternating and symmetric groups // Commun. Algebra. 1994. V. 22, N 5. P. 1507–1530.
8. Кондратьев А. С., Храпцов И. В. О конечных четырехпримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
9. Кондратьев А. С. О распознаваемости спорадических простых групп Ru , HN , Fi_{22} , He , M^cL и Co_3 по графу Грюнберга — Кегеля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 79–87.
10. Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
11. Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R. An atlas of Brauer characters. Oxford: Clarendon Press, 1995.
12. The GAP Group. GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Ver. 4.11.0 URL: <https://www.gap-system.org>.

13. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1986.
14. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.
15. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
16. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups II. Berlin: Springer-Verl., 1982.
17. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // *Мат. сб.* 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
18. *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. 1999. V. 102. P. 1–22; 2002. V. 107. P. 189–190.
19. *Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М. С.* C55-группы // *Сиб. мат. журн.* 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.

Поступила в редакцию 11 июня 2020 г.

После доработки 15 июля 2020 г.

Принята к публикации 10 августа 2020 г.

Кондратьев Анатолий Семёнович
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990;
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
`a.s.kondratiev@imm.uran.ru`