A. S. Mamontov, E. Jabara, On periodic groups isospectral to a_7 . ii, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1366–1376

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.610>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.172.240.79

April 26, 2023, 04:55:01

УДК 517.518.85

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ A_7 . II

А. С. Мамонтов, Э. Ябара

Аннотация. Пусть G — периодическая группа и $\omega(G)$ — спектр G . Доказывается, что если G изоспектральна A_7 , знакопеременной группе степени 7 (т. е. $\omega(G)$ равен спектру A_7), то G содержит неабелеву конечную простую подгруппу.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.610

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа, спектр.

1. Введение

Спектром периодической группы G называется множество

$$\omega(G) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ — порядок некоторого элемента группы } G\}.$$

Через $\mu(G)$ обозначим максимальные элементы из $\omega(G)$ относительно делимости. В частности, $\omega(A_7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $\mu(A_7) = \{4, 5, 6, 7\}$.

Пусть G — группа такая, что $\omega(G) = \omega(A_7)$, в таком случае будем говорить, что G *изоспектральна* A_7 . Из [1] следует, что если G конечна, то $G \simeq A_7$.

Рассмотрение общего случая начато в [2], где он сведен к двум возможностям. Более точно, пусть

$$\Delta(G) = \{x^2 \mid x \text{ — элемент порядка 4 из } G\}.$$

Предложение 1. Пусть H — подгруппа в G , изоморфная A_4 , инволюции которой лежат в $\Delta(G)$. Тогда либо $O_2(H) \subseteq O_2(G)$, либо G содержит конечную простую подгруппу A_5 или $L_2(7)$, инволюции которой лежат в $\Delta(G)$.

Цель статьи — исключить первую возможность из заключения предложения 1. Доказывается

Теорема. Пусть G — периодическая группа, изоспектральная A_7 . Тогда G содержит подгруппу, изоморфную A_5 или $L_2(7)$, инволюции которой лежат в $\Delta(G)$.

Оставшаяся возможность будет рассмотрена в отдельной работе.

Исследование выполнено первым автором при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18–31–20011.

2. Обозначения и предварительные результаты

Через A_n и S_n обозначим знакопеременную и симметрическую группы степени n соответственно, а через $L_n(q)$ — проективную специальную линейную группу размерности n над полем из q элементов. Степень простого числа p^k обозначает элементарную абелеву группу порядка p^k , число n — циклическую группу порядка n , p^{1+2} — экстраспециальную группу порядка p^3 без элементов порядка p^2 . Зададим следующие группы порождающими и определяющими соотношениями:

$$F_{k^2,6} = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^6, [x, t]^k \rangle \simeq k^2 : 6;$$

$$F_{42} = \langle x, z \mid R_{42} \rangle, \quad \text{где } R_{42} = \{x^3, z^2, (xz)^6, b^7, b^x = b^4\} \text{ и } b = z^x z;$$

$$F_{36} = \langle t, x \mid t^4, x^3, (t^2 x)^2, [x, x^t] \rangle; \quad 3^{1+2} : 2 = \langle x, t \mid x^3, t^2, (xt)^6, [x, t]^3 \rangle.$$

Заметим, что $F_{42} < F_{294}$ при $z = t^{xt}$.

Через $\Gamma_n = \Gamma_n(G)$ обозначим множество элементов порядка n из G , $\Delta = \Delta(G) = \{x^2 \mid x \in G\}$, для простого числа p через $O_p(G)$ обозначим наибольшую нормальную p -подгруппу G , $A : B$ обозначает некоторое расширение A посредством B . Локальные обозначения вводятся в начале разделов.

Говоря о вычислениях, подразумеваем вычисления в GAP [3] по алгоритму перечисления смежных классов.

Пусть далее G — контрпример к теореме с наименьшей возможной экспонентой $O_2(G)$.

Лемма 1. G не локально конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что G локально конечна. Пусть x_4, x_5, x_6 и x_7 — элементы из G такие, что порядок x_i равен i . Тогда $H = \langle x_4, x_5, x_6, x_7 \rangle$ конечна и $\omega(H) = \omega(G)$. В силу [1] $H \simeq A_7$. Следовательно, $G \neq H$, и можно выбрать $x \in G \setminus H$. Снова $\langle H, x \rangle$ конечна, поэтому изоморфна A_7 . Следовательно, $H = \langle H, x \rangle = G$; противоречие. Лемма доказана.

Следствием леммы 1 и теоремы Шункова [4] является

Лемма 2. Центризатор любой инволюции в G бесконечен.

По мере необходимости будем использовать результаты, доказанные в [2].

3. О факторах, не содержащих элементов порядка 4

В этом разделе T обозначает группу такую, что $\mu(T) = \{5, 6, 7\}$. Пусть

$$\Gamma_2^* = \Gamma_2^*(T) = \{t \in \Gamma_2(T) \mid C_T(t) \text{ — элементарная абелева группа}\}.$$

Будем считать, что это множество непусто, и зафиксируем некоторый $a \in \Gamma_2^*$. Пусть $\Lambda_2 = \Lambda_2(T) = \{x^3 \mid x \in \Gamma_6(T)\}$. Отметим, что множества Γ_2^* и Λ_2 нормальны в T , состоят из инволюций и не пересекаются, при этом $\Lambda_2 \neq \emptyset$. Цель настоящего раздела — доказать, что $\langle \Gamma_2^* \rangle$ является группой периода 6.

Лемма 3. Если $b \in \Gamma_2(T)$, то $(ab)^6 = 1$. В частности, $[a, t]^6 = 1$ для любого $t \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Если инволюции a и b не сопряжены, то порядок ab четен и заключение леммы верно. Таким образом, $b \in \Gamma_2^*$.

Пусть $c \in \Lambda_2$. Тогда порядок ac четен. Если он равен 6, то инволюция $(ac)^3$ из центра диэдральной подгруппы $\langle a, c \rangle$ лежит в Λ_2 . В любом случае a коммутирует с некоторым элементом из Λ_2 и можно считать $[a, c] = 1$.

Таким образом, в группе T выполнены следующие соотношения (p нечетно):

$$R(p) = \{a^2, b^2, c^2, (ab)^p, [a, c]\}.$$

Поскольку множества Γ_2^* и Λ_2 нормальны и не пересекаются, также выполняются соотношения

$$R_1 = \{(bc)^6, (a^b c)^6, (b^{ab} c)^6\}.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем соотношения

$$R_2 = \{(a(bc)^3)^6, (a(a^b c)^3)^6, (a(b^{ab} c)^3)^6\}.$$

Следовательно, $\langle a, b, c \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$T(p, i, j) = \langle a, b, c \mid R(p) \cup R_1 \cup R_2 \cup R(i, j) \rangle,$$

где $R(i, j) = \{(abc)^i, (aa^b c)^j\}$. Вычисления показывают, что порядок $T(p, i, j)$ делит 4 для всех $p \in \{5, 7\}$ и $i, j \in \{5, 6, 7\}$; противоречие.

Лемма 4. Если $x \in \Gamma_3(T)$, то $(ax)^6 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 получаем $[a, x]^6 = 1$. Следовательно, $\langle a, x \rangle$ является гомоморфным образом группы $K_p = \langle a, x \mid a^2, x^3, (ax)^p, [a, x]^6 \rangle$. При этом $K_5 = 1$, а $K_7 \simeq L_2(13)$, что невозможно. Таким образом, $p = 6$, что и требовалось.

Лемма 5. Если $b, c \in \Gamma_2^*(T)$, то $[(ab)^2, (bc)^2] = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что порядки ab и bc делят 3, т. е. выполнены следующие соотношения:

$$R_3 = \{a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3\}.$$

Используя леммы 3 и 4, получаем соотношения

$$R_4 = \{(ac)^6, (a^b c)^6, (ab \cdot c)^6, (b \cdot (ac)^3)^6\}.$$

Следовательно, $\langle a, b, c \rangle$ является гомоморфным образом $K = \langle a, b, c \mid R_3 \cup R_4 \rangle$. Вычисления показывают, что $K \simeq 3^{1+2} : 2$. Центр K имеет порядок 3 и потому содержится в ядре соответствующего гомоморфизма. Поэтому $\langle a, b, c \rangle$ является расширением элементарной абелевой 3-группы посредством инволюции. В частности, $[ab, bc] = 1$.

Пусть b, c — произвольные элементы $\Gamma_2^*(T)$. Тогда $b, b^a, b^c \in \Gamma_2^*(T)$ и $(b^a b)^3 = (bb^c)^3 = 1$. По доказанному $[(ab)^2, (bc)^2] = [b^a b, bb^c] = 1$. Лемма доказана.

Лемма 6. Если $b, c \in \Gamma_2^*(T)$, то $(abc)^2 = 1$. Более того, $[a'b, cd] = 1$ для любых $a', b, c, d \in \Gamma_2^*(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w = (abc)^2$. По лемме 5 $\langle a, b, c \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$T(i) = \langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (ab)^6, (bc)^6, (ac)^6, (abc)^i, \\ [(ab)^2, (bc)^2], [(bc)^2, (ca)^2], [(ca)^2, (ab)^2] \rangle.$$

Вычисления показывают, что $|T(5)| = |T(7)| = 4$. Следовательно, $i = 6$ и порядок w в T делит 3. Дальнейшие вычисления показывают, что в группе

$T(6)$ элемент ww^a порядка 3 централизует a . Поэтому в T выполнено $w^a = w^{-1}$. Аналогично $w^b = w^{-1}$ и $w^c = w^{-1}$. Следовательно, $w = w^{abc} = w^{-1}$. Порядок w делит 3, стало быть, $w = 1$.

Докажем, что $[a'b, cd] = 1$. Без ограничения общности $a' = a$. Имеем $(abc)^2 = 1 = (abd)^2$. Следовательно, $(ab)^c = (ab)^{-1} = (ab)^d$, поэтому $(ab)^{cd} = ab$. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть T — группа и $\mu(T) = \{5, 6, 7\}$. Тогда $\langle \Gamma_2^*(T) \rangle$ — локально конечная группа периода 6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Gamma_2^*(T)$ и $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$. По лемме 6 $K = \langle a_i a_j \mid i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \rangle$ — нормальная абелева подгруппа периода 6. Следовательно, $H = K \langle a_1 \rangle$ конечна и удовлетворяет заключению леммы. Любой элемент $\langle \Gamma_2^*(T) \rangle$ может быть записан как конечное слово от порождающих, поэтому этого достаточно для доказательства леммы.

4. Редукция 2-радикала

Цель раздела — доказать следующее

Предложение 2. $O_2(G) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $N = O_2(G) \neq 1$, и пусть $\bar{G} = G/N$.

По теореме Санова [5] N локально конечна. Пусть $x \in \Gamma_5(G)$. По теореме Шмидта $\langle N, x \rangle$ локально конечна и по теореме Томпсона N локально нильпотентна. По теореме Хигмена [6] N нильпотентна и, в частности, $Z(N) \neq 1$.

Рассмотрим несколько случаев.

0. $\omega(G) = \omega(\bar{G})$. Тогда в силу выбора G для группы $\bar{G}$ выполнено заключение теоремы. Пусть $\bar{H}$ — конечная простая подгруппа $\bar{G}$, изоморфная A_5 или $L_2(7)$, и H — ее полный прообраз в G . Тогда H локально конечна и содержит подгруппу K , являющуюся расширением конечной 2-группы N_1 посредством $\bar{H}$. Проверка всех таких неприводимых расширений (в силу [7] или [3, § 50.6]), не содержащих элементов порядка больше 7 (в частности, с тривиальным центром), показывает, что расширение расщепляемо. Следовательно, G удовлетворяет заключению теоремы; противоречие.

1. $\mu(\bar{G}) = \{3, 4, 5, 7\}$. Тогда $\bar{G} \simeq L_3(4)$ [8] и по теореме Шмидта G локально конечна, что противоречит лемме 1.

2. $\mu(\bar{G}) = \{5, 6, 7\}$. В этом случае $\Delta \subseteq N$.

2.1. Предположим, что найдется $h \in G$ порядка 4, не лежащий в N . Тогда $\bar{h}$ является инволюцией в $\bar{G}$.

Сначала докажем, что $C_{\bar{G}}(\bar{h})$ является элементарной абелевой 2-группой. Пусть C — полный прообраз $C_{\bar{G}}(\bar{h})$ в G . Предположим, что C содержит элемент x порядка 3. Тогда $[x, h] \in N$. Поэтому $[x, N \langle h \rangle] \subseteq N$. Заметим, что группа $\langle x, h, N \rangle$ локально конечна как расширение локально конечной группы N посредством $(2, 3)$ -порожденной, а стало быть, конечной [2, лемма 2.1], группы $\langle \bar{x}, \bar{h} \rangle$. Заменяя N минимальной $\langle x, h \rangle$ -инвариантной подгруппой в N , содержащей $N \cap \langle x, h \rangle$, можно считать, что $\langle x, h, N \rangle$ конечна. Пусть $P = \langle h, N \rangle$. Поскольку $[x, P] \subseteq N$, то P является конечной $\langle x \rangle$ -инвариантной 2-подгруппой $\langle x, h, N \rangle$. Обозначим через $\Phi = \Phi(P)$ подгруппу Фраттини. Заметим, что $h^2 \in \Phi = P' \Delta$ и P/Φ элементарная абелева. Поскольку x — нетривиальный автоморфизм P , он действует нетривиально на P/Φ . Следовательно, все базисные элементы $h\Phi, h^x\Phi, h^{x^2}\Phi$ для P/Φ лежат в $[x\Phi, P/\Phi]$ и $C_{P/\Phi}(x) = 1$. Равенство

$P/\Phi = [x\Phi, P/\Phi] \times C_{P/\Phi}(x\Phi)$ влечет $P/\Phi = [x\Phi, P/\Phi] \subseteq N/\Phi$, следовательно, $P \subseteq N$; противоречие.

Таким образом, $\bar{h} \in \Gamma_2^*(G/N)$. По лемме 7 $\bar{H} = \langle \Gamma_2^*(G/N) \rangle$ является локально конечной группой периода 6. Поскольку $N = O_2(G)$, то $\bar{H}$ содержит элемент порядка 3. Обозначим через H полный прообраз $\bar{H}$ в G . Тогда H — нормальная локально конечная $\{2, 3\}$ -подгруппа в G , содержащая элемент порядка 3 и элемент h порядка 4. Пусть $x \in \Gamma_3(H)$ и $y \in \Gamma_5(G)$. По теореме Шмидта $H \rtimes \langle y \rangle$ локально конечна. Следовательно, $K = \langle x, h \rangle^K \rtimes \langle y \rangle$ — конечная группа. Элемент y действует на подгруппе $S = \langle x, h \rangle^K$ свободно. Поэтому S нильпотентна и является прямым произведением своих силовских подгрупп, в частности, содержит элемент порядка 12, что невозможно.

2.2. Пусть теперь $\Gamma_4(G) \subseteq N$.

Пусть $a \in \Gamma_2(G) \setminus N$ и $b \in \Gamma_2(N)$. Тогда $N\langle a \rangle$ является 2-группой, поэтому $(ab)^4 = 1$. Если $ab \in \Gamma_4 \subset N$, то $a \in N$ вопреки выбору a . Стало быть, $(ab)^2 = 1$. Пусть $C = C_G(\Gamma_2(Z(N)))$. По построению $\Gamma_4 \subseteq N \leq C$. По доказанному $\Gamma_2 \subseteq C$. Множество $\Gamma_2(Z(N))$ нормально в G , поэтому $C \triangleleft G$.

Поскольку $Z(N) \neq 1$, то C содержится в централизаторе инволюции и, стало быть, не содержит элементов порядка 5 или 7. Элемент $x \in \Gamma_5(G)$ действует свободно на C . Рассуждения, приведенные выше, позволяют установить нильпотентность C . Стало быть, C не содержит элементов порядка 3, так как $12 \notin \omega(G)$. Поэтому $O_2(G) = C \neq N$; противоречие.

3. $\mu(\bar{G}) = \{2, 3, 5, 7\}$. В [9] доказано, что имеет место один из следующих случаев.

3.1. $\bar{G}$ является расширением абелевой 2-группы $\bar{V}$ посредством группы без инволюций. Обозначим через V полный прообраз $\bar{V}$ в G . Тогда $O_2(G) = V \neq N$; противоречие.

3.2. $\bar{G}$ локально конечна. По теореме Шмидта G локально конечна вопреки лемме 1.

4. $\mu(\bar{G}) = \{3, 5, 7\}$. Рассмотрим следующие характеристические подгруппы: $L = \langle \Gamma_4(N) \rangle$ и $D = \langle \Delta(L) \rangle$. Поскольку N локально конечна и нильпотентна, $L \neq D$. Пусть $\bar{G} = G/D$ и $x \in \Gamma_3(G)$. Рассуждая, как в п. 2.1, получим $C_{\bar{L}}(\bar{x}) = 1$, т. е. $\bar{x}$ действует свободно на $\bar{L} \neq 1$. Следовательно, подгруппа $\langle \bar{x} \rangle$ нормальна в $\bar{G}$ [10, теорема 3], поэтому обязательно центральна. Получаем противоречие, поскольку $15, 21 \notin \omega(G)$.

Предложение доказано.

5. Существование неабелевой конечной простой подгруппы

Целью данного раздела является доказательство теоремы.

Лемма 8. Если $t \in \Delta$ и $x \in \Gamma_3$, то $(xt)^6 = [x, t]^p = 1$ и $p \in \{3, 5, 7\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = \langle t, x \rangle$. Все возможные подгруппы H в G , порожденные инволюцией и элементом порядка 3, перечислены в [2, лемма 2.1]. По предположению 1 H не содержит подгрупп, изоморфных A_4 , поэтому $(xt)^6 = 1$ и по [11, лемма 9] порядок $[x, t]$ нечетен. Лемма доказана.

В следующих нескольких леммах доказывается, что $p = 3$.

Лемма 9. G не содержит подгруппы H , изоморфной F_{42} или F_{294} , такой, что $\Gamma_2(H) \subseteq \Delta(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай $H \simeq F_{42}$. Предположим противное. Пусть $F_{42} \simeq H = \langle x, z \mid R_{42} \rangle \leq G$, где $z \in \Delta(G)$, $b = z^x z$ и $R_{42} = \{x^3, z^2, (xz)^6, b^7, b^x = b^4\}$. Тогда $u = z^{x^2} z$ — инволюция из $\Delta(G)$, централизующая x . Заметим, что $C_{\langle x, z \rangle}(u) = \langle u, x \rangle$.

(1) $C_G(x) = \langle x, u \rangle$.

Предположим, что y — элемент порядка 3, централизующий x , и $y \notin \langle x \rangle$. По [2, лемма 3.3] $y \in C_G(u)$.

Если $[z, y]^7 = 1$, то $v = z^{[y^{-1}, z][y, z]}$ — инволюция, централизующая y . По [2, лемма 3.1] $u = v$. Тогда $\langle z, x, y \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i) = \langle z, x, y \mid R_{42} \cup \{y^3, u^y u, [x, y], (yz)^6, (z^y z)^7, uv, ((zy)^2 x)^i\} \rangle,$$

где $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что xu лежит в центре $G(6)$, что невозможно, а порядки остальных групп $G(i)$ не превосходят $42 = |\langle z, x \rangle|$. Таким образом, $y \in \langle x \rangle$, что противоречит выбору y .

Предположим, что порядок $[z, y]$ не равен 7. Тогда по лемме 8 он делит 3 или 5. Следовательно, $\langle z, x, y \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i_1, i_2) = \langle z, x, y \mid R_{42} \cup \{y^3, u^y u, [x, y], (yz)^6, (z \cdot xy)^6, (z \cdot xy^{-1})^6, (z^y z)^{i_1}, ((zy)^2 x)^{i_2}\} \rangle,$$

где $i_1 \in \{3, 5\}$, $i_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что индекс $|G(i_1, i_2) : \langle x, z \rangle|$ делит 3. Он равен 3 только для групп $G(3, 6)$ и $G(5, 6)$, в центре которых содержится элемент порядка 3. Таким образом, $\langle z, x, y \rangle = \langle x, z \rangle$, что противоречит выбору y .

Предположим, что v — инволюция из $C_G(x)$. Тогда $(uv)^6 = 1$. Если $|uv| = 3$, то по п. (1) $uv = x^{\pm 1}$ и, следовательно, $v = ux^{\pm 1}$ должно быть инволюцией, что неверно. Таким образом, диэдральная подгруппа $\langle u, v \rangle \subseteq C_G(x)$ не содержит элементов порядка 3 и можно выбрать v так, что $[u, v] = 1$. В этом случае $v = u$ по [2, лемма 3.1].

(2) $C_\Delta(u) = \{u\}$.

Предположим, что существует инволюция $t \in C_\Delta(u)$ такая, что $t \neq u$. Пусть $w = [x, t]$. Отметим, что $\langle t, x \rangle \subseteq C_G(u)$, и, таким образом, $w^3 = 1$ по лемме 8. По п. (1) имеем $w \neq 1$. Таким образом, $\langle x, w \rangle$ либо элементарная абелева, либо изоморфна экстраспециальной группе 3^{1+2} экспоненты 3 и порядка 3^3 . В любом случае либо найдется элемент $y \in \Gamma_3 \setminus \langle x \rangle$, централизующий x , что противоречит п. (1), либо $(tx)^2 = 1$. В последнем случае $\langle t, z, x \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i_1, i_2) = \langle z, x, t \mid R_{42} \cup \{t^2, (ut)^2, (tx)^2, (t^z x)^6, (z^t x)^6, (tz)^{i_1}, (tzx)^{i_2}\} \rangle,$$

где $i_1, i_2 \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что $G(7, 5) \simeq G(7, 7) \simeq S_7$, $G(6, 7) \simeq L_3(2) : 2$, что невозможно, и порядки $G(i_1, i_2)$ делят 12 при остальных значениях параметров. Получаем противоречие.

(3) Если $t \in \Gamma_2 \setminus \Delta$, то $[u, t] = 1$.

Рассмотрим различные возможности строения группы $\langle t, x \rangle$ согласно [2, лемма 2.1].

Пусть $(tx)^2 = 1$. Поскольку t и u не сопряжены, порядок $|ut|$ четен. Если $|ut| = 4$, то $(ut)^2 \in C_\Delta(u) = \{u\}$, что невозможно. Следовательно, $(ut)^6 = 1$

и $(u \cdot tx)^6 = 1$ (t и tx сопряжены в $\langle t, x \rangle \simeq S_3$). Поэтому $\langle u, t, x \rangle$ является гомоморфным образом $\langle u, t, x \mid \{u^2, t^2, x^3, [u, x], (tx)^2, (ut)^6, (utx)^6\} \rangle \simeq S_3 \times S_3$. Из п. (1) следует, что $(ut)^2 = 1$.

Пусть $(tx)^3 = 1$. Тогда $\langle t, x \rangle \simeq A_4$. По [2, лемма 4.2] либо G содержит подгруппу, изоморфную S_5 , либо $O_2(\langle t, x \rangle) \subseteq O_2(G)$. Другими словами, можно считать, что $(ut)^4 = (ut^x)^4 = 1$. Если $|ut| = 4$, то $(ut)^2 \in C_\Delta(u) = \{u\}$; противоречие. Поэтому $(ut)^2 = 1$.

Пусть $(tx)^4 = 1$. Тогда $\langle t, x \rangle \simeq S_4$. Следовательно, $(tx)^2 \in \Delta$ и $\langle (tx)^2, x \rangle \simeq A_4$, что противоречит предположению 1.

Пусть $(tx)^5 = 1$. Тогда $\langle t, x \rangle \simeq A_5$ и можно отождествить $t = (1, 2)(3, 4)$ и $x = (1, 3, 5)$. Пусть $v = (1, 3)(2, 4)$ и $w = (1, 3)(2, 5)$. Тогда $\langle x, v \rangle \simeq S_3$ и $\langle w, x \rangle \simeq A_4$. Уже доказано, что в этих случаях v , w и w^x централизуют u . Поскольку $t \in \langle v, w, w^x \rangle \leq C_G(u)$, получаем требуемое.

Таким образом, далее можно считать, что $tx \in \Gamma_6$.

Если $[x, t]$ порядка 5 либо 7, то $C_{\langle x, t \rangle}(x)$ содержит инволюцию, которая сопряжена с t . По п. (1) она должна совпадать с u и, стало быть, $t \in \Delta$; противоречие.

Если $[x, t] \in \Gamma_4$, то $v = [x, t]^2 \in \Delta$ и $\langle v, x \rangle \simeq A_4$, что противоречит предположению 1.

Таким образом, $[x, t]^6 = 1$. Пусть $y = [x, t]^2$. Тогда $\langle x, y \rangle$ является гомоморфным образом экстраспециальной группы 3^{1+2} . По п. (1) отсюда следует, что $y = 1$. Поэтому $\langle x, y \rangle$ является гомоморфным образом группы $K = \langle x, t \mid \{t^2, x^3, (xt)^6, [t, x]^2\} \rangle \simeq C_2 \times A_4$. Если $Z(\langle x, t \rangle)$ содержит инволюцию, то по п. (1) она должна совпадать с u и, таким образом, $[t, u] = 1$, что и требуется. Другая возможность $\langle x, t \rangle \simeq A_4$ рассмотрена выше.

(4) Лемма следует из п. (3).

Заметим, что u и z сопряжены. Следовательно, $u, z \in C_G(t)$ по (3). Таким образом, элемент uz порядка 7 централизует t ; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть $a \in \Delta$ инвертирует элемент порядка 5. Тогда $C_G(a)$ содержит единственную инволюцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [2, предложение 2] следует, что если $a \in \Delta$ инвертирует элемент порядка 5 и $C_G(a)$ содержит инволюцию $t \neq a$, то G содержит подгруппу, изоморфную $A_6, L_3(4)$ или S_5 , что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $a \in \Delta$ и $(ab)^3 = (bc)^3 = 1$. Тогда $(ac)^3 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 8, заметим, что $\langle a, b, c \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i) = \langle a, b, c \mid \{a^2, b^2, c^2, (ab)^3, (bc)^3, (ac)^i, (ab \cdot c)^6, (ab \cdot a^c)^6, (ab \cdot a^{cac})^6\} \rangle,$$

где $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что $|G(i)|$ делит 6, если $i \neq 6$.

Пусть $u = (ac)^3$. В $G(6)$ порядок bu равен 8, а порядок $a^{cb} \cdot c^a$ равен 36. Поэтому рассмотрим группу $\bar{G} = G(6)/\langle (bu)^4, (a^{cb} \cdot c^a)^6 \rangle$. В $\bar{G}$ имеем $\langle ab, c^{ac} \rangle \simeq S_4$, откуда по лемме 8 следует, что $(ab \cdot c^{ac})^2 = 1$. Поэтому попадаем в фактор $\bar{G}/\langle (abc^{ac})^2 \rangle \simeq 3^{1+2} : 2$, являющийся группой 3-транспозиций. Лемма доказана.

Следующая лемма является аналогом теоремы Бэра — Сузуки для $p = 3$.

Лемма 12. Пусть $y \in \Gamma_3$ и любые два элемента из y^G порождают 3-группу. Тогда $H = \langle y^G \rangle$ является 3-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h = y_1 \dots y_n$ — произвольный элемент из H , где $y_i \in y^G$. Положим $x = y_1 \dots y_{n-1}$ и $y = y_n$. Используя индукцию по n , достаточно доказать, что если x порядка 3, то порядок xy равен 3. По предположению выполнены соотношения $R = \{(y^x y)^3, (y^x y^{-1})^3, [y^x, y]^3, (y^{xyx} y)^3\}$. Поэтому $\langle x, y \rangle$ является гомоморфным образом группы $K = \langle x, y \mid R \cup \{x^3, y^3\} \rangle$. Вычисления показывают, что K является конечной группой порядка 3^9 . Лемма доказана.

Лемма 13. Инволюция $a \in \Delta$ не инвертирует элементы порядка 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное.

По лемме 10 $C_G(a)$ содержит единственную инволюцию. Следовательно, для любого $b \in \Gamma_2$ порядок ab нечетен и $\Delta = \Gamma_2 = a^G$.

Рассмотрим граф Γ с множеством вершин Δ и ребрами $\overline{ab}$ для $ab \in \Gamma_3$. Пусть Δ_b обозначает его компоненту связности, проходящую через вершину $b \in \Delta$. По лемме 11 Δ_b является полным графом.

Предположим, что Δ_a имеет вершину $b \neq a$. Пусть $x = ab$. Докажем, что $C_G(x)$ является 3-группой. Действительно,

$$K = \langle a, b, c \mid \{a^2, b^2, c^2, [c, ab], (ab)^r, (ac)^s\} \rangle \simeq D_{2m},$$

где $m = \text{GCD}(r, s)$, и $a = b$ в K .

Пусть $c \in \Delta$ и $d \in \Delta_c$. По условию $(dx)^6 = 1$ и $(dd^x)^p = 1$. По [2, лемма 2.1] если $p \in \{5, 7\}$, то $C_G(x)$ содержит инволюцию, что невозможно. Таким образом, $p = 3$ и $d^x \in \Delta_c$. Следовательно, x нормализует каждую компоненту связности Δ_b графа Γ .

Пусть $y \in x^G$. Тогда y нормализует Δ_a . Поэтому $\langle x, x^y \rangle$ является 3-группой. Вычисления показывают, что $\langle x, y \mid \{x^3, y^3, (xx^y)^3, [x, y]^3, (xy)^i\} \rangle$ является 3-группой для $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Стало быть, $\langle x, y \rangle$ является 3-группой. По лемме 12 $x \in O_3(G)$.

Далее в доказательстве активно используется тот факт, что порядок произведения двух инволюций нечетен. Это свойство может быть записано в виде тождества, поэтому оно сохраняется в гомоморфных образах G .

Рассмотрим $\overline{G} = G/O_3(G)$. Если $\mu(\overline{G}) = \{3, 4, 5, 7\}$, то $\overline{G} \simeq L_3(4)$ [8] и G локально конечна, вопреки лемме 1.

Пусть $\mu(\overline{G}) = \{4, 5, 7\}$. Тогда $C_{\overline{G}}(\bar{a})$ является 2-группой периода 4, содержащей единственную инволюцию. Поскольку любая бесконечная локально конечная группа содержит бесконечную абелеву подгруппу [12, 13], $C_{\overline{G}}(\bar{a})$ конечна. По теореме Шункова [4] $\overline{G}$ локально конечна. По теореме Шмидта G локально конечна вопреки лемме 1.

Таким образом, $\mu(\overline{G}) = \mu(G)$, и можно считать, что Γ — пустой граф. Пусть $q \in \Gamma_3$ такой, что $[q, a] = 1$. Рассмотрим инволюцию $b \in \Gamma_2$, отличную от a . Тогда $bb^q \in \Gamma_5$ по лемме 9, $qb \in \Gamma_6$ и $\langle q, b \rangle$ содержит инволюцию, централизующую q . Следовательно, $a \in \langle q, b \rangle$ и $(ab)^5 = 1$.

Положим далее $K = \langle \Delta \rangle$, возьмем $r \in \Gamma_4$ и отметим, что по [14, леммы 12, 13] $Kr \subseteq \Gamma_4$. Таким образом, K и G/K содержат инволюцию и не содержат элементов порядка 4.

Выберем элемент x порядка 3 такой, что a и x не перестановочны. Тогда $\langle a, x \rangle \simeq F_{150}$ и $u = a^{xa(x^{-1}a)^2} \in C_G(x)$. В $C = C_K(u)$ нет элементов порядка 4, поэтому $C \simeq O_3(C) \times \langle u \rangle$ и $O_3(C)$ бесконечна по лемме 2. Пусть $y \in O_3(C)$ такой, что $\langle y \rangle \neq \langle x \rangle$ и $[x, y] = 1$. Пусть $z = xy$. Выберем инволюции $v = a^{ya(y^{-1}a)^2} \in C_G(y)$ и $w = a^{za(z^{-1}a)^2} \in C_G(z)$ в группах $\langle a, y \rangle$ и $\langle a, z \rangle$

соответственно. Поскольку $u, v \in C_G(y)$ и $u, w \in C_G(z)$, получаем $u = v = w$. Следовательно, $L = \langle a, x, y \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$K = \langle a, x, y \mid \{a^2, x^3, y^3, (ax)^6, [a, x]^5, (ay)^6, [a, y]^5, [x, y], (az)^6, [a, z]^5, uv, uw\} \rangle.$$

Вычисления показывают, что K конечна и содержит элемент $axaax$ порядка 15. Стало быть, L — гомоморфный образ $K(p) = K/\langle (axaax)^p \rangle$, где $p \in \{3, 5\}$. Вычисления показывают, что в $K(3)$ нет элементов порядка 5, а $K(5)$ изоморфна F_{150} , следовательно, $\langle x \rangle = \langle y \rangle$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 14. Пусть $a \in \Delta$ инвертирует $x \in \Gamma_3$. Тогда $x \in O_3(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b = ax$. По лемме 12 достаточно доказать, что для любого элемента y порядка 3 порядок xy делит 3. По предположению выполнены следующие соотношения:

$$R_5 = \{a^2, b^2, (ab)^3, (ay)^6, (a^y a)^3, (by)^6, (b^y b)^3\}.$$

Пусть $g = yy^a$. Тогда $g^3 = 1$ и $[g^a, g] = 1$. По леммам 8, 9 и 13 выполнены соотношения

$$R_6 = \{(bg)^6, (b^a g)^6, (b^g b)^3\}.$$

По лемме 11 $(ba^g)^3 = (ab^g)^3 = 1$. Поэтому группа $\langle a, b, g \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i, j) = \langle a, b, g \mid R_5 \cup R_6 \cup \{g^3, [g^a, g], (ba^g)^3, (ab^g)^3, (abg)^i, (bag)^j\} \rangle,$$

где $i, j \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что порядок $G(i, j)$ делит $3^5 \cdot 2$. Следовательно, $(abg)^3 = (bag)^3 = 1$.

Аналогично для $h = yy^b$ получим $(abh)^3 = (bah)^3 = 1$. Выпишем имеющиеся соотношения:

$$R_7 = \{y^3, (ay)^6, (a^y a)^3, (by)^6, (b^y b)^3, (ba^y)^3, (ab^y)^3, (abg)^3, (bag)^3, (abh)^3, (bah)^3\}.$$

Группа $\langle a, b, y \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$G(i) = \langle a, b, y \mid R_5 \cup R_7 \cup \{(aby)^i\} \rangle,$$

где $i \in \{4, 5, 6, 7\}$. Вычисления показывают, что порядок $G(i)$ делит $3^7 \cdot 2$. Лемма доказана.

Лемма 15. Предположим, что $O_3(G) \neq 1$. Пусть $\bar{S}$ — нетривиальная 2-подгруппа $\bar{G} = G/O_3(G)$, S — ее полный прообраз в G и $\Gamma_2(S) \subseteq \Delta(G)$. Тогда $N_{\bar{G}}(\bar{S})$ не содержит элементов порядка 5 или 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $N_{\bar{G}}(\bar{S})$ содержит элемент $\bar{x}$ порядка 5 или 7. Его прообраз x действует свободно на $O_3(G)\bar{S} = S$. Группа S локально конечна [11]. По теореме Шмидта $\langle S, x \rangle$ локально конечна. Выберем произвольные a порядка 3 и b порядка, делящего 4, из S . Тогда $\langle a, b, x \rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $\langle x \rangle$, причем $\langle a, b \rangle$ лежит в ядре и потому нильпотентна. Следовательно, $[a, b] = 1$ и $S = O_3(G) \times S'$, где S' — нетривиальная 2-подгруппа. Возьмем инволюцию i из S' и произвольный $y \in G$. Элементы i и i^y централизуют $O_3(G) \neq 1$, следовательно, $\langle i, i^y \rangle$ не содержит элементов порядка 5 или 7. Так как $i \in \Delta$, любой элемент порядка 3, который i инвертирует, по лемме 14 должен лежать в $O_3(G)$, но i централизует $O_3(G)$. Следовательно, $\langle i, i^y \rangle$ является 2-группой. Используя аналог теоремы Бэра — Сузуки для $p = 2$ [15], получаем $i \in O_2(G)$, что противоречит предположению 2. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $a \in \Delta$ и $x \in \Gamma_3$. По леммам 9 и 10 имеем $(aa^x)^3 = 1$.

Сначала предположим, что для всех $x \in \Gamma_3$ выполнено $a = a^x$. Тогда любые два элемента из a^G лежат в централизаторе элемента порядка 3 и порождают 2-подгруппу. Используя аналог теоремы Бэра — Сузуки для $p = 2$ [15], получаем, что $a \in O_2(G)$; противоречие с предложением 2.

Выберем $x \in \Gamma_3$ такой, что $y = aa^x \in \Gamma_3$. Тогда $y \in O_3(G)$ по лемме 14. Рассмотрим $\bar{G} = G/O_3(G)$.

Если $\mu(\bar{G}) = \{3, 4, 5, 7\}$, то $\bar{G} \simeq L_3(4)$ [8] и G локально конечна, что противоречит лемме 1.

Предположим, что $\omega(\bar{G}) = \omega(G)$. Тогда $\bar{a}$ коммутирует с $\Gamma_3(\bar{G}) \neq 1$ и, как показано выше, лежит в $O_2(\bar{G})$. Получаем противоречие с леммой 15.

Пусть, наконец, $\mu(\bar{G}) = \{4, 5, 7\}$. Обозначим $H = \bar{G}$, будем опускать черту, и разобьем доказательство на несколько шагов.

(1) Все инволюции H сопряжены.

По свойствам диэдральных групп достаточно доказать, что если $b \in \Gamma_2(H)$ и $[a, b] = 1$, то a и b сопряжены. По лемме 15 $\langle \Delta \rangle$ не является 2-группой. По аналогу теоремы Бэра — Сузуки для $p = 2$ [15] существует инволюция c такая, что порядок ac равен 5 или 7. Порядки bc^a и $a^{ca}b$ четны. Поэтому $\langle a, b, c \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$R_p(i) = \langle a, b, c \mid \{a^2, b^2, c^2, [a, b], (ac)^p, (bc^a)^4, (a^{ca}b)^4, (abc)^i\} \rangle,$$

где $p \in \{5, 7\}$ и $i \in \{4, 5, 7\}$. Вычисления показывают, что $R_5(5) \simeq 2^4 : D_{10}$, $R_7(7) \simeq 2^6 : D_{14}$, $|R_p(i)|$ делит 4 при остальных значениях параметров, причем $b \in \Delta(R_5(5))$ или $\Delta(R_7(7))$ соответственно. Получаем противоречие с леммой 15.

(2) Пусть $X = X(a) = \{x \mid x \in H, a^x \in C_H(a)\}$. Тогда $x^4 = 1$ для всех $x \in X$.

Предположим, что утверждение неверно. Тогда $\langle a, x \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$R_p = R_p(i_1, i_2, i_3, i_4) = \langle a, x \mid \{a^2, x^p, [a, a^x], (ax)^{i_1}, (ax^2)^{i_2}, [a, x^2]^{i_3}, ((x^2 x^a)^2 (x^a x^2)^{-1})^{i_4}\} \rangle,$$

где $p \in \{5, 7\}$ и $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{4, 5, 7\}$. Вычисления показывают, что $|R_p| \in \{1, 2, p\}$, за исключением двух случаев: $R_5(5, 5, 4, 5) \simeq 2^4 : 5$ и $R_7(7, 7, 4, 7) \simeq V : 7$, где $|V| = 2^{12}$, которые невозможны по лемме 15.

(3) $\Gamma_2(X \setminus C_H(a)) = \emptyset$. В частности, $x^2 \in C_H(a)$ для всех $x \in X$.

Предположим, что $x \in \Gamma_2(X \setminus C_H(a))$. Заметим, что aa^x является инволюцией из $C_H(a)$. По определению X и п. (1) найдется $y \in X$ такой, что $a^y = aa^x$. Поскольку $a^{yx} = aa^x \in C_H(a)$, то $yx \in X$. Из п. (2) следуют $(xy)^4 = 1 = (ayx)^4$ и $(a(yx)^2)^4 = 1$. Таким образом, $\langle a, x, y \rangle$ является гомоморфным образом группы

$$T(i_1, i_2) = \langle a, x, y \mid \{a^2, x^2, y^4, (ax)^4, (xy)^4, (ayx)^4, (a(yx)^2)^4, a^y aa^x, (xy^2)^{i_1}, (axyay^2)^{i_2}\} \rangle,$$

где $i_1, i_2 \in \{4, 5, 7\}$. Вычисления показывают, что все такие группы конечны и во всех них $a = 1$; противоречие.

(4) Если $x, y \in \Gamma_2(H)$ и $(xy)^4 = 1$, то $(xy)^2 = 1$. В частности, $J = \langle \Gamma_2(C_H(a)) \rangle$ элементарная абелева.

Пусть $(xy)^4 = 1$, тогда $x^y \in C_H(x)$ и, стало быть, $y \in X(x)$. По п. (3) получаем $y \in C_H(x)$.

(5) Получаем противоречие.

Пусть x — произвольная инволюция, перестановочная с a . По п. (1) $x = a^g$ и $ax = a^h$ для $g, h \in X(a)$. По п. (4) $g, h \in N_H(J)$. По лемме 15 группа $N_H(J)$ имеет период 4 и, следовательно, локально конечна [5]. Таким образом, $L = \langle a, g, h \rangle$ конечна и нильпотентна, причем

$$a^h = ax = aa^g = [a, g] \in [L, a],$$

что невозможно в нильпотентной группе L (для $a \neq 1$); противоречие. Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Brandl R., Shi W. Finite groups whose element orders are consecutive integers // J. Algebra. 1991. V. 2, N 143. P. 388–400.
2. Мамонтов А. С. О периодических группах, изоспектральных A_7 // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 1. С. 137–147.
3. The GAP Group, Gap: groups, algorithms, and programming. Version 4.10.2 (2019). <http://www.gap-system.org>.
4. Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.
5. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. 1940. № 10. С. 166–170.
6. Higman G. Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc. 1957. N 32. P. 321–334.
7. Holt D. F., Plesken W. Perfect groups. New York: The Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1989. (Oxford Math. Monogr.).
8. Мамонтов А. С., Ябара Э. Распознавание группы $L_3(4)$ по множеству порядков элементов в классе всех групп // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 4. С. 439–443.
9. Мазуров В. Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.
10. Журтов А. Х. О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.
11. Мамонтов А. С. Группы периода 12 без элементов порядка 12 // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 150–156.
12. Hall P., Kulatilaka C. R. A property of locally finite groups // J. London Math. Soc. 1964. N 39. P. 235–239.
13. Каргаполов М. И. О проблеме О. Ю. Шмидта // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 1. С. 232–235.
14. Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Мамонтов А. С., Ябара Э. Группы, порядки элементов которых не превосходят 6 // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 570–586.
15. Мамонтов А. С. О теореме Бэра — Сузуки для групп 2-периода 4 // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 649–652.

Поступила в редакцию 7 мая 2020 г.

После доработки 4 июня 2020 г.

Принята к публикации 17 июня 2020 г.

Мамонтов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
andreysmamontov@gmail.com

Enrico Jabara (Ябара Энрико)
Dipartimento di Filosofia e Beni Culturali,
Università di Ca' Foscari,
Dorsoduro 3484/D-30123 Venezia, Italy
jabara@unive.it