R. G. Nasibullin, R. V. Makarov, Hardy's inequalities with remainders and lamb-type equations, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1377–1397

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.611>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.67.100

April 26, 2023, 17:55:44

НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ И УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛЭМБА

Р. Г. Насибуллин, Р. В. Макаров

Аннотация. Исследованы интегральные неравенства типа Харди с дополнительными слагаемыми для непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями в выпуклых областях с конечным внутренним радиусом. Получены новые L_1 - и L_p -неравенства, константы которых зависят от постоянной Лэмба — первого положительного решения специального уравнения для функции Бесселя. В некоторых частных случаях константы точные. Получены одномерные неравенства и их многомерные аналоги. Весовые функции в пространственных неравенствах содержат степени функции расстояния до границы области. Также доказано монотонное убывание функции, зависящей от функции Бесселя. Это свойство существенно используется при доказательстве одномерных неравенств. Полученные неравенства распространяют соответствующие неравенства, доказанные Ф. Г. Авхадиевым и Вирсом для $p = 2$, на случай произвольного $p \geq 1$.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.611

Ключевые слова: неравенства типа Харди, дополнительное слагаемое, функция расстояния, внутренний радиус, функции Бесселя, константа Лэмба.

Введение

Работа посвящена вариационным неравенствам типа Харди с дополнительными слагаемыми. Классическое одномерное неравенство Харди для абсолютно непрерывной функции $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $f(0) = 0$ и $f' \in L^2(0, \infty)$, выглядит следующим образом:

$$\int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx \leq 4 \int_0^\infty |f'(x)|^2 dx.$$

Постоянная 4 неулучшаема, хотя и не существует экстремальной функции $f \neq 0$, на которой достигается равенство (см., например, [1]). Точная константа в этом неравенстве является нормой соответствующего линейного оператора, а как известно, норма оператора дает верхнюю оценку ее спектра. Например, если перепишем последнее неравенство на языке операторов, т. е. если положим

$$h(x) = f'(x) \quad \text{и} \quad (Hh)(x) = x^{-1} \int_0^x h(t) dt,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК–709.2019.1.

то получим, что H — линейный ограниченный оператор в $L^2(0, \infty)$ и для его нормы справедливо равенство

$$\|H\|^2 = \|H : L^2(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)\|^2 = 4.$$

Кроме того, спектр этого линейного ограниченного оператора H лежит в круге радиуса $\|H\|$.

Данное классическое неравенство Харди обобщалось и модифицировалось в различных направлениях, и литература по этой теме весьма обширна (см. [1–46]). Связано это с тем, что неравенства Харди имеют широкое применение в математике и математической физике (см. [2–7, 46]). Приведем несколько примеров приложения таких неравенств. Например, С. Л. Соболев [2] использовал неравенства типа Харди в теории вложений функциональных пространств, т. е. оценки такого вида воспринимаются как некоторый инструмент из теории функций, используемый в доказательствах соответствующих утверждений (см. также [3]). В [4] Ф. Г. Авхадиев применял неравенства Харди при оценке жесткости кручения балки с поперечным сечением для произвольных односвязных областей. В [6] Ю. А. Дубинский показал, что корректная постановка задачи для уравнения Пуассона со специальным условием нормализации эквивалентна справедливости соответствующих двусторонних шкал неравенств Харди (см. также [7, 45]).

Широкое распространение получили пространственные неравенства Харди. Известны многомерные неравенства типа Харди в выпуклых областях [8–11], в областях, границы которых удовлетворяют некоторым специальным условиям [12–14], и даже в произвольных открытых множествах евклидова пространства [15–18]. В случае неравенств Харди в пространственной области Ω функция f и ее производная f' соответственно заменяются непрерывно дифференцируемой функцией $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем, лежащим в Ω , и градиентом функции $\nabla f = (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$, а степени x заменяются степенями функции расстояния от точки до границы области Ω , т. е. $\delta = \delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Добавим, что в спектральной теории оператора Лапласа — Бельтрами на римановых многообразиях постоянной отрицательной кривизны хорошо изучены неравенства типа Харди, весовые функции которых зависят от гиперболического радиуса (см. [19–24]).

Как упоминали, в данной статье мы рассматриваем неравенства Харди с дополнительными слагаемыми. Впервые такие неравенства доказал В. Г. Мазья [3] в случае, когда областью интегрирования является верхняя полуплоскость. В дальнейшем интересные результаты по неравенствам Харди с дополнительными слагаемыми последовали после работы Брезиса и Маркуса [10], в которой они доказали, что

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\delta^2} dx + \frac{1}{4(\text{diam } \Omega)^2} \int_{\Omega} |f|^2 dx \quad \forall f \in H_0^1(\Omega), \quad (1)$$

где Ω — выпуклая ограниченная область, $H_0^1(\Omega)$ — замыкание семейства $C_0^1(\Omega)$ непрерывно дифференцируемых функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с конечным интегралом Дирихле и компактным носителем в Ω , а $\text{diam } \Omega$ — диаметр области Ω .

Обратим внимание, что константа в последнем неравенстве зависит от диаметра $\text{diam } \Omega$ области. В [11, 25] получены аналогичные неравенства, константа в которых зависит от объема области. Например, М. Хофманн-Остенхоф,

Т. Хофмани-Остенхоф и А. Лаптев [11] доказали следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{|f|^2}{\delta(x)^2} dx + \frac{1}{4} \frac{K(n)}{|\Omega|^{2/n}} \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \quad (2)$$

для любой функции $f \in H_0^1(\Omega)$, где Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $|\Omega|$ — объем области Ω и

$$K(n) = n \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{2/n}.$$

Постоянная $1/4$ оптимальна. Позже в [26] Эванс и Льюис улучшили константу в дополнительном слагаемом неравенства (2), а Тидблум в [25] получил L_p -аналог этого неравенства в соответствующих пространствах Соболева при $p > 1$.

Ясно, что если диаметр $\text{diam } \Omega$ или объем $|\Omega|$ области стремятся к бесконечности, то вышеприведенные неравенства (1) и (2) не будут содержать дополнительное слагаемое.

Отметим также, что неравенства (1) и (2) как класс экстремальных задач различны. Неравенство (1) доказывается в областях с конечным диаметром, неравенство (2) — с конечным объемом. Известен также класс экстремальных задач в областях с конечным внутренним радиусом

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} \delta(x),$$

т. е. неравенства, доказанные в областях с $\delta_0 < \infty$ (см., например, [8, 9, 18, 39]). Класс экстремальных задач в областях с конечным внутренним радиусом шире, чем класс задач с конечным объемом или диаметром, так как существуют области с конечным внутренним радиусом, у которых объем и диаметр не ограничены (например, полоса).

По мнению авторов статьи, одним из ярких таких неравенств в областях с конечным внутренним радиусом является доказанное в [8] точное неравенство, которое образует мостик между неравенствами Харди и Пуанкаре. А именно, там показано, что если $q > 0$, $0 < \nu \leq 1/q$ и Ω — выпуклая область такая, что $\delta_0(\Omega) < \infty$, то справедливо следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \geq \frac{1 - \nu^2 q^2}{4} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^2} dx + \frac{C^2 q^2}{4\delta_0(\Omega)^q} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^{2-q}} dx \quad \forall f \in C_0^1(\Omega),$$

где через $C_0^1(\Omega)$ обозначен класс непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем, лежащим в Ω , а константа $C = C_\nu(q)$ является первым положительным корнем следующего уравнения для функции Бесселя J_ν порядка ν :

$$J_\nu(C) + CqJ'_\nu(C) = 0.$$

В дальнейшем в [9] этот результат был обобщен на случай более общих весов. А именно доказано, что

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla f(x)|^2}{\delta(x)^{s-1}} dx \geq \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{C^2 q^2}{4\delta_0(\Omega)^q} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^{s+1-q}} dx \quad (3)$$

для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$, где $s > 0$, $q > 0$, $\nu \in [0, s/q]$ и теперь уже константа $C = C_\nu(s, q)$ является первым положительным корнем более общего уравнения

$$sJ_\nu(C) + CqJ'_\nu(C) = 0.$$

Цель данной работы — получить аналоги неравенства (3) в пространстве L_p при $p \geq 1$. Доказаны одномерные неравенства и их многомерные аналоги в областях с конечным внутренним радиусом, т. е. рассмотрена экстремальная задача третьего вида. Известно, что в пространствах L_p при $p \in (0, 1)$ неравенства Харди не выполняются для произвольных неотрицательных измеримых функций, хотя и справедливы, например, для неотрицательных невозрастающих функций [27, 28] (см. также [29, 43]). Особо подчеркнем, что нам удалось получить L_1 -неравенства. Неравенства Харди в пространстве L_1 представляют отдельный интерес (см., например, [30]), так как они связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных, в которых участвует так называемый 1-лапласиан, аналог обычного оператора Лапласа и p -лапласиана при $p > 1$.

В рассматриваемых здесь неравенствах константы зависят от первого положительного корня следующего уравнения для функции Бесселя:

$$(s - q\mu)J_\nu(\lambda_\nu) + q\lambda_\nu J'_\nu(\lambda_\nu) = 0, \quad (4)$$

где $s > 0$, $q > 0$ и $\mu \in [0, \frac{s+\nu q}{q}]$. Отметим, что можно включить в рассматриваемый отрезок для μ также случай $\mu = \frac{s+\nu q}{q}$, но, как будет показано далее, в этом случае $\lambda_\nu \rightarrow 0$.

Уравнения вида (4) рассмотрены в [31] (см. также [32, с. 502]). Поэтому, следуя [8, 9, 33–36], величину λ_ν будем называть *константой Лэмба*, а уравнение (4) — *параметрическим уравнением Лэмба*.

Напрямую решить параметрическое уравнение Лэмба достаточно сложно, необходимо рассматривать частные случаи и делать предварительные преобразования. Например, с учетом того, что

$$\nu J_\nu(\lambda_\nu) + \lambda_\nu J'_\nu(\lambda_\nu) = \lambda_\nu J_{\nu-1}(\lambda_\nu),$$

уравнение Лэмба (4) при $s > \nu q$ и $\mu = (s - \nu q)/q$ переписется в более простом виде:

$$\lambda_\nu J_{\nu-1}(\lambda_\nu) = 0.$$

Ясно, что в этом случае постоянная Лэмба λ_ν равна $j_{\nu-1}$, где $j_{\nu-1}$ — первый положительный корень функции Бесселя $J_{\nu-1}$ порядка $\nu - 1$.

Если рассмотреть уравнение (4) при $\nu = 1/2$, т. е. при $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, то для нахождения константы Лэмба $\lambda_{1/2}$ получим следующее уравнение:

$$2q\lambda_{1/2} \cos \lambda_{1/2} + (2s - 2q\mu - q) \sin \lambda_{1/2} = 0.$$

Интересный подход к решению уравнений Лэмба в общем виде нашли Ф. Г. Авахадиев и Вирс в [9]. А именно, они доказали, что константа Лэмба $z = \lambda_\nu(r)$, определенная как первый положительный корень уравнения

$$rJ_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0$$

относительно переменной r , может быть найдена как решение следующей задачи Коши, аппарат численного решения которого достаточно хорошо разработан:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{2z}{r^2 - 4\nu^2 + 4z^2}.$$

Обычно дифференциальные уравнения, связывающие весовые функции в интегральных неравенствах, авторы используют при доказательстве неравенств в L_2 и L_p при $p > 1$ (см., например, [8, 9, 37, 38]). Мы не знаем других работ, в которых применяются дифференциальные уравнения для доказательства L_1 -неравенств типа Харди.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 получены одномерные L_1 - и L_p -неравенства. При этом существенно использовано свойство монотонности специально введенной функции, зависящей от функции Бесселя. В частности, для любой абсолютно непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции f такой, что $f(0) = 0$, и для параметров $s, q > 0$ доказано следующее неравенство:

$$\begin{aligned} (s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} dx + q^2 \lambda_\nu^2 \left(\frac{2s}{q} \right) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s-q+1}} dx \\ \leq \int_0^1 \frac{|f'(x)|}{x^s} \left(2(s + \nu q) - \frac{q^2 \mu^2}{s} + q\mu \left(\frac{q\mu}{s} - 2 \right) x^s \right) dx, \end{aligned}$$

где $\mu \in [0; \frac{s+\nu q}{q}]$, а $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным корнем уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0.$$

Как следствие этого результата при $s > 0$, $q > 0$ и $\mu = \frac{s-\nu q}{q} > 0$ для любой абсолютно непрерывной функции $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $f(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} (s - \nu q) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} dx + \frac{q^2 j_{\nu-1}^2}{s + \nu q} \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s-q+1}} dx \\ \leq \left(2 - \frac{(s - \nu q)^2}{s(s + \nu q)} \right) \int_0^1 \frac{|f'(x)|}{x^s} dx - \frac{s - \nu q}{s} \int_0^1 |f'(x)| dx, \end{aligned}$$

где $j_{\nu-1}$ — первый положительный корень функции Бесселя $J_{\nu-1}$.

Разд. 2 посвящен многомерным неравенствам в выпуклых областях из $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом. Для доказательства этих утверждений используется подход Ф. Г. Авхадиева из [16, 17], основанный на классической аппроксимации области кубами. Этот метод позволяет соответствующие одномерные неравенства переносить на случай пространственных областей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство точности констант в одномерных, а тем более в многомерных неравенствах, — задача очень сложная. Как следствие из наших оценок получаем известные точные неравенства или неравенства, сравнимые с известными точными неравенствами (см., например, примеры 1–3 ниже). Поэтому лишь утверждаем, что в частных случаях константы в доказанных нами неравенствах точные.

1. Одномерные неравенства

В дальнейшем понадобится функция

$$y = F_{\nu, s, q}(x) = x^{\frac{s}{2}} J_\nu(\lambda_\nu(2s/q)x^{\frac{q}{2}}),$$

где J_ν — функция Бесселя порядка ν , определенная следующим образом:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+1+\nu)}, \quad \nu > 0.$$

Напомним, что константа Лэмба $z = \lambda_\nu(r)$ определяется как первый положительный корень уравнения

$$rJ_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad \nu \geq 0.$$

Известно (см. [47, с. 440; 8, 9]), что функция $y = F_{\nu,s,q}(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$x^2 y'' + (1-s)xy' + \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{4x^{-q}} \right) y = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (5)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{tF'_{\nu,s,q}(t)}{F_{\nu,s,q}(t)} = \frac{s + \nu q}{2} > 0.$$

Подробнее о свойствах и примерах использования функции $y = F_{\nu,s,q}(x)$ можно познакомиться также в [8, 9].

1.1. Вспомогательные утверждения. В этом пункте получим некоторые новые свойства функции Бесселя, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть $s > 0$, $q > 0$, $\nu \geq 0$ и $\lambda_\nu(2s/q) \in [0, j_\nu)$, где j_ν — первый положительный корень функции Бесселя J_ν порядка ν . Если $x \in [0, 1]$ и $y = F_{\nu,s,q}(x) = x^{\frac{s}{2}} J_\nu(\lambda_\nu(2s/q)x^{\frac{q}{2}})$, то функция $xy'(x)/y(x)$ убывает, при этом

$$\sup_{x \in [0,1]} \frac{xy'(x)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy'(x)}{y(x)} = \frac{s + \nu q}{2},$$

$$\inf_{x \in [0,1]} \frac{xy'(x)}{y(x)} = \frac{y'(1)}{y(1)} = \frac{s}{2} + q\lambda_\nu(2s/q) \frac{J'_\nu(\lambda_\nu(2s/q))}{2J_\nu(\lambda_\nu(2s/q))}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства убывания функции $xy'(x)/y(x)$ покажем, что ее первая производная отрицательна. Пусть $z = \lambda_\nu(2s/q)x^{q/2}$, $x \in [0, 1]$, и

$$A := \frac{d}{dx} \left(\frac{xy'(x)}{y(x)} \right) = \frac{y'(x)}{y(x)} + x \left(\frac{y''(x)}{y(x)} - \left(\frac{y'(x)}{y(x)} \right)^2 \right).$$

Очевидно, что $z \in [0, j_\nu)$ и справедливо равенство

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{2x} \left(s + qz \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right).$$

Используя (1), имеем

$$A = \frac{1}{2x} \left(s + qz \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right) - \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4x} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{4x^{1-q}} \right) + \frac{1-s}{2x} \left(s + qz \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right) - \frac{1}{4x} \left(s + qz \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2x} \left(s^2 + sqz \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} - \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{2} - \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{2x^{-q}} - \frac{1}{2} \left(s + qz \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2x} \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{2} - \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{2x^{-q}} - \frac{q^2 z^2}{2} \left(\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right)^2 \right) \\
&= \frac{q^2}{4x} \left(\nu^2 - \frac{\lambda_\nu^2(2s/q)}{x^{-q}} - z^2 \left(\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right)^2 \right) = \frac{q^2}{4x} \left(\nu^2 - z^2 - z^2 \left(\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1: $\nu = 0$. Очевидно, в этом случае

$$A = -\frac{q^2}{4x} \left(z^2 + z^2 \left(\frac{J'_0(z)}{J_0(z)} \right)^2 \right) \leq 0.$$

СЛУЧАЙ 2: $\nu > 0$. В этом случае

$$A = \frac{q^2}{4x} \left(\nu^2 - z^2 - z^2 \left(\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right)^2 \right) = \frac{q^2 \nu^2}{4x} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2} - \frac{z^2}{\nu^2} \left(\frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} \right)^2 \right).$$

Используя соотношения (см. [32, с. 17])

$$J'_\nu(z) = \frac{1}{2}(J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)), \quad J_\nu(z) = \frac{z}{2\nu}(J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)),$$

имеем

$$\begin{aligned}
A &= \frac{q^2 \nu^2}{4x} \left(1 - \left(\frac{J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)}{J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)} \right)^2 - \frac{z^2}{\nu^2} \right) \\
&= \frac{q^2 \nu^2}{4x} \left(\frac{4J_{\nu+1}(z)}{J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)} - \left(\frac{2J_{\nu+1}(z)}{J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)} \right)^2 - \frac{z^2}{\nu^2} \right) \\
&= \frac{q^2 \nu^2}{4x} \left(\frac{z^2}{\nu(\nu+1)} \frac{J_\nu(z) + J_{\nu+2}(z)}{J_\nu(z)} - \frac{z^2}{\nu^2} \frac{J_{\nu+1}^2(z)}{J_\nu^2(z)} - \frac{z^2}{\nu^2} \right) \\
&= \frac{q^2 z^2}{4x} \left(\frac{2\nu}{z} \frac{J_{\nu+1}(z)}{J_\nu(z)} - \frac{J_{\nu+1}^2(z)}{J_\nu^2(z)} - 1 \right) = \frac{q^2 z^2}{4x} \left(-1 + \frac{J_{\nu+1}(z)J_{\nu-1}(z)}{J_\nu^2(z)} \right).
\end{aligned}$$

Известно, что для функции Бесселя справедливо следующее равенство (см. [32, с. 152]):

$$\frac{1}{4} z^2 (J_{\nu-1}^2(z) - J_{\nu-2}(z)J_\nu(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + 2n) J_{\nu+2n}^2(z).$$

Применяя это равенство, очевидно, получим

$$A = \frac{q^2 z^2}{4x J_\nu^2(z)} (J_{\nu+1}(z)J_{\nu-1}(z) - J_\nu^2(z)) = -\frac{q^2}{x J_\nu^2(z)} \sum_{n=0}^{\infty} (\nu + 2n + 1) J_{\nu+2n+1}^2(z) \leq 0.$$

Таким образом, функция $xy'(x)/y(x)$ убывающая, тем самым ее супремум достигается в левом конце интервала $[0, 1]$, а инфимум — в правом. $\square$

Следствие 1. Пусть $s > 0$, $q > 0$ и $\nu \geq 0$. Если $\mu \rightarrow \frac{s+\nu q}{q}$, то $\lambda_\nu \rightarrow 0$.

1.2 L_1 -неравенства на интервале. В этом пункте получим одномерные L_1 -неравенства типа Харди. В дальнейшем будем их использовать для получения L_p -неравенств. Здесь в виде примеров также приведем несколько частных случаев общих неравенств.

Лемма 2. Предположим, что $s > 0$, $q > 0$, $\nu \geq 0$ и f — абсолютно непрерывная функция на $[0, 1]$ такая, что $f(0) = 0$ и $f'(x)/x^s \in L^1[0, 1]$. Если $\mu \in [0; \frac{s+\nu q}{q})$, то

$$\begin{aligned} & \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(\frac{2s}{q})}{4} \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s-q+1}} dx \\ & \leq \left(\frac{s + \nu q}{2} - \frac{q^2 \mu^2}{4s} \right) \int_0^1 \frac{|f'(x)|}{x^s} dx + \left(\frac{q^2 \mu^2}{4s} - \frac{q\mu}{2} \right) \int_0^1 |f'(x)| dx; \end{aligned}$$

и если $\mu \leq 0$, то

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} dx + q^2 \lambda_\nu^2(2s/q) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s-q+1}} dx \\ & \leq 2(s + \nu q) \int_0^1 \frac{|f'(x)|}{x^s} dx - 2q\mu \int_0^1 |f'(x)| dx, \end{aligned}$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Доказательство. Используя неравенство $|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)| dt$ и меняя порядок интегрирования в повторном интеграле, получаем

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{4x^{-q}} \right) dx \leq \int_0^1 |f'(t)| T(t) dt,$$

где

$$T(t) = \int_t^1 \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4x^{s+1}} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{4x^{s-q+1}} \right) dx.$$

Согласно дифференциальному уравнению (5) имеем

$$\begin{aligned} T(t) &= - \int_t^1 \frac{1}{x^{s+1}} \left(\frac{x^2 y''(x)}{y(x)} + \frac{(1-s)xy'(x)}{y(x)} \right) dx \\ &= - \int_t^1 \left(\frac{y'(x)}{x^{s-1}y(x)} \right)' + \frac{1}{x^{s-1}} \left(\frac{y'(x)}{y(x)} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Выше использовано очевидное соотношение

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'(x)}{x^{s-1}y(x)} \right) = \frac{y''(x)}{x^{s-1}y(x)} + \frac{(1-s)y'(x)}{x^s y(x)} - \frac{1}{x^{s-1}} \left(\frac{y'(x)}{y(x)} \right)^2.$$

Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1: $xy'(x)/y(x) \geq 0$, $x \in [0, 1]$. Так как в силу леммы 1 функция $xy'(x)/y(x)$ убывающая, получим

$$\inf_{x \in [0,1]} x \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{y'(1)}{y(1)} \quad \text{и} \quad \inf_{x \in [0,1]} \left(x \frac{y'(x)}{y(x)} \right)^2 = \left(\frac{y'(1)}{y(1)} \right)^2 \geq 0,$$

а значит,

$$\begin{aligned} T(t) &= - \int_t^1 \left(\frac{y'(x)}{x^{s-1}y(x)} \right)' + \frac{1}{x^{s-1}} \left(\frac{y'(x)}{y(x)} \right)^2 dx \\ &\leq \frac{y'(t)}{t^{s-1}y(t)} - \frac{y'(1)}{y(1)} - \left(\frac{y'(1)}{y(1)} \right)^2 \int_t^1 \frac{dx}{x^{s+1}} \\ &= \frac{y'(t)}{t^{s-1}y(t)} - \frac{y'(1)}{y(1)} + \frac{1}{s} \left(\frac{y'(1)}{y(1)} \right)^2 - \frac{1}{st^s} \left(\frac{y'(1)}{y(1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Согласно лемме 1 также выполнено равенство

$$\sup_{x \in [0,1]} \frac{xy'(x)}{y(x)} = \frac{s + \nu q}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T(t) &\leq \frac{1}{t^s} \sup_{t \in [0,1]} \frac{ty'(t)}{y(t)} - \frac{y'(1)}{y(1)} + \frac{1}{s} \left(\frac{y'(1)}{y(1)} \right)^2 - \frac{1}{st^s} \left(\frac{y'(1)}{y(1)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{s + \nu q}{2} - \frac{1}{s} \left(\frac{y'(1)}{y(1)} \right)^2 \right) \frac{1}{t^s} + \frac{1}{s} \left(\frac{y'(1)}{y(1)} \right)^2 - \frac{y'(1)}{y(1)}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что по условию доказываемой леммы выбрали $z = \lambda_\nu(2s/q)$ как константу, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{2}{q} \frac{y'(1)}{y(1)} = \frac{s}{q} + z \frac{J'_\nu(z)}{J_\nu(z)} = \mu \quad \text{и} \quad z \in (0, j_\nu).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{4x^{-q}} \right) dx \\ &\leq \left(\frac{s + \nu q}{2} - \frac{q^2 \mu^2}{4s} \right) \int_0^1 \frac{|f'(x)|}{x^s} dx + \left(\frac{q^2 \mu^2}{4s} - \frac{q\mu}{2} \right) \int_0^1 |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

СЛУЧАЙ 2: существует $x_0 \in (0, 1)$ такое, что $x_0 y'(x_0)/y(x_0) = 0$. В этом случае, так как $xy'(x)/y(x)$ убывает, имеем

$$\inf_{x \in [0,1]} x \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{y'(1)}{y(1)} \quad \text{и} \quad \inf_{x \in [0,1]} \left(x \frac{y'(x)}{y(x)} \right)^2 = 0,$$

а значит,

$$T(t) = - \int_t^1 \left(\frac{y'(x)}{x^{s-1}y(x)} \right)' + \frac{1}{x^{s-1}} \left(\frac{y'(x)}{y(x)} \right)^2 dx \leq \frac{y'(t)}{t^{s-1}y(t)} - \frac{y'(1)}{y(1)}.$$

Используя выкладки, как в случае 1, получаем

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} \left(\frac{s^2 - \nu^2 q^2}{4} + \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q)}{4x^{-q}} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{|f'(x)|}{x^s} \left(\frac{s + \nu q}{2} - \frac{q\mu}{2} x^s \right) dx.$$

Этим завершается доказательство леммы 2. $\square$

Отметим, что в [9] авторы рассмотрели уравнение Лэмба при условии $\mu = 0$. В этом случае лемма 2 примет такой вид.

Следствие 2. Предположим, что $s, q > 0, \nu \geq 0$ и f — абсолютно непрерывная функция на $[0, 1]$ такая, что $f(0) = 0$ и $f'(x)/x^s \in L^1[0, 1]$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$(s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} dx + q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s-q+1}} dx \leq (2s + 2\nu q) \int_0^1 \frac{|f'(x)|}{x^s} dx,$$

где константа $z = \lambda_\nu(r)$ — первое положительное решение уравнения

$$rJ_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Следствие 3. Предположим, что $s > 0, q > s, \nu \geq 0$ и f — абсолютно непрерывная функция на $[0, 1]$ такая, что $f(0) = 0$ и $f'(x)/x^s \in L^1[0, 1]$. Если $\mu \in (0; \frac{2s}{q}]$ и $\nu \in [0, \frac{s}{q}]$, то

$$\begin{aligned} (s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} dx + \left(q^2 \lambda_\nu^2 \left(\frac{2s}{q} \right) + q\mu(q-s) \left(2 - \frac{q\mu}{s} \right) \right) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^{s-q+1}} dx \\ \leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right) \int_0^1 \frac{|f'(x)|}{x^s} dx, \end{aligned}$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что если $\sigma < 1$ и f — абсолютно непрерывная функция на $[0, 1]$ такая, что $f(0) = 0$, то справедливо следующее точное неравенство из [18, лемма 1]:

$$(1 - \sigma) \int_0^1 \frac{|f(x)|}{x^\sigma} dx < \int_0^1 |f'(x)| dx,$$

откуда, подставляя $\sigma = s - q + 1$ и используя лемму 2, получим требуемое утверждение. $\square$

Установим неравенства на произвольном отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. Предположим, что $s, q > 0$, $\nu \geq 0$ и f — абсолютно непрерывная на $[a, b]$ функция такая, что $f(a) = f(b) = 0$ и $f'(x)/x^s \in L^1[0, 1]$. Если $\mu \in (0; \frac{s+\nu q}{q})$, то

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ & \leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s}\right) \int_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta(x)^s} dx + \left(\frac{q^2 \mu^2}{s \delta_0^s} - \frac{2q\mu}{\delta_0^s}\right) \int_a^b |f'(x)| dx; \end{aligned}$$

если $\mu \leq 0$, то

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ & \leq 2(s + \nu q) \int_a^b \frac{f'(x)}{\delta^s(x)} dx - 2 \frac{q\mu}{\delta_0^s} \int_a^b |f'(x)| dx, \end{aligned}$$

где $\delta(x) = \min\{b-x, x-a\}$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$ и $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\rho > 0$ сделаем замену переменной $x = \rho\tau$ в первом неравенстве леммы 2 и получим

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^\rho \frac{|f(x)|}{x^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\rho^q} \int_0^\rho \frac{|f(x)|}{x^{s-q+1}} dx \\ & \leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s}\right) \int_0^\rho \frac{|f'(x)|}{x^s} dx + \left(\frac{q^2 \mu^2}{s\rho} - \frac{2q\mu}{\rho}\right) \int_0^\rho |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

Применяя последнее неравенство к функциям $f(x) = g(x+a)$ и $f(x) = g(b-x)$ с $\rho = \delta_0 = (b-a)/2$, имеем

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_a^{(a+b)/2} \frac{|g(t)|}{(t-a)^{s+1}} dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\rho^q} \int_a^{(a+b)/2} \frac{|g(t)|}{(t-a)^{s-q+1}} dt \\ & \leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s}\right) \int_a^{(a+b)/2} \frac{|g'(t)|}{(t-a)^s} dt + \left(\frac{q^2 \mu^2}{s\rho} - \frac{2q\mu}{\rho}\right) \int_a^{(a+b)/2} |g'(t)| dt, \\ & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_{(a+b)/2}^b \frac{|g(t)|}{(b-t)^{s+1}} dt + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\rho^q} \int_{(a+b)/2}^b \frac{|g(t)|}{(b-t)^{s-q+1}} dt \\ & \leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s}\right) \int_{(a+b)/2}^b \frac{|g'(t)|}{(b-x)^s} dt + \left(\frac{q^2 \mu^2}{s\rho} - \frac{2q\mu}{\rho}\right) \int_{(a+b)/2}^b |g'(t)| dt. \end{aligned}$$

Суммируя два последних неравенства, получаем требуемое утверждение. Второе неравенство теоремы получаем аналогичным образом. Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Следствие 4. Предположим, что $s, q > 0$, $\nu \geq 0$ и f — абсолютно непрерывная функция на $[a, b]$ такая, что $f(a) = f(b) = 0$ и $f'(x)/(1 - |x|)^s \in L^1[0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{s^2 - \nu^2 q^2}{s + 2\nu q} \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{(1 - |x|)^{s+1}} dx + \frac{q^2 j_\nu'^2}{s + 2\nu q} \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{(1 - |x|)^{s-q+1}} dx \\ \leq \int_{-1}^1 \frac{|f'(x)|}{(1 - |x|)^s} dx - \frac{s}{s + 2\nu q} \int_{-1}^1 |f'(x)| dx, \end{aligned}$$

где j_ν' — первый положительный корень производной J_ν' функции Бесселя порядка ν .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если $\mu = s/q$ и $r = 2s/q$, то уравнение $\frac{r}{2} + zJ_\nu'(z)/J_\nu(z) = \mu$ примет вид

$$zJ_\nu'(z)/J_\nu(z) = 0.$$

Следовательно, константа Лэмба $\lambda_\nu(2s/q)$ в этом случае равна j_ν' , где j_ν' — первый положительный корень производной функции Бесселя порядка ν . Таким образом, требуемое неравенство следует из утверждения теоремы 1 при $a = -1$, $b = 1$ и $\mu = s/q$. $\square$

Приведем несколько частных случаев неравенства из теоремы 1.

ПРИМЕР 1. Пусть j_1' — первый положительный корень производной J_1' функции Бесселя порядка 1. Известно, что $j_1' \approx 1.8412$. Если $a = -1$, $b = 1$, $s = 2$, $q = 2$, $\mu = 1$ и $\nu = 1$, то

$$\frac{2}{3} j_1'^2 \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{1 - |x|} dx \leq \int_{-1}^1 \frac{|f'(x)|}{(1 - |x|)^2} dx - \frac{1}{3} \int_{-1}^1 |f'(x)| dx.$$

Последнее неравенство сравнимо с точным неравенством из [18], которое можно переписать в следующем виде:

$$2e \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{1 - |x|} dx \leq \int_{-1}^1 \frac{|f'(x)|}{(1 - |x|)^2} dx.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $a = -1$, $b = 1$, $s = 1$, $q = 1$, $\mu = 1$ и $\nu > 0$. Тогда

$$(1 - \nu^2) \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{(1 - |x|)^2} dx + j_\nu'^2 \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{(1 - |x|)} dx \leq (1 + 2\nu) \int_{-1}^1 \frac{|f'(x)|}{(1 - |x|)} dx - \int_{-1}^1 |f'(x)| dx,$$

где j_ν' — первый положительный корень производной J_ν' функции Бесселя порядка ν .

Последнее неравенство при $\nu = 1$ сравнимо со следующим точным неравенством из [18]:

$$e \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{1 - |x|} dx \leq \int_{-1}^1 \frac{|f'(x)|}{1 - |x|} dx.$$

ПРИМЕР 3. Если $a = -1$, $b = 1$, $\nu = 0$, $s > 0$ и $\mu \rightarrow \frac{s+\nu q}{q}$, то из теоремы 1 следует, что

$$s \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{(1-|x|)^{s+1}} dx \leq \int_{-1}^1 \frac{|f'(x)|}{(1-|x|)^s} dx - \int_{-1}^1 |f'(x)| dx.$$

Последнее неравенство сравнимо с точным неравенством из [17, формула 3], которое в одномерном случае можно переписать в виде

$$s \int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{(1-|x|)^{s+1}} dx \leq \int_{-1}^1 \frac{|f'(x)|}{(1-|x|)^s} dx - \int_{-1}^1 |f'(x)|(1-|x|) dx.$$

1.3. L_p -неравенства на сегменте. В данном пункте получим одномерные L_p -неравенства. При их доказательстве будем использовать вышедоказанные неравенства в L_1 .

Теорема 2. Предположим, что $p \geq 1$, $r \in [1, p]$ и f — абсолютно непрерывная функция на $[a, b]$ такая, что $f(a) = f(b) = 0$. Пусть $s > 0$, $q > s$, $\mu \in (0; \frac{2s}{q}]$ и $\nu \in [0, \frac{s}{q}]$. Тогда

$$\begin{aligned} (s^2 - r\nu^2 q^2) \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{qr}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s) \left(2 - \frac{q\mu}{s} \right) \right) \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ \leq p^r s^{2(1-r)} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right)^r \int_a^b \frac{|f(x)|^{p-r} \cdot |f'(x)|^r}{\delta(x)^{s-r+1}} dx, \end{aligned}$$

где $\delta(x) = \min\{b-x, x-a\}$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$ и $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция g принадлежит $C^1[0, 1]$. Тогда $f(x) = |g(x)|^p$ принадлежит $C^1[0, 1]$, так как

$$\frac{d}{dx} |g(x)|^p = p|g(x)|^{p-1} g'(x) \operatorname{sign} g(x)$$

и функция $|g(x)|^{p-1} \operatorname{sign} g(x)$ непрерывна для $p > 1$.

Применяя следствие 3 для функции $f(x) = |g(x)|^p \in C^1[0, 1]$, получим

$$\begin{aligned} (s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|g(x)|^p}{x^{s+1}} dx + \left(q^2 \lambda_\nu^2 \left(\frac{2s}{q} \right) + q\mu(q-s) \left(2 - \frac{q\mu}{s} \right) \right) \int_0^1 \frac{|g(x)|^p}{x^{s-q+1}} dx \\ \leq p \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right) \int_0^1 \frac{|g'(x)| \cdot |g(x)|^{p-1}}{x^s} dx. \end{aligned}$$

Используя элементарное неравенство (см. [1, с. 37])

$$a^{p_1} b^{p_2} \leq \left(\frac{p_1 a + p_2 b}{p_1 + p_2} \right)^{p_1 + p_2} \quad (6)$$

для величин

$$a = s^2 \frac{|g(x)|^p}{x^{s+1}}, \quad b = p^r s^{2-2r} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right)^r \frac{|g(x)|^{p-r} |g'(x)|^r}{x^{s+1-r}},$$

$p_1 = 1 - \frac{1}{r}$, $p_2 = \frac{1}{r}$, имеем

$$\begin{aligned} (s^2 - r\nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|g(x)|^p}{x^{s+1}} dx + qr \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s) \left(2 - \frac{q\mu}{s} \right) \right) \int_0^1 \frac{|g(x)|^p}{x^{s-q+1}} dx \\ \leq p^r s^{2(1-r)} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right)^r \int_0^1 \frac{|g(x)|^{p-r} \cdot |g'(x)|^r}{x^{s-r+1}} dx. \quad (7) \end{aligned}$$

Получили неравенства на $[0, 1]$. Переход к отрезку $[a, b]$ аналогичен таковому из доказательства теоремы 1. Тем самым получаем требуемое утверждение. $\square$

Теорема 3. Предположим, что $p \geq 1$, $r \in [1, p]$ и f — абсолютно непрерывная функция на $[a, b]$ такая, что $f(a) = f(b) = 0$. Пусть $s > 0$, $q > s$, $\mu \in (0; \frac{2s}{q}]$ и $\nu \in [0, \frac{s}{q}]$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{qr}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s) \left(2 - \frac{q\mu}{s} \right) \right) \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ \leq \frac{p^r}{s^r} \left(\frac{2s}{s-\nu q} - \frac{q^2 \mu^2}{s^2 - \nu^2 q^2} \right)^r \int_a^b \frac{|f(x)|^{p-1} \cdot |f'(x)|^r}{\delta(x)^{s-r+1}} dx, \end{aligned}$$

где $\delta(x) = \min \{b-x, x-a\}$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$ и $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r-2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 2 рассуждения. Подставляя в (6) величины

$$a = \frac{|g(x)|^p}{x^{s+1}}, \quad b = p^r \left(\frac{2}{s-\nu q} - \frac{q^2 \mu^2}{s^3 - s\nu^2 q^2} \right)^r \frac{|g(x)|^{p-r} |g'(x)|^r}{x^{s+1-r}},$$

$p_1 = 1 - \frac{1}{r}$, $p_2 = \frac{1}{r}$, получим требуемое неравенство. $\square$

Теорема 4. Предположим, что $s, q > 0$, $\nu \geq 0$ и f — абсолютно непрерывная функция на $[a, b]$ такая, что $f(a) = f(b) = 0$. Если $\mu \in [0; \frac{s+\nu q}{q}]$, то

$$\begin{aligned} (s^2 - \nu^2 q^2) \int_a^b \frac{|f(x)|^{s+1}}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|f(x)|^{s+1}}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ \leq \frac{(s+1)^{s+1}}{s^s} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right) \int_a^b |f'(x)|^{s+1} dx \\ + \frac{(s+1)}{\delta_0^s} \left(\frac{q^2 \mu^2}{s} - 2q\mu \right) \int_a^b |f'(x)| \cdot |f(x)|^s dx; \end{aligned}$$

если $\mu \leq 0$, то

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_a^b \frac{|f(x)|^{s+1}}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2s/q)}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|f(x)|^{s+1}}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ & \leq 2 \frac{(s+1)^{s+1}}{s^s} (s + \nu q) \int_a^b |f'(x)|^{s+1} dx - 2 \frac{(s+1)q\mu}{\delta_0^s} \int_a^b |f'(x)| \cdot |f(x)|^s dx, \end{aligned}$$

где $\delta(x) = \min\{b-x, x-a\}$, $\delta_0 = \frac{b-a}{2}$, $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 для функции $f(x) = g^{s+1}(x) \in C^1[0, 1]$ получим

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|g(x)|^{s+1}}{x^{s+1}} dx + q^2 \lambda_\nu^2(2s/q) \int_0^1 \frac{|g(x)|^{s+1}}{x^{s-q+1}} dx \\ & \leq (s+1) \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right) \int_0^1 \frac{|g'(x)| \cdot |g(x)|^s}{x^s} dx \\ & \quad + (s+1) \left(\frac{q^2 \mu^2}{s} - 2q\mu \right) \int_0^1 |g'(x)| \cdot |g(x)|^s dx. \end{aligned}$$

Используя неравенство Опиала (см. [38, с. 313]) следующего вида:

$$\int_a^b \frac{|u(x)|^p \cdot |u'(x)|}{(x-a)^p} dx \leq \left(\frac{p}{p+1} \right)^{-p} \int_a^b |u'(x)|^{p+1} dx, \quad p > 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|g(x)|^{s+1}}{x^{s+1}} dx + q^2 \lambda_\nu^2(2s/q) \int_0^1 \frac{|g(x)|^{s+1}}{x^{s-q+1}} dx \\ & \leq \frac{(s+1)^{s+1}}{s^s} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right) \int_0^1 |g'(x)|^{s+1} dx \\ & \quad + (s+1) \left(\frac{q^2 \mu^2}{s} - 2q\mu \right) \int_0^1 |g'(x)| \cdot |g(x)|^s dx. \quad (8) \end{aligned}$$

Продельвая аналогичные действия для случая $\mu < 0$, получаем

$$\begin{aligned} & (s^2 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|g(x)|^{s+1}}{x^{s+1}} dx + q^2 \lambda_\nu^2(2s/q) \int_0^1 \frac{|g(x)|^{s+1}}{x^{s-q+1}} dx \\ & \leq \frac{(s+1)^{s+1}}{s^s} \left(2s + 2\nu q \right) \int_0^1 |g'(x)|^{s+1} dx - 2(s+1)q\mu \int_0^1 |g'(x)| \cdot |g(x)|^s dx. \quad (9) \end{aligned}$$

Для получения требуемого утверждения необходимо в (8) и (9) осуществить переход от отрезка $[0, 1]$ к произвольному интервалу $[a, b]$. $\square$

Теперь докажем неравенства для L_2 .

Теорема 5. *Предположим, что f — абсолютно непрерывная функция на $[a, b]$ такая, что $f(a) = f(b) = 0$. Если $q > 0$, $\nu \geq 0$ и $\mu \in [0; \frac{s+\nu q}{q})$, то*

$$(1 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^2} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2/q)}{\delta_0^q} \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^{2-q}} dx \leq (8 + 8\nu q - 3q^2 \mu^2 - 2q\mu) \int_0^1 |f'(x)|^2 dx;$$

если $q > 0$, $\nu \geq 0$ и $\mu \leq 0$, то

$$(1 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^2} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2(2/q)}{\delta_0^q} \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^{2-q}} dx \leq (8 + 8\nu q - 2q\mu) \int_0^1 |f'(x)|^2 dx;$$

если $q > 1$, $\nu \in [0, \frac{s}{q}]$ и $\mu \in (0; \frac{2s}{q}]$, то

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu^2 q^2}{q} \int_a^b \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^2} dx + \frac{q \lambda_\nu^2(2/q) + \mu(q-1)(2-q\mu)}{\delta_0^q} \int_a^b \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^{2-q}} dx \\ \leq \frac{8 + 8\nu q - 4q^2 \mu^2}{q} \int_a^b |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Доказательство. Для получения результата при $\mu \in [0; \frac{s+\nu q}{q})$ в (8) положим $s = 1$ и получим

$$\begin{aligned} (1 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx + q^2 \lambda_\nu^2(2/q) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^{2-q}} dx \\ \leq (8 + 8\nu q - 4q^2 \mu^2) \int_0^1 |f'(x)|^2 dx + (2q^2 \mu^2 - 4q\mu) \int_0^1 |f'(x)| \cdot |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Далее используем неравенство Опиала вида (см. [38])

$$\int_0^\rho |f(x)| \cdot |f'(x)| dx \leq \frac{\rho}{2} \int_0^\rho |f'(x)|^2 dx. \quad (10)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} (1 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx + q^2 \lambda_\nu^2(2/q) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^{2-q}} dx \\ \leq (8 + 8\nu q - 3q^2 \mu^2 - 2q\mu) \int_0^1 |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Для случая $\mu < 0$ в (9) подставляем $s = 1$ и применяем (10). Имеем

$$(1 - \nu^2 q^2) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx + q^2 \lambda_\nu^2(2/q) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^{2-q}} dx \leq (8 + 8\nu q - 2q\mu) \int_0^1 |f'(x)|^2 dx.$$

В (7) положим $s = 1$, $r = 1$, $p = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu^2 q^2}{q} \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx + (q \lambda_\nu^2(2/q) + \mu(q-1)(2-q\mu)) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^{2-q}} dx \\ \leq \frac{4 + 4\nu q - 2q^2 \mu^2}{q} \int_0^1 \frac{|f(x)| |f'(x)|}{x} dx. \end{aligned}$$

Используя следующее неравенство Опиала (см. [38]):

$$\int_0^p \frac{|f(x)| \cdot |f'(x)|}{x} dx \leq 2 \int_0^p |f'(x)|^2 dx,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1 - \nu^2 q^2}{q} \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx + (q \lambda_\nu^2(2/q) + \mu(q-1)(2-q\mu)) \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^{2-q}} dx \\ \leq \frac{8 + 8\nu q - 4q^2 \mu^2}{q} \int_0^1 |f'(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Осталось перейти к отрезку $[a, b]$ в трех получившихся случаях. $\square$

2. Неравенства в выпуклых областях евклидова пространства в $\mathbb{R}^n$

В этом разделе приведены многомерные аналоги неравенств, представленных выше. Считаем, что Ω — выпуклая область с конечным внутренним радиусом. Для доказательства неравенств используем метод Ф. Г. Авхадиева из [16] (см. также [17, 18]). Он основан на специальной аппроксимации области Ω кубами. В случае с выпуклыми множествами доказательство многомерных неравенств сводится к применению одномерных неравенств.

Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} \delta(z),$$

где $\delta(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим известное семейство непрерывно дифференцируемых функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем, лежащим в Ω .

Как упоминали выше, для выпуклой области ситуация проста и одномерные неравенства напрямую распространяются на пространственный случай. А именно, метод Ф. Г. Авхадиева сводится к следующему утверждению.

Теорема А. Пусть Ω — открытое компактное множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Если для любого $\alpha \in (0, \delta_0]$ и неотрицательных величин b, c справедливо неравенство

$$\int_0^\alpha \frac{|f'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq b^2 \int_0^\alpha \frac{|f(t)|^p}{t^s} dt + \frac{c^2}{\delta_0^m} \int_0^\alpha \frac{|f(t)|^p}{t^{s-m}} dt, \quad f \in C_0^1(0, 2\alpha),$$

то

$$\int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^p}{\delta(x)^{s-p}} dx \geq b^2 \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^s} dx + \frac{c^2}{\delta_0^m} \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s-m}} dx, \quad f \in C_0^1(\Omega).$$

2.1. L_1 -неравенства. Объединяя теорему А и теорему 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $s, q > 0$, $\nu \geq 0$, $f \in C_0^1(\Omega)$ и $f'(x)/\delta^s(\cdot) \in L^1(\Omega)$. Если $\mu \in (0; \frac{s+\nu q}{q})$, то

$$\begin{aligned} (s^2 - \nu^2 q^2) \int_\Omega \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q)}{\delta_0^q} \int_\Omega \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ \leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s}\right) \int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|}{\delta(x)^s} dx + \left(\frac{q^2 \mu^2}{s \delta_0^s} - \frac{2q\mu}{\delta_0^s}\right) \int_\Omega |\nabla f(x)| dx; \end{aligned}$$

а если $\mu \leq 0$, то

$$\begin{aligned} (s^2 - \nu^2 q^2) \int_\Omega \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q)}{\delta_0^q} \int_\Omega \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ \leq 2(s + \nu q) \int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|}{\delta^s(x)} dx - \frac{q\mu}{\delta_0^s} \int_\Omega |\nabla f(x)| dx, \end{aligned}$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Объединяя теорему А и следствие 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $s > 0$, $q > s$ и $f \in C_0^1(\Omega)$ такая, что $|\nabla f(x)|/\delta^s(x) \in L^1(\Omega)$. Если $\mu \in (0; \frac{2s}{q}]$ и $\nu \in [0, \frac{s}{q}]$, то

$$\begin{aligned} (s^2 - \nu^2 q^2) \int_\Omega \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{q}{\delta_0^q} \left(q \lambda_\nu^2 \left(\frac{2s}{q} \right) + \mu(q - s) \left(2 - \frac{q\mu}{s} \right) \right) \int_\Omega \frac{|f(x)|}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ \leq \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right) \int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|}{\delta(x)^s} dx, \end{aligned}$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, удовлетворяющая следующему условию:

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

2.2. L_p -неравенства. Объединяя теоремы А, 2 и 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть Ω — открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Предположим, что $p \geq 1$, $r \in [1, p]$ и $f \in C_0^1(\Omega)$. Если $s > 0$, $q > s$, $\mu \in (0; \frac{2s}{q}]$ и $\nu \in [0, \frac{s}{q}]$, то

$$\begin{aligned} (s^2 - r\nu^2 q^2) \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{qr}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s) \left(2 - \frac{q\mu}{s} \right) \right) \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ \leq p^r s^{2(1-r)} \left(2s + 2\nu q - \frac{q^2 \mu^2}{s} \right)^r \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^{p-r} \cdot |\nabla f(x)|^r}{\delta(x)^{s-r+1}} dx; \end{aligned}$$

если $s > 0$, $q > s$, $\mu \in (0; \frac{2s}{q}]$ и $\nu \in [0, \frac{s}{q}]$, то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s+1}} dx + \frac{qr}{\delta_0^q} \left(q\lambda_\nu^2(2s/q) + \mu(q-s) \left(2 - \frac{q\mu}{s} \right) \right) \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^p}{\delta(x)^{s-q+1}} dx \\ \leq \frac{p^r}{s^r} \left(\frac{2s}{s - \nu q} - \frac{q^2 \mu^2}{s^2 - \nu^2 q^2} \right)^r \int_{\Omega} \frac{|f(x)|^{p-r} \cdot |\nabla f(x)|^r}{\delta(x)^{s-r+1}} dx, \end{aligned}$$

где $z = \lambda_\nu(r)$ — константа, являющаяся первым положительным решением уравнения

$$(r - 2\mu)J_\nu(z) + 2zJ'_\nu(z) = 0, \quad z \in (0, j_\nu).$$

Для доказательства неравенств в пространствах L_p можно использовать L_p -лемму из [48] (см. также [17, 18]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. Inequalities. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1973.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
3. Maz'ya V. G. Sobolev spaces. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl, 1985.
4. Авхадиев Ф. Г. Решение обобщенной задачи Сен-Венана // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 12. С. 3–12.
5. Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T. The analysis and geometry of Hardy's inequality. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer-Verl., 2015.
6. Дубинский Ю. А. Двусторонние шкалы неравенств Харди и их приложения к некоторым задачам математической физики // Тр. Шестой Междунар. конф. по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14–21 августа 2011). Ч. 2. М.: РУДН, 2012. Т. 46. С. 49–91.
7. Дубинский Ю. А. Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях // Теория функций и дифференциальные уравнения: Сб. статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2010. С. 112–132. (Тр. МИАН; Т. 269).
8. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains // Z. Angew. Math. Mech. 2007. V. V. 87, N 8–9. P. 632–642.
9. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2011. V. 18, N 4. P. 723–736.
10. Brezis H., Marcus M. Hardy's inequalities revisited // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1998. V. 25, N 1–2. P. 217–237.
11. Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A. A geometrical version of Hardy's inequality // J. Funct. Anal. 2002. V. 189. P. 539–548.
12. Авхадиев Ф. Г. Интегральные неравенства Харди и Реллиха в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 2. С. 18–44.
13. Авхадиев Ф. Г. Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна $1/4$ // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 5. С. 3–26.

14. Avkhadiiev F., Laptev A. Hardy inequalities for nonconvex domains // Around the research of Vladimir Maz'ya. V. I. Int. Math. Ser. (N. Y.) New York: Springer-Verl., 2010. V. 11. P. 1–12.
15. Avkhadiiev F. G. Hardy–Rellich inequalities in domains of the Euclidean space // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 442. P. 469–484.
16. Avkhadiiev F. G. Hardy-type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // Lobachevskii J. Math. 2006. V. 21. P. 3–31.
17. Авхадиев Ф. Г. Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 8–18.
18. Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г. Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 239–250.
19. Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К. L_p -версии одного конформно инвариантного неравенства // Изв. вузов. Математика. 2018. № 8. С. 88–92.
20. Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К. Конформные инварианты плоских областей гиперболического типа // Уфим. мат. журн. 2019. Т. 11, № 2. С. 3–18.
21. Авхадиев Ф. Г. Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 12. С. 3–28.
22. Fernández J. L. Domains with strong barrier // Rev. Mat. Iberoam. 1989. V. 5, N 2. P. 47–65.
23. Fernández J. L., Rodríguez J. M. The exponent of convergence of Riemann surfaces, bass Riemann surfaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Mathematica. 1990. V. 15. P. 165–183.
24. Alvarez V., Pestana D., Rodríguez J. M. Isoperimetric inequalities in Riemann surfaces of infinite type // Rev. Mat. Iberoam. 1999. V. 15, N 2. P. 353–425.
25. Tidblom J. A geometrical version of Hardy's inequality for $W_0^{1,p}(\Omega)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. P. 2265–2271.
26. Evans W. D., Lewis R. T. Hardy and Rellich inequalities with remainders // J. Math. Inequal. 2007. V. 1, N 4. P. 473–490.
27. Burenkov V. I., Senouci A., Tararykova T. V. Hardy-type inequality for $0 < p < 1$ and hypodecreasing functions // Euras. Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 27–42.
28. Burenkov V. I. On the exact constant in the Hardy inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions // Proc. Steklov Inst. Math. 1993. V. 194, N 4. P. 59–63.
29. Burenkov V. I. Function spaces. Main integral inequalities related to L_p -spaces. Moscow: Peoples' Friendship Univ., 1989.
30. Psaradakis G. L_1 Hardy inequalities with weights // J. Geom. Anal. 2013. V. 23, N 4. P. 1703–1728.
31. Lamb H. Note on the induction of electric currents in a cylinder placed across the lines of magnetic force // Proc. Lond. Math. Soc. 1884. V. 1–15. P. 270–274.
32. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1966.
33. Nasibullin R. G. Brezis–Marcus type inequalities with Lamb constant // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2019. V. 16. P. 449–464.
34. Nasibullin R. G. Sharp Hardy type inequalities with weights depending on Bessel function // Ufa Math. J. 2017. V. 9, N 1. P. 89–97.
35. Nasibullin R. G. Hardy type inequalities with weights dependent on the Bessel functions // Lobachevskii J. Math. 2016. V. 37, N 3. P. 274–283.
36. Nasibullin R. G. A geometrical version of Hardy–Rellich type inequalities // Mathematica Slovaca. 2019. V. 69, N 4. P. 785–800.
37. Levin V. Notes on inequalities. II. On a class of integral inequalities // Rec. Math. Moscow. 1938. V. 4, N 2. P. 309–325.
38. Shum D. T. On a class of new inequalities // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 204. P. 299–341.
39. Filippas S., Maz'ya V. G., Tertikas A. On a question of Brezis and Marcus // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2006. V. 25, N 4. P. 491–501.
40. Прохоров Д. В., Степанов В. Д., Ушакова Е. П. Интегральные операторы Харди — Стеклова // Современные проблемы математики. М.: МИАН, 2016. Т. 22. С. 3–185.
41. Stepanov V. D., Shambilova G. E. On weighted iterated Hardy-type operators // Anal. Math. 2018. V. 44, N 2. P. 273–283.
42. Прохоров Д. В. Об одном весовом неравенстве для оператора типа Харди // Функциональные пространства и смежные вопросы анализа. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2014. С. 216–223.
43. Bandaliev R. A. On Hardy-type inequalities in weighted variable Lebesgue space $L_{p(x),\omega}$ for $0 < p(x) < 1$ // Euras. Math. J. 2013. V. 4. P. 5–16.

-
44. Bandaliyev R. A., Serbetci A., Hasanov S. G. On Hardy inequality in variable Lebesgue spaces with mixed norm // Indian J. Pure Appl. Math. 2018. V. 49. P. 765–782.
 45. Насибуллин Р. Г. Обобщения неравенств типа Харди в форме Ю. А. Дубинского // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 109–122.
 46. Avkhadiev F. G., Makarov R. V. Hardy type inequalities on domains with convex complement and uncertainty principle of Heisenberg // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40, N 9. P. 1250–1259.
 47. Kamke E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Stuttgart: Teubner, 1977.
 48. Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г., Шафигуллин И. К. Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства // Изв. вузов. Математика. 2011. № 9. С. 90–94.

Поступила в редакцию 14 апреля 2020 г.

После доработки 14 апреля 2020 г.

Принята к публикации 10 августа 2020 г.

Насибуллин Рамиль Гайсаевич, Макаров Руслан Валерьевич
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, 35, Казань 420008
NasibullinRamil@gmail.com, ruva2007@ya.ru