D. V. Prokhorov, On maximal inequalities, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1398–1410

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.612>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.205.225.156

April 26, 2023, 08:36:29

О МАКСИМАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

Д. В. Прохоров

Аннотация. Построены контрпримеры к утверждениям [1, 2.3.6], представляющим собой максимальные неравенства для пространств $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Предложено условие, при котором эти неравенства выполняются. Рассмотрено одно весовое максимальное неравенство на ограниченном интервале I вещественной прямой, связывающее $f \in C_0^\infty(I)$ и ее производную.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.612

Ключевые слова: максимальное неравенство, весовое неравенство, пространства Лебега — Бесова.

1. Максимальные неравенства

Определения. Пусть B_r — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса r , $\mathcal{L}^n$ обозначает n -мерную меру Лебега. Используем следующие, немного отличающиеся от принятых в [1], обозначения: $\mathcal{F}$ — оператор Фурье, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство быстро убывающих функций, Λ — функционал из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ℓ_Λ — плотность функционала Λ (если она существует, т. е. когда Λ регулярен).

Символом $\Phi(\mathbb{R}^n)$ обозначим семейство [1, 2.3.1, определение 1] последовательностей $\bar{\phi} := \{\phi_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ таких, что

- (i) $\text{supp } \phi_0 \subset B_2$, $\text{supp } \phi_j \subset B_{2^{j+1}} \setminus B_{2^j}^\circ$ для $j \in \mathbb{N}$;
- (ii) для любого мультииндекса α существует константа $c_{\bar{\phi},\alpha}^- > 0$ такая, что

$$\sup_{j \geq 0, x \in \mathbb{R}^n} 2^{j|\alpha|} |D^\alpha \phi_j(x)| \leq c_{\bar{\phi},\alpha}^-;$$

- (iii) для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено $\sum_{j=0}^\infty \phi_j(x) = 1$.

Семейство $\Phi(\mathbb{R}^n)$ непусто, элемент семейства $\Phi(\mathbb{R}^n)$ строится в следующем порядке.

ПРИМЕР 1. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $0 \leq \varphi \leq 1$ на $\mathbb{R}^n$, $\varphi = 1$ на $B_{\frac{3}{4}}$, $\text{supp } \varphi \subset B_{\frac{5}{4}}$, $\varphi(x) \geq \varphi(y)$ при $|x| \leq |y|$ (построение такой функции см. в [2, 1.46]). Положим $\varphi_0 := \varphi$, $\varphi_j(x) := \varphi(2^{-j}x) - \varphi(2^{-j+1}x)$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$; $\bar{\varphi} := \{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$. Тогда $\bar{\varphi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $L \in \mathbb{N}$. В [1, 2.3.6, определение 1] через $\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ обозначено семейство всех систем $\bar{\phi} := \{\phi_j\}_{j=0}^\infty \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что $\mathbf{C}(\bar{\phi}) < \infty$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\bar{\phi}) := & \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^L \sum_{|\alpha| \leq L} |(D^\alpha \phi_0)(x)| \\ & + \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, j \in \mathbb{N}} (|x|^L + |x|^{-L}) \sum_{|\alpha| \leq L} |(D^\alpha [\phi_j(2^j \cdot)])(x)|. \quad (1) \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект 19-01-00223.

Пусть $L \in \mathbb{N}$, $\bar{\phi} := \{\phi_j\}_{j=0}^\infty \in \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $a > 0$. Для $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$(\phi_j^* \Lambda)(x) := (\phi_j^* \Lambda)_a(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{|\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\phi_j \cdot \mathcal{F}\Lambda])}(x-y)|}{1 + |2^j y|^a}.$$

Функция $x \mapsto (\phi_j^* \Lambda)(x)$ называется *максимальной функцией* [1, 2.3.6, определение 2].

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $q \in (0, \infty]$, $\bar{\phi} := \{\phi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi(\mathbb{R}^n)$.

(i) Для $p \in (0, \infty]$ положим

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \{\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|\Lambda|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\|_{\bar{\phi}} < \infty\},$$

где

$$\|\Lambda|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\|_{\bar{\phi}} := \|\{2^{sj} \ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\phi_j \cdot \mathcal{F}\Lambda])}|L_p(\mathbb{R}^n)\|_{j=0}^\infty\|l_q\|.$$

(ii) Для $p \in (0, \infty)$ положим

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \{\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|\Lambda|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\|_{\bar{\phi}} < \infty\},$$

где

$$\|\Lambda|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\|_{\bar{\phi}} := \|\|\{2^{sj} \ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\phi_j \cdot \mathcal{F}\Lambda])}\}_{j=0}^\infty\|l_q\|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Заметим, что функционал $\mathcal{F}^{-1}[\phi_j \cdot \mathcal{F}\Lambda]$ имеет плотность, ибо его преобразование Фурье

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}[\phi_j \cdot \mathcal{F}\Lambda]) = \phi_j \cdot \mathcal{F}\Lambda$$

имеет носитель, содержащийся в $\text{supp } \phi_j \subset B_{2^{j+1}}$. Топологические пространства

$(B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\|_{\bar{\phi}})$ и $(F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n), \|\cdot|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\|_{\bar{\phi}})$ не зависят от выбора $\bar{\phi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$. Пусть $\bar{\varphi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ тот, который строится в примере 1. Обозначим

$$\|\cdot|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\| := \|\cdot|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\|_{\bar{\varphi}}, \quad \|\cdot|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\| := \|\cdot|F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\|_{\bar{\varphi}}.$$

Лемма 1 [1, 2.5.3, замечание 3]. Пусть $p \in (0, \infty]$, $p' := \frac{p}{p-1}$, $q \in (0, \infty)$ и $\delta_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — функционал вида $\delta_0(\phi) = \phi(0)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\delta_0 \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow s \leq -\frac{n}{p'}; \quad \delta_0 \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow s < -\frac{n}{p'}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\varphi} = \{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ — последовательность из примера 1. Так как (см. [2, 7.16]) $\ell_{(\mathcal{F}\delta_0)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \chi_{\mathbb{R}^n}$, для любой $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}^{-1}[\varphi_k \cdot \mathcal{F}\delta_0])(\phi) \\ &= (\mathcal{F}\delta_0)(\varphi_k \mathcal{F}^{-1}\phi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k \mathcal{F}^{-1}\phi d\mathcal{L}^n = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k) \cdot \phi d\mathcal{L}^n. \end{aligned}$$

Отсюда $\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\varphi_k \cdot \mathcal{F}\delta_0])} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k)$ и

$$\|\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\varphi_k \cdot \mathcal{F}\delta_0])}|L_p(\mathbb{R}^n)\| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k)|L_p(\mathbb{R}^n)\|.$$

Положим $b_0 := \|\mathcal{F}^{-1}(\varphi)|L_p(\mathbb{R}^n)\|$. При $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k)|L_p(\mathbb{R}^n)\| &= \|2^{kn}[\mathcal{F}^{-1}(\varphi_k(2^k \cdot))](2^k \cdot)|L_p(\mathbb{R}^n)\| \\ &= 2^{\frac{kn}{p'}} \|\mathcal{F}^{-1}((\varphi(\cdot) - \varphi(2 \cdot))|L_p(\mathbb{R}^n)\| =: 2^{\frac{kn}{p'}} b_k. \end{aligned}$$

Тогда $\|\delta_0|B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\| = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\{2^{k(s+\frac{n}{p'})} b_k\}_{k=0}^\infty\|l_q$ и выполнено (2). $\square$

В [1] доказываются следующие два утверждения.

Теорема 1 [1, 2.3.6, утверждение]. Пусть $a > 0$, $p, q \in (0, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{N}$, $L > |s| + 3a + n + 2$.

(i) Существует константа $c = c(a, L, n, q, s) > 0$ такая, что для любых $\bar{\phi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\{\xi^\eta\}_{\eta \in (0,1)} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\| \{2^{ks} \sup_{\eta \in (0,1)} ((\xi^\eta)_k^* \Lambda)(x) \}_{k=0}^\infty |l_q| \| \leq c \sup_{\eta \in (0,1)} \mathbf{C}(\bar{\xi}^\eta) \| \{2^{ks} (\phi_k^* \Lambda)(x) \}_{k=0}^\infty |l_q|. \quad (3)$$

(ii) Существует константа $c = c(a, L, n, p, q, s) > 0$ такая, что для любых $\bar{\phi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\{\xi^\eta\}_{\eta \in (0,1)} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$\begin{aligned} \| \{2^{ks} \sup_{\eta \in (0,1)} ((\xi^\eta)_k^* \Lambda)(\cdot) |L_p(\mathbb{R}^n)| \|_{k=0}^\infty |l_q| \| \\ \leq c \sup_{\eta \in (0,1)} \mathbf{C}(\bar{\xi}^\eta) \| \{2^{ks} \|(\phi_k^* \Lambda)(\cdot) |L_p(\mathbb{R}^n)| \|_{k=0}^\infty |l_q|. \end{aligned}$$

Теорема 2 [1, 2.3.6, теорема]. Предположим, что $s \in \mathbb{R}$, $q \in (0, \infty]$.

(i) Пусть $p \in (0, \infty]$, $a > \frac{n}{p}$, $L \in \mathbb{N}$, $L > |s| + \frac{3n}{p} + n + 2$. Тогда существует константа $c = c(a, L, n, p, q, s) > 0$ такая, что для любых $\bar{\phi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\{\xi^\eta\}_{\eta \in (0,1)} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$\| \{2^{ks} \sup_{\eta \in (0,1)} ((\xi^\eta)_k^* \Lambda)(\cdot) |L_p(\mathbb{R}^n)| \|_{k=0}^\infty |l_q| \| \leq c \sup_{\eta \in (0,1)} \mathbf{C}(\bar{\xi}^\eta) \| \Lambda |B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)| \|_{\bar{\phi}}. \quad (4)$$

(ii) Пусть $p \in (0, \infty)$, $a > \frac{n}{\min\{p,q\}}$, $L \in \mathbb{N}$, $L > |s| + \frac{3n}{\min\{p,q\}} + n + 2$. Тогда существует константа $c = c(a, L, n, p, q, s) > 0$ такая, что для любых $\bar{\phi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$, $\{\xi^\eta\}_{\eta \in (0,1)} \subset \mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ выполнено

$$\| \| \{2^{ks} \sup_{\eta \in (0,1)} ((\xi^\eta)_k^* \Lambda)(\cdot) \}_{k=0}^\infty |l_q| \| |L_p(\mathbb{R}^n)| \| \leq c \sup_{\eta \in (0,1)} \mathbf{C}(\bar{\xi}^\eta) \| \Lambda |F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)| \|_{\bar{\phi}}.$$

Данные утверждения ошибочны, ниже построены контрпримеры.

Контрпримеры. Пусть $n := 1$, $s := 0$, $a = 2$, $L := 10$, $\eta \in (0, 1)$, последовательность $\bar{\varphi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ определена в примере 1, $(\xi^\eta)_m(x) := 0$ при $m \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$,

$$(\xi^\eta)_0(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{\frac{x^2}{\eta^2}-1}}, & |x| < \eta, \\ 0, & |x| \geq \eta; \end{cases} \quad \psi(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

#1. Пусть функционал Λ имеет плотность $\ell_\Lambda(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда (см. [2, 7.16]) $\mathcal{F}\Lambda = -\sqrt{2\pi}D^2\delta_0$ и $\text{supp } \mathcal{F}\Lambda = \{0\}$. Следовательно, $\varphi_0\mathcal{F}\Lambda = \mathcal{F}\Lambda$ и $\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\varphi_0 \cdot \mathcal{F}\Lambda])} = \ell_\Lambda$, ибо $\varphi_0 = 1$ на окрестности нуля, $\varphi_j\mathcal{F}\Lambda = 0$ при $j \in \mathbb{N}$. Отсюда для $x \in \mathbb{R}$ имеем $(\varphi_j^*\Lambda)(x) = 0$ при $j \in \mathbb{N}$,

$$(\varphi_0^*\Lambda)(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}} \frac{|\ell_\Lambda(x-z)|}{1+|z|^2} = \sup_{z \in \mathbb{R}} \frac{(x-z)^2}{1+|z|^2} \leq 4(1+|x|^2).$$

Далее, для $x \in (-\eta, \eta)$, $k \in \mathbb{N}$ по индукции можно доказать, что

$$(D^k((\xi^\eta)_0))(x) = \sum_{0 \leq m \leq k, 2 \leq j \leq 2k} c_{m,j} \frac{x^m}{\eta^{k+m}} e^{\frac{1}{\frac{x^2}{\eta^2}-1}} \left(\frac{x^2}{\eta^2} - 1 \right)^{-j}, \quad (5)$$

где $c_{m,j} \in \mathbb{R}$. Выпишем, для примера, первые две производные явно:

$$(D^1(\xi^\eta)_0)(x) = -\frac{2xe^{\frac{1}{\frac{x^2}{\eta^2}-1}}}{\eta^2\left(\frac{x^2}{\eta^2}-1\right)^2},$$

$$(D^2(\xi^\eta)_0)(x) = -\frac{2e^{\frac{1}{\frac{x^2}{\eta^2}-1}}}{\eta^2\left(\frac{x^2}{\eta^2}-1\right)^2} + \frac{8x^2e^{\frac{1}{\frac{x^2}{\eta^2}-1}}}{\eta^4\left(\frac{x^2}{\eta^2}-1\right)^3} + \frac{4x^2e^{\frac{1}{\frac{x^2}{\eta^2}-1}}}{\eta^4\left(\frac{x^2}{\eta^2}-1\right)^4}.$$

Из (5) вытекает существование абсолютной константы $C > 0$ такой, что

$$\mathbf{C}(\bar{\xi}^\eta) = \sup_{x \in (-\eta, \eta)} |x|^{10} \sum_{m=0}^{10} |(D^m((\xi^\eta)_0))(x)| \leq C.$$

Таким образом, правая часть (3) оценивается сверху:

$$\sup_{\eta \in (0,1)} \mathbf{C}(\bar{\xi}^\eta) \|\{2^{ks}(\varphi_k^* \Lambda)(x)\}_{k=0}^\infty\|_{l_q} \leq 4C(1 + |x|^2).$$

Рассмотрим левую часть (3). Для $x \in \mathbb{R}$ выполнено $((\xi^\eta)_k^* \Lambda)(x) = 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Пусть $k = 0$. Заметим, что для $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (см. [2, 7.8(b)]) справедливо

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^{-1}[\psi \cdot \mathcal{F}\Lambda])(\phi) &= \Lambda(\mathcal{F}(\psi \mathcal{F}^{-1}\phi)) = \Lambda((\mathcal{F}\psi) * \phi) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \ell_\Lambda(x) dx \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}\psi)(x-y) \phi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) [\ell_\Lambda * (\mathcal{F}^{-1}\psi)](y) dy. \end{aligned}$$

Здесь перестановка интегралов возможна в силу теоремы Фубини, ибо ℓ_Λ — полином. Поэтому для $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} \ell_{(\mathcal{F}^{-1}[(\xi^\eta)_0 \cdot \mathcal{F}\Lambda])}(x) &= (\ell_\Lambda * \mathcal{F}^{-1}((\xi^\eta)_0))(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (x-y)^2 dy \int_{-\eta}^{\eta} e^{\frac{1}{\frac{z^2}{\eta^2}-1}} e^{izy} dz \\ &= \frac{\eta}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (x-y)^2 dy \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{t^2-1}} e^{it\eta y} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(x - \frac{z}{\eta}\right)^2 dz \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{t^2-1}} e^{itz} dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} ((\xi^\eta)_0^* \Lambda)(x) &\geq \frac{|\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[(\xi^\eta)_0 \cdot \mathcal{F}\Lambda])}(0)|}{1 + |x|^2} = \frac{1}{\eta^2 2\pi (1 + |x|^2)} \left| \int_{\mathbb{R}} z^2 dz \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{t^2-1}} e^{itz} dt \right| \\ &= \frac{|\Lambda(\mathcal{F}\psi)|}{\eta^2 \sqrt{2\pi} (1 + |x|^2)} = \frac{|(\mathcal{F}\Lambda)(\psi)|}{\eta^2 \sqrt{2\pi} (1 + |x|^2)} = \frac{|(-\sqrt{2\pi} D^2 \delta_0)(\psi)|}{\eta^2 \sqrt{2\pi} (1 + |x|^2)} \\ &= \frac{|(D^2 \psi)(0)|}{\eta^2 (1 + |x|^2)} = \frac{2e^{-1}}{\eta^2 (1 + |x|^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sup_{\eta \in (0,1)} ((\xi^\eta)_0^* \Lambda)(x) = \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$, и левая часть (3) равна ∞ . Таким образом, построенный контрпример показывает невыполнение утверждения (i) теоремы 1.

#2. Пусть $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, $q \in (0, \infty]$, $\Lambda = \delta_0$. Тогда $a > \frac{n}{p}$ и $s < -\frac{n}{p'}$. Согласно лемме 1 имеем $\Lambda \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ и $\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[(\xi^\eta)_0 \cdot \mathcal{F}\Lambda])} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}((\xi^\eta)_0)$. Далее,

$$((\xi^\eta)_0^* \Lambda)(x) \geq |\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[(\xi^\eta)_0 \cdot \mathcal{F}\Lambda])}(x)| = \frac{\eta}{2\pi} \left| \int_{-1}^1 e^{i\frac{1}{t^2-1}} e^{it\eta x} dt \right|,$$

и левая часть (4) оценивается снизу:

$$\begin{aligned} & \|\{2^{ks}\| \sup_{\eta \in (0,1)} ((\xi^\eta)_k^* \Lambda)(\cdot) |L_p(\mathbb{R}^n)|\}_{k=0}^\infty |l_q|\| \geq \|\sup_{\eta \in (0,1)} ((\xi^\eta)_0^* \Lambda)(\cdot) |L_p(\mathbb{R}^n)|\| \\ & \geq \sup_{\eta \in (0,1)} \|((\xi^\eta)_0^* \Lambda)(\cdot) |L_p(\mathbb{R}^n)|\| \geq \sup_{\eta \in (0,1)} \frac{\eta}{2\pi} \left[\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{-1}^1 e^{i\frac{1}{t^2-1}} e^{it\eta x} dt \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ & = \sup_{\eta \in (0,1)} \frac{\eta^{1-\frac{1}{p}}}{2\pi} \left[\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{-1}^1 e^{i\frac{1}{t^2-1}} e^{ity} dt \right|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} = \infty. \end{aligned}$$

Правая часть (4) конечна, ибо $\Lambda \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, построенный контрпример показывает невыполнение утверждения (i) теоремы 2. С учетом оценки [1, (2.3.6/22)], контрпример также показывает невыполнение утверждения (ii) теоремы 1.

#3. Пусть $p \in (\frac{1}{2}, 1)$, $q \in (\frac{1}{2}, p]$, $\Lambda = \delta_0$. Тогда $\Lambda \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \subset F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, $a > \frac{n}{\min\{p,q\}}$. Из рассуждений, изложенных в #2, вытекает невыполнение утверждения (ii) теоремы 2.

Возникает вопрос: каким образом изменить определение $\mathbf{C}(\bar{\phi})$, чтобы теоремы 1 и 2 выполнялись? При доказательстве [1, 2.3.6, утверждение] автору потребовалось получить оценку

$$I_{k,j} \leq c(a, L, n) 2^{(a+N+\frac{n}{2}-L)|j-k|} \mathbf{C}(\bar{\xi}^\eta) \quad (6)$$

интеграла [1, (2.3.6/10)]

$$I_{k,j} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |2^j y|^a) |\mathcal{F}^{-1}[(\xi^\eta)_k \psi_j](y)| dy, \quad k, j \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $N := N(a, n)$ — четное натуральное число, лежащее в промежутке $(a + \frac{n}{2}, a + \frac{n}{2} + 2]$; последовательность $\{\psi_j\}_0^\infty$ строится по функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ со свойствами $0 \leq \psi \leq 1$ на $\mathbb{R}^n$, $\psi = 1$ на $B_{\frac{1}{2}}$, $\text{supp } \psi \subset B_{\frac{3}{2}}$, $\psi(x) \geq \psi(y)$ при $|x| \leq |y|$ по алгоритму: $\psi_0 := \psi$, $\psi_j(x) := \psi(2^{-j}x) - \psi(2^{-j+3}x)$, $j \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$; $\bar{\psi} := \{\psi_j\}_{j=0}^\infty$. Оценка (6) выполняется для всех $I_{k,j}$, за исключением $I_{0,0}$. Если вместо (1) положить

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\bar{\phi}) &:= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^L + w(x)) \sum_{|\alpha| \leq L} |(D^\alpha \phi_0)(x)| \\ &\quad + \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, j \in \mathbb{N}} (|x|^L + |x|^{-L}) \sum_{|\alpha| \leq L} |(D^\alpha [\phi_j(2^j \cdot)])(x)|, \quad (7) \end{aligned}$$

где $w \in C(\mathbb{R}^n)$, $w \geq 0$, то семейство $\mathcal{A}_L(\mathbb{R}^n)$ не изменится, а оценка (6) имеет место для всех $I_{k,j}$ при $\frac{1}{w} \in L_1(B_1)$ в силу следующих соображений.

Пусть m — четное натуральное число, лежащее в промежутке $(a + n, a + n + 2]$. Имеем (см. [2, 7.4(c)])

$$\begin{aligned} I_{0,0} &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |y|^a)}{(1 + |y|^m)} |(1 + |y|^m) \mathcal{F}^{-1}[(\xi^\eta)_0 \psi_0](y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |y|^a)}{(1 + |y|^m)} |\mathcal{F}[\{1 + P_m(D)\}((\xi^\eta)_0 \psi_0)](y)| dy, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_m(D) &= \left[\sum_{j=1}^n -D^{2e_j} \right]^{\frac{m}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{k_j \geq 0, k_1 + \dots + k_n = \frac{m}{2}} \binom{\frac{m}{2}}{k_1, \dots, k_n} D^{2k_1 e_1} \dots D^{2k_n e_n} = \sum_{\alpha: |\alpha|=m} c'(n, \alpha) D^\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_{0,0} &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |y|^a)}{(1 + |y|^m)} dy \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \left[|((\xi^\eta)_0 \psi_0)(t)| + \sum_{\alpha: |\alpha|=m} c'(n, \alpha) |(D^\alpha[(\xi^\eta)_0 \psi_0])(t)| \right] dt \\ &\leq c_1(a, n) \max_{|\alpha| \leq L} \|D^\alpha \psi_0\| L_\infty(\mathbb{R}^n) \\ &\quad \times \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|x|^L + w(x)) \sum_{|\alpha| \leq L} |(D^\alpha(\xi^\eta)_0)(x)| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dt}{|t|^L + w(t)}, \end{aligned}$$

что при $\frac{1}{w} \in L_1(B_1)$ влечет (6) для $k = j = 0$. Кроме того, (6) справедлива и для других пар k, j , ибо $\mathbf{C}(\xi^\eta)$ из (7) не меньше $\mathbf{C}(\xi^\eta)$ из (1). В частности, можно взять $w(x) = 1$.

Для $y, x \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ положим

$$e_y(x) := e^{iy \cdot x}, \quad (\tau_y \phi)(x) := \phi(x - y).$$

Пусть $n = 1$, $s = 0$, $a > 0$, $L > 3a + 3$, $v \in C(\mathbb{R})$, $v \geq 0$,

$$\mathbf{C}_v(\bar{\phi}) := \sup_{x \in \mathbb{R}} v(x) \sum_{k=0}^L |D^k \phi_0(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, j \in \mathbb{N}} (|x|^L + |x|^{-L}) \sum_{k=0}^L |(D^k[\phi_j(2^j \cdot)])(x)|.$$

Предположим, что теорема 1(i) выполнена с $\mathbf{C}_v(\bar{\xi}^\eta)$ в правой части (3).

Пусть семейство $\{\bar{\xi}^\eta\}_{\eta \in (0,1)}$ состоит из одной последовательности $\{\xi_j\}_0^\infty$, $\xi_j(x) := 0$ при $j \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$, $\text{supp } \xi_0 \subset B_1^\circ$, последовательность $\bar{\varphi} \in \Phi(\mathbb{R}^n)$ определена в примере 1.

Фиксируем $y \in B_1$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq a$. Пусть функционал Λ_m имеет плотность $\ell_{(\Lambda_m)}(x) = x^m$, $x \in \mathbb{R}$, а функционал Λ — плотность $\ell_\Lambda(x) = x^m e_y(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда (см. [2, 7.16]) $\mathcal{F}\Lambda_m = i^m \sqrt{2\pi} D^m \delta_0$ и $\text{supp } \mathcal{F}\Lambda_m = \{0\}$. Отсюда для $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеем (см. [2, 7.2(a)])

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\Lambda)(\phi) &= \int_{\mathbb{R}} x^m e_y(x) (\mathcal{F}\phi)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x^m (\mathcal{F}(\tau_{-y}\phi))(x) dx = (\mathcal{F}\Lambda_m)(\tau_{-y}\phi) \\ &= (-i)^m \sqrt{2\pi} (D^m[\phi(\cdot + y)])(0) = (-i)^m \sqrt{2\pi} (D^m \phi)(y) = i^m \sqrt{2\pi} (D^m \delta_y)(\phi). \end{aligned}$$

В частности, $\text{supp } \mathcal{F}\Lambda = \{y\}$ и, следовательно, $\varphi_0 \mathcal{F}\Lambda = \mathcal{F}\Lambda$ и $\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\varphi_0 \cdot \mathcal{F}\Lambda])} = \ell_\Lambda$, ибо $\varphi_0 = 1$ на $B_{\frac{1}{4}}$, $\varphi_j \mathcal{F}\Lambda = 0$ при $j \in \mathbb{N}$. Отсюда для $x \in \mathbb{R}$ имеем $(\varphi_j^* \Lambda)(x) = 0$ при $j \in \mathbb{N}$,

$$(\varphi_0^* \Lambda)(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}} \frac{|\ell_\Lambda(x - z)|}{1 + |z|^a} = \sup_{z \in \mathbb{R}} \frac{|x - z|^m}{1 + |z|^a} \leq 2^m(1 + |x|^m),$$

т. е. $(\varphi_0^* \Lambda)(0) \leq 2^m$.

Рассмотрим левую часть (3). Для $x \in \mathbb{R}$ выполнено $(\xi_k^* \Lambda)(x) = 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Пусть $k = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\xi_0 \cdot \mathcal{F}\Lambda])}(0) &= (\ell_\Lambda * \mathcal{F}^{-1}\xi_0)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-z)^m e_y(-z) (\mathcal{F}^{-1}\xi_0)(z) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-z)^m e_y(-z) (\mathcal{F}\xi_0)(-z) dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathcal{F}\Lambda_m)(\tau_{-y}\xi_0) = (-i)^m (D^m \xi_0)(y). \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\xi_0^* \Lambda)(x) \geq \frac{|\ell_{(\mathcal{F}^{-1}[\xi_0 \cdot \mathcal{F}\Lambda])}(0)|}{1 + |x|^a} = \frac{|(D^m \xi_0)(y)|}{1 + |x|^a}.$$

По теореме 1(i) для $x = 0$ имеем

$$\sup_{y \in B_1^\circ} |(D^m \xi)(y)| \leq c(a, L) 2^m \sup_{t \in B_1^\circ} v(x) \sum_{k=0}^L |(D^k \xi)(t)| \quad \forall \xi \in C_0^\infty(B_1^\circ), \quad (8)$$

где $a > 0$, $m \leq a$, $L > 3a + 3$. Для выполнения неравенства (8) достаточно, чтобы $\frac{1}{v} \in L_1(B_1)$. В разд. 2 будет показано, что при $m = 0$, $L = 1$ условие $\frac{1}{v} \in L_1(B_1)$ необходимо для выполнения неравенства (8). Отметим, что это неравенство не является доказательством необходимости $\frac{1}{v} \in L_1(B_1)$ в определении $\mathbf{C}_v(\bar{\phi})$ для выполнения теоремы 1(i), ибо L равно 1, а не 4.

2. Одно весовое неравенство

В этом разделе все функции со значениями в $[-\infty, \infty]$. Символ $\mathfrak{B}(I)$ обозначает σ -алгебру всех борелевских множеств на промежутке $I \subset \mathbb{R}$; $BPV(I)$ — пространство всех функций $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих ограниченную поточечную вариацию (см. [3, 2.1]); $\text{ba}(I, \mathfrak{B}(I), \mathcal{L}^1)$ — пространство всех ограниченных конечно-аддитивных мер $\lambda : \mathfrak{B}(I) \rightarrow \mathbb{R}$, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега $\mathcal{L}^1$ (см. [4, абзац перед теоремой 2.44, 1.186]).

Лемма 2. Пусть $I := (c, d) \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow [-\infty, \infty]$ L^1 -измеримая, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и для любой $\phi \in C_0^\infty(I)$ выполнено

$$\int_I \phi^{(k)} f d\mathcal{L}^1 = 0. \quad (9)$$

Тогда существует полином P_{k-1} степени не выше $k - 1$ такой, что $f = P_{k-1}$ $\mathcal{L}^1$ -п.в. на I .

Утверждение содержится в [5, 1.1.10, 1.1.11], ибо из (9) следует, что обобщенная производная $D^k f$ равна нулю. Также его можно доказать по индукции аналогично случаю $k = 1$, доказанному в [5, 1.1.3, лемма; 3, 7.3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $f \in L_{1,\text{loc}}(I)$. Фиксируем произвольный компакт $K \subset I$. Пусть (c_1, d_1) — интервал такой, что $K \subset (c_1, d_1)$, $[c_1, d_1] \subset I$, функция $\phi \in C_0^\infty(I)$ такая, что $\phi = 1$ на (c_1, d_1) . Положим

$$\varphi(x) := \phi(x) \frac{1}{(k-1)!} \int_c^x \phi(t)(x-t)^{k-1} dt, \quad x \in I.$$

Тогда $\varphi \in C_0^\infty(I)$ и из (9) имеем

$$\infty > \int_I |\varphi^{(k)} f| d\mathcal{L}^1 \geq \int_K |\phi f| d\mathcal{L}^1 = \int_K |f| d\mathcal{L}^1.$$

Пусть утверждение леммы выполнено для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и для любой $\phi \in C_0^\infty(I)$ справедливо $\int_I \phi^{(k+1)} f d\mathcal{L}^1 = 0$.

Предположим, что $c, d \in \mathbb{R}$, т. е. интервал I ограничен. Пусть $\psi \in C_0^\infty(I)$ такая, что $\int_I \psi d\mathcal{L}^1 = 1$. Фиксируем произвольную $\phi \in C_0^\infty(I)$. Положим

$$\varphi(x) := \int_c^x \left[\phi - \psi \int_I \phi d\mathcal{L}^1 \right] d\mathcal{L}^1, \quad x \in I.$$

Тогда $\varphi \in C_0^\infty(I)$ и

$$\varphi^{(k+1)} = \phi^{(k)} - \psi^{(k)} \int_I \phi d\mathcal{L}^1 = \phi^{(k)} - \psi^{(k)} \cdot \frac{1}{k!} \int_c^d \phi^{(k)}(t)(d-t)^k dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I \varphi^{(k+1)} f d\mathcal{L}^1 = \int_I \phi^{(k)} f d\mathcal{L}^1 - \int_I \psi^{(k)} f d\mathcal{L}^1 \cdot \frac{1}{k!} \int_c^d \phi^{(k)}(t)(d-t)^k dt \\ &= \int_c^d \phi^{(k)}(t) \left[f(t) - (d-t)^k \cdot \frac{1}{k!} \int_I \psi^{(k)} f d\mathcal{L}^1 \right] dt. \end{aligned}$$

Так как $\phi \in C_0^\infty(I)$ — произвольная функция, существует полином P_{k-1} степени не выше $k-1$ такой, что

$$f(t) - (d-t)^k \cdot \frac{1}{k!} \int_I \psi^{(k)} f d\mathcal{L}^1 = P_{k-1}(t) \quad \text{для } \mathcal{L}^1\text{-п.в. } t \in I.$$

Искомый полином степени не выше k имеет вид

$$P_k(t) := P_{k-1}(t) + (d-t)^k \cdot \frac{1}{k!} \int_I \psi^{(k)} f d\mathcal{L}^1.$$

В случае неограниченного интервала $I \subset \mathbb{R}$ его можно представить в виде объединения $I = \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j)$ последовательности расширяющихся ограниченных интервалов $(c_j, d_j) \subset (c_{j+1}, d_{j+1})$. Применяя указанные выше рассуждения для каждого (c_j, d_j) , построим последовательность полиномов $P_{k,j}$ степени не выше k , которые совпадают на (c_1, d_1) , а следовательно, на всем $\mathbb{R}$. $\square$

Теорема 3. Пусть $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $I := (c, d)$, функция $v \in C([c, d])$ неотрицательная. Для существования константы $C > 0$ такой, что для любой $f \in C_0^\infty(I)$ выполнено

$$\max_{y \in I} |f(y)| \leq C \max_{y \in I} |v(y)f'(y)|, \quad (10)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{v} \in L_1(I)$. При этом $C \leq \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L_1(I)}$.

Доказательство. Достаточность. Для $f \in C_0^1(I)$ и $x \in I$ имеем

$$|f(x)| \leq \int_c^x |f'| d\mathcal{L}^1 \leq \left[\int_I \frac{1}{v} d\mathcal{L}^1 \right] \cdot \max_{y \in I} |v(y)f'(y)|.$$

Необходимость. Пусть $Y := \{f' : f \in C_0^\infty(I)\}$. Фиксируем $x \in I$. Для $g \in Y$ положим $\Lambda_x g := \int_c^x g d\mathcal{L}^1$. В силу (10) выполнено

$$|\Lambda_x g| \leq C \|vg\|_{L_\infty(I)}, \quad g \in Y.$$

По теореме Хана — Банаха [2, 3.3] существует продолжение $\tilde{\Lambda}_x$ функционала Λ_x на $L_\infty(I)$ с сохранением оценки:

$$|\tilde{\Lambda}_x g| \leq C \|vg\|_{L_\infty(I)}, \quad g \in L_\infty(I).$$

Так как для любой $g \in L_\infty(I)$ выполнено

$$\|vg\|_{L_\infty(I)} \leq \|v\|_{L_\infty(I)} \|g\|_{L_\infty(I)},$$

то $\tilde{\Lambda}_x \in [L_\infty(I)]^*$. По теореме Рисса [4, 2.44] о представлении непрерывного функционала на $L_\infty(I)$ существует $\lambda_x \in \text{ba}(I, \mathfrak{B}(I), \mathcal{L}^1)$ такая, что $\tilde{\Lambda}_x g = \int_I g d\lambda_x$ для любой $g \in L_\infty(I)$. Применяя [4, 1.188], запишем $\lambda_x = \lambda_x^+ - \lambda_x^-$, где λ_x^+, λ_x^- — положительные конечные конечно-аддитивные меры на $\mathfrak{B}(I)$, абсолютно непрерывные относительно меры $\mathcal{L}^1$. Положим

$$h_x^+(t) := \lambda_x^+((c, t]), \quad h_x^-(t) := \lambda_x^-((c, t]), \quad t \in I.$$

Функции $h_x^+ : I \rightarrow \mathbb{R}$, $h_x^- : I \rightarrow \mathbb{R}$ возрастают и ограничены на I . Положим $h_x := h_x^+ - h_x^-$. Тогда $h_x \in BPV(I)$ и по теореме [3, 5.13] существует единственная мера Радона $\mu_{h_x} : \mathfrak{B}(I) \rightarrow (-\infty, \infty)$ такая, что для всех $a, b \in I$, $a \leq b$ выполнено

$$\mu_{h_x}((a, b]) = h_x(b + 0) - h_x(a + 0).$$

Пусть $E_x \subset I$ — объединение множеств точек разрыва функций h_x^+ и h_x^- . Заметим, что E_x счетное. Кроме того, для любых $a, b \in I \setminus E_x$, $a \leq b$ справедливо

$$\begin{aligned} \lambda_x((a, b]) &= \lambda_x^+((a, b]) - \lambda_x^-((a, b]) = [h_x^+(b) - h_x^+(a)] - [h_x^-(b) - h_x^-(a)] \\ &= h_x(b) - h_x(a) = h_x(b + 0) - h_x(a + 0) = \mu_{h_x}((a, b]). \end{aligned}$$

Покажем, что для $a, b \in I \setminus E_x$, $a < b$, и непрерывной $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_{(a, b]} \phi d\lambda_x = \int_{(a, b]} \phi d\mu_{h_x}. \quad (11)$$

Построим последовательность разбиений.

ШАГ 1. $\delta_1 := \frac{b-a}{3}$, $y_{1,0} := a$, $y_{1,1} \in \left(\frac{a+b}{2} - \delta_1, \frac{a+b}{2}\right) \setminus E_x$, $y_{1,2} := b$; $\Delta_{1,i} := (y_{1,i}, y_{1,i+1}]$, $i \in \{0, 1\}$.

ШАГ 2. $\delta_2 := \frac{\min_{i \in \{0,1\}} |\Delta_{1,i}|}{3}$, $y_{2,0} := a$, $y_{2,1} \in \left(\frac{y_{1,0}+y_{1,1}}{2} - \delta_2, \frac{y_{1,0}+y_{1,1}}{2}\right) \setminus E_x$, $y_{2,2} := y_{1,1}$, $y_{2,3} \in \left(\frac{y_{1,1}+y_{1,2}}{2} - \delta_2, \frac{y_{1,1}+y_{1,2}}{2}\right) \setminus E_x$, $y_{2,4} := b$; $\Delta_{2,i} := (y_{2,i}, y_{2,i+1}]$, $i \in \{0, \dots, 2^2 - 1\}$.

Предположим, что шаг $k-1$ выполнен.

ШАГ k . $\delta_k := \frac{\min_{i \in \{0, \dots, 2^{k-1}-1\}} |\Delta_{k-1,i}|}{3}$, $y_{k,2^k} := b$, для $m \in \{0, \dots, 2^{k-1} - 1\}$ положим $y_{k,2m} := y_{k-1,m}$, $y_{k,2m+1} \in \left(\frac{y_{k-1,m}+y_{k-1,m+1}}{2} - \delta_k, \frac{y_{k-1,m}+y_{k-1,m+1}}{2}\right) \setminus E_x$; $\Delta_{k,i} := (y_{k,i}, y_{k,i+1}]$, $i \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$.

По построению $\delta_1 = \frac{b-a}{3}$, $\max_{i \in \{0,1\}} |\Delta_{1,i}| \leq \delta_1 + \frac{b-a}{2}$, а при $k \geq 2$ выполнено $\delta_k \leq 2^{-(k-1)} \frac{b-a}{3}$ и

$$\max_{i \in \{0, \dots, 2^k - 1\}} |\Delta_{k,i}| \leq \delta_k + \frac{1}{2} \max_{i \in \{0, \dots, 2^{k-1} - 1\}} |\Delta_{k-1,i}|.$$

Отсюда для $k \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \max_{i \in \{0, \dots, 2^k - 1\}} |\Delta_{k,i}| &\leq \sum_{j=2}^k 2^{-(k-j)} \delta_j + 2^{-(k-1)} \left[\delta_1 + \frac{b-a}{2} \right] \\ &\leq \sum_{j=2}^k 2^{-(k-j)} 2^{-(j-1)} \frac{b-a}{3} + 2^{-(k-1)} \frac{5(b-a)}{6} \\ &= 2^{-(k-1)} \left[\frac{(b-a)k}{3} + \frac{5(b-a)}{6} \right] = \frac{(2k+5)(b-a)}{3 \cdot 2^k}. \end{aligned}$$

Для $k \in \mathbb{N}$ и $t \in I$ положим

$$\phi_k(t) := \sum_{i=0}^{2^k-1} \phi(y_{k,i}) \chi_{\Delta_{k,i}}(t).$$

Пусть $\tilde{\phi}$ — продолжение ϕ нулем на I . Последовательность $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится равномерно к $\tilde{\phi}$ на I . Следовательно,

$$\int_{(a,b]} \phi d\lambda_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{2^k-1} \phi(y_{k,i}) \lambda_x(\Delta_{k,i}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{2^k-1} \phi(y_{k,i}) \mu_{h_x}(\Delta_{k,i}) = \int_{(a,b]} \phi d\mu_{h_x},$$

т. е. (11) доказано.

Из (11) для любой $\phi \in C_0(I)$ следует

$$\int_I \phi d\lambda_x = \int_I \phi d\mu_{h_x}, \quad (12)$$

ибо найдется промежуток $(a, b]$ такой, что $a, b \in I \setminus E_x$ и $\text{supp } \phi \subset (a, b)$.

Для $t \in I$ положим

$$g_x(t) := \int_{(c,t]} \chi_{(c,x]} d\mathcal{L}^1.$$

Функция $g_x : I \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает и ограничена на I . По теореме [3, 5.3] существует единственная мера Радона $\mu_{g_x} : \mathfrak{B}(I) \rightarrow [0, \infty)$ такая, что для всех $a, b \in I$, $a \leq b$ выполнено

$$\mu_{g_x}((a, b]) = g_x(b + 0) - g_x(a + 0).$$

В частности, в силу [3, 5.28; 6, 1.29] для любой борелевской $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ и $E \in \mathfrak{B}(I)$ выполнено

$$\int_E f d\mu_{g_x} = \int_E f \chi_{(c, x]} d\mathcal{L}^1.$$

Кроме того, $(h_x - g_x) \in BPV(I)$ и по теореме [3, 5.13] существует единственная мера Радона $\mu_{(h_x - g_x)} : \mathfrak{B}(I) \rightarrow (-\infty, \infty)$ такая, что для всех $a, b \in I$, $a \leq b$ справедливо

$$\mu_{(h_x - g_x)}((a, b]) = (h_x - g_x)(b + 0) - (h_x - g_x)(a + 0).$$

Следовательно, $\mu_{(h_x - g_x)} = \mu_{h_x} - \mu_{g_x}$.

Применяя [3, 5.41] и (12), для $\phi \in C_0^\infty(I)$ имеем

$$\begin{aligned} - \int_I \phi''(h_x - g_x) d\mathcal{L}^1 &= \int_I \phi' d\mu_{(h_x - g_x)} = \int_I \phi' d\mu_{h_x} - \int_I \phi' d\mu_{g_x} \\ &= \int_I \phi' d\lambda_x - \int_I \phi' \chi_{(c, x]} d\mathcal{L}^1 = \tilde{\Lambda}_x(\phi') - \Lambda_x(\phi') = 0. \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 2 $h_x(t) - g_x(t) = c_{x,0} + c_{x,1}(t - c)$ для $\mathcal{L}^1$ -п.в. $t \in I$. Пусть

$$F_x := \{t \in I : h_x(t) - g_x(t) = c_{x,0} + c_{x,1}(t - c)\}.$$

Положим $g_{x,1}(t) := g_x(t) + c_{x,1}(t - c)$, $t \in I$. Функция $g_{x,1}$ принадлежит $BPV(I)$, и по теореме [3, 5.13] существует единственная мера Радона $\mu_{g_{x,1}} : \mathfrak{B}(I) \rightarrow (-\infty, \infty)$ такая, что для всех $a, b \in I$, $a \leq b$ верно

$$\mu_{g_{x,1}}((a, b]) = g_{x,1}(b + 0) - g_{x,1}(a + 0).$$

Так как для любого $t \in I$ выполнено

$$h_x(t+0) = \lim_{y \rightarrow t, y \in F_x} h_x(y) = g_x(t) + c_{x,0} + c_{x,1}(t - c) = g_{x,1}(t) + c_{x,0} = g_{x,1}(t+0) + c_{x,0},$$

для любых $a, b \in I$, $a \leq b$ имеем

$$\mu_{h_x}((a, b]) = h_x(b + 0) - h_x(a + 0) = g_{x,1}(b + 0) - g_{x,1}(a + 0) = \mu_{g_{x,1}}((a, b]).$$

Отсюда $\mu_{h_x} = \mu_{g_{x,1}}$ и для любой борелевской $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\int_I f d\mu_{h_x} = \int_I f d\mu_{g_{x,1}} = \int_I (\chi_{(c, x]} + c_{x,1}) f d\mathcal{L}^1. \quad (13)$$

Фиксируем $a, b \in I \setminus E_x$, $a < b$. Для $t \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ положим $\phi_n(t) := [\max\{v(t), \frac{1}{n}\}]^{-1}$. Тогда $\phi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Пусть $\tilde{\phi}_n$ — продолжение ϕ_n нулем на I . В силу (11), (13) имеем

$$\begin{aligned} \int_{(a, b]} \phi_n d\lambda_x &= \int_{(a, b]} \phi_n d\mu_{h_x} \\ &= \int_I \tilde{\phi}_n d\mu_{h_x} = \int_I (\chi_{(c, x]} + c_{x,1}) \tilde{\phi}_n d\mathcal{L}^1 = \int_{(a, b]} \frac{\chi_{(c, x]} + c_{x,1}}{\max\{v, \frac{1}{n}\}} d\mathcal{L}^1. \end{aligned}$$

Кроме того, из определения $\tilde{\Lambda}_x$ следует, что

$$\left| \int_{(a,b]} \phi_n d\lambda_x \right| = \left| \int_I \tilde{\phi}_n d\lambda_x \right| = |\tilde{\Lambda}_x \tilde{\phi}_n| \leq C \|v \tilde{\phi}_n\|_{L_\infty(I)} \leq C.$$

1. СЛУЧАЙ $a, b \in (c, x) \setminus E_x$. По теореме о монотонной сходимости при $n \rightarrow \infty$ и затем при $a \rightarrow c+0$, $b \rightarrow x-0$

$$C \geq |1 + c_{x,1}| \int_{(c,x)} \frac{1}{v} d\mathcal{L}^1. \quad (14)$$

2. СЛУЧАЙ $a, b \in (x, d) \setminus E_x$. По теореме о монотонной сходимости при $n \rightarrow \infty$ и затем при $a \rightarrow x+0$, $b \rightarrow d-0$

$$C \geq |c_{x,1}| \int_{(x,d)} \frac{1}{v} d\mathcal{L}^1. \quad (15)$$

Положим $A := \{z \in I : c_{z,1} = 0\}$ и $\alpha := \sup A$ при $A \neq \emptyset$, $\alpha := 0$ при $A = \emptyset$. Из (14) для $x \in A$ имеем $C \geq \int_{(c,x)} \frac{1}{v} d\mathcal{L}^1$, и по теореме о монотонной сходимости вытекает

$$C \geq \int_{(c,\alpha)} \frac{1}{v} d\mathcal{L}^1, \quad (16)$$

что при $\alpha = d$ завершает доказательство теоремы.

Пусть $\alpha < d$ и существует $x \in (\alpha, d)$ такой, что $c_{x,1} \neq -1$. Из (14) и (15) следует, что

$$\int_I \frac{1}{v} d\mathcal{L}^1 \leq C \left[\frac{1}{|1 + c_{x,1}|} + \frac{1}{|c_{x,1}|} \right].$$

Пусть $\alpha < d$ и для любого $x \in (\alpha, d)$ выполнено $c_{x,1} = -1$. Фиксируем произвольное $x \in (\alpha, d)$. Из (15) имеем $C \geq \int_{(x,d)} \frac{1}{v} d\mathcal{L}^1$. Так как $x \in (\alpha, d)$ произвольное, то

$$C \geq \int_{(\alpha,d)} \frac{1}{v} d\mathcal{L}^1,$$

что вместе с (16) завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 1. Пусть $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $I := (c, d)$, функция $v \in C([c, d])$ неотрицательная. Для существования константы $C > 0$ такой, что для любой $f \in C_0^\infty(I)$ выполнено

$$\max_{y \in I} |f(y)| \leq C \max_{y \in I} v(y) (|f(y)| + |f'(y)|), \quad (17)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\frac{1}{v} \in L_1(I)$. При этом $C \leq \left\| \frac{1}{v} \right\|_{L_1(I)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Предположим, что существует $C > 0$ такая, что для любой $f \in C_0^\infty(I)$ выполнено (17). Положим $U := \{x \in I : v(x) < \frac{1}{2C}\}$. Так как $v \in C([c, d])$, то U — открытое подмножество I . Следовательно, существует представление $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ множества U в виде объединения

не более чем счетного числа непересекающихся интервалов I_j . Для $f \in C_0^\infty(I_j)$ выполнено

$$\max_{y \in I_j} |f(y)| \leq C \max_{y \in I_j} v(y)(|f(y)| + |f'(y)|) \leq \frac{1}{2} \max_{y \in I_j} |f(y)| + C \max_{y \in I_j} v(y)|f'(y)|.$$

Отсюда

$$\max_{y \in I_j} |f(y)| \leq 2C \max_{y \in I_j} v(y)|f'(y)|,$$

что по теореме 3 влечет $\frac{1}{v} \in L_1(I_j)$. Так как $v(x) \geq \frac{1}{2C}$ для $x \in I \setminus U$, то $\frac{1}{v} \in L_1(I)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Трибель Х. Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
2. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
3. Leoni G. A first course in Sobolev spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2009. (Grad. Stud. Math.; V. 105).
4. Fonseca I., Leoni G. Modern methods in the calculus of variations: L^p space. New York: Springer-Verl., 2007. (Springer Monogr. Math.).
5. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
6. Rudin W. Real and complex analysis. Third ed. New York: McGraw-Hill Book Co., 1987.

Поступила в редакцию 23 апреля 2020 г.

После доработки 23 апреля 2020 г.

Принята к публикации 17 июня 2020 г.

Прохоров Дмитрий Владимирович
Вычислительный центр ДВО РАН,
ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000
prohorov@as.khb.ru