J. Tang, B. Gao, J. Zhang, On the structure of chief factors of finite groups with $\mathbb{J}_p$ -supplemented subgroups, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2020, Volume 61, Number 6, 1411–1420

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.613>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.187.69

April 26, 2023, 16:56:27

УДК 512.542

О СТРУКТУРЕ ГЛАВНЫХ ФАКТОРОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С $\mathcal{M}_p$ -ДОБАВЛЯЕМЫМИ ПОДГРУППАМИ

Ц. Тан, Б. Гао, Ц. Чжан

Аннотация. Подгруппа K группы G называется $\mathcal{M}_p$ -добавляемой в G , если существует подгруппа B в G такая, что $G = KB$ и $TB < G$ для всякой максимальной подгруппы T в K такой, что $|K : T| = p^\alpha$. В статье исследуется структура G -главных факторов конечных групп нормальных подгрупп в G с использованием $\mathcal{M}_p$ -добавляемых подгрупп.

DOI 10.33048/smzh.2020.61.613

Ключевые слова: $\mathcal{M}_p$ -добавляемая подгруппа, композиционный фактор, главный фактор, p -модулярная подгруппа.

1. Введение

Все группы в статье предполагаются конечными. Большая часть обозначений стандартна, как в [1]. Пусть π — множество простых чисел и S_n — симметричная группа степени n . Пусть G — группа и $G \hookrightarrow S_n$ означает, что G изоморфна подгруппе в S_n .

Нетривиальная подгруппа H группы G называется $\mathcal{M}_\pi$ -добавляемой в G (см. [2]), если существует подгруппа B такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для всякой максимальной подгруппы H_1 в H такой, что $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$. Если $\pi = \{p\}$, то H называется $\mathcal{M}_p$ -добавляемой подгруппой. Если $\pi = \pi(G)$, то H — $\mathcal{M}$ -добавляемая подгруппа. В. С. Монахов и А. В. Шныпарков получили p -сверхразрешимость группы G в [2] с использованием $\mathcal{M}_p$ -добавляемой подгруппы, где p — наименьший простой делитель порядка группы G или $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, \dots, p_n\}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n$. В продолжение исследований В. С. Монахова и А. В. Шныпаркова в [3] изучалась p -сверхразрешимость с использованием $\mathcal{M}_p$ -добавляемых подгрупп заданного порядка. В [4] для простого числа 5 исследован композиционный фактор группы G с использованием $\mathcal{M}_5$ -добавляемых подгрупп данного порядка. В [5] была показана связь между p -сверхразрешимостью и p -модулярными подгруппами $O^p(G)$. В [6] изучалось влияние $\mathcal{M}_p$ -добавляемых подгрупп на $\mathcal{F}$ -гиперцентр группы.

Напомним важный результат В. С. Монахова и В. Н. Княгиной [7], который мотивировал наше исследование. С использованием результатов из [8] в [7] исследовано строение композиционных факторов конечных групп на основе рассмотрения дополняемости подгрупп простого порядка. А именно, в [7] доказана

Исследования поддержаны NSFC (грант # 11701223), Фондом естественных наук провинции Цзянсу (грант # BK20181451), Фондами фундаментальных исследований Китайского западного нормального университета (17E091, 18B032), Фондами университетских исследовательских проектов Синцзян-Уйгурского автономного района (грант # XJEDU2017M034).

Теорема А [7, теорема 1(2)]. Пусть G — не p -разрешимая группа и $p \in \pi(G)$. Если всякая подгруппа порядка p дополняема в G , то всякий неабелев pd -композиционный фактор A/B группы G изоморфен одной из следующих групп:

- (1) $A/B \cong A_p$, где $p \geq 5$;
- (2) $A/B \cong PSL(n, q)$, $n \geq 3$ простое, $(n, q-1)$ и $p = (q^n - 1)/(q - 1)$;
- (3) $A/B \cong PSL(2, 11)$ и $p = 11$, $A/B \cong PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- (4) $A/B \cong M_{23}$ и $p = 23$, $A/B \cong M_{11}$ и $p = 11$;
- (5) $A/B \cong PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ — простое число Ферма.

Следующий результат, основанный на теореме А, улучшает исследования, представленные в [2–4, 6].

Теорема В. Пусть G — группа и H — p -нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p -подгруппу P группы G , где p — простой делитель числа $|G|$. Предположим, что в H имеется подгруппа D со свойствами $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если всякая подгруппа E в H такая, что $|E| = |D|$, $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G , то всякий неабелев pd -главный фактор A/B группы G удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1) $A/B \cong A_p$, где $p \geq 5$;
- (2) $A/B \cong PSL(n, q)$, $n \geq 3$ простое, $(n, q-1)$ и $p = (q^n - 1)/(q - 1)$;
- (3) $A/B \cong PSL(2, 11)$ и $p = 11$, $A/B \cong PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- (4) $A/B \cong M_{23}$ и $p = 23$, $A/B \cong M_{11}$ и $p = 11$;
- (5) $A/B \cong PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ — простое число Ферма.

С другой стороны, для любого простого числа в [5] Гао использовал результаты Го и Айзекса [9] для получения результатов о взаимосвязи p -модулярных подгрупп $O^p(G)$ группы G . Например, имеет место следующая

Теорема С [5, теорема 3.1]. Пусть p — простой делитель числа $|G|$ и H — p -нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p -подгруппу P группы G . Если подгруппа H $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G , то группа G p -суперразрешима или $U = G$, где $U = O^p(G)$.

Для класса групп $\mathcal{F}$ в [10] введено важное понятие $\mathcal{F}\Phi$ -гиперцентра $Z_{\mathcal{F}\Phi}(G)$, тесно связанное с теорией насыщенных формаций, например, с классом всех p -сверхразрешимых групп $p\mathcal{U}$. Чтобы улучшить теорему В, мы исследуем главные факторы группы ниже их нормальных подгрупп с использованием $\mathcal{M}_p$ -добавляемых подгрупп. Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема D. Пусть E — нормальная подгруппа группы G и H — p -нильпотентная подгруппа в E , содержащая силовскую p -подгруппу P группы E , где p — простой делитель $|E|$. Если H $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G и $O^p(G) < G$, то либо $|P| = p$, либо $E \leq Z_{p\mathcal{U}\Phi}(G)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу теоремы А из условия $|P| = p$ также следует, что неабелевы pd -главные факторы группы G ниже E в теореме D изоморфны одному из типов (1)–(5) в теореме А.

2. Предварительные сведения

Приведем необходимые в дальнейшем известные результаты.

Лемма 2.1 [2, леммы 2, 3]. Пусть H — подгруппа группы G и p — простой делитель $|G|$. Предположим, что подгруппа H $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G . Имеют место следующие утверждения.

- (1) Если $H \leq M \leq G$, то H также $\mathcal{M}_p$ -добавляема в M .
- (2) Если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$, то подгруппа H/N $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G/N .
- (3) Если K — нормальная p' -подгруппа, то подгруппа HK/K $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G/K .

Лемма 2.2 [2, лемма 4]. Пусть H — $\mathcal{M}_p$ -добавляемая подгруппа группы G и B — $\mathcal{M}_p$ -добавление к H . Если H_1 — максимальная подгруппа в H и $\pi(H : H_1) = \{p\}$, то $|G : H_1B| = |H : H_1|$.

Лемма 2.3 [9, лемма 3.1]. Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$, где P циклическая. Предположим, что некоторая нетривиальная подгруппа группы P нормальна в G . Тогда группа G p -сверхразрешима.

Лемма 2.4 [11, лемма 2.8]. Пусть G — p -сверхразрешимая группа. Если $O_{p'}(G) = 1$, то G сверхразрешима.

Лемма 2.5 [12, предложение I.6.6]. Пусть G — группа и H — подгруппа в G . Если $|G : H| = n$, то $G/H_G \hookrightarrow S_n$.

Лемма 2.6 [13, теорема 1.8.17]. Пусть N — разрешимая нормальная подгруппа группы G . Если $N \cap \Phi(G) = 1$, то $F(N)$ — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп в G , содержащихся в N .

Лемма 2.7 [12, предложение IV.4.7]. Если P — силовская p -подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$ такая, что $P \cap N \leq \Phi(P)$, то N p -нильпотентна.

Лемма 2.8 [6, теорема 1]. Пусть E — p -разрешимая нормальная подгруппа группы G и H — p -нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p -подгруппу P группы E . Предположим, что в H имеется подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если всякая подгруппа T в H со свойством $|T| = |D|$ $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G , то $E/O_{p'}(E) \leq Z_{\mathcal{F}\Phi}(G/O_{p'}(E))$, где $\mathcal{F}$ — класс всех p -сверхразрешимых групп.

3. Доказательства теорем В и D

Теорема В является комбинацией приведенных ниже теорем 3.1 и 3.2.

Теорема 3.1. Пусть G — группа и H — p -нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p -подгруппу P в G , где p — простой делитель $|G|$. Допустим, что в H имеется подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если всякая подгруппа E в H со свойством $|E| = |D|$ $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G , то каждый неабелев pd -композиционный фактор A/B группы G удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1) $A/B \cong A_p$, где $p \geq 5$;
- (2) $A/B \cong PSL(n, q)$, $n \geq 3$ простое, $(n, q - 1)$ и $p = (q^n - 1)/(q - 1)$;
- (3) $A/B \cong PSL(2, 11)$ и $p = 11$, $A/B \cong PSL(2, 7)$ и $p = 7$;
- (4) $A/B \cong M_{23}$ и $p = 23$, $A/B \cong M_{11}$ и $p = 11$;

(5) $A/B \cong PSL(2, 2^t)$ и $p = 2^t + 1 > 3$ — простое число Ферма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Очевидно, G — неабелева группа и $O_{p'}(G) = 1$ в силу леммы 2.1(3). Рассмотрим следующие шаги.

(1) G не является неабелевой простой группой.

Предположим, что E — подгруппа в H со свойством $|E| = |D|$. В силу предположений существует подгруппа K такая, что $G = EK$ и $E_i K < G$ для всякой максимальной подгруппы E_i в E такой, что $|E : E_i| = p$. Кроме того, $|G : E_i K| = |E : E_i| = p$ в силу леммы 2.2. Согласно лемме 2.5 $G/(E_i K)_G \hookrightarrow S_p$. Так как группа G простая, имеем $G \hookrightarrow S_p$ и $|P| = p$. Таким образом, всякая подгруппа порядка p дополняема в G . Поэтому любой неабелев pd -композиционный фактор A/B группы G удовлетворяет одному из условий теоремы 3.1 по теореме А; противоречие.

(2) $|N_p| = p$ и $N = N_p N_{p'}$ для всякой минимальной нормальной подгруппы N группы G .

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G . Если $|N_p| \geq |D_p|$, то выберем подгруппу E в H такую, что $|E| = |D|$ и $E_p \leq N_p$. В силу предположений найдется подгруппа K такая, что $G = EK$ и $E_i K < G$ для любой максимальной подгруппы E_i группы E со свойством $|E : E_i| = p$. Более того,

$$G = EK = E_p H_{p'} K = E_p (E_i K) = N(E_i K).$$

Так как $G/(E_i K)_G \hookrightarrow S_p$, имеем

$$N \cong N(E_i K)_G / (E_i K)_G \leq G / (E_i K)_G \hookrightarrow S_p.$$

Тогда $|N_p| = |D_p| = p$, т. е. каждая подгруппа порядка p дополняема в G . Поэтому всякий неабелев pd -композиционный фактор A/B группы G удовлетворяет одному из условий теоремы 3.1 в силу теоремы А; противоречие.

Если $|N_p| < |D_p|$, то выберем подгруппу X в H такую, что $|X| = |D|$ и $N_p \leq X_p$. В силу предположений существует подгруппа K такая, что $G = XK$ и $X_i K < G$ для любой максимальной подгруппы X_i в X такой, что $|X : X_i| = p$. Рассмотрим группу NX . Если $N_p \leq \Phi(X_p)$, то группа N p -нильпотентна в силу леммы 2.7. Поскольку $O_{p'}(G) = 1$, то N — p -группа и $N \leq \Phi(G)$. В силу минимальности G любой неабелев композиционный фактор группы G/N , а также G удовлетворяют одному из условий теоремы 3.1; противоречие. Поэтому $N_p \not\leq \Phi(X_p)$. Выберем максимальную подгруппу M в X_p такую, что $X_p = N_p M$. Кроме того,

$$G = XK = X_p H_{p'} K = N_p M H_{p'} K.$$

Заметим, что $M H_{p'} = X_1$. Очевидно, что X_1 — максимальная подгруппа в X такая, что $|X : X_1| = p$, и тогда $G = N_p X_1 K = N X_1 K$. Так как

$$|N : N \cap X_1 K| = |G : X_1 K| = |X : X_1| = p$$

и $G/(X_i K)_G \hookrightarrow S_p$, имеем $|N_p| = p$ и $N = N_p N_{p'}$.

(3) **Заключительное противоречие.**

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G . Рассмотрим группу G/N . Ясно, что HN/N — p -нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p -подгруппу PN/N группы G/N . Предположим, что T/N — подгруппа в HN/N

порядка $|D|/p$. Тогда $T/N = EN/N$, где E — подгруппа в H такая, что $|E| = |D|$ и $N_p \leq T_p \leq E_p$. В силу предположений найдется подгруппа K в G такая, что $G = EK$ и $E_i K < G$ для любой максимальной подгруппы E_i в E такой, что $|E : E_i| = p$ и $|G : E_i K| = |E : E_i| = p$. Очевидно, что

$$G/N = EK/N = (T/N)(KN/N).$$

Для всякой максимальной подгруппы T_i/N в T/N такой, что $|T/N : T_i/N| = p$, имеем $T_i/N = E_i N/N$, где E_i — некоторая максимальная подгруппа группы E . Тогда

$$|(G/N) : (T_i/N)(KN/N)| = |G : T_i K N| = |G : E_i N K N| = |G : E_i K N| = p$$

и $(T_i/N)(KN/N) < G/N$. Значит, G/N удовлетворяет предположениям и каждый неабелев pd -композиционный фактор группы G/N удовлетворяет одному из условий теоремы 3.1 в силу выбора G . Если группа N разрешима, то любой неабелев pd -композиционный фактор группы G удовлетворяет одному из условий теоремы 3.1; противоречие. Если N неразрешима, то $|N_p| = p$ и потому N — простая группа. Применение теоремы А к группе N дает заключительное противоречие, которое завершает доказательство.

Теорема 3.2. Пусть G — группа и H — p -нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую p -подгруппу P группы G , где p — простой делитель $|G|$. Предположим, что в H имеется подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если всякая подгруппа E в H со свойством $|E| = |D|$ $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G , то каждый главный фактор A/B группы G удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1) $A/B \leq \Phi(G/B)$;
- (2) A/B — p' -группа;
- (3) $|A/B|_p = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть $E_1, E_2, \dots, E_n$ — все подгруппы в H такие, что $|E_i| = |D|$ ($i = 1, 2, \dots, n$). В силу предположений существует подгруппа K_i в G такая, что $G = E_i K_i$ и $E_{ij} K_i < G$ для любой максимальной подгруппы E_{ij} в E_i такой, что $|E_i : E_{ij}| = p$. По лемме 2.2 $|G : E_{ij} K_i| = |E_i : E_{ij}| = p$. Поэтому $G/(E_{ij} K_i)_G \hookrightarrow S_p$. Положим $\delta = \{E_{ij} K_i < G \mid i = 1, 2, \dots, n\}$.

Пусть $T = \bigcap (E_{ij} K_i)_G$. Утверждается, что $T \neq 1$. Иначе $G \cong G/T$ изоморфна подгруппе группы $S_p \times \dots \times S_p$. Покажем, что всякий главный фактор A/B группы G удовлетворяет неравенству $|A/B|_p \leq p$, и в результате получим противоречие. Пусть $G \hookrightarrow S_p^d$ и $d = n$, где d — число сомножителей в прямом произведении S_p . Существует подгруппа $G_1 \leq S_p^1 \times S_p^2 \times \dots \times S_p^n$ такая, что $G \cong G_1$. Используем индукцию по d . Если $d = 2$, то $G_1 \leq S_p^1 \times S_p^2$. Так как $G_1 \cap S_p^1 \trianglelefteq G_1$, $1 < G_1 \cap S_p^1 < G_1$ — нормальный ряд, то

$$G_1/(G_1 \cap S_p^1) \cong G_1 S_p^1 / S_p^1 < (S_p^1 \times S_p^2) / S_p^1 \cong S_p^2.$$

Ясно, что для всякого главного фактора A/B группы G_1 в $G_1/(G_1 \cap S_p^1)$ выполнено неравенство $|A/B|_p \leq p$. Поскольку $G_1 \cap S_p^1 < S_p^1$, каждый главный фактор A/B группы G_1 в $G_1 \cap S_p^1$ удовлетворяет неравенству $|A/B|_p \leq p$. Тогда для каждого главного фактора A/B группы G_1 выполнено $|A/B|_p \leq p$. Предположим, что каждый главный фактор A/B группы G_1 удовлетворяет

неравенству $|A/B|_p \leq p$ при $d \leq n-1$. Рассмотрим случай $d = n$. Так как $1 < G_1 \cap S_p^n < G_1$ — нормальный ряд, имеем

$$G_1/(G_1 \cap S_p^n) \cong G_1 S_p^n / S_p^n \leq (S_p^1 \times S_p^2 \times \cdots \times S_p^n) / S_p^n \cong S_p^1 \times S_p^2 \times \cdots \times S_p^{n-1}.$$

Всякий главный фактор A/B группы $G_1/(G_1 \cap S_p^n)$ удовлетворяет неравенству $|A/B|_p \leq p$ в силу индукции. Существует главный ряд группы $G_1/(G_1 \cap S_p^n)$ такой, что

$$(G_1 \cap S_p^n)/(G_1 \cap S_p^n) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq R_2/(G_1 \cap S_p^n) \trianglelefteq R_1/(G_1 \cap S_p^n) \trianglelefteq G_1/(G_1 \cap S_p^n).$$

Так как $R_i \trianglelefteq G_1$ и

$$|R_i/R_{i+1}|_p = |(R_i/(G_1 \cap S_p^n))/(R_{i+1}/(G_1 \cap S_p^n))|_p \leq p,$$

получаем главный ряд группы G_1 такой, что

$$1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq (G_1 \cap S_p^n) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq R_2 \leq R_1 \trianglelefteq G_1.$$

Ясно, что любой главный фактор A/B группы G_1 удовлетворяет неравенству $|A/B|_p \leq p$.

Если $|T_p| \geq |D_p|$, то выберем подгруппу $E \in \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ такую, что $E_p \leq T_p$. В силу предположений подгруппа E $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G и найдется подгруппа K в G такая, что $G = EK$ и $E_i K < G$ для всякой максимальной подгруппы E_i в E такой, что $|E : E_i| = p$. Поэтому $E_i K \in \delta$ и

$$G = E_p E_{p'} K = T E_i K = E_i K < G;$$

противоречие.

Если $|T_p| < |D_p|$, то найдется подгруппа $N \in \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ такая, что $T_p < N_p$. По предположению подгруппа N $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G и найдется подгруппа K_2 в G такая, что $G = N K_2$ и $N_i K_2 < G$ для всякой максимальной подгруппы N_i в N со свойством $|N : N_i| = p$. Утверждается, что $T_p \leq \Phi(P)$. Иначе существует максимальная подгруппа N_1 в N_p такая, что $N_p = T_p N_1$. Значит,

$$G = N K_2 = T_p N_1 N_{p'} K_2 = N_1 N_{p'} K_2 < G;$$

противоречие. Рассматривая подгруппу TN группы G , получаем, что $T_p = N_p \cap T \leq \Phi(N_p)$ и потому группа T p -нильпотентна по лемме 2.7. Если $T_{p'} \neq 1$, то теорема верна для $G/T_{p'}$ по лемме 2.1(3) и выбору G . Поэтому T — p -группа и $T = T_p \leq \Phi(N_p)$ влечет $T \leq \Phi(G)$. В силу леммы 2.1(2) и выбора группы G теорема верна для G/T , а также для G ; противоречие.

Заключительное противоречие завершает доказательство.

В силу теорем 3.1 и 3.2 приходим к теореме В, и ясно, что основная теорема из [14] является следствием теоремы В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ D. Допустим, что утверждение неверно, и выберем в качестве (G, E) минимальный контрпример, для которого $|G||E|$ минимально.

$$(1) O_{p'}(E) = 1.$$

Если $O_{p'}(E) \neq 1$, то рассмотрим $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$. Очевидно,

$$O^p(G/O_{p'}(E)) = O^p(G)/O_{p'}(E) < G/O_{p'}(E).$$

В силу леммы 2.1(3) подгруппа $HO_{p'}(E)/O_{p'}(E)$ $\mathcal{M}_p$ -добавляема в $G/O_{p'}(E)$, следовательно, предположения выполняются для $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$. Значит, теорема верна для (G, E) ; противоречие.

(2) Если $O_p(E) \neq 1$, то $O_p(E) \cap \Phi(G) = 1$.

Допустим, что $O_p(E) \cap \Phi(G) \neq 1$, и выберем минимальную нормальную подгруппу N в G , содержащуюся в $O_p(E) \cap \Phi(G)$. Рассмотрим $(G/N, E/N)$. Если

$$O^p(G/N) = O^p(G)N/N = G/N,$$

то $G = O^p(G)N = O^p(G)$; противоречие. Значит, $O^p(G/N) < G/N$ и подгруппа H/N $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G/N в силу леммы 2.1(2). Более того, теорема верна для $(G/N, E/N)$. Если $|P/N| = p$, то $|P| > p$, и можно также утверждать, что группа P циклическая. Иначе найдется максимальная подгруппа P_1 в P такая, что $P = NP_1$. Так как подгруппа H $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G , найдется подгруппа K в G такая, что $G = HK$ и $H_iK < G$ для всякой максимальной подгруппы H_i в H со свойством $|H : H_i| = p$. Стало быть,

$$G = NP_1H_{p'}K = NH_iK = H_iK < G;$$

противоречие. По лемме 2.3 группа E p -сверхразрешима. Согласно лемме 2.8 каждый главный фактор A/B группы G ниже E удовлетворяет неравенству $A/B \leq \Phi(G/B)$ или A/B — p' -группа или $|A/B| = p$; противоречие. Если каждый главный фактор группы G/N ниже E/N удовлетворяет условиям теоремы, то это верно для главных факторов группы G ниже E , так как $N \leq \Phi(G)$; противоречие.

(3) $O_p(E) = 1$.

Действительно, в ином случае в силу леммы 2.6 $O_p(E) = L_1 \times \dots \times L_t$, где $L_1, \dots, L_t$ — минимальные нормальные подгруппы в G , содержащиеся в $O_p(E)$. Для любой $L \in \{L_1, \dots, L_t\}$ рассмотрим $(G/L, E/L)$. Так как $L \not\leq \Phi(G)$, то $L \not\leq \Phi(P)$ и существует максимальная подгруппа P_1 группы P такая, что $P = LP_1$. Согласно предположениям найдется подгруппа K в G такая, что $G = HK$ и $H_iK < G$ для любой максимальной подгруппы H_i в H со свойством $|H : H_i| = p$. По лемме 2.2

$$|G : H_iK| = |H : H_i| = p.$$

Значит,

$$G = LP_1H_{p'}K = LH_1K, \quad |L| = |G : H_1K| = p.$$

Если

$$O^p(G/L) = O^p(G)L/L = G/L,$$

то $G = O^p(G)L$ и $G = O^p(G)E$. Следовательно,

$$|G : O^p(G)| = |E : E \cap O^p(G)| = p.$$

Так как $O^p(G) < G$, получаем $O^p(E) < E$. В силу теоремы С группа E p -сверхразрешима. Более того, E p -разрешима, и в силу леммы 2.8 теорема верна для (G, E) ; противоречие. Поэтому $O^p(G/L) < G/L$ и подгруппа H/L $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G/L по лемме 2.1(2). Стало быть, теорема верна для $(G/L, E/L)$. Если $|P/L| = p$, то $|P| = p^2$ и P — элементарная абелева p -группа. Очевидно, P не нормальна в E и $P = L \times P_1$. Далее, $G/(H_1K)_G \hookrightarrow S_p$ по лемме 2.5. Если $(H_1K)_G = 1$, то $|P| = p$; противоречие. Если $H(H_1K)_G = G$, то группа

$$E/(E \cap (H_1K)_G) \cong E(H_1K)_G/(H_1K)_G = G/(H_1K)_G$$

p -нильпотентна. Очевидно, $E \cap (H_1 K)_G \neq 1$. Тем самым существует нормальное p -дополнение $E_1 / (E \cap (H_1 K)_G)$ подгруппы $E / (E \cap (H_1 K)_G)$ такое, что

$$|E / (E \cap (H_1 K)_G) : E_1 / (E \cap (H_1 K)_G)| = |E : E_1| = p.$$

В силу теоремы С и леммы 2.8 получаем противоречие. Поэтому $H(H_1 K)_G < G$. Заметим, что $G_1 = H(H_1 K)_G$ и

$$E_1 = E \cap G_1 = E \cap H(H_1 K)_G = H(E \cap (H_1 K)_G).$$

Очевидно, $E_1 \leq G_1 < G$ и группа $E_1 / (E_1 \cap (H_1 K)_G)$ p -нильпотентна. Если $E_1 \cap (H_1 K)_G = 1$, то $|E_p| = p$; противоречие. Если $E_1 \cap (H_1 K)_G \neq 1$, то существует нормальное p -дополнение $E_2 / (E_1 \cap (H_1 K)_G)$ группы $E_1 / (E_1 \cap (H_1 K)_G)$ такое, что

$$|E_1 / (E_1 \cap (H_1 K)_G) : E_2 / (E_1 \cap (H_1 K)_G)| = |E_1 : E_2| = p.$$

В силу теоремы С группа E_1 p -сверхразрешима. Ввиду соотношения (1) и леммы 2.4 группа $E \cap (H_1 K)_G$ сверхразрешима и

$$1 \neq (E \cap (H_1 K)_G)_p \leq E \cap (H_1 K)_G \leq G.$$

Значит, $P_1 \triangleleft E$ и P обладает этим свойством; противоречие.

(4) Заключительное противоречие.

В силу предположений найдется подгруппа K в G такая, что $G = HK$ и $H_i K < G$ для любой максимальной подгруппы H_i в H со свойством $|H : H_i| = p$.

Если существует максимальная подгруппа H_1 в H такая, что $(H_1 K)_G = 1$, то $G \cong G / (H_1 K)_G \hookrightarrow S_p$. Значит, $|P| = p$; противоречие.

Если $H(H_i K)_G = G$ для каждой $(H_i K)_G$, то группа $G / (H_i K)_G \hookrightarrow S_p$ p -нильпотентна и группа

$$E / (E \cap (H_i K)_G) \cong E(H_i K)_G / (H_i K)_G = G / (H_i K)_G$$

p -нильпотентна. Очевидно, $E \cap (H_i K)_G \neq 1$. Поэтому существует нормальное p -дополнение $E_1 / (E \cap (H_i K)_G)$ группы $E / (E \cap (H_i K)_G)$ такое, что

$$|E / (E \cap (H_i K)_G) : E_1 / (E \cap (H_i K)_G)| = |E : E_1| = p.$$

В силу теоремы С и леммы 2.8 получаем противоречие.

Стало быть, найдется некоторая максимальная подгруппа H_2 в H такая, что $H(H_2 K)_G < G$. Положим $G_1 = H(H_2 K)_G$ и

$$E_1 = E \cap G_1 = E \cap H(H_2 K)_G = H(E \cap (H_2 K)_G).$$

Очевидно, $E_1 \leq G_1 < G$ и группа $E_1 / (E_1 \cap (H_2 K)_G)$ p -нильпотентна. Если $E_1 \cap (H_2 K)_G = 1$, то $|E_p| = p$; противоречие. Если $E_1 \cap (H_2 K)_G \neq 1$, то найдется нормальное p -дополнение $E_2 / (E_1 \cap (H_2 K)_G)$ подгруппы $E_1 / (E_1 \cap (H_2 K)_G)$ такое, что

$$|E_1 / (E_1 \cap (H_2 K)_G) : E_2 / (E_1 \cap (H_2 K)_G)| = |E_1 : E_2| = p.$$

В силу теоремы С получаем, что E_1 p -сверхразрешима. Ввиду леммы 2.4 группа $E \cap (H_2 K)_G$ сверхразрешима. Поэтому $1 \neq (E \cap (H_2 K)_G)_p \leq E \cap (H_2 K)_G \leq G$, что противоречит (3).

Заключительное противоречие завершает доказательство.

4. Приложение

Теорема 4.1. Пусть E — нормальная подгруппа группы G и H — p -нильпотентная подгруппа в E , содержащая силовскую p -подгруппу P группы E , где p — простой делитель $|E|$. Предположим, что в H имеется подгруппа D такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если любая подгруппа K в H со свойством $|K| = |D|$ $\mathcal{M}_p$ -добавляема в G , то всякий главный фактор A/B группы G ниже E удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1) $A/B \leq \Phi(G/B)$;
- (2) A/B — p' -группа;
- (3) $|A/B|_p = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и выберем в качестве (G, E) минимальный контрпример, для которого $|G||E|$ минимально.

Пусть K — подгруппа в H со свойством $|K| = |D|$. В силу предположений найдется подгруппа S группы G такая, что $G = KS$ и $K_i S < G$ для любой максимальной подгруппы K_i в K такой, что $|K : K_i| = p$. Имеем $|G : K_i S| = |K : K_i| = p$ по лемме 2.2. Положим $\delta = \{K_i S < G \mid K \leq H \text{ и } |K| = |D|\}$; существует $S \leq G$ такая, что $G = KS$ и $K_i S < G$ для любой максимальной подгруппы K_i в K такой, что $|K : K_i| = p$. Пусть $T = \cap (K_i S)_G$. Если $T = 1$, то $G \cong G/T$ изоморфна $S_p \times \dots \times S_p$ по лемме 2.5. Значит, каждый главный фактор A/B группы G ниже E удовлетворяет тому же свойству; противоречие. Поэтому $T \neq 1$. Если $E = G$, то каждый главный фактор A/B группы G ниже E удовлетворяет неравенству $A/B \leq \Phi(G/B)$ или A/B — p' -группа, или $|A/B|_p = p$ в силу теоремы 3.2; противоречие. Значит, $E < G$. Более того, можно предполагать, что $E \not\leq T$. Иначе

$$G = KS = EK_i S = TK_i S = K_i S < G;$$

противоречие. Существует максимальная подгруппа K_i в K такая, что $E \not\leq (K_i S)_G$. Стало быть, группа

$$E/E \cap (K_i S)_G \cong E(K_i S)_G / (K_i S)_G \leq G / (K_i S)_G$$

изоморфна подгруппе S_p по лемме 2.5, где $E \cap (K_i S)_G \neq 1$. Пусть $E_1 = E \cap (K_i S)_G$. Очевидно, $E_1 \leq E \not\leq T$ и существует максимальная подгруппа K_j в K такая, что $E_1 \not\leq (K_j S)_G$. Значит, группа

$$E_1/E_1 \cap (K_j S)_G \cong E_1(K_j S)_G / (K_j S)_G \leq G / (K_j S)_G$$

изоморфна подгруппе группы S_p в силу леммы 2.5. Если $E_1 \cap (K_j S)_G = 1$, то группа E_1 изоморфна подгруппе в S_p ; Значит, каждый главный фактор A/B группы G ниже E тоже обладает этим свойством; противоречие. Если $E_1 \cap (K_j S)_G \neq 1$, то повторим процесс и получим ряд из нормальных подгрупп группы G ниже E :

$$1 \trianglelefteq E_{s+1} \trianglelefteq E_s \trianglelefteq \dots \trianglelefteq E_1 \trianglelefteq E_0 = E,$$

такой, что $|E_{i+1}| < |E_i|$ и группа E_i/E_{i+1} изоморфна подгруппе в S_p , $i = 0, 1, \dots, s$. Значит, всякий главный фактор A/B группы G ниже E обладает этим свойством; противоречие.

Заключительное противоречие завершает доказательство.

Благодарность. Авторы благодарят рецензентов и редакторов за предложения, способствующие улучшению оригинальной версии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Beijing; New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. Монахов В. С., Шныпарков А. В. О p -сверхразрешимости конечной группы с μ -добавляемой силовой p -подгруппой // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 858–865.
3. Tang J., Miao L. On $\mathcal{M}_p$ -supplemented subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2013. V. 41, N 5. P. 1913–1922.
4. Гао Б., Танг Ц., Мяо Л. О $\mathcal{M}_p$ -добавляемых подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 25–32.
5. Гао Б., Мяо Л., Тан Ц. Влияние $\mathcal{M}$ -добавляемых подгрупп на структуру p -модулярных подгрупп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 779–784.
6. Tang J., Zhang J., Miao L. Some results on $\mathcal{F}\Phi$ -hypercentre of finite groups // Math. Notes. 2019. V. 105, N 6. P. 888–893.
7. Monakhov V., Kniagina V. Finite groups with complemented subgroups of prime orders // J. Group Theory. 2015. V. 18. P. 905–912.
8. Guralnick R. Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81. P. 304–311.
9. Guo Y., Isaacs I. Conditions on p -subgroups implying p -nilpotence or p -supersolvability // Arch. Math. 2015. V. 105, N 3. P. 215–222.
10. Shemetkov L., Skiba A. On the $\mathcal{X}\Phi$ -hypercentre of finite groups // J. Algebra. 2009. V. 322. P. 2106–2117.
11. Guo W., Shum K., Skiba A. Criteria of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. V. 68, N 3–4. P. 433–449.
12. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
13. Guo W. The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press – Kluwer Acad. Publ., 2000.
14. Miao L., Zhang J. On a class of non-solvable groups // J. Algebra. 2018. V. 496. P. 1–10.

Поступила в редакцию 5 октября 2019

После доработки 25 декабря 2019

Принята к публикации 19 февраля 2020

Juping Tang (Тан Цзюйпинь)
Wuxi Institute of Technology
Wuxi 214121, People's Republic of China

Baijun Gao (Corresponding author) (Гао Байцзюнь)
School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University
Yining 835000, People's Republic of China
dqgbj2008@163.com

Jia Zhang (Чжан Цзя)
School of Mathematics and Information,
China West Normal University
Nanchong 637009, People's Republic of China