Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ширяев, О мартингалльных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением, *Совр. пробл. матем.*, 2007, выпуск 8, 3–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm11>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:04:02

Содержание

§ 1. Введение. Вспомогательные результаты	5
§ 2. Свойства момента остановки $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}, a > 0$	23
§ 3. Свойства момента остановки $\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\}, a > 0$	27
§ 4. Свойства момента остановки $\tau_{ab} = \inf\{t \geq 0 : B_t - bt \geq a\}, a > 0$	31
§ 5. Свойства момента остановки $\sigma_{ab} = \inf\{t \geq 0 : B_t - bt \geq a\}, a > 0$	38
§ 6. О распределении $\sup B^\mu$ и $\sup B^\mu $ для броуновского движения B^μ со сносом	41
§ 7. О распределении $\sup \hat{B}$ и $\sup \hat{B} $ для броуновского мо- ста $\hat{B}$. Критерии Колмогорова и Смирнова	46
§ 8. О фундаментальных тождествах Вальда для броунов- ского движения	53
§ 9. Свойства момента остановки $\rho_c = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq -a + c\sqrt{t+b}\}, \text{ где } b \geq 0, a > c\sqrt{b}$	57
§ 10. Свойства момента остановки $\delta_c = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq c\sqrt{t+b}\}, b > 0$	59
§ 11. Свойства моментов остановки $\tau_{\geq b}^\mu = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu \geq b\}, \tau_{\leq a}^\mu = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu \leq a\}$ и $\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu \wedge \tau_{\geq b}^\mu$, где $a < 0 < b$	61
§ 12. Свойства момента остановки $\tau^\mu(H) = \inf\{t \geq 0 : \max_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu \geq H\}$ (связанного с падением на величину $H, H > 0$)	65
§ 13. Свойства момента остановки $\rho_a^{(3)} = \inf\{t \geq 0 : R_t^{(3)}(B) = a\}, a > 0$, где $R^{(3)}(B)$ – трехмерный процесс Бесселя $(R^{(3)}(B) = B + L(B))$	71
Список литературы	76

§ 1. Введение. Вспомогательные результаты

Основная цель настоящего издания, представленного в форме лекций, состоит в изложении мартингалльных методов в задачах, связанных с пересечением границ броуновским движением и броуновским движением со сносом.

Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение ($E B_t = 0$, $E B_t^2 = t$), заданное на некотором фильтрованном вероятностном пространстве. Рассмотрим моменты остановки вида

$$\tau_g = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq g(t)\}, \quad \bar{\tau}_g = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq g(t)\}, \quad \dots,$$

где $g = g(t)$, $t \geq 0$, – некоторые границы.

Мы будем интересоваться описанием свойств распределений как моментов $\tau_g, \bar{\tau}_g, \dots$, так и других характеристик (типа $\sup B$, $\sup |B|, \dots$) броуновского движения, броуновского движения со сносом и броуновского моста.

Полезно отметить, что применяемые нами методы основаны, в сущности, лишь только на следующих четырех общих результатах:

- А. Теорема о преобразовании свободного выбора, называемая также
  - OS-теоремой (от англ. *optional sampling theorem*),
  - теоремой об остановке,
  - теоремой об опциональной остановке,
  - теоремой о сохранении свойства мартингалльности и субмартингалльности при замене времени на случайный момент;
- В. Принцип отражения;
- С. Теорема Гирсанова;
- Д. Теорема Леви (о совместном распределении B и $\sup B$) и ее обобщение.

В связи в этом представляется целесообразным напомнить эти классические результаты теории случайных процессов, приводя и их доказательства.

А. Теорема о преобразовании свободного выбора. Дадим сначала формулировку и доказательство теоремы о преобразовании свободного выбора в случае *дискретного времени* (см.

также [1], [2]). Затем мы сформулируем и докажем одну ее версию для случая непрерывного времени (см. также [3]).

1. Случай дискретного времени.

а) Пусть $X = (X_n)_{n \geq 0}$ – субмартингал, заданный на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P})$, τ и σ – два конечных ($\mathbb{P}$ -н.н.) момента остановки таких, что $\mathbb{E} X_\sigma$ и $\mathbb{E} X_\tau$ определены (например, $\mathbb{E} |X_\sigma| < \infty$, $\mathbb{E} |X_\tau| < \infty$). Предположим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} [X_m^+ I(\tau > m)] = 0. \quad (1.1)$$

Тогда $\mathbb{P}$ -н.н.

$$\boxed{\mathbb{E} (X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_{\tau \wedge \sigma}}, \quad (1.2)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbb{E} (X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma \quad \text{на } \{\tau \geq \sigma\}, \quad \mathbb{P}\text{-н.н.} \quad (1.3)$$

б) Пусть $M = (M_n)_{n \geq 0}$ – мартингал, τ и σ – конечные ($\mathbb{P}$ -н.н.) моменты остановки такие, что $\mathbb{E} M_\sigma$ и $\mathbb{E} M_\tau$ определены (например, $\mathbb{E} |M_\sigma| < \infty$, $\mathbb{E} |M_\tau| < \infty$). Предположим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|M_m| I(\tau > m)] = 0. \quad (1.4)$$

Тогда $\mathbb{P}$ -н.н.

$$\boxed{\mathbb{E} (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}}, \quad (1.5)$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbb{E} (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma \quad \text{на } \{\tau \geq \sigma\}, \quad \mathbb{P}\text{-н.н.} \quad (1.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. а). Нам надо доказать, что для любого множества $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \tau \geq \sigma) \geq \mathbb{E} X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma). \quad (1.7)$$

Для этого достаточно установить, что при любом $n \geq 0$

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \tau \geq \sigma, \sigma = n) \geq \mathbb{E} X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma, \sigma = n), \quad (1.8)$$

т.е. что для $B = A \cap \{\sigma = n\}$

$$\mathbb{E} X_\tau I(B, \tau \geq n) \geq \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n). \quad (1.9)$$

Итерациями по n получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) &= \mathbb{E} X_n I(B, \tau = n) + \mathbb{E} X_n I(B, \tau > n) \\ &\leq \mathbb{E} X_n I(B, \tau = n) + \mathbb{E} [\mathbb{E} (X_{n+1} | \mathcal{F}_n) I(B, \tau > n)] \\ &= \mathbb{E} X_n I(B, \tau = n) + \mathbb{E} X_{n+1} I(B, \tau \geq n+1) \\ &= \mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq n+1) + \mathbb{E} X_{n+1} I(B, \tau > n+1) \\ &\leq \mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq n+1) + \mathbb{E} X_{n+2} I(B, \tau \geq n+2) \\ &\leq \dots \leq \mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq m) + \mathbb{E} X_m I(B, \tau > m) \end{aligned} \quad (1.10)$$

для $m \geq n$. Следовательно,

$$\mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq m) \geq \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) - \mathbb{E} X_m I(B, \tau > m). \quad (1.11)$$

Мы предположили, что $\mathbb{E} X_\tau$ определено. Отсюда следует, что функция множеств $Q(C) = \mathbb{E} X_\tau I(C)$, $C \in \mathcal{F}$, счетно-аддитивна, и, значит, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_\tau I(B, n \leq \tau \leq m)$ существует. Тогда из (1.11) и (1.1), переходя к пределу по $m \rightarrow \infty$, находим, что для конечных τ

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_\tau I(B, \tau \geq n) &\geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} [\mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) - \mathbb{E} X_m I(B, \tau > m)] \\ &= \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) - \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_m I(B, \tau > m) \\ &\geq \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n) - \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E} X_m^+ I(B, \tau > m) \\ &= \mathbb{E} X_n I(B, \tau \geq n), \end{aligned}$$

или

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \sigma = n, \tau \geq n) \geq \mathbb{E} X_n I(A, \sigma = n, \tau \geq n),$$

или

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \tau \geq \sigma, \sigma = n) \geq \mathbb{E} X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma, \sigma = n).$$

Отсюда для любого $k \geq 0$

$$\mathbb{E} X_\tau I(A, \tau \geq \sigma, \sigma \leq k) \geq \mathbb{E} X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma, \sigma \leq k). \quad (1.12)$$

По предположению, $P(\sigma < \infty) = 1$. Поэтому, переходя в (1.12) к пределу по $k \rightarrow \infty$ и учитывая, что математические ожидания $E X_\tau$ и $E X_\sigma$ определены, получаем неравенство

$$E X_\tau I(A, \tau \geq \sigma) \geq E X_\sigma I(A, \tau \geq \sigma),$$

которое в точности совпадает с (1.7), откуда и следует (1.2) (и (1.3)). $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. б). Пусть $M = (M_n)_{n \geq 0}$ – мартингал, удовлетворяющий условию (1.4), что дает

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E [M_m^+ I(\tau > m)] = 0 \quad (1.13a)$$

и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E [M_m^- I(\tau > m)] = 0. \quad (1.13b)$$

Применяя теорему о преобразовании свободного выбора из п. а) к субмартингалам $X_n = M_n$ и $X_n = -M_n$, $n \geq 0$, для которых $X_n^+ = M_n^+$ и $X_n^- = M_n^-$, находим, что

$$E (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq M_{\tau \wedge \sigma}, \quad (1.14)$$

а также

$$E (-M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq -M_{\tau \wedge \sigma}, \quad (1.15)$$

т.е.

$$E (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \leq M_{\tau \wedge \sigma}. \quad (1.16)$$

Из (1.14) и (1.16) получаем равенство (Р-п.н.)

$$E (M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}. \quad \square \quad (1.17)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для некоторого конечного числа T выполнено условие $P(\tau \leq T) = 1$, то $E(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_{\tau \wedge \sigma}$ в случае субмартингалов и $E(M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}$ в случае мартингалов.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть семейства случайных величин $\{X_n^+, n \geq 0\}$ (в случае субмартингалов) или $\{|M_n|, n \geq 0\}$ (в случае мартингалов) равномерно интегрируемы, т.е.

$$\sup_n E [X_n^+ I(X_n^+ > c)] \rightarrow 0, \quad \sup_n E [|M_n| I(|M_n| > c)] \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty.$$

Тогда выполнены условия (1.1) и (1.4) и (в предположении, что $E X_\sigma$, $E X_\tau$ и $E M_\sigma$, $E M_\tau$ определены) мы получаем утверждения (1.2) и (1.5). В частности, если $|X_n| \leq c$ для всех $n \geq 0$ и $|M_n| \leq c$ для всех $n \geq 0$, то свойства (1.2), (1.5) выполнены.

2. Случай непрерывного времени. В этом случае мы сформулируем и докажем только утверждения типа (1.2) и (1.5), и не в общих предположениях вида (1.1) и (1.4), а лишь при условиях, аналогичных сформулированным выше в следствиях 1 и 2.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство с непрерывной справа фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (т.е. $\mathcal{F}_t^+ \equiv \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_t$ для любого $t \geq 0$), пополненной множествами $\mathbb{P}$ -меры нуль из $\mathcal{F}$.

Все случайные процессы $X = (X_t)_{t \geq 0}$, которые мы будем рассматривать на $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, предполагаются согласованными с $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ (т.е. X_t является $\mathcal{F}_t$ -измеримым для любого $t \geq 0$) и имеющими непрерывные справа траектории.

α) Пусть $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – субмартингал, а σ и τ – два момента остановки, причем момент τ ограничен ($\tau \leq T$). Тогда случайная величина X_τ интегрируема и $\mathbb{P}$ -п.н.

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_{\tau \wedge \sigma}, \quad (1.18)$$

где $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.

Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0}$ – мартингал, а σ и τ – два момента остановки, причем τ ограничен ($\tau \leq T$). Тогда случайная величина M_τ интегрируема и $\mathbb{P}$ -п.н.

$$\mathbb{E}(M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_{\tau \wedge \sigma}. \quad (1.19)$$

β) Свойства (1.18) и (1.19) выполняются также и для неограниченных τ , если семейства $(X_t^+)_{t \geq 0}$ и $(|M_t|)_{t \geq 0}$ равномерно интегрируемы (т.е. $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[X_t^+ I(X_t^+ > c)] \rightarrow 0$ и $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|M_t| I(|M_t| > c)] \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$).

Доказательство п. α) основано на рассмотрении следующих моментов остановки, принимающих счетное число значений:

$$\tau_n = 2^{-n} \lfloor 2^n \tau + 1 \rfloor, \quad \sigma_n = 2^{-n} \lfloor 2^n \sigma + 1 \rfloor$$

(таких, что $\tau_n \downarrow \tau$, $\sigma_n \downarrow \sigma$), и использовании утверждений (1.1) и (1.5) для соответствующих процессов с дискретным временем $X^n = (X_k)_{k \in 2^{-n}\mathbb{Z}_+}$ и $M^n = (M_k)_{k \in 2^{-n}\mathbb{Z}_+}$ ($\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$). На заключительном шаге мы положим $n \rightarrow \infty$.

Если момент τ ограничен, то по следствию 1

$$\mathbb{E}(X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}) \geq X_{\tau_n \wedge \sigma_n}.$$

При $m \rightarrow \infty$ мы получаем (используя теорему Леви о предельном переходе под знаком условных математических ожиданий и свойства непрерывности справа фильтрации $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ и процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$), что

$$\mathbb{E}(X_{\tau_n} | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_{\tau_n \wedge \sigma}. \quad (1.20)$$

Семейство $\{X_t, t \leq T\}$ равномерно интегрируемо. Тем самым, (1.18) следует из (1.20), если перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и заметить, что $X_{\tau_n \wedge \sigma} \rightarrow X_{\tau \wedge \sigma}$ в силу непрерывности справа процесса X .

Доказательство свойства (1.19) для случая мартингалов аналогично.

Чтобы доказать п. $\beta)$ для субмартингалов, надо заметить, что если субмартингал X равномерно интегрируем, то существует интегрируемая случайная величина X_∞ такая, что

$$X_t \leq \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t) \quad (1.21)$$

(это неравенство есть не что иное, как хорошо известное свойство Дуба замкнутости равномерно интегрируемых субмартингалов; см. [1, гл. VII, § 4, теорема 2]).

Используя свойство (1.21) и аппроксимируя τ и σ моментами τ_n и σ_m , предельным переходом по $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ получаем требуемое свойство (1.18). Аналогично доказывается и свойство (1.19).

В. Принцип отражения.

1. Пусть τ – конечный момент остановки. Тогда процесс $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ с

$$\tilde{B}_t = B_{t \wedge \tau} - (B_t - B_{t \wedge \tau}), \quad (1.22)$$

т.е.

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} B_t, & t < \tau, \\ 2B_\tau - B_t, & t \geq \tau, \end{cases} \quad (1.23)$$

является броуновским движением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строго марковское свойство броуновского движения (см. [3], [6], [27]) утверждает, что процесс $B' = (B'_t)_{t \geq 0}$, где

$$B'_t = B_{t \wedge \tau} - B_\tau, \quad (1.24)$$

снова является броуновским движением и к тому же B' и (τ, B^τ) , где $B^\tau = (B_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$, независимы. Нетрудно показать, что

$$\tilde{B}_t = B_{t \wedge \tau} - B'_{(t-\tau)^+} \quad (1.25)$$

и

$$B_t = B_{t \wedge \tau} + B'_{(t-\tau)^+}. \quad (1.26)$$

В силу строго марковского свойства имеем

$$(B', \tau, B^\tau) \stackrel{\text{law}}{=} (-B', \tau, B^\tau).$$

Таким образом, $\tilde{B} \stackrel{\text{law}}{=} B$, а именно это и утверждает сформулированный принцип отражения. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Возьмем $\tau = \tau_x$, где $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq x\}$, $x > 0$. Тогда процесс

$$\tilde{B}_t = B_t I(t < \tau_x) + (2x - B_t) I(t \geq \tau_x), \quad t \geq 0,$$

является броуновским движением.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $x \geq y$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq y \right\} &= \{\tau_x \leq T, B_T \leq y\} \\ &= \{\tau_x \leq T, 2x - \tilde{B}_T \leq y\} = \{\tau_x \leq T, \tilde{B}_T \geq 2x - y\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\{\tau_x > T, \tilde{B}_T \geq 2x - y\} = \emptyset$. Поэтому для $x \geq y$

$$\left\{ \sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq y \right\} = \{\tilde{B}_T \geq 2x - y\} \quad (1.27)$$

и

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq y \right\}} = \mathbb{P}\{\tilde{B}_T \geq 2x - y\}, \quad (1.28a)$$

поскольку $\tilde{B} \stackrel{\text{law}}{=} B$. В частности,

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{ \sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq x \right\}} = \mathbb{P}\{B_T \geq x\}. \quad (1.28b)$$

Очень часто именно это равенство называют **принципом отражения** для броуновского движения и иллюстрируют следующим рисунком.

(B – заданная траектория, $\tilde{B}$ – отраженная траектория)

2. ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство того, что процесс $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ является броуновским движением, можно легко получить из *характеризационной теоремы Леви* для броуновского движения. Согласно этой теореме, достаточно лишь убедиться в том, что процесс $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ является *непрерывным локальным мартингалом* и что его *квадратическая характеристика* $\langle \tilde{B} \rangle_t$ равна (Р-п.н.) t (см., например, [16], [5], [27]).

Из определения (1.22) понятно, что процесс $\tilde{B} = B^\tau - (B - B^\tau)$, где $B^\tau = (B_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$, является непрерывным локальным мартингалом, для которого

$$\langle \tilde{B} \rangle = \langle B^\tau \rangle + \langle B - B^\tau \rangle - 2\langle B^\tau, B - B^\tau \rangle.$$

Учитывая, что

$$B_t^\tau = \int_0^t I(s \leq \tau) dB_s, \quad B_t - B_t^\tau = \int_0^t [1 - I(s \leq \tau)] dB_s,$$

находим (Р-п.н.)

$$\langle B^\tau \rangle_t = t \wedge \tau, \quad \langle B - B^\tau \rangle_t = t - t \wedge \tau$$

и

$$\langle B^\tau, B - B^\tau \rangle_t = \int_0^t I(s \leq \tau) [1 - I(s \leq \tau)] ds = 0.$$

Поэтому $\langle \tilde{B} \rangle_t = t$ (Р-п.н.), $t \geq 0$.

С. Теорема Гирсанова для броуновского движения.

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ – вероятностное пространство с фильтрацией и $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – броуновское движение, заданное на этом пространстве.

Обозначим $\mathbb{P}_T = \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$ – ограничение меры $\mathbb{P}$ на σ -алгебру $\mathcal{F}_T$, $T \in \mathbb{R}_+$, и пусть $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$ – броуновское движение со сносом: $B_t^\mu = \mu t + B_t$, $t \geq 0$.

На $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ введем *новую* вероятностную меру $\mathbb{P}_T^\mu$ с

$$d\mathbb{P}_T^\mu = e^{-\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} d\mathbb{P}_T, \quad (1.29)$$

или, эквивалентно,

$$d\mathbb{P}_T^\mu = e^{-\mu B_T^\mu + \frac{\mu^2}{2}T} d\mathbb{P}_T. \quad (1.30)$$

Классическая “теорема Гирсанова” утверждает¹, что

$$\boxed{\text{Law}(B_t^\mu, t \leq T | \mathbb{P}_T^\mu) = \text{Law}(B_t, t \leq T | \mathbb{P}_T)}. \quad (1.31)$$

Иначе говоря, относительно меры $\mathbb{P}_T^\mu$ процесс $(B_t^\mu)_{0 \leq t \leq T}$ (броуновское движение со сносом) ведет себя так же, как обычное броуновское движение (т.е. процесс $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$) относительно меры $\mathbb{P}_T$. В частности, если $G_T(x) = G_T(x_t, t \leq T)$ есть функционал на пространстве $C[0, T]$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t \leq T}$, то

$$\boxed{\text{Law}(G_T(B^\mu) | \mathbb{P}_T^\mu) = \text{Law}(G_T(B) | \mathbb{P}_T)}. \quad (1.32)$$

Отсюда для “хороших” измеримых функционалов $G_T(x)$ (например, неотрицательных или ограниченных: $|G_T(x)| < \text{const}$ для всех $x \in C[0, T]$), используя свойство $\mathbb{P}_T \ll \mathbb{P}_T^\mu$ и (1.30), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} G_T(B^\mu) &= \mathbb{E}_T^\mu \frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_T^\mu} G_T(B^\mu) = \mathbb{E}_T^\mu e^{\mu B_T^\mu - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(B^\mu) \\ &= \mathbb{E} e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(B), \end{aligned} \quad (1.33)$$

¹По поводу доказательства см., например, [5], [16], [27]. В [4] содержатся аналоги теоремы Гирсанова в общем виде – для семимартингалов и случайных мер.

где E_T^μ – математическое ожидание по мере P_T^μ . Таким образом, мы имеем следующую полезную формулу:

$$\boxed{E G_T(B^\mu) = E e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(B)} . \quad (1.34)$$

Из этой формулы непосредственно вытекает следующий важный результат о структуре производной Радона–Никодима *распределений вероятностей* процессов B и B^μ .

Обозначим Q_T^0 и Q_T^μ распределения вероятностей процессов $(B_t)_{t \leq T}$ и $(B_t^\mu)_{t \leq T}$ в пространстве $C[0, T]$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t \leq T}$ с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}_T$:

$$Q_T^0(A) = P(B \in A), \quad Q_T^\mu(A) = P(B^\mu \in A), \quad A \in \mathcal{B}_T,$$

или, более наглядно,

$$Q_T^0 = \text{Law}(B | P), \quad Q_T^\mu = \text{Law}(B^\mu | P).$$

По формулам замены переменных в интеграле Лебега (для “хороших” функционалов G_T)

$$E G_T(B^\mu) = \int_{C[0, T]} G_T(x) Q_T^\mu(dx)$$

и

$$E e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(B) = \int_{C[0, T]} e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(x) Q_T^0(dx).$$

Поэтому согласно (1.34)

$$\int_{C[0, T]} G_T(x) Q_T^\mu(dx) = \int_{C[0, T]} e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(x) Q_T^0(dx).$$

Беря здесь $G_T(x) = I_A(x)$, получаем, что

$$Q_T^\mu(A) = \int_A e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2} T} Q_T^0(dx), \quad A \in \mathcal{B}_T. \quad (1.35)$$

Тем самым, мера Q_T^μ абсолютно непрерывна относительно меры Q_T^0 и производная Радона–Никодима $Z_T^{(\mu)}(x) = \frac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(x)$ задается формулой (Q_T^0 -п.н.)

$$\boxed{Z_T^{(\mu)}(x) = e^{\mu x_T - \frac{\mu^2}{2} T}} . \quad (1.36)$$

Отсюда, беря $x = B = (B_t(\omega))_{t \leq T}$, находим, что (Р-п.н.)

$$\boxed{\frac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(B) = e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T}}. \quad (1.37)$$

В приведенном изложении предполагалось, что процессы B и B^μ определены на конечном временном интервале $[0, T]$. Рассмотрим теперь случай бесконечного интервала $[0, \infty)$.

Будем считать, что рассматриваемые процессы B и B^μ определены на $[0, \infty)$:

$$B = (B_t)_{t \geq 0}, \quad B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}.$$

Обозначим через Q^0 и Q^μ распределения вероятностей процессов B и B^μ в пространстве $C[0, \infty)$ непрерывных функций $x = (x_t)_{t \geq 0}$ с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}(C[0, \infty))$:

$$Q^0(A) = P(B^0 \in A), \quad Q^\mu(A) = P(B^\mu \in A), \quad A \in \mathcal{B}_\infty.$$

Через $Q^0|_{\mathcal{B}_T}$ и $Q^\mu|_{\mathcal{B}_T}$ будем обозначать сужения мер Q^0 и Q^μ на σ -алгебру $\mathcal{B}_T = \sigma(x : x_s, s \leq T)$, порожденную ограничениями, наложенными на $x = (x_s)_{s \geq 0}$ на временном интервале $[0, T]$. Приведенный выше результат о структуре производной Радона–Никодима $\frac{dQ_T^\mu}{dQ_T^0}(x)$ обобщается на случай мер Q^μ и Q^0 следующим образом: при любом $T \geq 0$ (Q^0 -п.н.)

$$\boxed{\frac{d(Q^\mu|_{\mathcal{B}_T})}{d(Q^0|_{\mathcal{B}_T})}(x) = Z_T^{(\mu)}(x)}. \quad (1.38)$$

(Подробнее о структуре производных Радона–Никодима, в частности для процессов Ито и диффузионных процессов, см. [5], [4].)

2. Вернемся к формуле (1.34). Исходным моментом при ее получении была формула (1.29), определяющая по исходной мере P и функции $Z_T^{(-\mu)}(B)$ новую вероятностную меру P_T^μ , обладающую тем свойством, что относительно нее (по теореме Гирсанова) процесс $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \leq T}$ распределен как стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t \leq T}$ (см. (1.31)).

Естественно задать вопрос о том, а как же построить соответствующую меру (скажем, P_∞^μ) для случая $T = \infty$.

В том случае, когда $T < \infty$, математическое ожидание $E Z_T^{(-\mu)}(B) = 1$ и формула (1.29) действительно определяет вероятностную меру. Но просто положить $T = \infty$ в равенстве $E Z_T^{(-\mu)}(B) = 1$ мы не можем, поскольку хотя предел $Z_\infty^{(-\mu)}(B) = \lim_{T \rightarrow \infty} Z_T^{(-\mu)}(B)$ и существует, но он с вероятностью единица равен нулю. Более того, даже для *конечных* с вероятностью единица марковских моментов τ может оказаться, что $E Z_\tau^{(-\mu)} < 1$. Тем самым, для переноса формулы (1.29) с детерминированных моментов T на случайные τ нужно, по крайней мере, выполнение свойства $E Z_\tau^{(-\mu)} = 1$.

3. Следующие общие рассуждения показывают, как правильно здесь ставить вопрос о построении новых вероятностных мер на бесконечном временном интервале.

Предположим, что на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$ задан неотрицательный мартингал $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ с $Z_0 = 1$. Спрашивается, существует ли на $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ с $\mathcal{F}_\infty = \bigvee \mathcal{F}_t$ вероятностная мера $\tilde{P}$ такая, что ее ограничения $\tilde{P}|_{\mathcal{F}_t}$ определяются при каждом $t \geq 0$ равенствами

$$(\tilde{P}|_{\mathcal{F}_t})(A) = \int_A Z_t d(P|_{\mathcal{F}_t}), \quad A \in \mathcal{F}_t. \quad (1.39)$$

Ответ на этот вопрос заведомо положителен в предположении, что выполнены некоторые условия *регулярности* исходного фильтрованного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, P)$. Так, например, если Ω есть пространство $D(\mathbb{R}_+)$ (непрерывных справа и имеющих пределы слева [càdlàg] функций) или пространство $C(\mathbb{R}_+)$ (непрерывных функций) и семейство $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ соответствующих борелевских σ -алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, непрерывно справа и пополнено по мере P , то мера $\tilde{P}$ со свойствами (1.39) существует. (Доказательство см., например, в [3, гл. 16].)

При этом если σ – момент остановки, то для каждого множества $A \in \mathcal{F}_\sigma$

$$\tilde{P}(A \cap \{\sigma < \infty\}) = E[Z_\sigma I(A \cap \{\sigma < \infty\})]. \quad (1.40)$$

Доказательство этого утверждения можно получить из теоремы о преобразовании свободного выбора (для ограниченных моментов остановки). Действительно, для любого $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge t} \subseteq \mathcal{F}_t$ мы имеем по определению меры $\tilde{P}$ и свойству (1.6), что

$$\tilde{P}(A) = E[Z_t I(A)] = E[Z_{t \wedge \sigma} I(A)].$$

Если $A \in \mathcal{F}_\sigma$, то $A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_{t \wedge \sigma}$ и из (1.12) следует, что

$$\tilde{\mathbb{P}}(A \cap \{\sigma \leq t\}) = \mathbb{E}[Z_\sigma I(A \cap \{\sigma \leq t\})]. \quad (1.41)$$

По теореме о монотонной сходимости, соотношение (1.36) получается из (1.41) при $t \rightarrow \infty$.

4. Рассмотрим сейчас мартингал

$$Z_t = e^{-\mu B_{t \wedge \tau} - \frac{\mu^2}{2}(t \wedge \tau)}, \quad t \geq 0, \quad (1.42)$$

где τ – момент остановки такой, что $\mathbb{E} Z_\tau = 1$.

В этом случае мера $\tilde{\mathbb{P}}$ может быть построена естественным образом:

$$d\tilde{\mathbb{P}} = Z_\tau d\mathbb{P}. \quad (1.43)$$

Соответствующее утверждение *теоремы Гирсанова* состоит в том, что процесс

$$\tilde{B}_t^\mu = B_t + \mu(t \wedge \tau) \quad (1.44)$$

является броуновским движением относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}$. (Доказательство см. в упомянутых уже книгах [5], [16], [4], [27].) Из этой формулы мы видим, что на множестве $\{\tau < \infty\}$

$$\text{Law}(\tilde{B}^\mu | \tilde{\mathbb{P}}) = \text{Law}(B | \mathbb{P}). \quad (1.45)$$

Точнее, для любого, скажем, ограниченного или неотрицательно-го $\mathcal{F}_\tau$ -измеримого функционала $G_\tau(\cdot)$

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[G_\tau(\tilde{B}^\mu) I(\tau < \infty)] = \mathbb{E}[G_\tau(B) I(\tau < \infty)], \quad (1.46)$$

где $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}$ – математическое ожидание по мере $\tilde{\mathbb{P}}$.

Аналогично (1.33) из (1.46) получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G_\tau(B^\mu) I(\tau < \infty)] &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\tilde{\mathbb{P}}} G_\tau(B^\mu) I(\tau < \infty)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[e^{\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau} G_\tau(B^\mu) I(\tau < \infty)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[e^{\mu \tilde{B}_\tau^\mu - \frac{\mu^2}{2}\tau} G_\tau(\tilde{B}^\mu) I(\tau < \infty)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau} G_\tau(B) I(\tau < \infty)\right]. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Следовательно, если $\mathbb{E} e^{-\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau} = 1$, то (ср. (1.34))

$$\boxed{\mathbb{E}[G_\tau(B^\mu) I(\tau < \infty)] = \mathbb{E}\left[e^{\mu B_\tau - \frac{\mu^2}{2}\tau} G_\tau(B) I(\tau < \infty)\right]}. \quad (1.48)$$

Д. Теорема Леви (о совместном распределении B и $\sup B$) и ее обобщение.

1. Классическая *теорема Леви* утверждает, что для броуновского движения $B = (B_t)_{t \geq 0}$ выполнено следующее замечательное свойство (см., например, [16], [27]):

$$\left(\sup B - B, \sup B \right) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B)), \quad (1.49)$$

где $L(B) = (L_t(B))_{t \geq 0}$ – локальное время в нуле:

$$L_t(B) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leq \varepsilon) ds, \quad t \geq 0. \quad (1.50)$$

(Предел при $\varepsilon \downarrow 0$ в (1.50) существует Р-п.н.)

Свойство (1.49) допускает обобщение и на случай броуновского движения со сносом $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$, где $B_t^\mu = \mu t + B_t$, $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. Именно, в [25] показано, что

$$\left(\sup B^\mu - B^\mu, \sup B^\mu \right) \stackrel{\text{law}}{=} (|X^\mu|, L(X^\mu)), \quad (1.51)$$

где $X^\mu = (X_t^\mu)_{t \geq 0}$ – процесс, допускающий стохастический дифференциал

$$dX_t^\mu = -\mu \operatorname{sign} X_t^\mu dt + dB_t, \quad X_0^\mu = 0. \quad (1.52)$$

(Стохастическое дифференциальное уравнение (1.52) имеет и притом единственное сильное решение, т.е. такое, что при каждом $t \geq 0$ величины X_t^μ являются $\mathcal{F}_t^B \equiv \sigma(B_s, s \leq t)$ -измеримыми. Процесс X^μ хорошо известен в теории оптимального стохастического управления под названием “bang-bang process”).

В (1.51) $L(X^\mu) = (L_t(X^\mu))_{t \geq 0}$ есть локальное время процесса X^μ в нуле, определяемое формулой (1.50) с заменой B на X^μ .

2. Стандартное доказательство свойства (1.49) основано на применении *леммы Скорохода*, приводимой ниже. Если считать доказанным утверждение (1.49), то свойство (1.51) может быть установлено применением теоремы Гирсанова (для броуновского движения со сносом B^μ и для процесса X^μ). Именно такой путь доказательства свойства (1.51) был предложен в работе [25], и мы его приведем в п. 5. Оказывается, однако, что лемма Скорохода “работает” не только в случае броуновского движения, но и в случае броуновского движения со сносом. Иначе говоря, эта

лемма сразу дает доказательство свойства (1.51) и для $\mu = 0$, и для $\mu \neq 0$. (Такой путь был применен в работе [26].)

3. ЛЕММА СКОРОХОДА. Пусть $y = (y_t)_{t \geq 0}$ – непрерывная функция такая, что $y_0 \geq 0$. Тогда существует единственная пара функций $(x, l) = ((x_t, l_t))_{t \geq 0}$ такая, что

- (a) $x = y + l$;
- (b) $x \geq 0$;
- (c) $l = (l_t)_{t \geq 0}$ есть неубывающая непрерывная функция, $l_0 = 0$, такая, что носитель меры $dl = (dl_t)_{t \geq 0}$ совпадает с множеством $\{t \geq 0 : x_t = 0\}$.

Более того, функция $l = (l_t)_{t \geq 0}$ задается формулами

$$l_t = \sup_{s \leq t} (-y_s \vee 0), \quad t \geq 0. \quad (1.53)$$

(Доказательство см. в [28] или в [16, гл. VI, § 2, (2.1)].)

4. Дадим доказательство свойства (1.51) для любого $\mu \in \mathbb{R}$, основываясь на сформулированной лемме.

Применяя формулу Танака (см. [16], [27]) к процессу $X^\mu = (X_t^\mu)_{t \geq 0}$, находим, что

$$|X_t^\mu| = \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu + L_t(X^\mu). \quad (1.54)$$

Обозначая

$$Y_t^\mu = - \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu, \quad (1.55)$$

получаем, что

$$|X_t^\mu| = -Y_t^\mu + L_t(X^\mu). \quad (1.56)$$

Применяя теперь лемму Скорохода, видим, что, согласно (1.53), $L_t(X^\mu)$ непременно имеет следующий вид:

$$L_t(X^\mu) = \sup_{s \leq t} Y_s^\mu, \quad (1.57)$$

и, значит, (1.56) может быть представлено как

$$|X_t^\mu| = \sup_{s \leq t} Y_s^\mu - Y_t^\mu. \quad (1.58)$$

Из (1.57) и (1.58) находим, что для каждого $t \geq 0$ справедливо соотношение

$$\left(\sup_{s \leq t} Y_s^\mu - Y_t^\mu, \sup_{s \leq t} Y_s^\mu \right) = (|X_t^\mu|, L_t(X^\mu)). \quad (1.59)$$

Далее, из (1.55) и (1.52)

$$Y_t^\mu = - \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu = \mu t - \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dB_s. \quad (1.60)$$

Здесь процесс $(-\int_0^t \text{sign } X_s^\mu dB_s)_{t \geq 0}$ является непрерывным мартингалом, квадратическая характеристика которого

$$\left\langle - \int_0^\cdot \text{sign } X_s^\mu dB_s \right\rangle_t = t.$$

Следовательно, по характеризационной теореме Леви для броуновского движения (см. п. 2 раздела В (с. 12)),

$$\text{Law}\left(- \int_0^t \text{sign } X_s^\mu dB_s; t \geq 0\right) = \text{Law}(B_t; t \geq 0).$$

Значит,

$$\text{Law}(Y_t^\mu; t \geq 0) = \text{Law}(B_t; t \geq 0),$$

и из (1.59) находим, что для каждого $t \geq 0$

$$\left(\sup_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu, \sup_{s \leq t} B_s^\mu\right) \stackrel{\text{law}}{=} (|X_t^\mu|, L_t(X^\mu)). \quad (1.61)$$

В силу произвольности $t \geq 0$ из (1.61) получаем требуемое свойство (1.51) для произвольного $\mu \in \mathbb{R}$ и, в частности, для $\mu = 0$.

5. Покажем сейчас, как можно было бы получить свойство (1.51) для произвольного $\mu \in \mathbb{R}$ из свойства (1.49) для $\mu = 0$ и теоремы Гирсанова.

Согласно (1.34), для всякого $T > 0$ и “хороших” функционалов $G_T(\cdot, \cdot)$ (скажем, измеримых и ограниченных)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} G_T\left(\sup_{s \leq T} B_s^\mu - B_T^\mu, \sup_{s \leq T} B_s^\mu\right) \\ = \mathbb{E} e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} G_T\left(\sup_{s \leq T} B_s - B_T, \sup_{s \leq T} B_s\right). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Из свойства (1.49) заключаем, что

$$\left(B_T, \sup_{s \leq T} B_s - B_T, \sup_{s \leq T} B_s\right) \stackrel{\text{law}}{=} (L_T(B) - |B_T|, |B_T|, L_T(B)). \quad (1.63)$$

Из (1.62) и (1.63) видим, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} G_T \left(\sup_{s \leq T} B_s^\mu - B_T^\mu, \sup_{s \leq T} B_s^\mu \right) \\ &= \mathbb{E} e^{\mu(L_T(B) - |B_T|) - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(|B_T|, L_T(B)). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Для доказательства свойства (1.51) достаточно показать, что для всякого $T > 0$

$$\mathbb{E} G_T \left(\sup_{s \leq T} B_s^\mu - B_T^\mu, \sup_{s \leq T} B_s^\mu \right) = \mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)).$$

Для этого, в свою очередь, достаточно проверить лишь, что $\mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu))$ совпадает с правой частью в (1.64).

С этой целью по аналогии с (1.29) и (1.30) введем вероятностную меру $\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu$ с

$$d\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu = e^{\mu \int_0^T \text{sign } X_s^\mu dB_s - \frac{\mu^2}{2} T} d\mathbb{P}_T, \quad (1.65)$$

что в силу (1.52) эквивалентно равенству

$$d\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu = e^{\mu \int_0^T \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu + \frac{\mu^2}{2} T} d\mathbb{P}_T. \quad (1.66)$$

Теорема Гирсанова, в применении к (диффузионному) процессу X^μ , утверждает (см. [4], [5], [27]), что

$$\text{Law}(X_t^\mu, t \leq T \mid \widehat{\mathbb{P}}_T^\mu) = \text{Law}(B_t, t \leq T \mid \mathbb{P}_T) \quad (1.67)$$

(ср. (1.31)).

Используя это свойство и (1.65), находим (ср. (1.33)), что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)) &= \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu} \frac{d\mathbb{P}_T}{d\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)) \\ &= \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{P}}_T^\mu} e^{-\mu \int_0^T \text{sign } X_s^\mu dX_s^\mu - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)) \\ &= \mathbb{E} e^{-\mu \int_0^T \text{sign } B_s dB_s - \frac{\mu^2}{2} T} G_T(|B_T|, L_T(B)). \end{aligned} \quad (1.68)$$

Пользуясь формулой Танака для броуновского движения (см. (1.54) для $\mu = 0$ и [16], [27]), получаем, что (P-п.н.)

$$|B_T| = \int_0^T \text{sign } B_s dB_s + L_T(B). \quad (1.69)$$

Из (1.68) и (1.69)

$$\mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)) = \mathbb{E} e^{\mu(L_T(B) - |B_T|) - \frac{\mu^2}{2}T} G_T(|B_T|, L_T(B)). \quad (1.70)$$

Сопоставление (1.70) с (1.64) показывает, что для всякого $T > 0$ и достаточно “хороших” измеримых функционалов $G_T(\cdot, \cdot)$ выполнено соотношение

$$\mathbb{E} G_T\left(\sup_{s \leq T} B_s^\mu - B_T^\mu, \sup_{s \leq T} B_s^\mu\right) = \mathbb{E} G_T(|X_T^\mu|, L_T(X^\mu)). \quad (1.71)$$

В качестве “хороших” функционалов можно взять индикаторы множеств. Тем самым из (1.71) получаем требуемое соотношение (1.51).

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 1).

1. Дать доказательство того, что если субмартиггал $X = (X_t)_{t \geq 0}$ равномерно интегрируем, то существует интегрируемая случайная величина X_∞ такая, что $X_t \leq \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_t)$ (Р-п.н.), $t \geq 0$.
2. Проверить, что выполняются свойства (1.25) и (1.26).
3. Основываясь на характеризационной теореме Леви (см. замечание в п. 2 раздела В), восстановить детали доказательства того, что процесс $\tilde{B}$ является броуновским движением (см. об этом конец раздела В).
4. Дать доказательство *теоремы Гирсанова* (1.31), использующее метод характеристических функций.
5. Проанализировать доказательство существования меры $\tilde{\mathbb{P}}$ со свойством $d(\tilde{\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t) = Z_t d(\mathbb{P} | \mathcal{F}_t)$ (см. (1.39)), данное в [3, гл. 16].
6. Доказать, что процесс $\tilde{B}^\mu$, заданный в (1.44), является *броуновским движением* относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}$.
7. Обосновать первые равенства в (1.33) и (1.47).
8. Доказать, что процесс $(\Phi(B_t/\sqrt{1-t}))_{0 \leq t \leq 1}$ является мартиггалом. (Здесь и далее используются стандартные обозначения $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$, $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.)
9. Дать доказательство *леммы Скорохода*, приведенной (без доказательства) в п. 3 раздела D (с. 19).

§ 2. Свойства момента остановки

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}, \quad a > 0$$

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$\begin{aligned} P(\tau_a < \infty) &= 1, \quad E \tau_a = \infty \\ E e^{-\lambda \tau_a} &= e^{-a\sqrt{2\lambda}}, \quad \lambda \geq 0 \\ p_{\tau_a}(t) &= \frac{a\varphi_t(a)}{t} \end{aligned}$$

здесь $\varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$, $p_{\tau_a}(t) = \frac{\partial}{\partial t} P(\tau_a \leq t)$, $0 < t < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\lambda > 0$ и рассмотрим мартингал

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}, \quad t \geq 0,$$

для которого, очевидно, $E M_t = 1$, $t \geq 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора,

$$E M_{\tau_a \wedge t} = 1 \tag{2.1}$$

для любого $t \geq 0$. Очевидно, что

$$0 \leq M_{\tau_a \wedge t} \leq e^{\lambda B_{\tau_a \wedge t} - \frac{\lambda^2}{2}(\tau_a \wedge t)} \leq e^{\lambda a}.$$

Тогда, по теореме о мажорируемой сходимости для интеграла Лебега, из (2.1) находим, что

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} E M_{\tau_a \wedge t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[E e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} I(\tau_a \leq t) + E e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} I(\tau_a > t) \right] \\ &= E e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a} I(\tau_a < \infty) + \lim_{t \rightarrow \infty} E e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} I(\tau_a > t). \end{aligned}$$

Для всех $\lambda \neq 0$ (по усиленному закону больших чисел для броуновского движения) Р-п.н.

$$e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} = e^{t\left(\lambda \frac{B_t}{t} - \frac{\lambda^2}{2}\right)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для всякого $\lambda > 0$

$$1 = \mathbb{E} e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} I(\tau_a < \infty) = \mathbb{E} e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} I(\tau_a < \infty), \quad (2.2)$$

и, снова по теореме о мажорируемой сходимости, при $\lambda \downarrow 0$ мы получаем из (2.2), что

$$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1. \quad (2.3)$$

Отсюда и из (2.2) находим

$$\mathbb{E} e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} = \mathbb{E} e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} = 1,$$

т.е.

$$\mathbb{E} e^{-\frac{\lambda^2}{2} \tau_a} = e^{-\lambda a},$$

что дает следующее представление для преобразования Лапласа:

$$\boxed{\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}}. \quad (2.4)$$

Поскольку $\mathbb{P}\{\tau_a < \infty\} = 1$, то формула (2.4) очевидно справедлива и при $\lambda = 0$. Прямые вычисления показывают, что для любого $\lambda \geq 0$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{a\varphi_t(a)}{t} dt = e^{-a\sqrt{2\lambda}}}. \quad (2.5)$$

Этим, с учетом (2.4), доказано, что вероятность $\mathbb{P}(\tau_a \leq t)$ имеет плотность $p_{\tau_a}(t) = \frac{\partial \mathbb{P}(\tau_a \leq t)}{\partial t}$, задаваемую формулой

$$p_{\tau_a}(t) = \frac{a\varphi_t(a)}{t}$$

или, подробнее,

$$p_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}. \quad \square \quad (2.6)$$

2. Ясно, что

$$\{\tau_a \leq t\} = \left\{ \sup_{s \leq t} B_s \geq a \right\}. \quad (2.7)$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s \geq a\right) = \mathbf{P}(\tau_a \leq t) = \int_0^t \frac{a\varphi_s(a)}{s} ds. \quad (2.8)$$

Заметим, что

$$\int_0^t \frac{a\varphi_s(a)}{s} ds = 2 \int_a^\infty \varphi_t(x) dx. \quad (2.9)$$

[Для доказательства этого соотношения достаточно рассмотреть производные по t левой и правой части и воспользоваться тем, что $\varphi_t(x)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2}.] \quad (2.10)$$

Рассмотрим правую часть (2.9):

$$2 \int_a^\infty \varphi_t(x) dx = 2 \mathbf{P}(B_t \geq a) = \mathbf{P}(|B_t| \geq a).$$

Из (2.8) имеем

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s \geq a\right) = 2 \mathbf{P}(B_t \geq a) \quad (2.11)$$

или, эквивалентно,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s \geq a, B_t \leq a\right) = \mathbf{P}(B_t \geq a), \quad (2.12)$$

что, как уже указывалось выше (см. (1.28b)), есть один из вариантов *принципа отражения*.

Следовательно, мы можем утверждать, что из теоремы о преобразовании свободного выбора следует принцип отражения (2.12):

теорема о преобразовании свободного выбора	$\implies$	принцип отражения (2.12)	(2.13)

Отметим также, что преобразование Лапласа $\mathbf{E} e^{-\lambda \tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$ можно легко получить из принципа отражения (2.11). В самом

деле, из (2.11) имеем $P(\tau_a \leq t) = P(\sup_{s \leq t} B_s \geq a) = 2P(B_t \geq a) = 2 \int_a^\infty \varphi_t(x) dx$.

Следовательно, с учетом (2.10),

$$\begin{aligned} p_{\tau_a}(t) &= \frac{\partial P(\tau_a \leq t)}{\partial t} = 2 \int_a^\infty \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial t} dx \\ &= \int_a^\infty \frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2} dx = - \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \Big|_{x=a} = a \frac{\partial \varphi_t(a)}{\partial t}, \end{aligned}$$

откуда выводится, что $P(\tau_a < \infty) = 1$, $E \tau_a = \infty$ и $E e^{-\lambda \tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$.

3. Пусть $a < 0 < b$ и $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$. Тогда, по теореме о преобразовании свободного выбора, $E B_{t \wedge \tau} = 0$, и, поскольку $P(\tau = \infty) = 0$ (докажите это (!)), теорема о мажорируемой сходимости дает

$$0 = a P(\tau_a < \tau_b) + b P(\tau_b < \tau_a). \quad (2.14)$$

Вместе со свойством

$$P(\tau_a < \tau_b) + P(\tau_b < \tau_a) = 1$$

равенство (2.14) приводит к следующим знаменитым формулам:

$$P(\tau_a < \tau_b) = \frac{b}{b-a}, \quad (2.15)$$

$$P(\tau_b < \tau_a) = \frac{|a|}{b-a}. \quad (2.16)$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 2).

1. Проверить справедливость формулы (2.5).
2. Дать доказательство формулы (2.9).
3. Найти распределение и преобразование Лапласа момента остановки $\tau_a^1 = \inf\{t \geq 1 : B_t = a\}$.
4. Доказать использованное в п. 3 равенство $P(\tau = \infty) = 0$.

§ 3. Свойства момента остановки

$$\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}, \quad a > 0$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$P(\sigma_a < \infty) = 1, \quad E\sigma_a = a^2$$

$$E e^{-\lambda \sigma_a} = \frac{1}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda})} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}}$$

$$p_{\sigma_a}(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{a(1+2k)}{t} \varphi_t(a(1+2k))$$

Здесь $p_{\sigma_a}(t) = \frac{\partial}{\partial t} P(\sigma_a \leq t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\sigma_a \leq \tau_a$ (Р-п.н.), и поэтому $P(\sigma_a < \infty) = P(\tau_a < \infty) = 1$, где $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ (см. §2).

Чтобы доказать равенство $E\sigma_a = a^2$, рассмотрим мартингал $M_t = B_t^2 - t$, $t \geq 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора (следствие 1 на с. 8) $EM_{t \wedge \sigma_a} = 0$ или, что то же, $EB_{t \wedge \sigma_a}^2 = E(t \wedge \sigma_a)$. Здесь $B_{t \wedge \sigma_a}^2 \leq a^2$. В силу теоремы о мажорируемой сходимости

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E B_{t \wedge \sigma_a}^2 = E B_{\sigma_a}^2 = a^2, \quad (3.1)$$

а по теореме о монотонной сходимости

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t \wedge \sigma_a) = E\sigma_a. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1) и (3.2) доказывают, что $E\sigma_a = a^2$.

Чтобы найти преобразование Лапласа для распределения момента σ_a , рассмотрим мартингал $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$. Здесь $0 < M_{t \wedge \sigma_a} \leq e^{\lambda a}$, и, по теореме о мажорируемой сходимости, в силу свойств

$$P(B_{\sigma_a} = a) = P(B_{\sigma_a} = -a) = \frac{1}{2}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} E M_{t \wedge \sigma_a} = E M_{\sigma_a} \\ &= E e^{\lambda B_{\sigma_a} - \frac{\lambda^2}{2} \sigma_a} = \frac{e^{\lambda a} + e^{-\lambda a}}{2} E e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sigma_a}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sigma_a} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda a)}, \quad (3.3)$$

где $\operatorname{ch}(\lambda a) = (e^{\lambda a} + e^{-\lambda a})/2$. Из (3.3) находим собственно преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} E e^{-\lambda \sigma_a} &= \frac{1}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda})} = \frac{2e^{-\sqrt{2\lambda}a}}{1 + 2e^{-\sqrt{2\lambda}a}} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из § 2 мы знаем (см. (2.4), (2.5)), что для любого $A > 0$

$$e^{-A\sqrt{2\lambda}} = E e^{-\lambda \tau_A} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p_{\tau_A}(t) dt,$$

где $p_{\tau_A}(t) = A\varphi_t(A)/t$.

Полагая здесь $A = (1+2k)a$ с $k = 0, 1, 2, \dots$, из (3.4) находим, что

$$\begin{aligned} E e^{-\lambda \sigma_a} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(1+2k)a}{t} \varphi_t((1+2k)a) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left\{ 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1+2k)a}{t} \varphi_t((1+2k)a) \right\} dt. \end{aligned}$$

Из этого представления следует, что

$$p_{\sigma_a}(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1+2k)a}{t} \varphi_t((1+2k)a),$$

или

$$p_{\sigma_a}(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k p_{\tau_{a(1+2k)}}(t),$$

что дает

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\sigma_a \leq t) &= \int_0^t p_{\sigma_a}(s) ds = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^t p_{\tau_{a(1+2k)}}(s) ds \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{P}(\tau_{a(1+2k)} \leq t) \\ &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbf{P}(B_t \geq a(1+2k)) \\ &= 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[1 - \Phi\left(\frac{a(1+2k)}{\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Формула (3.5) вместе с соотношением

$$\mathbf{P}(\sigma_a \leq t) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} |B_s| \geq a\right)$$

позволяют, в принципе, найти

$$\mathbf{E} \sup_{s \leq t} |B_s| \quad \left(= \int_0^{\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq t} |B_s| \geq a\right) da = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\sigma_a \leq t) da \right).$$

Однако легче это математическое ожидание найти с помощью следующих рассуждений.

Пусть, для простоты, $t = 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\sigma_a \geq 1) &= \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} |B_s| \leq a\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq a^{-2}} |B_s| \leq 1\right) = \mathbf{P}(\sigma_1 \geq a^{-2}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} |B_s| \leq a\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \leq a\right), \quad (3.7)$$

т.е.

$$\text{Law}\left(\sup_{s \leq t} |B_s|\right) = \text{Law}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}}\right).$$

Учитывая, что (в силу свойств нормального распределения) для каждого $\Delta > 0$ справедливо соотношение

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/(2\Delta^2)} dx,$$

используя (3.3) и полагая $\Delta = 1/\sqrt{\sigma_1}$, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{s \leq 1} |B_s| &= \mathbf{E} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathbf{E} e^{-x^2 \sigma_1/2} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \\ &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} y \Big|_1^\infty \\ &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{E} \sup_{s \leq T} |B_s| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} T. \quad (3.8)$$

(Заметим, между прочим, что $\mathbf{E} |B_T| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T$.)

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием §3).

1. Найти асимптотику плотностей вероятностей $p_{\sigma_a}(t)$ при $t \rightarrow \infty$.
2. Найти $\mathbf{E} \sup_{s \leq t} |B_s|$, пользуясь формулами (3.6) и (3.5).
3. Найти явный вид для $\mathbf{E} (\sup_{s \leq t} |B_s|)^n$ для всех целых $n > 1$, пользуясь свойством (3.8).

§ 4. Свойства момента остановки

$\tau_{ab} = \inf\{t \geq 0 : B_t - bt \geq a\}, a > 0$

1. Основные свойства:

Для $b \leq 0$:

$$P(\tau_{ab} < \infty) = 1,$$

$$E \tau_{ab} = \frac{a}{|b|},$$

$$E B_{\tau_{ab}} = 0,$$

$$E e^{-\lambda \tau_{ab}} = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})},$$

где $\lambda \geq 0$

$$p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt)$$

Для $b > 0$:

$$P(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab},$$

$$E \tau_{ab} = \infty,$$

$$E e^{-\lambda \tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}, \lambda \geq 0$$

$$p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt)$$

Здесь $\varphi_t(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/(2t)}$, $p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{\partial}{\partial t} P(\tau_{ab} \leq t)$, $0 < t < \infty$.

2. Случай $b \leq 0$.

Если $b = 0$, то $\tau_{ab} = \tau_a$ и $P(\tau_{ab} < \infty) = P(\tau_a < \infty) = 1$ в силу §2.

Если $b < 0$, то $\tau_{ab} < \tau_a$ (P-п.н.) и $P(\tau_{ab} < \infty) = 1$, поскольку $P(\tau_a < \infty) = 1$.

Для любого $t \geq 0$ по теореме о преобразовании свободного выбора

$$E B_{t \wedge \tau_{ab}} = 0. \quad (4.1)$$

Ясно, что

$$B_{t \wedge \tau_{ab}} \leq a + b(t \wedge \tau_{ab}). \quad (4.2)$$

Отсюда и из (4.1)

$$0 \leq a + b \mathbb{E}(t \wedge \tau_{ab}),$$

что дает (для $b < 0$)

$$\mathbb{E}(t \wedge \tau_{ab}) \leq \frac{a}{|b|}. \quad (4.3)$$

По теореме о монотонной сходимости,

$$\mathbb{E} \tau_{ab} \leq \frac{a}{|b|}. \quad (4.4)$$

Покажем, что на самом деле здесь имеет место равенство:

$$\mathbb{E} \tau_{ab} = \frac{a}{|b|}, \quad (4.5)$$

и также покажем, что

$$\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0. \quad (4.6)$$

С этой целью рассмотрим мартингал $M_t = e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t}$, где $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$, $\lambda > 0$, $t \geq 0$.

По теореме о преобразовании свободного выбора имеем

$$\mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} = 1,$$

и поскольку

$$0 \leq M_{t \wedge \tau_{ab}} \leq e^{ab + \sqrt{b^2 + \lambda}},$$

по теореме о мажорируемой сходимости получаем:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[I(\tau_{ab} < \infty) e^{\theta B_{t \wedge \tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}(t \wedge \tau_{ab})} + I(\tau_{ab} = \infty) e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t} \right] \\ &= \mathbb{E} I(\tau_{ab} < \infty) e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = \mathbb{E} e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда

$$\mathbb{E} e^{\theta(a + b\tau_{ab}) - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = 1,$$

что дает (с $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$)

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} = e^{-a\theta},$$

или

$$\boxed{\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}}. \quad (4.8)$$

Продифференцируем здесь по λ левую и правую части и положим $\lambda \downarrow 0$. Тогда найдем, что

$$\mathbb{E} \tau_{ab} = \frac{a}{|b|}.$$

Учитывая равенство

$$B_{\tau_{ab}} = a + b\tau_{ab} \quad \text{Р-п.н.}, \quad (4.9)$$

видим, что $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = a + b\mathbb{E} \tau_{ab} = a + b \cdot \frac{a}{|b|} = 0$.

Заметим, что обычно в традиционных доказательствах свойств моментов τ_{ab} сначала показывают, что $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0$, а затем получают равенство $\mathbb{E} \tau_{ab} = a/|b|$.

Конечно, если нам известно *первое тождество Вальда* “ $\mathbb{E} \tau < \infty \Rightarrow \mathbb{E} B_\tau = 0$ ”, то свойство $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0$ следует сразу из того, что $\mathbb{E} \tau_{ab} \leq a/|b| < \infty$.

Но можно предложить доказательство свойства $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0$, не обращающееся к тождеству Вальда.

Действительно, рассмотрим для $\lambda > 0$ мартингал $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$, $t \geq 0$. Из теоремы о преобразовании свободного выбора ($\mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} = 1$) и оценок $0 \leq e^{\lambda B_{t \wedge \tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}(t \wedge \tau_{ab})} \leq e^{\lambda a}$, учитывая, что $\mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty) = 1$, находим

$$\mathbb{E} e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} = 1.$$

Дифференцирование по λ дает

$$\mathbb{E} (B_{\tau_{ab}} - \lambda\tau_{ab}) e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} = 0. \quad (4.10)$$

(Заметим, что $\mathbb{E} |B_{\tau_{ab}} - \lambda\tau_{ab}| e^{\lambda B_{\tau_{ab}} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_{ab}} \leq \mathbb{E} |a + (b - \lambda)\tau_{ab}| e^{\lambda a} < \infty$, поскольку $\mathbb{E} \tau_{ab} < \infty$.) Переходя в (4.10) к пределу при $\lambda \downarrow 0$, получаем, что $\mathbb{E} B_{\tau_{ab}} = 0$. Отсюда и из (4.9) следует $\mathbb{E} \tau_{ab} = a/|b|$.

3. Случай $b > 0$.

Рассмотрим мартингал $M_t = e^{\hat{\theta} B_t - \frac{\hat{\theta}^2}{2}t}$ с $\hat{\theta} = 2b$, $t \geq 0$. Для всех $t \geq 0$ таких, что $B_t \leq a + bt$, имеем

$$0 \leq e^{\hat{\theta} B_t - \frac{\hat{\theta}^2}{2}t} \leq e^{2ab}. \quad (4.11)$$

По теореме о преобразовании свободного выбора (раздел А в § 1),

$$\mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} = 1,$$

где

$$\begin{aligned} M_{t \wedge \tau_{ab}} &= I(\tau_{ab} < \infty) e^{2bB_{t \wedge \tau_{ab}} - \frac{(2b)^2}{2}(t \wedge \tau_{ab})} \\ &\quad + I(\tau_{ab} = \infty) e^{2bB_t - \frac{(2b)^2}{2}t}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.11), по теореме о мажорируемой сходимости, получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} M_{t \wedge \tau_{ab}} = \mathbb{E} I(\tau_{ab} < \infty) e^{2bB_{\tau_{ab}} - \frac{(2b)^2}{2}\tau_{ab}} \\ &= \mathbb{E} I(\tau_{ab} < \infty) e^{2ab} = e^{2ab} \mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty), \end{aligned}$$

что дает

$$\boxed{\mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab}}. \quad (4.12)$$

Покажем теперь, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}.$$

Для этого заметим, что в случае $b > 0$ $\mathbb{P}(\tau_{ab} = \infty) > 0$, и, аналогично (4.7), находим, что для $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$

$$\mathbb{E} I(\tau_{ab} < \infty) e^{\theta B_{\tau_{ab}} - \frac{\theta^2}{2}\tau_{ab}} = 1. \quad (4.13)$$

Учитывая то, что $B_{\tau_{ab}} = a + b\tau_{ab}$ на множестве $\{\tau_{ab} < \infty\}$, из (4.13) получаем, что для всякого $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} I(\tau_{ab} < \infty) = e^{-a\theta} \quad (= e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}). \quad (4.14)$$

Полезно отметить, что при $\lambda > 0$ на множестве $\{\tau_{ab} = \infty\}$, очевидно, выполнено свойство $e^{-\lambda \tau_{ab}} = 0$. Таким образом, из (4.14) получаем, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} = e^{-a\theta} \quad (= e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}). \quad (4.15)$$

Другими словами, в обоих случаях $b \leq 0$ и $b > 0$ преобразование Лапласа $\mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}}$ при $\lambda > 0$ задается одной и той же формулой (4.15).

4. Наконец, докажем формулу

$$p_{\tau_{ab}}(b) = \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt), \quad 0 \leq t < \infty$$

(для обоих случаев $b \leq 0$ и $b > 0$). Для этого достаточно проверить, что

$$\int_0^\infty \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt) e^{-\lambda t} dt = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}$$

или, подробнее, что

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{a}{t} e^{-\frac{(a+bt)^2}{2t}} e^{-\lambda t} dt = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}. \quad (4.16)$$

Левая часть (LS) в (4.16) равна

$$(\text{LS}) = e^{-ab} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \frac{a}{t} e^{\frac{a^2}{2t}} e^{-(\lambda + \frac{b^2}{2})t} dt.$$

Мы знаем (см. § 2), что для любого $\Lambda > 0$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{a}{t} e^{-\frac{a^2}{2t}} e^{-\Lambda t} dt = e^{-a\sqrt{2\Lambda}}.$$

Беря здесь $\Lambda = \lambda + b^2/2$, получаем, что

$$(\text{LS}) = e^{-ab} e^{-a\sqrt{2(\lambda + \frac{b^2}{2})}} = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})},$$

что совпадает с правой частью (4.16).

Имея установленную формулу $p_{\tau_{ab}}(t) = \frac{a}{t} \varphi_t(a + bt)$, непосредственным интегрированием находим, что

$$P(\tau_{ab} \leq t) = \int_0^t p_{\tau_{ab}}(s) ds = 1 - \Phi\left(\frac{a + bt}{\sqrt{t}}\right) + e^{-2ab} \Phi\left(\frac{bt - a}{\sqrt{t}}\right). \quad (4.17)$$

Эта формула будет далее играть существенную роль в § 6.

5. Проиллюстрируем некоторые результаты о свойствах моментов остановки τ_a и τ_{ab} , которые могут быть получены непосредственно из теоремы Гирсанова.

(а) Для момента остановки

$$\tau_a = \inf\{t : B_t \geq a\}, \quad a > 0,$$

при любом $\lambda \geq 0$ имеем (см. § 2)

$$\mathbb{E} e^{\lambda B_{\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_a} = 1.$$

Отсюда для любого $\mu \leq 0$

$$\mathbb{E} e^{-\mu B_{\tau_a} - \frac{\mu^2}{2} \tau_a} = 1,$$

и процесс $\tilde{B}_t^\mu = B_t + \mu(t \wedge \tau_a)$ является (см. (1.42)–(1.44)) броуновским движением относительно меры $\tilde{\mathbb{P}}_a$ такой, что $d\tilde{\mathbb{P}}_a = e^{-\mu B_{\tau_a} - \frac{\mu^2}{2} \tau_a} d\mathbb{P}$.

(b) Рассмотрим теперь момент остановки

$$\tau_{ab} = \inf\{t : B_t - bt \geq a\}.$$

Беря $\mu = -b$ с $b > 0$, из соотношений (1.48) и (2.4) получаем, что для $\lambda > 0$ и $b > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\lambda \tau_{ab}} &= \mathbb{E} \left[e^{b B_{\tau_a} - \frac{b^2}{2} \tau_a} e^{-\lambda \tau_a} \right] = e^{-ab} \mathbb{E} e^{-\left(\lambda + \frac{b^2}{2}\right) \tau_a} \\ &= e^{-ab} e^{-a \sqrt{2\left(\lambda + \frac{b^2}{2}\right)}} = e^{-a(b + \sqrt{2\lambda + b^2})} \end{aligned}$$

(ср. (4.15)).

Аналогичным образом находим, что для $b > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{ab} \leq t) &= \mathbb{E} I(\tau_{ab} \leq t) = \mathbb{E} e^{-b B_{\tau_a} - \frac{b^2}{2} \tau_a} I(\tau_a \leq t) \\ &= e^{-ab} \mathbb{E} e^{-\frac{b^2}{2} \tau_a} I(\tau_a \leq t) \\ &= e^{-ab} \int_0^t e^{-a \frac{b^2}{2} s} \frac{a}{s} \varphi_s(a) ds \\ &= e^{-ab} \int_0^t \frac{a}{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{b^2}{2} s - \frac{a^2}{2s}} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{a}{s^{3/2}} e^{-\frac{(a+bs)^2}{2s}} ds, \end{aligned}$$

что дает уже найденную ранее (п. 4) формулу

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\tau_{ab} \leq t) = \frac{a\varphi_t(a+bt)}{t}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$P(\tau_{ab} < \infty) = e^{-ab} \int_0^\infty \frac{a}{t} \varphi_t(a) dt = e^{-ab-|ab|}.$$

Если $b > 0$ и $a > 0$, то

$$e^{-ab-|ab|} = e^{-2ab}.$$

Тем самым, в этом случае $P(\tau_{ab} < \infty) = e^{-2ab}$ (ср. (4.12)).

Если же $b < 0$ и $a > 0$, то

$$e^{-ab-|ab|} = 1$$

и $P(\tau_{ab} < \infty) = 1$, что было также уже установлено в п. 2.

Задачи (в связи с содержанием § 4).

1. Убедитесь в справедливости формулы (4.17).
2. В п. 5 (b) мы доказали формулу для преобразования Лапласа $E e^{-\lambda \tau_{ab}}$ при $b > 0$ с помощью теоремы Гирсанова. Исследуйте аналогичным методом случай $b < 0$.
3. Найдите формулу для $E \tau_{ab}^n$, $n \geq 1$, в случае $b < 0$.

§ 5. Свойства момента остановки

$$\sigma_{ab} = \inf\{t \geq 0 : |B_t - bt| \geq a\}, \quad a > 0$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$P(\sigma_{ab} < \infty) = 1$$

$$\begin{aligned} E e^{-\lambda \sigma_{ab}} &= \frac{\operatorname{ch}(ab)}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda + b^2})} \\ &= 2 \operatorname{ch}(ab) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda + b^2}} \end{aligned}$$

Для определенности будем предполагать, что $b > 0$. По аналогии с последним пунктом 5 в § 4, имеем

$$P(\sigma_{ab} < \infty) = E I(\sigma_{ab} < \infty) = E I(\sigma_a < \infty) e^{-bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a} = 1, \quad (5.1)$$

где $\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}$. Сходным образом,

$$E e^{-\lambda \sigma_{ab}} = E e^{-\lambda \sigma_a} e^{-bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a} \quad (5.2)$$

и

$$E e^{-\lambda \sigma_{a,-b}} = E e^{-\lambda \sigma_a} e^{bB_{\sigma_a} - \frac{b^2}{2}\sigma_a}. \quad (5.3)$$

Отсюда, учитывая, что

$$\operatorname{Law}(\sigma_{ab}) = \operatorname{Law}(\sigma_{a,-b})$$

и что (Р-п.н.) $(e^{bB_{\sigma_a}} + e^{-bB_{\sigma_a}})/2 = \text{ch}(ab)$, мы получаем из (5.2) и (5.3) соотношение

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_{ab}} = \mathbb{E} e^{-\sigma_a \left(\lambda + \frac{b^2}{2} \right)} \text{ch}(ab).$$

По формуле (3.4) имеем для $\lambda > 0$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_a} = \frac{1}{\text{ch}(a\sqrt{2\lambda})} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(1+2k)a\sqrt{2\lambda}}. \quad (5.4)$$

Следовательно,

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_{ab}} = \frac{\text{ch}(ab)}{\text{ch}(a\sqrt{2\lambda + b^2})} \quad (5.5)$$

и, значит,

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma_{ab}} = 2 \text{ch}(ab) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{(-1+2k)a\sqrt{2\lambda+b^2}}. \quad (5.6)$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 5).

1. Найти формулы (аналогичные формулам для $p_{\sigma_a}(t)$ и $\mathbb{P}(\sigma_a \leq t)$ в § 3) для $p_{\sigma_{ab}}(t)$ и $\mathbb{P}(\sigma_{ab} \leq t)$.
2. Исследовать распределение момента остановки $\bar{\sigma}_{ab} = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a + bt\}$.

Случай $b > 0$, $a > 0$ проиллюстрирован на рисунке:

(расходящиеся границы)

Для $b < 0$, $a > 0$ картина такова:

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай *расходящихся* границ был изучен в статье [7] также с помощью теоремы о преобразовании свободного выбора. При этом автор этой статьи отмечает, что его метод не работает для *сходящихся* границ. Весьма детальное исследование задач о пересечении границ броуновским движением для наклонных линий было проведено в большой статье [8]. Основные методы этой статьи основаны на принципах отражения и включения/исключения.

§ 6. О распределении $\sup B^\mu$ и $\sup |B^\mu|$ для броуновского движения B^μ со сносом

1. Пусть $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$ – броуновское движение со сносом: $B_t^\mu = \mu t + B_t$, $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. По определению момента $\tau_{ab} = \inf\{t : B_t \geq a + bt\}$ находим, что

$$\{\tau_{ab} > t\} = \left\{ \sup_{s \leq t} (B_s - bs) < a \right\}. \quad (6.1)$$

Отсюда и из (4.17), полагая $\mu = -b$, получаем, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} B_s^\mu \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu x} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sqrt{t}}\right) \quad (6.2)$$

и

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} (\sigma B_s + \mu s) \leq x\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{\frac{2\mu x}{\sigma^2}} \Phi\left(\frac{-x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right). \quad (6.3)$$

Из формулы (6.2) видим, что

(а) если $\mu \geq 0$, то

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s^\mu \leq x\right) = 0, \quad x \geq 0;$$

(б) если $\mu < 0$, то

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s^\mu \leq x\right) = 1 - e^{-2|\mu|x}, \quad (6.4)$$

т.е.

$$\sup_{s \geq 0} B_s^\mu \stackrel{\text{law}}{=} \frac{1}{2|\mu|} \mathcal{E}, \quad (6.5)$$

где $\mathcal{E}$ – случайная величина со стандартным экспоненциальным распределением ($\mathbb{P}(\mathcal{E} \geq t) = e^{-t}$, $t \geq 0$).

2. Интересно, что результат (6.5) можно также быстро получить из следующего общего утверждения, которое, в свою очередь, является простым следствием теоремы о преобразовании свободного выбора.

ЛЕММА 1. Пусть $M = (M_t)_{t \geq 0}$ – неотрицательный непрерывный мартингал такой, что $M_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$ с вероятностью единица и $M_0 = m > 0$ (m – константа). Тогда

$$\sup_{t \geq 0} M_t \stackrel{\text{law}}{=} \frac{m}{U}, \quad (6.6)$$

где $U = U[0, 1]$ – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tau_x = \inf\{t \geq 0 : M_t \geq x\}$, $x > 0$. Тогда по теореме о преобразовании свободного выбора $\mathbb{E} M_{t \wedge \tau_x} = m$, и, поскольку $0 \leq M_{t \wedge \tau_x} \leq x$, по теореме о мажорируемой сходимости находим, что

$$\begin{aligned} m &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} M_{t \wedge \tau_x} = \mathbb{E}[I(\tau_x < \infty)M_{\tau_x}] + \mathbb{E}[I(\tau_x = \infty)M_\infty] \\ &= x \mathbb{P}(\tau_x < \infty) \end{aligned}$$

и, значит, для $x > 0$

$$\mathbb{P}(\tau_x < \infty) = \frac{m}{x}. \quad (6.7)$$

Поскольку $\{\tau_x < \infty\} = \{\sup_{t \geq 0} M_t \geq x\}$, из (6.7) получаем, что

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} M_t \leq x\right) = 1 - \frac{m}{x} = \mathbb{P}\left(U \geq \frac{m}{x}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{m}{U} \leq x\right),$$

т.е. $\sup_{t \geq 0} M_t \stackrel{\text{law}}{=} m/U$. $\square$

Из этой леммы формулу (6.4) можно получить, используя следующее замечание.

Введем мартингал

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}, \quad t \geq 0,$$

где $\lambda = -2\mu > 0$. Это – непрерывный мартингал с $M_0 = 1$ и $M_\infty = 0$.

Из леммы выводим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s^\mu \leq x\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} e^{-2\mu B_s - \frac{(2\mu)^2}{2}s} \leq e^{-2\mu}x\right) \\ &= 1 - \frac{1}{e^{-2\mu x}} = 1 - e^{-2|\mu|x}, \end{aligned}$$

что и есть формула (6.4).

3. Теперь мы укажем другой метод отыскания распределения $\sup_{s \leq t} B_s^\mu$, $t \geq 0$, основанный на применении теоремы Гирсанова и принципа отражения для броуновского движения.

Из (1.34) имеем

$$P\left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu \leq x\right) = E e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} I\left(\sup_{t \leq T} B_t \leq x\right). \quad (6.8)$$

Отсюда видим, что для того чтобы найти распределение $\sup_{t \geq T} B_t^\mu$, надо знать *совместное* распределение пары случайных величин $(\sup_{t \leq T} B_t, B_T)$.

Используя принцип отражения (1.28a), находим, что для $x \geq y$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq y\right) &= P(B_T \geq 2x - y) \\ &= P\left(B_1 \geq \frac{2x - y}{\sqrt{T}}\right) = \int_{\frac{2x - y}{\sqrt{T}}}^{\infty} \varphi(u) du, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Из (6.9) заключаем, что вектор $(\sup_{u \leq 1} B_u, B_1)$ имеет плотность распределения вероятностей

$$f_{(\sup_{u \leq 1} B_u, B_1)}(x, y) = -2\varphi'(2x - y), \quad x \geq y \vee 0, \quad (6.10)$$

а $(\sup_{u \leq T} B_u, B_T)$ имеет плотность

$$f_{(\sup_{u \leq T} B_u, B_T)}(x, y) = -2\varphi'\left(\frac{2x - y}{\sqrt{T}}\right), \quad x \geq y \vee 0. \quad (6.11)$$

Отсюда следует, что вектор $(\sup_{t \leq T} B_t, \sup_{t \leq T} B_t - B_T)$ имеет плотность распределения вероятностей

$$g_{(\sup_{t \leq T} B_t, \sup_{t \leq T} B_t - B_T)}(x, y) = -2\varphi'\left(\frac{x + y}{\sqrt{T}}\right), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (6.12)$$

Из этой формулы видим, что случайные величины $\sup_{t \leq T} B_t$ и $\sup_{t \leq T} B_t - B_T$ имеют *одну и ту же* плотность распределения, равную $2\varphi(x/\sqrt{T})$, которая, очевидно, совпадает с плотностью

распределения случайной величины $|B_T|$. Таким образом, для фиксированного T

$$\sup_{t \leq T} B_t \stackrel{\text{law}}{=} \sup_{t \leq T} B_t - B_T \stackrel{\text{law}}{=} |B_T|.$$

Имея совместную плотность

$$f_{(\sup_{t \leq T} B_t, B_T)}(x, y) = -2\varphi' \left(\frac{2x - y}{\sqrt{T}} \right), \quad x \geq y \vee 0,$$

из (6.8) непосредственным интегрированием получаем распределение вероятностей случайной величины $\sup_{t \leq T} B_t^\mu$:

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu \leq x \right) = \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \Phi \left(\frac{-x - \mu T}{\sqrt{T}} \right). \quad (6.13)$$

Интересно заметить, что для получения этой формулы не обязательно оперировать с “двумерным принципом отражения” (6.9). На самом деле достаточно лишь знать, что формула (6.9) справедлива для $y = x$. Действительно, из (1.34), (1.27) с $y = x$ и свойства $\tilde{B} \stackrel{\text{law}}{=} B$, где $\tilde{B}$ – отраженное броуновское движение (см. (1.22)), следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu \leq x \right) &= \mathbf{P}(B_T^\mu \leq x) - \mathbf{P} \left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu > x, B_t^\mu \leq x \right) \\ &\stackrel{(1.34)}{=} \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - \mathbf{E} e^{\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} I \left(\sup_{t \leq T} B_t > x, B_T \leq x \right) \\ &\stackrel{(1.27)}{=} \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - \mathbf{E} e^{\mu(2x - \tilde{B}_T) - \frac{\mu^2}{2} T} I(\tilde{B}_T \geq x) \\ &= \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \mathbf{E} e^{-\mu B_T - \frac{\mu^2}{2} T} I(B_T \geq x) \\ &\stackrel{(1.34)}{=} \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \mathbf{E} I(B_T^{-\mu} \geq x) \\ &= \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \mathbf{P}(B_T \geq x + \mu T) \\ &= \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \mathbf{P}(B_T \leq -x - \mu T) \\ &= \Phi \left(\frac{x - \mu T}{\sqrt{T}} \right) - e^{2\mu x} \Phi \left(\frac{-x - \mu T}{\sqrt{T}} \right). \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 6).

1. Исследовать распределение момента остановки $\bar{\tau}_{ab} = \inf\{t : |B_t| \geq a + bt\}$.
2. Исследовать вопрос о распределении следующих векторных случайных величин:

$$\left(\sup_{t \leq T} |B_t|, B_T\right), \quad \left(\sup_{t \leq T} |B_t^\mu|, B_T^\mu\right)$$

и

$$\left(\sup_{t \leq T} B_t, \inf_{t \leq T} B_t, B_T\right), \quad \left(\sup_{t \leq T} B_t^\mu, \inf_{t \leq T} B_t^\mu, B_T^\mu\right).$$

§ 7. О распределении $\sup \hat{B}$ и $\sup |\hat{B}|$ для броуновского моста $\hat{B}$. Критерии Колмогорова и Смирнова

1. Совместное распределение вектора $(\sup B, B)$ было получено в § 6 на основании принципа отражения (см. (6.9), (6.10)). Сейчас мы укажем другой метод отыскания $\text{Law}(\sup B, B)$, основанный на приводимых ниже соображениях.

Чтобы найти совместное распределение вектора

$$\left(\sup_{s \leq 1} B_s, B_1 \right),$$

достаточно, конечно, знать *условное распределение*² (для $x \geq y \vee 0$)

$$\mathbf{P} \left(\sup_{s \leq 1} B_s \leq x \mid B_1 = y \right).$$

Это условное распределение, как нетрудно показать (задача 1), совпадает ($\mathbf{P}^{B_1}$ -п.н., где $\mathbf{P}^{B_1}(\cdot) = \mathbf{P}(B_1 \in \cdot)$) с распределением $\mathbf{P}(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x)$, где $\hat{B}^{0,y} = (\hat{B}_s^{0,y})_{s \leq 1}$ есть броуновский мост (из 0 в y):

$$\hat{B}_s^{0,y} = \hat{B}_s + sy, \quad (7.1)$$

а $\hat{B} = (\hat{B}_s)_{s \leq 1}$ — стандартный броуновский мост (из 0 в момент времени ноль в 0 в момент времени единица):

$$\hat{B}_s = B_s - sB_1, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (7.2)$$

Из (7.1) и (7.2) мы видим, что

$$\hat{B}_s^{0,y} = B_s + s(y - B_1). \quad (7.3)$$

Следующее замечание будет играть ключевую роль в наших последующих вычислениях: стандартный броуновский мост $\hat{B} = (\hat{B}_s)_{0 \leq s \leq 1}$ можно определить, отправляясь от некоторого броуновского движения $B = (B_s)_{0 \leq s < \infty}$, по формуле

$$\hat{B}_s = (1 - s)B_{\frac{s}{1-s}} \quad (7.4a)$$

---

²Заметим, что выражение $\mathbf{P}(\sup_{s \leq 1} B_s \in A \mid B_1 = y)$ есть всего лишь наглядное обозначение для функции $R(A; y)$ такой, что $R(A; B_1(\omega)) = \mathbf{P}(\sup_{s \leq 1} B_s \in A \mid \mathcal{F}^{B_1})(\omega)$ п.н., где $\mathcal{F}^{B_1}$ есть σ -алгебра, порожденная случайной величиной B_1 .

и, аналогично,

$$\hat{B}_s^{0,y} = \hat{B}_s + sy = (1-s)B_{\frac{s}{1-s}} + sy, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (7.4b)$$

(Для этого достаточно убедиться в том, что ковариационные функции процессов, стоящих в левых и правых частях этих соотношений, совпадают.)

Следовательно (с $t = \frac{s}{s-1}$, $s = \frac{t}{1+t}$, $1-s = \frac{1}{1+t}$), при $x \geq y$

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x\right) &= P\left(\sup_{s \leq 1} [(1-s)B_{\frac{s}{1-s}} + sy] \leq x\right) \\ &= P\left(\sup_{t \geq 0} \left[\frac{1}{1+t}B_t + \frac{ty}{1+t}\right] \leq x\right) = P\left(\sup_{t \geq 0} \frac{B_t + ty}{1+t} \leq x\right) \\ &= P\left(\sup_{t \geq 0} \frac{t\left(\frac{B_t}{t} + y\right)}{1+t} \leq x\right) = P\left(\sup_{t \geq 0} \frac{\frac{B_t}{t} + y}{\frac{1}{t} + 1} \leq x\right) \\ &= P\left(\sup_{u \geq 0} \frac{uB_{1/u} + y}{u+1} \leq x\right) = P\left(\sup_{u \geq 0} \frac{B_u + y}{u+1} \leq x\right) \\ &= P(B_u + y \leq x(1+u) \text{ для всех } u \geq 0) \\ &= P(B_u + xu \leq xy \text{ для всех } u \geq 0) \\ &= P\left(\sup_{u \geq 0} (B_u - xu) \leq x - y\right). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Мы знаем из (6.5), что для $x > 0$

$$\sup_{u \geq 0} (B_u - xu) \stackrel{\text{law}}{=} \frac{1}{2x} \mathcal{E}, \quad (7.6)$$

где $\mathcal{E}$ – стандартная экспоненциально распределенная случайная величина.

Отсюда и из (7.5) получаем

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x\right) &= P\left(\frac{1}{2x} \mathcal{E} \leq x - y\right) \\ &= P\left(\frac{1}{2} \mathcal{E} \leq \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4}\right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

и

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s \leq x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E} \leq x^2\right) = \mathbf{P}\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}} \leq x\right),$$

т.е.

$$\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s \stackrel{\text{law}}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}} \quad (7.8)$$

или, более подробно,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s \leq x\right) = 1 - e^{-2x^2}.$$

В математической статистике распределение для $\sup \hat{B}$ хорошо известно – это есть распределение в *критерии Смирнова*.

Из (7.7), учитывая, что, как было отмечено выше,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} B_s \leq x \mid B_1 = y\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x\right),$$

находим:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} B_s \geq x, B_1 \leq y\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y \mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\mathcal{E} \geq \left(x - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-2(x - \frac{z}{2})^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}(z - 2x)^2} dz = \Phi(y - 2x). \end{aligned}$$

Отсюда (для $x \geq y \vee 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} B_s \leq x, B_1 \leq y\right) &= \mathbf{P}(B_1 \leq y) - \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq 1} B_s \geq x, B_1 \leq y\right) \\ &= \Phi(y) - \Phi(y - 2x), \end{aligned} \quad (7.9)$$

и, следовательно, совместная плотность вектора $(\sup_{s \leq 1} B_s, B_1)$ задается формулой

$$\begin{aligned} f_{(\sup_{s \leq 1} B_s, B_1)}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \varphi(y - 2x) \\ &= 2\varphi'(y - 2x) = -2\varphi'(2x - y), \end{aligned} \quad (7.10)$$

что совпадает с уже найденной ранее формулой (6.10).

2. Как было упомянуто выше, закон распределения $\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s$ связан с критерием Смирнова. Распределение для случайной величины $\sup_{s \leq 1} |\hat{B}_s|$ связано с другим статистическим критерием – *критерием согласия Колмогорова*. Покажем, что *распределение Колмогорова*

$$K(x) \equiv P\left(\sup_{s \leq 1} |\hat{B}_s| \leq x\right), \quad x \geq 0, \quad (7.11)$$

задается следующей формулой:

$$K(x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 x^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}. \quad (7.12)$$

Аналогично (7.5) имеем

$$P\left(\sup_{s \leq 1} |\hat{B}_s^{0,y}| \leq x\right) = P\left(\sup_{u \geq 0} \left| \frac{B_u + y}{u + 1} \right| \leq x\right).$$

В частности, для $y = 0$ находим, что

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{s \leq 1} |\hat{B}_s| \leq x\right) &= P\left(\sup_{u \geq 0} \frac{|B_u|}{1 + u} \leq x\right) \\ &= P(|B_u| \leq x(1 + u) \text{ для всех } u \geq 0). \end{aligned}$$

Следовательно, если

$$\gamma_x = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq x(1 + t)\}, \quad (7.13)$$

то

$$P\left(\sup_{s \leq 1} |\hat{B}_s| \leq x\right) = P(\gamma_x = \infty). \quad (7.14)$$

Дадим мартингальное доказательство, основанное на теореме о преобразовании свободного выбора, того факта, что

$$P(\gamma_x = \infty) = K(x), \quad (7.15)$$

где $K(x)$ задается формулой (7.12).

С этой целью рассмотрим мартингал

$$M_t = \frac{e^{\lambda B_t} + e^{-\lambda B_t}}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{2} t} \quad \left(= \text{ch}(\lambda B_t) e^{-\frac{\lambda^2}{2} t}\right). \quad (7.16)$$

По определению (7.13) момента γ_x

$$|B_{t \wedge \gamma_x}| \leq x(1 + t \wedge \gamma_x).$$

Учитывая оценку

$$\operatorname{ch} x \leq e^x, \quad x \geq 0,$$

получаем

$$M_{t \wedge \gamma_x} \leq e^{(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2})(t \wedge \gamma_x) + \lambda x}.$$

Если $\lambda \geq 2x$, то $\lambda x - \lambda^2/2 \leq 0$ и

$$0 \leq M_{t \wedge \gamma_x} \leq e^{\lambda x}.$$

Таким образом, мы можем применить теорему о преобразовании свободного выбора, которая дает

$$\mathbb{E} M_{t \wedge \gamma_x} = 1$$

для всех $t \geq 0$, и, следовательно,

$$1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} M_{t \wedge \gamma_x} = \mathbb{E} \left[I(\gamma_x < \infty) \operatorname{ch}(\lambda B_{\gamma_x}) \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} \gamma_x} + I(\gamma_x = \infty) \cdot 0 \right],$$

т.е. для $\lambda \geq 2x$

$$\mathbb{E} \left[I(\gamma_x < \infty) \operatorname{ch}(\lambda B_{\gamma_x}) e^{-\frac{\lambda^2}{2} \gamma_x} \right] = 1$$

или

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[I(\gamma_x < \infty) e^{\lambda x(1 + \gamma_x) - \frac{\lambda^2}{2} \gamma_x} \right] \\ &= 2 - \mathbb{E} \left[I(\gamma_x < \infty) e^{-\lambda x(1 + \gamma_x) - \frac{\lambda^2}{2} \gamma_x} \right]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Возьмем здесь $\lambda = 2kx$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда находим, что

$$\left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} \right) \gamma_x + \lambda x = 2kx^2(1 - k)\gamma_x + 2kx^2$$

и

$$\left(-\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} \right) \gamma_x - \lambda x = -2kx^2(1 + k)\gamma_x - 2kx^2.$$

Учитывая эти формулы, из (7.17) получаем, что

$$\begin{aligned} a_k &\equiv \mathbb{E} \left[I(\gamma_x < \infty) e^{2k(1-k)x^2 \gamma_x} \right] \\ &= 2e^{-2kx^2} - e^{-4kx^2} \mathbb{E} \left[I(\gamma_x < \infty) e^{-2k(1+k)x^2 \gamma_x} \right] \\ &= 2e^{-2kx^2} - e^{-4kx^2} a_{k+1}. \end{aligned}$$

Из этих рекуррентных соотношений следует, что

$$\begin{aligned} a_1 &= P(\gamma_x < \infty) = 2e^{-2x^2} - e^{-4x^2} a_2 \\ &= 2e^{-2x^2} - 2e^{-8x^2} + e^{-12x^2} a_3 = \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$P(\gamma_x < \infty) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 x^2}$$

и

$$\begin{aligned} K(x) &= P(\gamma_x = \infty) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 x^2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $a > 0$, $b > 0$

$$\begin{aligned} P(|B_t| \leq at + b \text{ для всех } t \geq 0) \\ &= P(|B_t| \leq \sqrt{ab}(1+t) \text{ для всех } t \geq 0) \\ &= P(\gamma_{\sqrt{ab}} = \infty). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P(|B_t| \leq at + b \text{ для всех } t \geq 0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 ab}. \end{aligned}$$

3. ЗАМЕЧАНИЕ 2. Кай-Лай Чжуном [9] сформулирован интересный вопрос: как увидеть, что функция

$$G(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-k^2 y}, \quad y \geq 0,$$

является функцией распределения? ($G(y)$ соотносится с $K(x)$ по очевидной формуле $G(2x^2) = K(x)$.) Его ответ на этот вопрос основывался на установленном им же равенстве

$$G(y) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{E}_n}{n^2} \leq y\right),$$

где $(\mathcal{E}_n)_{n \geq 1}$ – последовательность независимых одинаково экспоненциально распределенных случайных величин.

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 7).

1. Доказать, что для $x \geq y \vee 0$ (P^{B_1} -п.н., где $P^{B_1}(\cdot) = P(B_1 \in \cdot)$) справедливо равенство

$$P\left(\sup_{s \leq 1} B_s \leq x \mid B_1 = y\right) = P\left(\sup_{s \leq 1} \hat{B}_s^{0,y} \leq x\right).$$

2. Доказать (7.4a) и (7.4b).
3. Сравнить приведенное выше *мартингалльное* доказательство формул (7.11) и (7.12) с оригинальным доказательством Колмогорова [10] и доказательством Дуба [11], [12].
4. В дополнение к формулам для $K(x)$ в (7.12) доказать, что справедливо также представление

$$K(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2 \frac{x^2}{2}}$$

и что плотность $f_K(x)$ распределения $K = K(x)$ задается формулой

$$f_K(x) = 8x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 e^{-2k^2 x^2}.$$

§ 8. О фундаментальных тождествах Вальда для броуновского движения

1. Следующие три тождества Вальда играют важную роль во многих задачах математической статистики и теории вероятностей.

Если $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – броуновское движение и τ – момент остановки, то

$$\mathbb{E} \sqrt{\tau} < \infty \Rightarrow \mathbb{E} B_\tau = 0, \quad (8.1)$$

$$\mathbb{E} \tau < \infty \Rightarrow \mathbb{E} B_\tau^2 = \mathbb{E} \tau \quad (8.2)$$

и

$$\mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2} \tau} < \infty \Rightarrow \mathbb{E} e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2} \tau} = 1. \quad (8.3)$$

(Условие $\mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2} \tau} < \infty$ есть хорошо известное условие Новикова, а (8.3) – критерий Новикова.)

В разделе С §1 мы видели, что выполнение условия

$$\mathbb{E} e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2} \tau} = 1$$

дает возможность построить новую вероятностную меру $\tilde{\mathbb{P}}$ с $d\tilde{\mathbb{P}} = Z_\tau(\lambda) d\mathbb{P}$, где $Z_\tau(\lambda) = e^{\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2} \tau}$, такую, что процесс

$$\tilde{B}_t^\lambda = B_t - \lambda(t \wedge \tau)$$

является броуновским движением.

Стохастическая экспонента

$$Z_t(\lambda) = \mathcal{E}(\lambda)_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$$

и ее обобщения для семимартингалов играют чрезвычайно важную роль в общем стохастическом исчислении (см. [4], [5]).

2. Мы сосредоточим сейчас наше внимание на доказательстве утверждения (8.3).

Введем следующие три условия:

$$\begin{aligned} \text{I}(\tfrac{1+\varepsilon}{2}; \lambda): \quad & \mathbb{E} e^{\frac{1+\varepsilon}{2} \lambda^2 \tau} < \infty, \quad \varepsilon > 0 \quad [5]; \\ \text{II}(\tfrac{1}{2}; \lambda): \quad & \mathbb{E} e^{\frac{1}{2} \lambda^2 \tau} < \infty \quad [13], \quad [14]; \\ \text{III}(\tfrac{1}{2}-; \lambda): \quad & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln \mathbb{E} e^{(\frac{1}{2}-\varepsilon) \lambda^2 \tau} = 0 \quad [15], \quad [24]. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$I\left(\frac{1+\varepsilon}{2}; \lambda\right) \Rightarrow \Pi\left(\frac{1}{2}; \lambda\right) \Rightarrow \text{III}\left(\frac{1}{2}-; \lambda\right),$$

и мы хотим показать, что самое слабое условие $\text{III}\left(\frac{1}{2}-; \lambda\right)$ влечет свойство $E Z_\tau(\lambda) = 1$. Оказывается, что если доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\lambda > 0$

$$I\left(\frac{1+\varepsilon}{2}; \lambda\right): E e^{\frac{1+\varepsilon}{2} \lambda^2 \tau} < \infty \Rightarrow E Z_\tau(\lambda) = 1,$$

то тогда легко можно доказать, что

$$\Pi\left(\frac{1}{2}; \lambda\right) \Rightarrow \text{III}\left(\frac{1}{2}-; \lambda\right) \Rightarrow E Z_\tau(\lambda) = 1.$$

Чтобы доказать, что

$$I\left(\frac{1+\varepsilon}{2}; \lambda\right) \Rightarrow E Z_\tau(\lambda) = 1, \quad (8.4)$$

достаточно проверить, что для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_t E (Z_{t \wedge \tau}(\lambda))^{1+\delta} < \infty, \quad (8.5)$$

поскольку это условие (8.5) влечет равномерную интегрируемость семейства $\{Z_{t \wedge \tau}(\lambda), t \geq 0\}$, обеспечивающую требуемое равенство $E Z_\tau(\lambda) = 1$.

Чтобы доказать (8.5), запишем $(Z_t(\lambda))^{1+\delta}$ в следующем виде:

$$(Z_t(\lambda))^{1+\delta} = \Psi_t^{(1)} \cdot \Psi_t^{(2)} = e^{(1+\delta)B_t - \frac{p(1+\delta)^2}{2}t} \cdot e^{\frac{p(1+\delta)^2}{2}t - \frac{1+\delta}{2}t}. \quad (8.6)$$

Возьмем $p = 1 + \varepsilon$, $q = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$. Тогда по неравенству Гёльдера

$$E (Z_t(\lambda))^{1+\delta} \leq [E(\Psi_t^{(1)})^p]^{1/p} \cdot [E(\Psi_t^{(2)})^q]^{1/q} = 1 \cdot [E(\Psi_t^{(2)})^q]^{1/q}.$$

Выберем теперь $\delta > 0$ такое, что для данного $0 < \varepsilon < 1$

$$\delta(1 + \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon)(1 + 2\varepsilon)}.$$

Тогда

$$(\Psi_t^{(2)})^q \leq e^{(\frac{1}{2} + \varepsilon)t}.$$

Следовательно,

$$E(Z_{t \wedge \tau}(\lambda))^{1+\delta} \leq E e^{(\frac{1}{2} + \varepsilon)\tau} < \infty$$

и, значит, $1 = \lim_{t \rightarrow \infty} E Z_{t \wedge \tau}(\lambda) = E Z_\tau(\lambda)$.

Покажем теперь, что

$$\Pi\left(\frac{1}{2}; \lambda\right) : \mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} Z_\tau(\lambda) = 1.$$

Возьмем $0 < \varepsilon < 1$ и $\lambda_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\lambda$. Для такого λ_ε

$$\mathbb{E} e^{\frac{1+\varepsilon}{2}\lambda_\varepsilon^2\tau} = \mathbb{E} e^{\frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2\lambda^2}{2}\tau} \leq \mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} < \infty.$$

Тогда из (8.4), применяя неравенство Гёльдера с $1/p = 1 - \varepsilon$, $1/q = \varepsilon$, получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E} Z_\tau(\lambda_\varepsilon) = \mathbb{E} Z_\tau((1 - \varepsilon)\lambda) = \mathbb{E} e^{\lambda(1-\varepsilon)B_\tau - \frac{\lambda^2(1-\varepsilon)^2}{2}\tau} \\ &= \mathbb{E} e^{(1-\varepsilon)(\lambda B_\tau - \frac{\lambda^2}{2}\tau)} e^{\frac{(1-\varepsilon)\varepsilon\lambda^2\tau}{2}} \leq [\mathbb{E} Z_\tau(\lambda)]^{1-\varepsilon} \left[\mathbb{E} e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau} \right]^\varepsilon \\ &\leq [\mathbb{E} Z_\tau(\lambda)]^{1-\varepsilon} \left[\mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} \right]^\varepsilon. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Если $\mathbb{E} e^{\frac{\lambda^2}{2}\tau} < \infty$, то из (8.7) предельным переходом при $\varepsilon \downarrow 0$ получаем, что $\mathbb{E} Z_\tau(\lambda) \geq 1$. Но, очевидно, $\mathbb{E} Z_\tau(\lambda) \leq 1$. Поэтому $\mathbb{E} Z_\tau(\lambda) = 1$.

Чтобы доказать, наконец, импликацию

$$\text{III}\left(\frac{1}{2}; \lambda\right) : \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln \mathbb{E} e^{\frac{1-\varepsilon}{2}\lambda^2\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E} Z_\tau(\lambda) = 1, \quad (8.8)$$

достаточно заметить, что из соотношения

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln \mathbb{E} e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau} = 0$$

или эквивалентного ему равенства

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\mathbb{E} e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau} \right]^\varepsilon = 1$$

следует, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E} e^{\frac{(1-\varepsilon)\lambda^2}{2}\tau} < \infty.$$

Отсюда для $\lambda_\varepsilon = (1 - \varepsilon)\lambda$ получаем

$$\mathbb{E} e^{\frac{1+\varepsilon}{2}\lambda_\varepsilon^2\tau} = \mathbb{E} e^{\frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)^2\lambda^2}{2}\tau} = \mathbb{E} e^{\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)}{2}\tau} < \infty.$$

Тем самым, мы можем использовать критерий $I\left(\frac{1+\varepsilon}{2}; \lambda_\varepsilon\right)$, который в силу (8.7) дает неравенство

$$1 \leq [E Z_\tau(\lambda)]^{1-\varepsilon} \left[E e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau} \right]^\varepsilon. \quad (8.9)$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$ и пользуясь свойством $\text{III}\left(\frac{1}{2}-; \lambda\right)$: $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln E e^{(1-\varepsilon)\frac{\lambda^2}{2}\tau} = 0$, находим, что $1 \geq E Z_\tau(\lambda)$. Вместе с очевидным неравенством $E Z_\tau(\lambda) \leq 1$ это дает требуемое равенство $E Z_\tau(\lambda) = 1$.

3. Во многих случаях (наряду с установленными критериями I, II и III) оказывается полезным критерий Казамаки (см., например, [16]):

$$\sup_{t \geq 0} E e^{\frac{1}{2} B_{t \wedge \tau}} < \infty \quad \Rightarrow \quad E e^{B_\tau - \frac{\tau}{2}} = 1. \quad (8.10)$$

Например, для $\tau = \tau_a$, где критерий Новикова (II) не работает (поскольку здесь $E e^{\frac{1}{2}\tau_a} = \infty$), критерий Казамаки применим, поскольку, очевидно, $E e^{\frac{1}{2} B_{t \wedge \tau_a}} \leq e^{\frac{a}{2}} < \infty$ для всех $t \geq 0$.

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 8).

1. Дать доказательство первого (8.1) и второго (8.2) тождеств Вальда.
2. Доказать, что процесс $\tilde{B}^\lambda = (\tilde{B}_t^\lambda)_{t \geq 0}$ с $\tilde{B}_t^\lambda = B_t - \lambda(t \wedge \tau)$ является броуновским движением относительно меры $\tilde{P}$, где $d\tilde{P} = Z_\tau(\lambda) dP$.
3. Доказать (используя общую формулу Ито для семимартингалов), что стохастическая экспонента $\mathcal{E} = (\mathcal{E}(X)_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет уравнению

$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_{t-} dX_t.$$

(Определение стохастической экспоненты $\mathcal{E} = (\mathcal{E}(X)_t)_{t \geq 0}$ и формулу Ито для семимартингалов можно найти, например, в [4], [5].)

4. Проанализировать доказательства критерия Новикова (8.3), приведенные в книгах [3], [5].
5. Доказать критерий Казамаки (8.10).
6. Доказать, что

$$E e^{\frac{1}{2} B_{t \wedge \tau}} \leq [E e^{\frac{1}{2}\tau}]^2.$$

(Отсюда, следует, в частности, что критерий Казамаки слабее критерия Новикова.)

§ 9. Свойства момента остановки
 $\rho_c = \inf\{t \geq 0 : B_t \leq -a + c\sqrt{t+b}\},$
 где $b \geq 0, a > c\sqrt{b}$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$\begin{aligned} P(\rho_c < \infty) &= 1 \\ E(\rho_c + b)^\nu &= \frac{H_\nu(a/\sqrt{b}) b^\nu}{H_\nu(c)} \\ &= \frac{D_{2\nu}(-a/\sqrt{b}) b^\nu e^{\frac{a^2 - c^2 b}{4b}}}{D_{2\nu}(-c)} \\ \operatorname{Re} \nu &< \nu(c) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &\equiv \int_0^\infty e^{zt - \frac{t^2}{2}} t^{-2\nu-1} dt \\ &= D_{2\nu}(-z) e^{\frac{z^2}{4}} \Gamma(-2\nu), \quad \operatorname{Re} \nu < 0, \end{aligned} \quad (9.1)$$

$D_\nu(z)$ есть функция параболического цилиндра порядка ν (см. [7, 9.241.2]) и $\nu(c)$ – первый положительный нуль функции $D_{2\nu}(-c)$.

Очевидно, что $\rho_c \leq \tau_c$ и поэтому $P(\rho_c < \infty) = 1$. Для $\lambda > 0$ мы также имеем, что $1 \geq E e^{\lambda B_{\rho_c} - \frac{\lambda^2}{2} \rho_c} \geq E e^{\lambda B_{\tau_c} - \frac{\lambda^2}{2} \tau_c} = 1$. Следовательно,

$$E e^{\lambda B_{\rho_c} - \frac{\lambda^2}{2} \rho_c} = 1.$$

Отсюда, учитывая, что $\rho_c < \infty$ (Р-п.н.), получаем

$$E e^{\lambda(-a + c\sqrt{\rho_c + b}) - \frac{\lambda^2}{2} \rho_c} = 1$$

или

$$E e^{\lambda c\sqrt{\rho_c + b} - \frac{\lambda^2}{2}(\rho_c + b)} = e^{a\lambda - \frac{\lambda^2}{2}b}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\lambda^{-2\nu-1}$, $\operatorname{Re} \nu < 0$, и интегрируя по $d\lambda$, находим, что

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty E e^{\lambda c\sqrt{\rho_c + b} - \frac{\lambda^2}{2}(\rho_c + b)} \cdot \lambda^{-2\nu-1} d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{a\lambda - \frac{\lambda^2}{2}} \cdot \lambda^{-2\nu-1} d\lambda = H_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) b^{-\nu}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

где $H_\nu(z)$ определено в (9.1).

После замены переменных в первом интеграле в (9.2) получаем

$$H_\nu(c) \mathbb{E}(\rho_c + b)^\nu = H_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) b^\nu.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}(\rho_c + b)^\nu = \frac{H_\nu(a/\sqrt{b}) b^\nu}{H_\nu(c)}, \quad (9.3)$$

или (см. (9.1))

$$\mathbb{E}(\rho_c + b)^\nu = \frac{D_{2\nu}(-a/\sqrt{b}) b^\nu e^{\frac{a^2 - c^2 b}{4b}}}{D_{2\nu}(-c)} \quad (9.4)$$

для всех ν таких, что $\operatorname{Re} \nu < 0$. С помощью аналитического продолжения или используя функциональное соотношение

$$-2\nu H_\nu(z) \equiv \int_0^\infty e^{zt - t^2/2} (t - z) t^{-2\nu} dt = H_{\nu-1}(z) - z H_{\nu-1/2}(z), \quad (9.5)$$

устанавливаем, что эта формула остается справедливой для всех ν с $\operatorname{Re} \nu < \nu(c)$.

Более деликатный анализ показывает, что

$$\mathbb{P}(\rho_c > t) \sim \frac{\text{const}}{t^{\nu(c)}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (9.6)$$

где $\nu(c)$ – непрерывная монотонная функция такая, что

$$\nu(-\infty) = 0, \quad \nu(0) = \frac{1}{2}, \quad \nu(1) = 1, \quad \nu(\infty) = \infty. \quad (9.7)$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием §9).

1. Доказать формулу (9.3) и (9.5).
2. Обосновать асимптотическое выражение (9.6).
3. Доказать непрерывность и монотонность функции $\nu(c)$ и установить свойства (9.7).
4. Ознакомиться со статьями [30], [31] и [14], посвященными исследованию свойств моментов ρ_c , и сравнить приведенные там доказательства свойства (9.4) с доказательством, данным в настоящем параграфе.

§ 10. Свойства момента остановки

$\delta_c = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq c\sqrt{t+b}\}, b > 0$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_c + b)^\nu &= \frac{b^\nu H_\nu(0)}{\frac{1}{2}(H_\nu(c) + H_\nu(-c))} \\ &= \frac{2b^\nu e^{-c^2/4}}{D_{2\nu}(-c) + D_{2\nu}(c)} \\ \operatorname{Re} \nu &< \nu^*(c) \end{aligned}$$

Здесь $\nu^*(c)$ – первый положительный корень уравнения $D_{2\nu}(-c) + D_{2\nu}(c) = 0$ (функции H_ν и $D_{2\nu}$ определены в §9).

Согласно определению (9.1),

$$H_\nu(z) = \int_0^\infty e^{zt - \frac{t^2}{2}} t^{-2\nu-1} dt. \quad (10.1)$$

Используя второе равенство в (9.1), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \operatorname{ch}(zt) e^{-\frac{t^2}{2}} t^{-2\nu-1} dt &= \frac{1}{2}(H_\nu(z) + H_\nu(-z)) \\ &= \frac{1}{2}(D_{2\nu}(z) + D_{2\nu}(-z)) e^{\frac{z^2}{4}} \Gamma(-2\nu), \quad \operatorname{Re} \nu < 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Аналогично случаю, рассмотренному в §9 для момента остановки ρ_c , получаем что для $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E} \operatorname{ch}(\lambda \delta_c) e^{-\frac{\lambda^2}{2} \delta_c} = 1. \quad (10.3)$$

Тот же метод (умножения обеих частей на $\lambda^{-2\nu-1}$, $\operatorname{Re} \nu < 0$, и интегрирования по $d\lambda$), что и в §9, приводит к следующему выражению (ср. (9.3)):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\delta_a + b)^\nu &= \frac{H_\nu(0)b^\nu}{\frac{1}{2}(H_\nu(c) + H_\nu(-c))} \\ &= \frac{2b^\nu e^{-c^2/4}}{D_{2\nu}(c) + D_{2\nu}(-c)}, \quad \operatorname{Re} \nu < \nu^*(c), \end{aligned} \quad (10.4)$$

где $\nu^*(c)$ – первый положительный корень уравнения $D_{2\nu}(c) + D_{2\nu}(-c) = 0$.

Функция $\nu^* = \nu^*(c)$ непрерывна и монотонна и

$$\nu^*(0) = \infty, \quad \nu^*(1) = 1, \quad \nu^*(\infty) = 0. \quad (10.5)$$

Можно показать, что

$$P(\delta_c > t) \sim \frac{\text{const}}{t^{\nu^*(c)}}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (10.6)$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 10).

1. Дать во всех подробностях доказательство формул (10.3), (10.4).
2. Доказать формулы (10.5) и (10.6).
3. Используя технику, примененную при изучении моментов ρ_c (§ 9) и δ_c (настоящий § 10), исследовать момент остановки

$$\Delta_c = \inf\{0 \leq t \leq 1 : |B_t| \geq c\sqrt{1-t}\}.$$

4. Ознакомиться с [32] и [14], где изучались свойства момента δ_c .

§ 11. Свойства моментов остановки

$$\tau_{\geq b}^\mu = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu \geq b\}, \quad \tau_{\leq a}^\mu = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu \leq a\}$$

$$\text{и } \tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu \wedge \tau_{\geq b}^\mu, \text{ где } a < 0 < b$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ($\mu \geq 0$):

$$P(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = P(\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu) = \frac{1 - e^{-2\mu b}}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}}$$

$$P(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu) = P(\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\geq b}^\mu) = \frac{e^{-2\mu a} - 1}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}}$$

$$E e^{-\lambda \tau_{a,b}^\mu} = \frac{e^{\mu b} \operatorname{sh}(-a\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}) + e^{\mu a} \operatorname{sh}(b\sqrt{\mu^2 + 2\lambda})}{\operatorname{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}]}$$

1. В § 2 для случая $\mu = 0$ было показано, что

$$P(\tau_{\leq a}^0 < \tau_{\geq b}^0) = P(\tau_{a,b}^0 = \tau_{\leq a}^0) = \frac{b}{b-a} \quad (11.1)$$

и

$$P(\tau_{\geq b}^0 < \tau_{\leq a}^0) = P(\tau_{a,b}^0 = \tau_{\geq b}^0) = \frac{|a|}{b-a} \quad (11.2)$$

(см. формулы (2.15) и (2.16), где $\tau_a = \tau_{\leq a}^0$ и $\tau_b = \tau_{\geq b}^0$).

Чтобы доказать соответствующие формулы для $P(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu)$ и $P(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu)$, рассмотрим мартингал

$$M_t = e^{\lambda(B_t^\mu - \mu t) - \frac{\lambda^2}{2}t}, \quad t \geq 0. \quad (11.3)$$

Положим $\lambda = -2\mu$. Тогда

$$M_t = e^{-2\mu B_t^\mu}, \quad t \geq 0.$$

Здесь $0 \leq M_{t \wedge \tau_{a,b}^\mu} \leq e^{2\mu a}$ для всех $t \geq 0$. По теореме о преобразовании свободного выбора,

$$\mathbb{E} M_{\tau_{a,b}^\mu} = 1. \quad (11.4)$$

Обозначим

$$B = \{\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\geq b}^\mu\}, \quad A = \{\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1. \quad (11.5)$$

Тогда из (11.4) находим

$$1 = \mathbb{P}(B)e^{-2\mu b} + (1 - \mathbb{P}(B))e^{-2\mu a},$$

что дает для $\mathbb{P}(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = \mathbb{P}(A)$ и $\mathbb{P}(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu) = \mathbb{P}(B)$ следующие формулы:

$$\mathbb{P}(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = \frac{1 - e^{-2\mu b}}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}} \quad (11.6)$$

и

$$\mathbb{P}(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu) = \frac{e^{-2\mu a} - 1}{e^{-2\mu a} - e^{-2\mu b}}. \quad (11.7)$$

Заметим, что эти формулы могут быть записаны также в следующем виде:

$$\mathbb{P}(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = e^{\mu a} \frac{\text{sh}(b\mu)}{\text{sh}[(b-a)\mu]} \quad (11.8)$$

и

$$\mathbb{P}(\tau_{\geq b}^\mu < \tau_{\leq a}^\mu) = e^{\mu b} \frac{\text{sh}(-a\mu)}{\text{sh}[(b-a)\mu]}, \quad (11.9)$$

где $\text{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

2. Рассмотрим сейчас преобразование Лапласа для величин $\tau_{\leq a}^\mu$, $\tau_{\geq b}^\mu$ и $\tau_{a,b}^\mu = \tau_{\leq a}^\mu \wedge \tau_{\geq b}^\mu$. Из (11.4) следует, что для любого $\lambda \geq 0$ и $\tau = \tau_{a,b}^\mu$

$$\mathbb{E} e^{\lambda(B_\tau^\mu - \mu\tau) - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1 \quad (11.10)$$

и

$$\mathbb{E} e^{-\lambda(B_\tau^\mu - \mu\tau) - \frac{\lambda^2}{2}\tau} = 1. \quad (11.11)$$

Отсюда получаем

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda b - \tau(\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2})}; B\right] + \mathbb{E}\left[e^{\lambda a - \tau(\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2})}; A\right] = 1 \quad (11.12)$$

и

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda b - \tau(-\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2})}; B\right] + \mathbb{E}\left[e^{-\lambda a - \tau(-\lambda\mu + \frac{\lambda^2}{2})}; A\right] = 1. \quad (11.13)$$

Для фиксированного $\theta > 0$ выберем $\lambda > 0$ так, чтобы выполнялось равенство $\lambda\mu + \lambda^2/2 = \theta$. Ясно, что $\lambda = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta}$. Тогда из (11.12) получаем, что

$$e^{b(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta})} \mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; B) + e^{a(-\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta})} \mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; A) = 1. \quad (11.14)$$

Аналогичным образом, в (11.13) возьмем $\lambda > 0$ такое, что (для фиксированного $\theta > 0$) $-\lambda\mu + \lambda^2/2 = \theta$. Решая это квадратное уравнение, видим, что λ должно определять равенством $\lambda = \mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta}$. Таким образом, из (11.13) получаем

$$e^{b(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta})} \mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; B) + e^{a(\mu + \sqrt{\mu^2 + 2\theta})} \mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; A) = 1. \quad (11.15)$$

Из уравнений (11.14) и (11.15) находим $\mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; B)$ и $\mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; A)$:

$$\mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; B) = \mathbb{E}(e^{-\theta\tau_{\geq b}^{\mu}}; B) = e^{\mu b} \frac{\text{sh}[-a\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}{\text{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]} \quad (11.16)$$

и

$$\mathbb{E}(e^{-\theta\tau}; A) = \mathbb{E}(e^{-\theta\tau_{\leq a}^{\mu}}; A) = e^{\mu a} \frac{\text{sh}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}{\text{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]} \quad (11.17)$$

Из этих формул, в свою очередь, следует (в силу определения множеств A и B и формул (11.8) и (11.9)), что

$$\mathbb{E}e^{-\theta\tau_{a,b}^{\mu}} = \frac{e^{\mu b} \text{sh}[-a\sqrt{\mu^2 + 2\theta}] + e^{\mu a} \text{sh}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}{\text{sh}[(b-a)\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}, \quad (11.18)$$

что и есть требуемая формула (с θ вместо λ).

3. Рассмотрим частный случай полученных формул с $a = -b$, $b > 0$. Из (11.18) имеем

$$\mathbb{E}e^{-\theta\tau_{-b,b}^{\mu}} = \frac{[e^{\mu b} + e^{-\mu b}] \text{sh}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}{\text{sh}[2b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}. \quad (11.19)$$

Поскольку $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)$, то

$$\mathbf{E} e^{-\theta \tau_{-b,b}^\mu} = \frac{\operatorname{ch}(\mu b)}{\operatorname{ch}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}. \quad (11.20)$$

Отметим, что эта формула была получена ранее в § 5, где мы рассматривали момент остановки $\sigma_{ab} = \inf\{t \geq 0 : |B_t - bt| \geq a\}$. В самом деле, согласно (5.5) (с $\lambda = \theta$),

$$\mathbf{E} e^{-\theta \sigma_{ab}} = \frac{\operatorname{ch}(ab)}{\operatorname{ch}[a\sqrt{b^2 + 2\theta}]}. \quad (11.21)$$

Но если взять здесь $a = b$, $-b = \mu$, то мы получим

$$\sigma_{ab} = \sigma_{b,-\mu} = \tau_{-b,b}^\mu.$$

Таким образом, для $a = b$, $-b = \mu$ из (11.21) находим представление

$$\mathbf{E} e^{-\theta \sigma_{ab}} = \frac{\operatorname{ch}(\mu b)}{\operatorname{ch}[b\sqrt{\mu^2 + 2\theta}]}, \quad (11.22)$$

что совпадает с (11.20).

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 11).

1. Доказать справедливость соотношения (11.5).
2. Восстановить детали доказательств соотношений (11.16) и (11.17).
3. Используя формулу (11.9), показать, что если a фиксировано ($a < 0$) и $b \uparrow \infty$, то для $\mu > 0$

$$\lim_{b \uparrow \infty} \mathbf{P}(\tau_{\leq a}^\mu < \tau_{\geq b}^\mu) = \mathbf{P}\left(\inf_{t \geq 0} B_t^\mu < a\right) = e^{-2\mu|a|}.$$

Сравнить эту формулу с формулой (6.4).

4. Дать формулу для $\mathbf{E} \tau_{a,b}^\mu$.

§ 12. Свойства момента остановки

$$\tau^\mu(H) = \inf\{t \geq 0 : \max_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu \geq H\}$$

(связанного с падением B^μ на величину H , $H > 0$)

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

Для $\mu = 0$:

$$\mathbb{E} \tau^0(H) = H^2,$$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H)} = \frac{1}{\text{ch}(H\sqrt{2\lambda})}, \quad \lambda \geq 0$$

Для $\mu \neq 0$:

$$\mathbb{E} \tau^\mu(H) = \frac{1}{2\mu^2} (e^{2\mu H} - 1 - 2\mu H),$$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H)} = \frac{e^{-\mu H}}{\text{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\mu}{\Delta} \text{sh}(\Delta \cdot H)}, \quad \Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}, \quad \lambda \geq 0$$

1. Момент остановки $\tau^\mu(H)$ — это момент первого падения (drawdown, downfall, ...) на величину H . В финансовой математике и финансовой инженерии *падение* на интервале $[0, t]$ определяется как изменение стоимости активов

- от достигнутого в прошлом пика до настоящего значения,
- от наивысшего уровня до наинизшего.

Момент $\tau^\mu(H)$ можно рассматривать как статистическую меру *риска* инвестирования в качестве альтернативы стандартным мерам риска, таким как вероятность возврата, V@R, Sharpe ratio и т.д. (см. [29]).

2. Случай $\mu = 0$ относительно прост для изучения, поскольку в силу (одномерной) *теоремы Леви* (о совместном распределении B и $\sup B$; см. формулу (1.51) в § 1, раздел D)

$$\max B - B^{\text{law}} \stackrel{\text{law}}{=} |B|,$$

т.е. $\text{Law}(\max_{s \leq t} B_s - B_t; t \geq 0) = \text{Law}(|B_t|; t \geq 0)$. Отсюда имеем

$$\text{Law}(\tau^0(H)) = \text{Law}(\sigma_H), \quad (12.1)$$

где $\sigma_H = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq H\}$.

Из § 3 (см. (3.4)) находим, что для любого $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(H\sqrt{2\lambda})}. \quad (12.2)$$

Отсюда

$$\mathbb{E} \tau^0(H) = \mathbb{E} \sigma_H = H^2 \quad (12.3)$$

(ср. с (3.1) и (3.2)).

Из (12.2) получаем также, что

$$\mathbb{D} \tau^0(H) = \mathbb{D} \sigma_H = \frac{2}{3} H^4. \quad (12.4)$$

В силу (12.1) и свойства $\max B - B \stackrel{\text{law}}{=} |B|$ имеем также следующее свойство:

$$\mathbb{E} \max_{t \leq \tau^0(H)} B_t = \mathbb{E} |B_{\sigma_H}| = H. \quad (12.5)$$

3. Займемся теперь вопросом о *совместном распределении* $\operatorname{Law}(\tau^0(H), M_{\tau^0(H)})$, где $M_t = \max_{s \leq t} B_s$.

С этой целью заметим, что (на множестве $\{\tau^0(H) < \infty\}$)

$$M_{\tau^0(H)} = B_{\tau^0(H)} + H. \quad (12.6)$$

Поэтому знание закона $\operatorname{Law}(\tau^0(H), M_{\tau^0(H)})$ равносильно знанию закона $\operatorname{Law}(\tau^0(H), B_{\tau^0(H)})$.

Покажем, что для последнего распределения *двумерное преобразование Лапласа* (в предположении, что $\lambda \geq 0$, $\beta < \Delta \operatorname{cth}(\Delta \cdot H)$) выражается следующей формулой:

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta B_{\tau^0(H)}} = \frac{e^{-\beta H}}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}, \quad (12.7)$$

что в силу (12.6) эквивалентно формуле

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta M_{\tau^0(H)}} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.8)$$

Кратчайший путь доказательства формулы (12.8) основан на приводимых ниже “марковских” соображениях.

Пусть $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение с отражением, выходящее из нуля [6], [16]. (Хорошо известно [6], [16], что такой процесс может быть реализован как модуль $|B|$ стандартного броуновского движения B .) Теорема Леви о совместном распределении B и $\sup B$ (см. раздел D в § 1) утверждает, что

$$(\sup B - B, \sup B) \stackrel{\text{law}}{=} (Y, L^0(Y)), \quad (12.9)$$

где $L^0(Y) = (L^0(Y)_t)_{t \geq 0}$ – локальное время процесса $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$. Если $\gamma^0(H) = \inf\{t \geq 0 : Y_t = H\}$, то из (12.9) получаем, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta M_{\tau^0(H)}} = \mathbb{E} e^{-\lambda \gamma^0(H) + \beta L^0(Y)_{\gamma^0(H)}}. \quad (12.10)$$

Чтобы вычислить преобразование Лапласа в правой части (12.10), воспользуемся методом *дифференциальных уравнений* из теории марковских процессов.

Будем рассматривать процесс Y , который начинается в произвольной точке $y \geq 0$ (а не в точке $y = 0$, как стандартное отраженное броуновское движение).

Обозначим

$$h(y) = \mathbb{E} \left(e^{-\lambda \gamma^0(H) + \beta L^0(Y)_{\gamma^0(H)}} \mid Y_0 = y \right). \quad (12.11)$$

Хорошо известно (см., например, [6], [16] или [17]), что

$$\frac{1}{2} h''(y) = \lambda h(y) \quad \text{при } 0 < y < H, \quad (12.12)$$

$$h'(0+) = -\beta h(0), \quad (12.13)$$

$$h(H) = 1. \quad (12.14)$$

Из (12.12) получаем

$$h(y) = c_1 \operatorname{ch}(\Delta \cdot y) + c_2 \operatorname{sh}(\Delta \cdot y), \quad (12.15)$$

где c_1 и c_2 – константы и $\Delta = +\sqrt{2\lambda}$.

Принимая во внимание условие (12.13), видим, что $h(y)$ можно переписать в следующем виде:

$$h(y) = (c \Delta) \operatorname{ch}(\Delta \cdot y) - (c \beta) \operatorname{sh}(\Delta \cdot y), \quad (12.16)$$

где c – константа.

Используя теперь условие (12.14), находим, что для всякого $\beta < \text{cth}(\Delta H)$

$$c = \frac{1}{\Delta \text{ch}(\Delta \cdot H) - \beta \text{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.17)$$

Следовательно, решение $h = h(y)$ задачи (12.12)–(12.14) определяется формулой

$$h(y) = \frac{\Delta \text{ch}(\Delta \cdot y) - \beta \text{sh}(\Delta \cdot y)}{\Delta \text{ch}(\Delta \cdot H) - \beta \text{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.18)$$

Для $y = 0$

$$h(0) = \frac{1}{\text{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta}{\Delta} \text{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.19)$$

Отсюда и из (12.10), (12.11) получаем преобразование Лапласа (12.8).

4. Рассмотрим теперь случай $\mu \neq 0$. Применяя теорему Гирсанова (см. (1.48)), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta B_{\tau^\mu(H)}^\mu} &= \mathbb{E} \left[e^{-\lambda \tau^0(H) + \beta B_{\tau^0(H)}^0} \cdot e^{\mu B_{\tau^0(H)}^0 - \frac{\mu^2}{2} \tau^0(H)} \right] \\ &= \mathbb{E} e^{-\left(\lambda + \frac{\mu^2}{2}\right) \tau^0(H) + (\beta + \mu) B_{\tau^0(H)}^0}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Используя формулу (12.7), из (12.20) получаем, что если $\beta + \mu < \Delta \text{cth}(\Delta \cdot H)$, то

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta B_{\tau^\mu(H)}^\mu} = \frac{e^{-(\beta + \mu)H}}{\text{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta + \mu}{\Delta} \text{sh}(\Delta \cdot H)}. \quad (12.21)$$

Отсюда, учитывая, что на множестве $\{\tau^\mu(H) < \infty\}$

$$M_{\tau^\mu(H)}^\mu = B_{\tau^\mu(H)}^\mu + H, \quad (12.22)$$

где $M_t^\mu = \max_{s \leq t} B_s^\mu$, приходим к следующей формуле:

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H) + \beta M_{\tau^\mu(H)}^\mu} = \frac{e^{-\mu H}}{\text{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\beta + \mu}{\Delta} \text{sh}(\Delta \cdot H)} \quad (12.23)$$

(напомним, что $\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}$).

Из этой формулы следует, что

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \tau^\mu(H)} = \frac{e^{-\mu H}}{\operatorname{ch}(\Delta \cdot H) - \frac{\mu}{\Delta} \operatorname{sh}(\Delta \cdot H)}, \quad (12.24)$$

и, как следствие, получаем равенство

$$\mathbb{E} \tau^\mu(H) = \frac{1}{2\mu^2} (e^{2\mu H} - 1 - 2\mu H). \quad (12.25)$$

5. Полагая в (12.8) и (12.23) $\lambda = 0$, находим, что для $\theta > 0$

$$\mathbb{E} e^{-\theta M_{\tau^0(H)}} = \frac{1}{1 + \theta H} \quad (12.26)$$

и

$$\mathbb{E} e^{-\theta M_{\tau^\mu(H)}} = \frac{e^{-\mu H}}{\operatorname{ch}(|\mu|H) + \frac{\theta - \mu}{|\mu|} \operatorname{sh}(|\mu|H)}. \quad (12.27)$$

Из (12.26) следует, что случайная величина $M_{\tau^0(H)} (= B_{\tau^0(H)} + H)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $1/H$:

$$\operatorname{Law}(M_{\tau^0(H)}) = \operatorname{Exp}\left(\frac{1}{H}\right), \quad (12.28)$$

т.е. плотность $p_{M_{\tau^0(H)}}(x)$ распределения вероятностей величины $M_{\tau^0(H)}$ дается формулой

$$p_{M_{\tau^0(H)}}(x) = \frac{1}{H} e^{-x/H}, \quad x \geq 0. \quad (12.29)$$

Несложными преобразованиями правую часть (12.27) можно привести к виду

$$\frac{1}{1 + \theta \cdot \frac{e^{2\mu H} - 1}{2\mu}}. \quad (12.30)$$

Таким образом, преобразование Лапласа случайной величины $M_{\tau^\mu(H)}$ можно записать как

$$\mathbb{E} e^{-\theta M_{\tau^\mu(H)}} = \frac{1}{1 + \theta \cdot \frac{e^{2\mu H} - 1}{2\mu}} \quad (12.31)$$

(для любого $\mu \in \mathbb{R}$). Отсюда следует, что $M_{\tau^\mu(H)}$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $2\mu/(e^{2\mu H} - 1)$:

$$\operatorname{Law}(M_{\tau^\mu(H)}) = \operatorname{Exp}\left(\frac{2\mu}{e^{2\mu H} - 1}\right). \quad (12.32)$$

Плотность распределения вероятностей случайной величины $M_{\tau^\mu(H)}$ дается формулой (12.29), где вместо H надо взять $(e^{2\mu H} - 1)/2\mu$.

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 12).

1. Убедиться в том, что для любого фиксированного $T > 0$

$$\max_{t \leq T} B_t \stackrel{\text{law}}{=} \max_{t \leq T} B_t - B_T \stackrel{\text{law}}{=} |B_T|.$$

Показать, что, вообще говоря, $\text{Law}(\max B) \neq \text{Law}(|B|)$.

2. Пусть

$$\sigma^\mu(H) = \inf \left\{ t \geq 0 : B_t^\mu - \min_{s \leq t} B_s^\mu \geq H \right\} \quad \text{и} \quad m_t^\mu = \min_{s \leq t} B_s^\mu.$$

По аналогии с формулами (12.21), (12.23) найти формулы для

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \sigma^\mu(H) + \beta B_{\sigma^\mu(H)}^\mu}, \quad \mathbb{E} e^{-\lambda \sigma^\mu(H) + \beta m_{\sigma^\mu(H)}^\mu}.$$

Показать также, что

$$\mathbb{E} \sigma^\mu(H) = \frac{1}{2\mu^2} (e^{-2\mu H} - 1 + 2\mu H).$$

3. Как изменятся приведенные в этом параграфе формулы, если вместо процесса $B_t^\mu = \mu t + B_t$ рассматривать процесс $B_t^{\mu, \sigma} = \mu t + \sigma B_t$, $t \geq 0$?
4. Исследовать вопрос о структуре преобразований Лапласа для распределений вероятностей
  - (а) величин $(\tau^\mu(H), \sigma^\mu(H))$,
  - (б) величин $(M_{\tau^\mu(H)}^\mu, m_{\sigma^\mu(H)}^\mu)$ и
  - (с) четверки величин $(\tau^\mu(H), \sigma^\mu(H), M_{\tau^\mu(H)}^\mu, m_{\sigma^\mu(H)}^\mu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Более подробные сведения о моментах остановки $\tau^\mu(H)$ и $\sigma^\mu(H)$ можно найти в [18], [17], [19], [20].

§ 13. Свойства момента остановки

$\rho_a^{(3)} = \inf\{t \geq 0 : R_t^{(3)}(B) = a\}$, $a > 0$,
 где $R^{(3)}(B)$ – трехмерный процесс Бесселя
 $(R^{(3)}(B) = |B| + L(B))$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА:

$$\begin{aligned} P(\rho_a^{(3)} < \infty) &= 1 \\ E e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} &= \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})} \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Мы не раз обращались к теореме Леви (раздел D в § 1) о том, что

$$(\sup B - B, \sup B) \stackrel{\text{law}}{=} (|B|, L(B)), \quad (13.1)$$

где $L(B)$ – локальное время броуновского движения в нуле:

$$L_t(B) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t I(|B_s| \leq \varepsilon) ds \quad \text{Р-п.н.} \quad (13.2)$$

(Заметим, что $L_t(B) = L_t(|B|)$.)

Из (13.1) получаем

$$2 \sup B - B \stackrel{\text{law}}{=} |B| + L(B) (= R^{(3)}(B)). \quad (13.3)$$

Оба процесса, $2 \sup B - B$ и $|B| + L(B)$, фигурирующие здесь, замечательны: они совпадают по распределению с трехмерным процессом Бесселя $R^{(3)} = (R_t^{(3)})_{t \geq 0}$, где

$$R_t^{(3)} = \sqrt{(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2 + (B_t^{(3)})^2} \quad (13.4)$$

и $B^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, – три независимых броуновских движения. (Иными словами, $R^{(3)}$ есть радиальная часть трехмерного броуновского движения.)

Существует и иное определение этого процесса, основанное на стохастических дифференциальных уравнениях.

Именно, рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dR_t = \frac{1}{R_t} dt + dB_t, \quad (13.5)$$

где B – броуновское движение и $R_0 = x \geq 0$. Это уравнение имеет единственное сильное решение (см., например, [16]), и если $R_0 = 0$, то

$$\text{Law}(R) = \text{Law}(R^{(3)}). \quad (13.6)$$

Доказательство свойства (13.6), а также упомянутого выше свойства

$$\text{Law}(R^{(3)}) = \text{Law}(|B| + L(B)) \quad (13.7)$$

приведено в [16], [22].

2. Сформулированное выше свойство $P(\rho_a^{(3)} < \infty) = 1$ следует из (13.7) и свойства $P(\sigma_a < \infty) = 1$, где $\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq a\}$ (см. § 3).

Обратимся теперь к доказательству формулы

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})}, \quad \lambda \geq 0, \quad (13.8)$$

или, эквивалентно, формулы

$$\mathbb{E} e^{-\frac{\lambda^2}{2} \rho_a^{(3)}} = \frac{a\lambda}{\text{sh}(a\lambda)}, \quad \lambda \geq 0 \quad (13.9)$$

(ср., между прочим, с (3.3)).

Для доказательства достаточно проверить, что процесс

$$M_t = e^{-\frac{\lambda^2}{2} t} \frac{\text{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}, \quad t \geq 0, \quad (13.10)$$

где $R_t^{(3)}(B) = |B| + L(B)$, является *мартингалом*. Тогда из того, что семейство случайных величин $\{M_{t \wedge \rho_a^{(3)}}, t \geq 0\}$ равномерно интегрируемо, по теореме о преобразовании свободного выбора получим $\mathbb{E} M_{\rho_a^{(3)}} = 1$, что и приводит к формуле (13.9).

Без ограничения общности мы можем предполагать, что пространство элементарных исходов Ω есть пространство непрерывных функций $\omega = (\omega_t)_{t \geq 0}$.

Обозначим через P_B и P_{B^λ} распределения броуновского движения $B = (B_t(\omega))_{t \geq 0}$ и броуновского движения со сносом $B^\lambda = (B_t^\lambda(\omega))_{t \geq 0}$, где $B_t(\omega) = \omega_t$ и $B_t^\lambda(\omega) = \lambda t + \omega_t$. Символы $P_{R^{(3)}(B)}$ и $P_{R^{(3)}(B^\lambda)}$ будут использоваться для обозначения образов мер P_B и P_{B^λ} при отображении

$$\omega \mapsto R^{(3)}(\omega) = (R_t^{(3)}(\omega))_{t \geq 0},$$

где $R_t^{(3)}(\omega) = |\omega_t| + L_t(\omega)$.

Положим также

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\omega_s, s \leq t) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_t^{R^{(3)}} = \sigma(R_s^{(3)}(\omega), s \leq t).$$

Легко проверить, что $(P_B\text{-п.н.})$ для всех $t \geq 0$

$$\frac{d(P_{R^{(3)}(B^\lambda)} | \mathcal{F}_t^{R^{(3)}})}{d(P_{R^{(3)}(B)} | \mathcal{F}_t^{R^{(3)}})}(R^{(3)}(B)) = \mathbb{E} \left[\frac{d(P_{B^\lambda} | \mathcal{F}_t)}{d(P_B | \mathcal{F}_t)}(B) \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)} \right]. \quad (13.11)$$

Левая часть (13.11), очевидно, является мартингалом (обозначим его $Z_t(\lambda)$, $t \geq 0$). В правой части (13.11) имеем

$$\frac{d(P_{B^\lambda} | \mathcal{F}_t)}{d(P_B | \mathcal{F}_t)}(B) = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}. \quad (13.12)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Z_t(\lambda) &= \mathbb{E} \left[e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)} \right] \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \mathbb{E} \left[e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)} \right]. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Покажем, что $(P_B\text{-п.н.})$

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)} \right] = \frac{\text{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \quad (13.14)$$

Чтобы это доказать, заметим сначала, что поскольку

$$\text{Law}(B) = \text{Law}(-B),$$

то

$$\mathbb{E} [e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_t^{|B|}] = \frac{1}{2} (e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|}) \quad (= \text{ch}(\lambda |B_t|)), \quad (13.15)$$

где $\mathcal{F}_t^{|B|} = \sigma(|B_s|, s \leq t)$. Это соотношение в сочетании с включением $\mathcal{F}_t^{R(B)} \subseteq \mathcal{F}_t^{|B|}$ (напомним, что $R(B) = |B| + L(B) = |B| + L(|B|)$), приводит к равенству

$$\mathbb{E} [e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}] = \frac{1}{2} \mathbb{E} [e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}]. \quad (13.16)$$

Теперь мы воспользуемся следующей замечательной теоремой Питмана (см. [21]), которая утверждает, что условное распределение $\text{Law}(|B_t| \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)})$ является *равномерным* на $[0, R_t^{(3)}(B)]$. Из этой теоремы следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mathbb{E} [e^{\lambda |B_t|} + e^{-\lambda |B_t|} \mid \mathcal{F}_t^{R^{(3)}(B)}] \\ &= \frac{1}{2\lambda R_t^{(3)}(B)} [e^{\lambda R_t^{(3)}(B)} - e^{-\lambda R_t^{(3)}(B)}] \\ &= \frac{\text{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Отсюда и из (13.16) получаем требуемую формулу (13.14), с учетом которой из (13.13) находим, что

$$Z_t(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} \frac{\text{sh}(\lambda R_t^{(3)}(B))}{\lambda R_t^{(3)}(B)}. \quad (13.18)$$

Процесс $(Z_t(\lambda))_{t \geq 0}$ образует мартингал (это следует из (13.11)). Ясно (ввиду (13.10)), что $Z_t(\lambda) = M_t$. Таким образом, процесс $(M_t)_{t \geq 0}$, заданный формулой (13.10), является *мартингалом*, и поскольку, как уже отмечалось выше, семейство случайных величин $\{M_{t \wedge \rho_a^{(3)}}, t \geq 0\}$ равномерно интегрируемо, то по теореме о преобразовании свободного выбора получаем требуемую формулу

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})}.$$

ЗАДАЧИ (в связи с содержанием § 13).

1. Вывести из (6.11) или (6.12) формулу для плотности

$$f_{(2 \sup_{u \leq T} B_u - B_T)}(x)$$

распределения вероятностей величины

$$R_T^{(3)}(B) \stackrel{\text{law}}{=} 2 \sup_{u \leq T} B_u - B_T.$$

2. Доказать, что

$$\text{Law}(R) = \text{Law}(R^{(3)}) = \text{Law}(R^{(3)}(B)).$$

(См. (13.6), (13.7).)

3. Имея преобразование Лапласа

$$\mathbb{E} e^{-\lambda \rho_a^{(3)}} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}(a\sqrt{2\lambda})},$$

найти формулу для плотности распределения вероятностей величины $\rho_a^{(3)}$.

Список литературы

- [1] А. Н. Ширяев, *Вероятность*: в 2-х кн. *Вероятность-1, Вероятность-2*, МЦНМО, М., 2004.
- [2] А. Н. Ширяев, *Задачи по теории вероятностей*, МЦНМО, М., 2006.
- [3] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Probab. Appl. (N. Y.), Springer-Verlag, New York, 1997 [MR 1464694](#), [Zbl 0892.60001](#).
- [4] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов*, т. 1, 2, Теория вероятностей и математическая статистика, **47**, **48**, Наука, М., 1994 [MR 1346769](#), [MR 0959133](#), [Zbl 0830.60025](#).
- [5] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов. Нелинейная фильтрация и смежные вопросы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1974 [MR 0474486](#), [Zbl 0279.60021](#).
- [6] Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Теория вероятностей и математическая статистика, Физматгиз, М., 1963 [MR 0193670](#), [Zbl 0132.37701](#).
- [7] L. Barba Escribá, “A stopped Brownian motion formula with two sloping line boundaries”, *Ann. Probab.*, **15**:4 (1987), 1524–1526 [MR 905346](#), [Zbl 0636.60082](#).
- [8] T. W. Anderson, “A modification of the sequential probability ratio test to reduce the sample size”, *Ann. Math. Statist.*, **31** (1960), 165–197 [MR 116441](#), [Zbl 0089.35501](#).
- [9] K. L. Chung, “A cluster of great formulas”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **39**:1–3 (1982), 65–67 [doi 10.1007/BF01895215](#), [MR 653674](#), [Zbl 0495.60020](#); Reprinted in: Kai Lai Chung, *Chance and choice (Memorabilia)*, World Scientific, Singapore, 2004, 133–135 [MR 2113168](#), [Zbl 1059.01017](#).
- [10] A. Kolmogoroff, “Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione”, *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **4**:1 (1933), 83–91 [Zbl 0006.17402](#); рус. пер.: А. Н. Колмогоров, “Об эмпирическом определении закона распределения”, *Теория вероятностей и математическая статистика*, Наука, М., 1986, 134–141 [MR 0861120](#), [Zbl 0595.60001](#).
- [11] J. L. Doob, “Heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems”, *Ann. Math. Statist.*, **20** (1949), 393–403 [MR 30732](#), [Zbl 0035.08901](#).

- [12] M. D. Donsker, “Justification and extension of Doob’s heuristic approach to the Kolmogorov–Smirnov theorems”, *Ann. Math. Statist.*, **23** (1952), 277–281 [MR 47288](#), [Zbl 0046.35103](#).
- [13] А. А. Новиков, “Об одном тождестве для стохастических интегралов”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **17**:4 (1972), 761–765 [MR 0312567](#), [Zbl 0284.60054](#).
- [14] A. A. Novikov, *Martingales and stopping times with applications*, Notes of lectures in UTS (Sydney), ETH (Zürich), 2004.
- [15] J.-A. Yan, “A propos de l’intégrabilité uniforme des martingales exponentielles”, *Séminaire de Probabilités XVI* (1980/81), Lecture Notes in Math., **920**, Springer, Berlin–New York, 1982, 338–347 [doi 10.1007/BFb0092796](#), [MR 0658695](#), [Zbl 0484.60038](#).
- [16] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1994 [MR 1303781](#), [Zbl 0804.60001](#).
- [17] D. Williams, “On a stopped Brownian motion formula of H. M. Taylor”, *Séminaire de Probabilités X* (1974/75), Lecture Notes in Math., **511**, Springer, Berlin, 1976, 235–239 [doi 10.1007/BFb0101110](#), [MR 0461687](#), [Zbl 0368.60056](#).
- [18] H. M. Taylor, “A stopped Brownian motion formula”, *Ann. Probab.*, **3**:2 (1975), 234–246 [MR 0375486](#), [Zbl 0303.60072](#).
- [19] Р. Дуади, М. Йор, А. Н. Ширяев, “О вероятностных характеристиках величин “падения” в стандартном броуновском движении”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **44**:1 (1999), 3–13 [MR 1751185](#), [Zbl 0959.60073](#).
- [20] I. Meilijson, “The time to a given drawdown in Brownian motion”, *Séminaire de Probabilités XXXVII*, Lecture Notes in Math., **1832**, Springer, Berlin, 2003, 94–108 [doi 10.1007/b94376](#), [MR 2053044](#), [Zbl 1041.60065](#).
- [21] L. W. Pitman, “One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process”, *Adv. Appl. Probab.*, **7**:3 (1975), 511–526 [doi 10.2307/1426125](#), [MR 375485](#), [Zbl 0332.60055](#).
- [22] H.-H. Kuo, *Introduction to stochastic integration*, Universitext, Springer, New York, 2006 [MR 2180429](#), [Zbl 1101.60001](#).
- [23] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971.
- [24] N. V. Krylov, *Introduction to the theory of random processes*, Grad. Stud. Math., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002 [MR 1885884](#), [Zbl 1008.60001](#).

- [25] S.E. Graversen, A.N. Shiryaev, “An extension of P. Lévy’s distributional properties to the case of a Brownian motion with drift”, *Bernoulli*, **6**:4 (2000), 615–620 [doi 10.2307/3318509](#), [MR 1777686](#), [Zbl 0965.60077](#).
- [26] А. С. Черный, А. Н. Ширяев, “Некоторые свойства броуновского движения со сносом и обобщение одной теоремы П. Леви”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **44**:2 (1999), 466–472 [MR 1751488](#), [Zbl 0974.60058](#).
- [27] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2003.
- [28] А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов: Стохастические дифференциальные уравнения и предельные теоремы для процессов Маркова*, Изд-во Киев. ун-та, Киев, 1961 [MR 0185619](#), [Zbl 0108.14804](#).
- [29] G. Szegő (ed.), *Risk measures for the 21st century*, Wiley, 2004.
- [30] L. Breiman, “First exit times from a square root boundary”, *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, CA, 1965/66), II: *Contributions to Probability Theory*, Part 2, Univ. California Press, Berkeley, CA, 1967, 9–16 [MR 212865](#), [Zbl 0241.60035](#).
- [31] А. А. Новиков, “О моментах остановки винеровского процесса”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **16**:3 (1971), 458–465 [MR 0315798](#), [Zbl 0258.60037](#).
- [32] L. A. Shepp, “A first passage problem for the Wiener process”, *Ann. Math. Statist.*, **38** (1967), 1912–1914 [MR 217879](#), [Zbl 0178.19402](#).