Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Предисловие, *Совр. пробл. матем.*, 2007, выпуск 9, 5–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm12>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:38:50

Предисловие

А. И. Аптекарев

Диофантовы приближения математических констант – одно из наиболее важных приложений теории рациональных аппроксимаций аналитических функций. Многие из доказательств трансцендентности (иррациональности) знаменитых констант основываются на конструкциях аппроксимаций или интерполяций аналитических функций. Подобные конструкции часто обсуждаются на семинаре “Комплексный анализ” Математического Института им. В. А. Стеклова РАН. Некоторые результаты этих обсуждений (в основном работы молодых математиков и студентов) нашли отражение в этом сборнике статей. Речь пойдет о построении и изучении асимптотических свойств некоторой последовательности рациональных приближений к постоянной Эйлера

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

Постоянная Эйлера γ – наиболее известный представитель так называемых эйлеровых чисел, включающих в себя значения эйлеровых сумм (значения дзета функции Римана в натуральных точках)

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Арифметическая природа постоянной γ и значений $\zeta(s)$ в нечетных точках до сих пор не поддается исследованию (значения $\zeta(s)$ в четных точках были получены еще Эйлером). Пока единственным конкретным результатом в этом направлении является доказательство Р. Апери [1] в 1978 году иррациональности $\zeta(3)$.

ТЕОРЕМА АПЕРИ. Пусть числа u_n и v_n задаются следующим рекуррентным соотношением:

$$(n+1)^3 u_{n+1} = (2n+1)(17n^2 + 17n + 5)u_n - n^3 u_{n-1}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} v_0 &:= 0, & v_1 &:= 6, \\ u_0 &:= 1, & u_1 &:= 5. \end{aligned}$$

Тогда $u_n, D_n^3 v_n \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}$ (здесь D_n обозначает наименьшее общее кратное чисел $\{1, 2, \dots, n\}$), и справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} |u_n|^{1/n} &= (\sqrt{2} + 1)^4 + o(1), \\ |v_n - \zeta(3)u_n|^{1/n} &= (\sqrt{2} - 1)^4 + o(1). \end{aligned}$$

Тем самым рекуррентное соотношение теоремы Апери не только определяет рациональные приближения $\zeta(3)$

$$\frac{v_n}{u_n} \rightarrow \zeta(3),$$

но и (в виду того, что $D_n^{1/n} \rightarrow e$ и $e^3(\sqrt{2} - 1)^4 \approx 0.591 \dots < 1$) доказывает иррациональность $\zeta(3)$. Надо также отметить, что построение с помощью рекуррентных соотношений рациональных приближений к математическим константам имеет самостоятельный интерес и известно всего лишь несколько результатов в этом направлении (см. [2] о других рекуррентных соотношениях для приближений $\zeta(3)$, а также [3] для приближений постоянной Каталана и [4], [5] для приближений π^4).

В настоящем сборнике собраны статьи, в каждой из которых решается своя самостоятельная задача, и вместе с тем совокупность этих работ составляет доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. Пусть числа p_n и q_n задаются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} (16n - 15)(n + 1)q_{n+1} &= (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n \\ &\quad - n(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + (16n + 1)n(n - 1)q_{n-2} \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_0 &:= 0, & p_1 &:= 2, & p_2 &:= \frac{31}{2}, \\ q_0 &:= 1, & q_1 &:= 3, & q_2 &:= 25. \end{aligned}$$

Тогда $q_n, D_n p_n \in \mathbb{Z} \ \forall n \in \mathbb{N}$ (здесь D_n обозначает наименьшее общее кратное чисел $\{1, 2, \dots, n\}$), и справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{(2n)!}{n!} \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(4e)^{3/8}} + O(n^{-1/2}) \right), \\ p_n - \gamma q_n &= \frac{(2n)!}{n!} \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{(4e)^{3/8}} + O(n^{-1/2}) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где γ есть постоянная Эйлера.

Тем самым, рекуррентные соотношения (1) определяют рациональные приближения постоянной Эйлера

$$\frac{p_n}{q_n} - \gamma = 2\pi e^{-2\sqrt{2n}} (1 + O(n^{-1/2})).$$

По-видимому, здесь впервые получены рациональные приближения к постоянной Эйлера, задаваемые рекуррентным соотношением.

Остановимся вкратце на предыстории этого результата и содержании сборника. В работе [6] был рассмотрен пример системы из четырех функций $\{\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{s}_1, \hat{s}_2\}$:

$$\hat{\mu}_k(z) := \int_0^1 \frac{w_k(z) dx}{z - x}, \quad \hat{s}_k(z) := \int_1^\infty \frac{w_k(z) dx}{z - x}, \quad (3)$$

где

$$w_k(x) := x^{\alpha_k} (1 - x)^\alpha e^{-\beta x}, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

для которой общий знаменатель Q_n совместных рациональных диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде представляется в виде обобщенной формулы Родрига

$$Q_n(z) = \frac{1}{(n!)^2} w_2^{-1} \frac{d^n}{dz^n} \left[w_2 z^n w_1^{-1} \frac{d^n}{dz^n} [w_1 z^n (1 - z)^{2n}] \right]. \quad (5)$$

Этот пример был приведен в [6] неслучайно. Нетрудно видеть, что любой многочлен P_n с целыми коэффициентами генерирует γ -форму с целыми коэффициентами

$$\int_0^\infty P_n(x) \ln(x) e^{-x} dx = a_n + \gamma b_n.$$

Оказалось (проводя вычисления с (5), $n \approx 50$), что γ -формы, генерируемые многочленами Q_n , задаваемыми формулой Родрига (5) с весами (4) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $\alpha = -\beta = 1$,

$$p_n - \gamma q_n := \frac{1}{n!} \int_0^\infty Q_n(x) \ln(x) e^{-x} dx, \quad (6)$$

хотя и растут с увеличением n , но приближенно

$$\frac{p_n}{q_n} \approx \gamma. \quad (7)$$

Доказательству этого обстоятельства, а также получению рекуррентных соотношений для быстрого вычисления коэффициентов форм (6) посвящены статьи настоящего сборника.

Открывается сборник статьей [7] Д. В. Христофорова, в которой найдены коэффициенты рекуррентных соотношений, связывающих около-диагональные (так называемые “step-line”) элементы многомерной таблицы Эрмита–Паде для набора четырех функций (3). Существование этих рекуррентных соотношений следует из общей теории аппроксимаций Эрмита–Паде. В случае набора из четырех функций, речь идет о системе из четырех шестичленных рекуррентных соотношений, позволяющих, стартуя с начальных данных, последовательно вычислять все числители и знаменатели рациональных аппроксимаций, принадлежащих многомерному “step-line” таблицы Эрмита–Паде. Препятствие, которое пришлось преодолеть в работе [7], состояло в том что только часть этого многомерного “step-line” содержит аппроксимации, знаменатели которых задаются формулами Родрига из [7], поэтому необходимо было найти выражения для “неродриговых” многочленов.

Многочлены Q , определяемые формулой Родрига (5), имеют целые коэффициенты. “Неродриговы” знаменатели рациональных аппроксимаций из “step-line” таблицы Эрмита–Паде таким свойством не обладают. Поэтому и коэффициенты полученных в [7] шестичленных рекуррентных соотношений не являются рациональными функциями переменной n . Это обстоятельство замедляет вычисление многочленов Q и γ -форм (6) (оптимальное время вычисления γ -форм системой шестичленных рекуррентных соотношений наблюдается при n не превышающих 500).

В следующей статье сборника – статье [8] А. И. Боголюбского, найдены рекуррентные соотношения с рациональными по n и z

коэффициентами, связывающие только “родриговы” многочлены многомерного “step-line”. Специфика этого результата состоит в том, что общая теория аппроксимаций Эрмита–Паде не гарантирует существование таких рекуррентных соотношений. Поэтому в работе [8] искомые рациональные коэффициенты (изначально неизвестной степени) сначала экспериментально подбираются (используя посчитанное с помощью рекуррентных соотношений работы [7] достаточное число многочленов Q_n , $n \simeq 200$), а затем полученные рекуррентные соотношения доказываются, выводя их справедливость (посредством компьютерного доказательства – “computer aided proof”) из справедливости системы четырех шестичленных рекуррентных соотношений работы [7]. Таким образом, в этой работе для многочленов Q_n , определяемых формулой Родрига (5), получены и доказаны система из двух семичленных рекуррентных соотношений и одно восьмичленное рекуррентное соотношение с рациональными по n и z коэффициентами. Отметим, что у семичленных соотношений коэффициенты оказались рациональными функциями по n степени $\simeq 25$, а у восьмичленного соотношения степени по n коэффициентов оказались порядка $\simeq 90(!)$.

Полученные в [8] рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для полиномов Q_n также позволяют рекуррентным образом вычислять коэффициенты γ -форм (6). Причем, лишенные недостатков шестичленных рекуррентных соотношений, эти семи- и восьмичленные соотношения эффективны даже при n больших чем 5000, демонстрируя в приближении (7) сотни правильных знаков.

Собственно, открывшаяся возможность проведения с γ -формами (6) широкомасштабных экспериментов позволила авторам следующей статьи сборника [9] получить для γ -формы (6) простое(!) четырехчленное рекуррентное соотношение (1) и доказать его с помощью доказанного в [8] восьмичленного соотношения.

Заключительные две статьи [10], [11] сборника посвящены асимптотическим свойствам решений четырехчленного рекуррентного соотношения (1) при $n \rightarrow \infty$. В работе Д. Н. Тулякова [10] предложена эффективная процедура нахождения асимптотического разложения для базиса решений разностного уравнения. Там же эта процедура применена к четырехчленному рекуррентному соотношению (1) с целью выяснить, какие асимптотики могут иметь решения (1).

Наконец, в работе [11] применением метода перевала к интегральному представлению γ -формы (6) получены асимптотические формулы (2), что завершает доказательство сформулированной в предисловии теоремы.

Список литературы

- [1] R. Apéry, “Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ”, *Astérisque*, **61**, 1979, 11–13 [Zbl 0401.10049](#).
- [2] Ю. В. Нестеренко, “Некоторые замечания о $\zeta(3)$ ”, *Матем. заметки*, **59**:6 (1996), 865–880 [Mi mzm1785](#), [MR 1445472](#), [Zbl 0888.11028](#).
- [3] T. Rivoal, W. Zudilin, “Diophantine properties of numbers related to Catalan’s constant”, *Math. Ann.*, **326**:4 (2003), 705–721 [doi 10.1007/s00208-003-0420-2](#), [MR 2003449](#), [Zbl 1028.11046](#).
- [4] W. Zudilin, “Well-poised hypergeometric service for Diophantine problems of zeta values”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **15**:2 (2003), 593–626 [MR 2140869](#), [Zbl 02184613](#).
- [5] В. Н. Сорокин, *Об одном алгоритме быстрого вычисления π^4* , Препринт № 28, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2002.
- [6] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](#), [MR 1990569](#), [Zbl 1033.33002](#).
- [7] Д. В. Христофоров, “Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде одной системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 11–26.
- [8] А. И. Боголюбский, “Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных многочленов, задаваемых формулой Родрига”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 27–35.
- [9] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Четырехчленные рекуррентные соотношения для γ -форм”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 37–43.
- [10] Д. Н. Туляков, “О некоторой процедуре нахождения асимптотических разложений для решений разностных уравнений”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 45–53.
- [11] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Асимптотика γ -форм генерируемых совместно ортогональными многочленами”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 55–62.