Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Христофоров, Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде некоторой системы из четырех функций марковского и стилтjesовского типа, *Совр. пробл. матем.*, 2007, выпуск 9, 11–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:07:12

Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде некоторой системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа¹

Д. В. Христофоров

1. Введение

Пусть

$$w_k(x) = x^{\alpha_k}(1-x)^{\alpha}e^{\beta x}, \quad k = 1, 2, \quad \beta < 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}, \quad (1)$$

– две весовые функции Якоби–Лаггера на $[0, \infty]$, которые определяют систему из четырех функций $\{f_j\}_{j=1}^4$:

$$f_1 = \hat{\mu}_1, \quad f_2 = \hat{\mu}_2, \quad f_3 = \hat{S}_1, \quad f_4 = \hat{S}_2, \quad (2)$$

две из которых функции марковского типа:

$$\hat{\mu}_k(x) := \int_0^1 \frac{w_k(x)}{z-x} dx, \quad k = 1, 2,$$

две другие функции стилтьесовского типа:

$$\hat{S}_k(x) := \int_1^\infty \frac{w_k(x)}{z-x} dx, \quad k = 1, 2.$$

Рациональные аппроксимации Эрмита–Паде $\pi_{\vec{n}}$ для системы $\{f_j\}_{j=1}^4$ и векторного индекса $\vec{n} := (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{N}^4$ определя-

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1 и исследовательским грантом РФФИ-05-01-00522.

ются следующим образом (см. [1]):

$$\pi_{\vec{n}} := \left\{ \frac{P_{\vec{n}}^{(j)}}{Q_{\vec{n}}} \right\}_{j=1}^4 : \begin{cases} \deg Q_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| := \sum_{j=1}^4 n_j, \\ (f_j Q_{\vec{n}} - P_{\vec{n}}^{(j)})(z) =: R_{\vec{n}}^{(j)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Известно, что общие знаменатели $Q_{\vec{n}}$ рациональных аппроксимаций (3) удовлетворяют системе из четырех типов соотношений ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_j(x) dx &= 0, \quad \nu = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, 2, \\ \int_1^\infty Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_j(x) dx &= 0, \quad \nu = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Такие многочлены называются совместно (“multiple”) ортогональными.

Совместно ортогональные многочлены (4) относительно весов (1), среди других примеров, были рассмотрены в работе [2]. В частности, в [2] приведена формула Родрига для этих многочленов при $\vec{n} = (n_1, n_1, n_2, n_2) =: [n_1, n_2]$:

$$\begin{aligned} Q_{[n_1, n_2]}(z) &= w_2^{-1}(z) \frac{d^{n_2}}{dz^{n_2}} \left[w_2(z) z^{n_2} w_1^{-1}(z) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d^{n_1}}{dz^{n_1}} [w_1(z) z^{n_1} (1-z)^{n_1+n_2}] \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно (см. [3], [4]), что знаменатели аппроксимаций Эрмита–Паде для системы из p функций удовлетворяют $(p+2)$ -членному рекуррентному соотношению. При $p = 4$ рекуррентное соотношение связывает любые шесть соседних многочленов $Q_{(n_1, n_2, n_3, n_4)}$ в четырехмерной таблице вектор-индексов $\vec{n}$. Нас будут интересовать рекуррентные соотношения, связывающие между собой диагональные и наддиагональные элементы этой таблицы, т.н. “step-line”:

$$\dots, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_1}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_2}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_3}, Q_{\vec{n}}, Q_{\vec{n}+\vec{e}_1}, \dots, \quad (6)$$

здесь мы используем обозначения

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (n, n, n, n), & \vec{e}_1 &= (1, 0, 0, 0), & \vec{e}_2 &= (1, 1, 0, 0), \\ \vec{e}_3 &= (1, 1, 1, 0), & \vec{e}_4 &= (1, 1, 1, 1).\end{aligned}$$

Таким образом, для последовательного вычисления многочленов (6) нам требуется набор из четырех шестичленных рекуррентных соотношений, связывающих вектор-индексы:

$$\begin{array}{cccccc}\vec{n} - \vec{e}_4 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_1 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_2 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_3 & \vec{n} & \vec{n} + \vec{e}_1 \\ \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_1 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_2 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_3 & \vec{n} & \vec{n} + \vec{e}_1 & \vec{n} + \vec{e}_2 \\ \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_2 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_3 & \vec{n} & \vec{n} + \vec{e}_1 & \vec{n} + \vec{e}_2 & \vec{n} + \vec{e}_3 \\ \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_3 & \vec{n} & \vec{n} + \vec{e}_1 & \vec{n} + \vec{e}_2 & \vec{n} + \vec{e}_3 & \vec{n} + \vec{e}_4\end{array}\quad (7)$$

Целью настоящей работы является получение явного вида этих четырех рекуррентных соотношений.

2. Нахождение многочленов с недиагональными индексами

Для получения рекуррентных соотношений, связывающих индексы (7), нам необходимо знать явный вид всех многочленов последовательности (6). Многочлены с индексами $[n_1, n_2]$ определяются формулой Родрига (5). Явное выражение для многочленов с индексами $(n_1, n_1 - 1, n_2, n_2)$ и $(n_1, n_1, n_2, n_2 - 1)$ получим с помощью следующего приема (см. [5]), позволяющего обобщить формулу Родрига на случай векторных индексов такого вида. Представим $Q_{(n_1, n_1 - 1, n_2, n_2)}$ как

$$\begin{aligned}Q_{(n_1, n_1 - 1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z) &= w_2^{-1}(z) \frac{d^{n_2}}{dz^{n_2}} \left[w_2(z) z^{n_2} w_1^{-1}(z) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d^{n_1}}{dz^{n_1}} [w_1(z) z^{n_1} (1 - z)^{(n_1 + n_2)} (z - t(n_1, n_2))] \right],\end{aligned}$$

где $t(n_1, n_2)$ – неизвестная константа. Из этого соотношения следует, что

$$Q_{(n_1, n_1 - 1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z) = z Q_{(n_1 - 1, n_1 - 1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha, \beta)}(z) - t Q_{(n_1 - 1, n_1 - 1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z). \quad (8)$$

Правая часть (8) удовлетворяет $2n_1 + 2n_2 - 2$ соотношениям ортогональности. Тогда $t(n_1, n_2)$ находим из последнего соотношения ортогональности, которому должен удовлетворять многочлен

$Q_{(n_1, n_1-1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z)$:

$$\int_0^1 Q_{(n_1, n_1-1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(x) x^{n_1-1} w_1(x) dx = 0.$$

Получаем, что

$$t(n_1, n_2) = \frac{\int_0^1 x^{n_1+\alpha_1} (1-x)^{(n_1+n_2+\alpha-1)} e^{\beta x} dx}{\int_0^1 x^{n_1+\alpha_1-1} (1-x)^{(n_1+n_2+\alpha-1)} e^{\beta x} dx}. \quad (9)$$

Явный вид для $Q_{(n_1, n_1, n_2, n_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z)$ следует из соотношения симметрии

$$Q_{(n_1, n_1, n_2, n_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z) = Q_{(n_2, n_2-1, n_1, n_1-1)}^{(\alpha_2, \alpha_1, \alpha, \beta)}(z). \quad (10)$$

Нас особенно будет интересовать случай

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1. \quad (11)$$

Для вычисления отношений интегралов (9) в этом случае мы получим следующие рекуррентные соотношения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для $t(n+1, n)$ и $t(n, n)$ в случае (11) справедливо

$$\begin{aligned} t(n+1, n) &= (3n+2) - \frac{2n+1}{-(3n+1) + n[t(n, n)]^{-1}}, \\ t(n, n) &= 3n - \frac{2n}{1 - t(n, n-1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем сначала рекуррентные соотношения для интегралов $J(n, m)$, участвующих в определении (9) констант $t(n_1, n_2)$:

$$J(n, m) := \int_0^1 x^n (1-x)^m e^{-x} dx.$$

Для этого рассмотрим аппроксимации Паде $\frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$ к функции e^z :

$$Q_{n,m}(z)e^z - P_{n,m}(z) = R_{n,m}(z) = A_{n,m}z^{n+m+1} + \dots$$

Интегральные представления для аппроксимаций Паде получают из следующего тождества:

$$\begin{aligned} & \left[z^{n+m+1} \int_0^\infty t^n (1-t)^m e^{-zt} dt \right] e^z \\ & \quad - e^z z^{n+m+1} \int_1^\infty t^n (1-t)^m e^{-zt} dt \\ & = e^z z^{n+m+1} \int_0^1 t^n (1-t)^m e^{-zt} dt, \end{aligned}$$

откуда, в частности,

$$\begin{aligned} R_{n,m}(z) &= e^z z^{n+m+1} \int_0^1 t^n (1-t)^m e^{-zt} dt, \\ A_{n,m} &= \int_0^1 t^n (1-t)^m dt. \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда

$$J(n, m) = R_{n,m}(1) e^{-1}. \tag{14}$$

Известно (см., например, [6]), что функции $R_{n,m}(z)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} R_{n,m}(z) &= R_{n-1,m}(z) - \frac{A_{n-1,m}}{A_{n-1,m-1}} z R_{n-1,m-1}, \\ R_{n,m}(z) &= R_{n,m-1}(z) - \frac{A_{n,m-1}}{A_{n-1,m-1}} z R_{n-1,m-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда, с учетом явного вида (13) констант $A_{n,m}$ и соотношения (14), получаем

$$\begin{aligned} J(n, m) &= -(n+m)J(n, m-1) + nJ(n-1, m-1), \\ J(n, m) &= (n+m)J(n-1, m) - mJ(n-1, m-1). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$t(n, n) = \frac{J(n, 2n)}{J(n-1, 2n)}, \quad t(n+1, n) = \frac{J(n+1, 2n+1)}{J(n, 2n+1)}$$

и рекуррентные связи (15), получаем искомые уже нелинейные соотношения (12).

3. Нахождение коэффициентов рекуррентных соотношений

Сначала мы получим коэффициенты рекуррентных соотношений для интересующего нас специального случая (11). Справедлива

ТЕОРЕМА 1'. *Последовательность (6) многочленов Q , определяемых формулами (5), (8)–(10) (при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$) удовлетворяет следующей системе рекуррентных соотношений*

$$\begin{aligned}
 Q_{(n+1,n,n,n)} &= (z + A_0^1)Q_{(n,n,n,n)} + A_1^1Q_{(n,n,n,n-1)} \\
 &\quad + A_2^1Q_{(n,n,n-1,n-1)} + A_3^1Q_{(n,n-1,n-1,n-1)} \\
 &\quad + A_4^1Q_{(n-1,n-1,n-1,n-1)}, \\
 Q_{(n+1,n+1,n,n)} &= (z + A_0^2)Q_{(n+1,n,n,n)} + A_1^2Q_{(n,n,n,n)} \\
 &\quad + A_2^2Q_{(n,n,n,n-1)} + A_3^2Q_{(n,n,n-1,n-1)} + A_4^2Q_{(n,n-1,n-1,n-1)}, \\
 Q_{(n+1,n+1,n+1,n)} &= (z + A_0^3)Q_{(n+1,n+1,n,n)} + A_1^3Q_{(n+1,n,n,n)} \\
 &\quad + A_2^3Q_{(n,n,n,n)} + A_3^3Q_{(n,n,n,n-1)} + A_4^3Q_{(n,n,n-1,n-1)}, \\
 Q_{(n+1,n+1,n+1,n+1)} &= (z + A_0^4)Q_{(n+1,n+1,n+1,n)} + A_1^4Q_{(n+1,n+1,n,n)} \\
 &\quad + A_2^4Q_{(n+1,n,n,n)} + A_3^4Q_{(n,n,n,n)} + A_4^4Q_{(n,n,n,n-1)}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где для коэффициентов A_j^i справедливо

$$\begin{cases}
 A_0^1 = -t(n+1, n) - 2n, \\
 A_1^1 = -2 - 7n, \\
 A_2^1 = (-7n - 2)t(n, n) - 3n^2 + 2n, \\
 A_3^1 = -9n^2 - 2n, \\
 A_4^1 = (-9n^2 - 2n)t(n, n-1) + 3n^2,
 \end{cases} \quad (17.1)$$

$$\begin{cases}
 A_0^2 = -5n - 4 + t(n+1, n), \\
 A_1^2 = t(n+1, n)^2 + (-3n - 4)t(n+1, n) \\
 \quad - 7n^2 - 3n + 1, \\
 A_2^2 = (7n^2 + 2n)t(n+1, n) - 24n^3 - 25n^2 - 6n, \\
 A_3^2 = (-24n^3 - 25n^2 - 6n \\
 \quad + (7n^2 + 2n)t(n+1, n))t(n, n) \\
 \quad + (3n^3 - 2n^2)t(n+1, n) - 9n^4 - n^3 + 3n^2, \\
 A_4^2 = (9n^4 + 2n^3)t(n+1, n) - 27n^5 - 30n^4 - 7n^3,
 \end{cases} \quad (17.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0^3 = -t(n+1, n+1) - 2n - 1, \\ A_1^3 = -7n^2 - 9n - 3, \\ A_2^3 = (-7n^2 - 9n - 3)t(n+1, n) - 3n^3 + n^2 + 3n + 1, \\ A_3^3 = -9n^4 - 8n^3 - 2n^2, \\ A_4^3 = (-9n^4 - 8n^3 - 2n^2)t(n, n) + 3n^4 + n^3, \end{array} \right. \quad (17.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0^4 = t(n+1, n+1) - 5n - 6, \\ A_1^4 = t(n+1, n+1)^2 + (-3n - 5)t(n+1, n+1) \\ \quad - 3 - 7n^2 - 10n, \\ A_2^4 = (7n^2 + 9n + 3)t(n+1, n+1) - 24n^3 \\ \quad - 61n^2 - 51n - 14, \\ A_3^4 = ((7n^2 + 9n + 3)t(n+1, n+1) - 24n^3 \\ \quad - 61n^2 - 51n - 14)t(n+1, n) \\ \quad + (3n^3 - n^2 - 3n - 1)t(n+1, n+1) \\ \quad - 9n^4 - 7n^3 + 13n^2 + 15n + 4, \\ A_4^4 = (9n^4 + 8n^3 + 2n^2)t(n+1, n+1) \\ \quad - 27n^5 - 57n^4 - 38n^3 - 8n^2, \end{array} \right. \quad (17.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения коэффициентов A_j^i воспользуемся явным видом многочленов $Q_{[n,m]}(z)$, который получается из формулы Родрига (5) путем последовательного применения формулы Лейбница для дифференцирования произведения функций и бинорма Ньютона:

$$\begin{aligned} Q[n_1, n_2] = & \sum_{\nu=0}^{2(n_1+n_2)} \sum_{k=\max(0, n_1+n_2-\nu)}^{\min(2(n_1+n_2)-\nu, n_1+n_2)} \sum_{j=0}^{\min(n_2, k)} \times \\ & \times \sum_{m=0}^{\min(2(n_1+n_2)-\nu-k, n_1+n_2-k)} (-1)^\nu \binom{n_2}{j} \binom{n_1+n_2-j}{k-j} \times \\ & \times \binom{n_1+n_2-m}{2(n_1+n_2)-\nu-m-k} \binom{n_1+n_2-k}{m} \times \\ & \times (n_1)_{k-j} (n_2)_j (n_1+n_2+1)_m z^\nu. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда получаем коэффициенты $c_p[n_1, n_2]$ при степенях $z^{2(n_1+n_2)-p}$, $p < n_1 + n_2$, $p < n_2$. При $n_1 = n$, $n_2 = n + k$ имеем

$$c_0[n, n+k] = 1,$$

$$\begin{aligned}
c_1[n, n+k] &= -7n^2 + (-7k-4)n - 2k^2 - 2k, \\
c_2[n, n+k] &= \frac{49}{2}n^4 + (9+49k)n^3 + \frac{1}{2}(-3+77k^2+27k)n^2 \\
&\quad + \left(-3 + \frac{13}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 14k^3\right)n + \frac{1}{2}k(2k^2+4k^3-k-3), \\
c_3[n, n+k] &= -\frac{343}{6}n^6 + \left(-\frac{343}{2}k+35\right)n^5 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(175k + \frac{11}{3} - 441k^2\right)n^4 \\
&\quad + \left(\frac{11}{3}k + \frac{29}{3} - \frac{931}{6}k^3 + 94k^2\right)n^3 \\
&\quad + \left(-63k^4 + \frac{29}{2}k + \frac{107}{2}k^3 + k^2 - \frac{2}{3}\right)n^2 \\
&\quad + \left(16k^4 - \frac{5}{6}k^3 - \frac{8}{3} + \frac{15}{2}k^2 - \frac{2}{3}k - 14k^5\right)n \\
&\quad - \frac{1}{3}k(k-1)(4k^4 - 2k^3 - k^2 - 5k - 4), \\
c_4[n, n+k] &= \frac{2401}{24}n^8 + \frac{1}{6}(-1421+2401k)n^7 \\
&\quad + \frac{1}{12}(-9947k+2453+8575k^2)n^6 \\
&\quad + \frac{1}{12}(-15393k^2+8918k^3+7359k-1218)n^5 \\
&\quad + \frac{1}{24}(11809k^4-27230k^3-6090k+19387k^2+729)n^4 \\
&\quad + \frac{1}{12}(2548k^5-7421k^4+7122k^3-3296k^2+729k+88)n^3 \\
&\quad + \frac{1}{24}(1400k^6-4980k^5+6121k^4 \\
&\quad \quad - 3798k^3+1229k^2+264k-8)n^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}(56k^7-238k^6+363k^5-287k^4 \\
&\quad \quad + 125k^3+29k^2-2k-15)n \\
&\quad + \frac{1}{24}k(k-1)(16k^6-64k^5+84k^4-60k^3+21k^2+35k+30), \\
c_5[n, n+k] &= -\frac{16807}{120}n^{10} + \left(686 - \frac{16807}{24}k\right)n^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{4802}{3}k^2 + 3087k - \frac{16681}{12} \right) n^8 \\
& + \frac{1}{12}(-26411k^3 + 75656k^2 - 66724k + 18382)n^7 \\
& + \frac{1}{120}(-241815k^4 + 919240k^3 - 1201715k^2 \\
& \quad + 643370k - 119251)n^6 \\
& + \frac{1}{120}(-154007k^5 + 731640k^4 - 1269805k^3 \\
& \quad + 1004650k^2 - 357753k + 41948)n^5 \\
& + \frac{1}{24}(-13818k^6 + 79072k^5 - 171897k^4 + 180640k^3 \\
& \quad - 94739k^2 + 20974k - 1224)n^4 \\
& + \frac{1}{24}(-4312k^7 + 29000k^6 - 76215k^5 + 100598k^4 \\
& \quad - 70227k^3 + 22988k^2 - 2448k + 228)n^3 \\
& + \frac{1}{24} \left(-896k^8 + 6960k^7 - 21594k^6 + 34594k^5 - 30489k^4 \right. \\
& \quad \left. + 13508k^3 - 2229k^2 + 342k + \frac{48}{5} \right) n^2 \\
& + \frac{1}{120}(-560k^9 + 4960k^8 - 17860k^7 + 33920k^6 - 36503k^5 \\
& \quad + 20870k^4 - 5025k^3 + 1030k^2 + 48k - 288)n \\
& - \frac{1}{60}k(k-1)(k-2)(16k^7 - 112k^6 + 292k^5 - 360k^4 \quad (18) \\
& \quad + 209k^3 + 10k^2 + 57k + 36). \quad (19.1)
\end{aligned}$$

Аналогично для коэффициентов $\tilde{c}_p[n, n+k]$ полиномов $Q[n, n+k]$ из (5) с параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha = -\beta = 1$ имеем

$$\tilde{c}_0[n, n+k] = 1,$$

$$\tilde{c}_1[n, n+k] = -7n^2 + (-6-7k)n - 3k - 2k^2,$$

$$\tilde{c}_2[n, n+k] = \frac{49}{2}n^4 + (49k+23)n^3 + \frac{1}{2}(77k^2+69k-1)n^2$$

$$+ \left(14k^3 + \frac{35}{2}k^2 - \frac{1}{2}k - 5 \right) n + \frac{1}{2}k(-k-5+6k^2+4k^3),$$

$$\tilde{c}_3[n, n+k] = -\frac{343}{6}n^6 + \left(-\frac{343}{2}k - 14 \right) n^5$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{441}{2}k^2 - 35k + \frac{197}{6} \right) n^4 \\
& + \frac{1}{6}(-931k^3 - 192k^2 + 394k + 100)n^3 \\
& + \left(-63k^4 - 13k^3 + \frac{103}{2}k^2 + 25k - \frac{5}{3} \right) n^2 \\
& + \left(-14k^5 - 2k^4 + \frac{56}{3}k^3 + 12k^2 - \frac{5}{3}k - \frac{14}{3} \right) n \\
& - \frac{1}{6}k(k-1)(8k^4 + 8k^3 - 8k^2 - 19k - 14), \\
\tilde{c}_4[n, n+k] &= \frac{2401}{24}n^8 + \frac{1}{6}(2401k - 735)n^7 \\
& + \frac{1}{12}(8575k^2 - 5145k - 445)n^6 \\
& + \frac{1}{12}(8918k^3 - 8043k^2 - 1335k + 586)n^5 \\
& + \frac{1}{24}(11809k^4 - 14490k^3 - 3101k^2 + 2930k + 157)n^4 \\
& + \frac{1}{12}(2548k^5 - 4047k^4 - 876k^3 + 1532k^2 + 157k + 152)n^3 \\
& + \frac{1}{24}(1400k^6 - 2796k^5 - 467k^4 + 1666k^3 + 197k^2 + 456k)n^2 \\
& + \frac{1}{6}(56k^7 - 138k^6 - 9k^5 + 118k^4 + 10k^3 + 55k^2 - 27)n \\
& + \frac{1}{24}k(k-1)(16k^6 - 32k^5 - 28k^4 + 28k^3 + 29k^2 + 63k + 54), \\
\tilde{c}_5[n, n+k] &= -\frac{16807}{120}n^{10} + \frac{1}{24}(-16807k + 11662)n^9 \\
& + \frac{1}{24}(-38416k^2 + 52479k - 12390)n^8 \\
& + \frac{1}{12}(-26411k^3 + 53704k^2 - 24780k + 736)n^7 \\
& + \frac{1}{120}(-241815k^4 + 655130k^3 - 451385k^2 + 25760k + 23389)n^6 \\
& + \frac{1}{120}(-154007k^5 + 524370k^4 - 486855k^3 + 47970k^2 \\
& + 70167k - 16022)n^5 + \frac{1}{24}(-13818k^6 + 57071k^5 \\
& - 67747k^4 + 11105k^3 + 17683k^2 - 8011k + 772)n^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{24}(-4312k^7 + 21104k^6 - 31029k^5 + 7996k^4 + 11977k^3 \\
& - 8432k^2 + 1544k + 532)n^3 \\
& + \frac{1}{120}(-4480k^8 + 25560k^7 - 45550k^6 \\
& + 17325k^5 + 23005k^4 - 23185k^3 + 6395k^2 + 3990k - 272)n^2 \\
& + \frac{1}{120}(-560k^9 + 3680k^8 - 7820k^7 + 4140k^6 + 4757k^5 - 6600k^4 \\
& + 2535k^3 + 1960k^2 - 272k - 528)n \\
& - \frac{1}{120}k(k-1)(k-2)(32k^7 - 144k^6 + 104k^5 + 180k^4 - 82k^3 \\
& + 165k^2 + 259k + 132). \tag{19.2}
\end{aligned}$$

Приравнивая последовательно к нулю коэффициенты при z^{4n} , z^{4n-1} , z^{4n-2} , z^{4n-3} и z^{4n-4} в первом из соотношений (16), получим соответственно

$$\begin{aligned}
c_0[n, n]A_0^1 &= -t(n+1, n)c_0[n, n] - c_1[n, n] + \tilde{c}_1[n, n], \\
\tilde{c}_0[n, n-1]A_1^1 &= -t(n+1, n)c_1[n, n] - c_2[n, n] + \tilde{c}_2[n, n] - A_0^1c_1[n, n], \\
c_0[n, n-1]A_2^1 &= -t(n+1, n)c_2[n, n] - c_3[n, n] + \tilde{c}_3[n, n] - A_0^1c_2[n, n] \\
& + A_1^1t(n, n)c_0[n, n-1] - A_1^1\tilde{c}_1[n, n-1], \\
\tilde{c}_0[n-1, n-1]A_3^1 &= -t(n+1, n)c_3[n, n] - c_4[n, n] \\
& + \tilde{c}_4[n, n] - A_0^1c_3[n, n] + A_1^1t(n, n)c_1[n, n-1] \\
& - A_1^1\tilde{c}_2[n, n-1] - A_2^1c_1[n, n-1], \\
c_0[n, n]A_4^1 &= -t(n+1, n)c_4[n, n] - c_5[n, n] + \tilde{c}_5[n, n] - A_0^1c_4[n, n] \\
& + A_1^1t(n, n)c_2[n, n-1] - A_1^1\tilde{c}_3[n, n-1] - A_2^1c_2[n, n-1] \\
& + A_3^1t(n, n-1)c_0[n-1, n-1] - A_3^1\tilde{c}_1[n-1, n-1].
\end{aligned}$$

Подставляя в полученные выражения явный вид c_p и $\tilde{c}_p$ из (19.1) и (19.2), приходим к формулам (17.1) для коэффициентов первого рекуррентного соотношения из (16). Коэффициенты остальных рекуррентных соотношений системы (16) получаются таким же образом.

Теорема доказана.

Аналогично получаются коэффициенты рекуррентных соотношений и в общем случае (при произвольных значениях параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta$).

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Знаменатели аппроксимаций Эрмита–Паде (со старшим коэффициентом 1) для системы функций (2) удовлетворяют системе рекуррентных соотношений (16), где для коэффициентов A_j^i справедливо

$$\begin{aligned}
\beta A_0^1 &= -t(n+1, n)\beta + 2n, \\
\beta^2 A_1^1 &= -n(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha + 7n), \\
\beta^3 A_2^1 &= (-7n^2\beta + (-\alpha_1\beta - \alpha_2\beta - 2\alpha\beta)n)t(n, n) + 3n^3 + (4\alpha_1 + \alpha \\
&\quad + 3\beta - 3\alpha_2)n^2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2\alpha + \alpha_1\beta + \alpha_1\alpha + \alpha_2\beta - \alpha_1\alpha_2)n, \\
\beta^4 A_3^1 &= 9n^4 + (9\alpha_2 - 6\alpha + 3 - \beta - 15\alpha_1)n^3 + (-7\alpha_1^2 + 6\alpha_2\alpha \\
&\quad + 4\alpha_1 - 8\alpha_1\alpha - 3\alpha_2 - 2\alpha_1\beta + \alpha_2\beta + 6\alpha_1\alpha_2 + \alpha - \alpha^2)n^2 \\
&\quad + (\alpha_1\alpha + \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1^2\alpha - \alpha_1\alpha^2 - \alpha_1^3 \\
&\quad + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2\alpha^2 - \alpha_1^2\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1^2 - \alpha_2\alpha)n, \\
\beta^4 A_4^1 &= (-9n^4 - (-3 + 15\alpha_1 - 9\alpha_2 + 6\alpha + \beta)n^3 \\
&\quad - (-\alpha + \alpha^2 - 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 6\alpha_1\alpha_2 \\
&\quad - \alpha_2\beta + 2\alpha_1\beta + 7\alpha_1^2 - 6\alpha_2\alpha + 8\alpha_1\alpha)n^2 \\
&\quad - (\alpha_1\alpha^2 - \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha^2 - \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1^2 \\
&\quad + 2\alpha_1^2\alpha + \alpha_2\alpha + \alpha_1^3 - \alpha_1\alpha - 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1^2\beta)n)t(n, n-1) \\
&\quad + 3n^4 - (-7\alpha_1 - \alpha - \beta + 3\alpha_2)n^3 \\
&\quad - (\alpha_2\beta - 5\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha - 2\alpha_1\beta + 4\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha)n^2 \\
&\quad - (-\alpha_1^2\alpha + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1^3 - \alpha_1^2\beta)n, \\
\beta A_0^2 &= -\beta + 5n + 2 + \alpha + \alpha_1 + t(n+1, n)\beta, \\
\beta^2 A_1^2 &= t(n+1, n)^2\beta^2 + (-\beta^2 + 2\beta + 3n\beta + \alpha\beta + \alpha_1\beta)t(n+1, n) \\
&\quad - 7n^2 + (-\alpha_1 - \alpha_2 - 2 - 2\alpha - \beta)n - \alpha_1\beta - \beta, \\
\beta^3 A_2^2 &= (7n^2\beta + (\alpha_1\beta + \alpha_2\beta + 2\alpha\beta)n)t(n+1, n) + 24n^3 \\
&\quad + (7\alpha_2 + 7\alpha_1 - 4\beta + 7 + 14\alpha)n^2 \\
&\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha + \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha - 2\alpha\beta)n, \\
\beta^4 A_3^2 &= (-3n^3\beta + (-\alpha\beta - 4\alpha_1\beta + 3\alpha_2\beta - 3\beta^2 + 7t(n, n)\beta^2)n^2 \\
&\quad + (\alpha_1\alpha_2\beta + t(n, n)\beta^2\alpha_1 + t(n, n)\beta^2\alpha_2 + 2t(n, n)\beta^2\alpha \\
&\quad - \alpha_1^2\beta - \beta^2\alpha_2 - \alpha_1\alpha\beta + \alpha_2\alpha\beta - \alpha_1\beta^2)n)t(n+1, n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -9n^4 + (9\alpha_2 - 8\beta - 3 + 24t(n, n)\beta - 15\alpha_1 - 6\alpha)n^3 \\
& + (-4\alpha_1 + 6\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_2\alpha - 4t(n, n)\beta^2 + 7t(n, n)\beta\alpha_1 \\
& + 14t(n, n)\beta\alpha - \alpha^2 + 7t(n, n)\beta\alpha_2 - 7\alpha_1^2 - 2\alpha\beta \\
& - 8\alpha_1\alpha + 7t(n, n)\beta + 3\alpha_2 - 3\beta - 3\alpha_1\beta - 7\alpha_2\beta - \alpha)n^2 \\
& + (-2\alpha_1^2\alpha - \alpha_1^2 + 2t(n, n)e\beta\alpha^2 - 2t(n, n)\beta^2\alpha \\
& + t(n, n)\beta\alpha_1 + t(n, n)\beta\alpha_2 - \alpha_1\alpha + \alpha_2\alpha - \alpha_1\alpha^2 - \alpha_1^2\beta \\
& + 2t(n, n)\beta\alpha_1\alpha + 2t(n, n)\beta\alpha_2\alpha - \alpha_1\beta + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\beta \\
& + t(n, n)\beta\alpha_1^2 + t(n, n)\beta\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha^2 - \alpha_1^3 + 2t(n, n)\beta\alpha \\
& - \alpha_2^2\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha\beta)n, \\
\beta^5 A_4^2 = & (9n^4\beta + (-9\alpha_2\beta + \beta^2 + 15\alpha_1\beta - 3\beta + 6\alpha\beta)n^3 \\
& + (7\alpha_1^2\beta - 6\alpha_1\alpha_2\beta + 8\alpha_1\alpha\beta + \alpha^2\beta \\
& - 6\alpha_2\alpha\beta - \alpha\beta + 3\alpha_2\beta - 4\alpha_1\beta + 2\alpha_1\beta^2 - \beta^2\alpha_2)n^2 \\
& + (\alpha_2\alpha\beta - \alpha_1^2\alpha_2\beta + \alpha_1\alpha_2\beta + \alpha_1^3\beta - \alpha_1\beta^2\alpha_2 \\
& - \alpha_1\alpha\beta + \beta^2\alpha_1^2 - \alpha_1^2\beta - \alpha_2\alpha^2\beta + 2\alpha_1^2\alpha\beta \\
& + \alpha_1\alpha^2\beta - 2\alpha_1\alpha_2\alpha\beta)n)t(n+1, n) + 27n^5 \\
& + (54\alpha_1 - 27\alpha_2 + 27\alpha - 3\beta)n^4 + (3\beta - 27\alpha_2\alpha - 27\alpha_1\alpha_2 \\
& + 36\alpha_1^2 + 3\alpha_2\beta - \alpha_1\beta + 9\alpha^2 - 3 + 45\alpha_1\alpha - 4\alpha\beta)n^3 \\
& + (-4\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha - \alpha^2\beta + 21\alpha_1^2\alpha + \alpha^3 + \alpha\beta - 18\alpha_1\alpha_2\alpha \\
& + 12\alpha_1\alpha^2 + 3\alpha_1^2\beta - 9\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\beta \\
& - 2\alpha_1\alpha_2\beta + 10\alpha_1^3 + 4\alpha_2\alpha\beta - 4\alpha_1\alpha\beta - 3\alpha_2\beta - 9\alpha_2\alpha^2)n^2 \\
& + (-\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha^2 - \alpha_2\alpha\beta + \alpha_1\alpha\beta + \alpha_1^4 - \alpha_1\alpha_2\beta \\
& + \alpha_1^2\beta - 3\alpha_1^2\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1^3\alpha - \alpha_1^3\alpha_2 - \alpha_1\alpha + \alpha_2\alpha \\
& + \alpha_1^3\beta - \alpha_2\alpha^3 + 3\alpha_1^2\alpha^2 - \alpha_1\alpha^2\beta + \alpha_2\alpha^2\beta - \alpha_1^2\alpha_2\beta + \alpha_1\alpha^3)n, \\
\beta A_0^3 = & -t(n+1, n+1)\beta + 2n+1, \\
\beta^2 A_1^3 = & -(2 + \alpha_1 + \alpha + 7n + 2n\alpha + n\alpha_1 + n\alpha_2 + 7n^2), \\
\beta^3 A_2^3 = & (-7n^2\beta + (-7\beta - \alpha_2\beta - \alpha_1\beta - 2\alpha\beta)n \\
& - \alpha_1\beta - \alpha\beta - 2\beta)t(n+1, n) + 3n^3 \\
& + (3\beta + 4\alpha_2 + 1 + \alpha - 3\alpha_1)n^2 + (\alpha_2\beta - \alpha_1 + \alpha_1\beta + 3\beta + \alpha_2^2 \\
& + \alpha_2 + \alpha_2\alpha - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha)n + \beta + \alpha_1\beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^4 A_3^3 &= -9n^4 + (-3 - 15\alpha_2 - 6\alpha - \beta + 9\alpha_1)n^3 \\
&\quad + (-\alpha + 6\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1 - 2\alpha_2\beta - 4\alpha_2 - \alpha^2 - 7\alpha_2^2 - 8\alpha_2\alpha \\
&\quad + \alpha_1\beta + 6\alpha_1\alpha)n^2 + (-2\alpha_2^2\alpha - \alpha_2^2\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha_2\beta \\
&\quad - \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha^2 + \alpha_1\alpha + \alpha_2^2\alpha_1 - \alpha_2\alpha^2 - \alpha_2^3 + \alpha_1\alpha_2)n, \\
\beta^4 A_4^3 &= (-9n^4 + (-3 - 15\alpha_2 - 6\alpha - \beta + 9\alpha_1)n^3 \\
&\quad + (-\alpha + 6\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1 - 2\alpha_2\beta - 4\alpha_2 - \alpha^2 - 7\alpha_2^2 \\
&\quad - 8\alpha_2\alpha + \alpha_1\beta + 6\alpha_1\alpha)n^2 + (-2\alpha_2^2\alpha - \alpha_2^2\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha_2\beta \\
&\quad - \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha^2 + \alpha_1\alpha + \alpha_2^2\alpha_1 - \alpha_2\alpha^2 - \alpha_2^3 + \alpha_1\alpha_2)n)t(n, n) \\
&\quad + 3n^4 + (1 + \beta + 7\alpha_2 + \alpha - 3\alpha_1)n^3 \\
&\quad + (2\alpha_2 - \alpha_1\beta + 2\alpha_2\alpha + 2\alpha_2\beta - 4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha - \alpha_1 + 5\alpha_2^2)n^2 \\
&\quad + (\alpha_2^2\alpha + \alpha_2^2 + \alpha_2^3 + \alpha_2^2\beta - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1\alpha_2\alpha - \alpha_2^2\alpha_1)n, \\
\beta A_0^4 &= -\beta + 5n + 4 + \alpha + \alpha_2 + t(n+1, n+1)\beta, \\
\beta^2 A_1^4 &= t(n+1, n+1)^2\beta^2 \\
&\quad + (3n\beta + \alpha\beta - \beta^2 + 3\beta + \alpha_2\beta)t(n+1, n+1) - 7n^2 \\
&\quad + (-\beta - \alpha_1 - 9 - 2\alpha - \alpha_2)n - \beta - 3 - \alpha_1 - \alpha - \alpha_2\beta, \\
\beta^3 A_2^4 &= (2\beta + (7\beta + \alpha_1\beta + \alpha_2\beta + 2\alpha\beta)n \\
&\quad + \alpha\beta + \alpha_1\beta + 7n^2\beta)t(n+1, n+1) + 2n^3 \\
&\quad + (43 + 7\alpha_2 + 14\alpha + 7\alpha_1 - 4\beta)n^2 - \alpha\beta + (27 + \alpha_2^2 + 4\alpha_2 + 12\alpha_1 \\
&\quad + 16\alpha + 2\alpha_1\alpha + 2\alpha_2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha\beta - 4\beta)n - \beta + 6 + 5\alpha_1 \\
&\quad + 5\alpha + 2\alpha_1\alpha + \alpha^2 + \alpha_1^2, \\
\beta^4 A_3^4 &= ((7t(n+1, n)\beta^2 + 3\alpha_1\beta - 3\beta^2 - \alpha\beta - 4\alpha_2\beta - \beta)n^2 \\
&\quad + t(n+1, n)\beta^2\alpha_1 - 3n^3\beta - \beta^2 + t(n+1, n)\beta^2\alpha \\
&\quad + 2t(n+1, n)\beta^2 + (\alpha_1\beta - \alpha_2^2\beta - 3\beta^2 - \alpha_2\alpha\beta - \beta^2\alpha_2 \\
&\quad + \alpha_1\alpha\beta + \alpha_1\alpha_2\beta + 7t(n+1, n)\beta^2 - \alpha_2\beta + 2t(n+1, n)\beta^2\alpha \\
&\quad + t(n+1, n)\beta^2\alpha_1 + t(n+1, n)\beta^2\alpha_2 - \alpha_1\beta^2)n \\
&\quad - \alpha_1\beta^2)t(n+1, n+1) - 9n^4 \\
&\quad + (-9 - 6\alpha - 15\alpha_2 - 8\beta + 9\alpha_1 + 24t(n+1, n)\beta)n^3 \\
&\quad + t(n+1, n)\beta\alpha_1^2 + (-2\alpha\beta - 7\alpha_2^2 - 12\alpha_2 - 8\alpha_2\alpha - 3\alpha \\
&\quad - 4t(n+1, n)\beta^2 + 14t(n+1, n)\beta\alpha - 7\alpha_1\beta + 6\alpha_1\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 7t(n+1, n)\beta\alpha_2 - 17\beta + 7t(n+1, n)\beta\alpha_1 + 43t(n+1, n)\beta \\
& - \alpha^2 - 2 + 6\alpha_1\alpha_2 + 9\alpha_1 - 3\alpha_2\beta)n^2 - t(n+1, n)\beta^2\alpha \\
& + (2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 12\beta - 2\alpha_2^2\alpha - 3\alpha_2^2 + 2t(n+1, n)\beta\alpha_2\alpha \\
& + 3\alpha_1\alpha - 3\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha^2 + 12t(n+1, n)\beta\alpha_1 + 16t(n+1, n)\beta\alpha \\
& - 3\alpha\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha - \alpha_1^2\beta + 4t(n+1, n)\beta\alpha_2 + t(n+1, n)\beta\alpha_2^2 \\
& - \alpha_2^2\beta + 27t(n+1, n)\beta - 10\alpha_1\beta + 3\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\beta \\
& - \alpha_2\alpha^2 - \alpha_2^3 + \alpha_2^2\alpha_1 + 2t(n+1, n)\beta\alpha_1\alpha - 2\alpha_1\alpha\beta \\
& + t(n+1, n)\beta\alpha_1^2 + 2t(n+1, n)\beta\alpha^2 - 2t(n+1, n)\beta^2\alpha \\
& - 4t(n+1, n)\beta^2)n - \alpha_1\alpha\beta - 3\beta + 5t(n+1, n)\beta\alpha_1 \\
& - 4\alpha_1\beta - \alpha\beta + 6t(n+1, n)\beta + t(n+1, n)\beta\alpha^2 \\
& + 5t(n+1, n)\beta\alpha - \alpha_1^2\beta - t(n+1, n)\beta^2 + 2t(n+1, n)\beta\alpha_1\alpha, \\
\beta^5 A_4^4 = & (9n^4\beta + (\beta^2 + 6\alpha\beta + 15\alpha_2\beta + 3\beta - 9\alpha_1\beta)n^3 \\
& + (2\beta^2\alpha_2 - 3\alpha_1\beta + \alpha\beta - 6\alpha_1\alpha_2\beta + 4\alpha_2\beta - 6\alpha_1\alpha\beta + \alpha^2\beta \\
& + 8\alpha_2\alpha\beta - \alpha_1\beta^2 + 7\alpha_2^2\beta)n^2 + (-\alpha_2^2\alpha_1\beta - \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1\beta^2\alpha_2 \\
& + \alpha_2^3\beta - \alpha_1\alpha^2\beta - \alpha_1\alpha\beta + 2\alpha_2^2\alpha\beta + \alpha_2\alpha\beta - 2\alpha_1\alpha_2\alpha\beta \\
& + \alpha_2\alpha^2\beta + \alpha_2^2\beta + \beta^2\alpha_2^2)n)t(n+1, n+1) + 27n^5 \\
& + (54\alpha_2 + 27\alpha - 3\beta - 27\alpha_1 + 27)n^4 \\
& + (3\alpha_1\beta - 27\alpha_1\alpha + 45\alpha_2\alpha - 27\alpha_1\alpha_2 - \beta + 45\alpha_2 - 4\alpha\beta \\
& + 6 + 36\alpha_2^2 - 27\alpha_1 + 18\alpha + 9\alpha^2 - \alpha_2\beta)n^3 \\
& + (-6\alpha_1 + 8\alpha_2 + 2\alpha - \alpha^2\beta - 18\alpha_1\alpha_2\alpha + 21\alpha_2^2\alpha + 21\alpha_2^2 \\
& + 3\alpha_2^2\beta - 18\alpha_1\alpha + \alpha_1\beta - 9\alpha_1\alpha^2 + 3\alpha^2 - \alpha\beta + 24\alpha_2\alpha \\
& - 2\alpha_1\alpha_2\beta - 9\alpha_2^2\alpha_1 + \alpha^3 - 4\alpha_2\alpha\beta + 10\alpha_2^3 - 18\alpha_1\alpha_2 \\
& + 12\alpha_2\alpha^2 + 4\alpha_1\alpha\beta)n^2 + (-3\alpha_1\alpha_2\alpha^2 + \alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\alpha + 2\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha \\
& + 2\alpha_2\alpha - 3\alpha_1\alpha^2 + \alpha_2^3\beta - \alpha_2^3\alpha_1 + 3\alpha_2^3\alpha - 6\alpha_1\alpha_2\alpha - \alpha_1\alpha_2\beta \\
& + \alpha_2^2\beta - 2\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_2^2\alpha_1\alpha + 3\alpha_2^2\alpha^2 + 3\alpha_2\alpha^2 + 3\alpha_2^3 - 3\alpha_2^2\alpha_1 \\
& - \alpha_1\alpha^3 - \alpha_2^2\alpha_1\beta + \alpha_2\alpha^3 - \alpha_2\alpha\beta + \alpha_1\alpha\beta + \alpha_1\alpha^2\beta - \alpha_2\alpha^2\beta)n.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988 [MR 0953788](#), [Zbl 0718.41002](#).
- [2] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](#), [MR 1990569](#), [Zbl 1033.33002](#).
- [3] В. А. Калягин, “Аппроксимаций Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100 [Mi sm903](#), [MR 1280397](#), [Zbl 0840.47026](#).
- [4] A. Aptekarev, V. Kaliaguine, “Complex rational approximation and difference operators”, *Proceedings of the Third International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory*, vol. I (Acquafredda di Maratea, 1996), *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, **52**, 1998, 3–21 [MR 1644539](#), [Zbl 0917.47028](#).
- [5] V. Kaliaguine, A. Ronveaux, “On a system of “classical” polynomials of simultaneous orthogonality”, *J. Comput. Appl. Math.*, **67**:2 (1996), 207–217 [MR 1390180](#), [Zbl 0857.42012](#).
- [6] Дж. Бейкер (мл.), П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, Ч. 1: Основы теории. Ч. 2: Обобщения и приложения, Мир, М., 1986 [MR 0868466](#), [Zbl 0669.30023](#).