Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Боголюбский, Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных полиномов, задаваемых формулой Родрига, *Совр. пробл. матем.*, 2007, выпуск 9, 27–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 16:29:04

Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных полиномов, задаваемых формулой Родрига¹

А. И. Боголюбский

1. Введение

В работе [1] рассмотрен пример системы совместно ортогональных полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$ (где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{N}^4$; $\deg Q_{\vec{n}} = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$), определяемых соотношениями ортогональности

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_1(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_1 - 1, \\ \int_0^1 Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_2(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_2 - 1, \\ \int_1^\infty Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_1(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_3 - 1, \\ \int_1^\infty Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_2(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_4 - 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь весовые функции w_k относятся к типу Якоби–Лагерра:

$$w_k(x) = x^{\alpha_k} (1-x)^\alpha e^{\beta x}, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

При $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta < 0$, $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{N}$ система (1) определяет полиномы $Q_{\vec{n}}(x)$ с точностью до мультипликативной константы. Также в [1] для этих полиномов при $\vec{n} = [n, m] := (n, n, m, m)$ предъявлена формула Родрига

$$Q_{[n,m]}(x) = w_2^{-1} \frac{d^m}{dx^m} \left[w_2 x^m w_1^{-1} \frac{d^n}{dx^n} [w_1 x^n (1-x)^{(n+m)}] \right]. \quad (3)$$

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1.

В работе [2] для полиномов $Q_{\vec{n}}$ с диагональными и наддиагональными индексами в четырехмерной таблице $\vec{n}$ (принадлежащих т.н. “step-line”):

$$\begin{aligned} \dots, Q_{(n-1, n-1, n-1, n-1)}, Q_{(n, n-1, n-1, n-1)}, \\ Q_{(n, n, n-1, n-1)}, Q_{(n, n, n, n-1)}, \\ Q_{(n, n, n, n)}, Q_{(n+1, n, n, n)}, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

был получен (в соответствие с общей теорией аппроксимаций Эрмита–Паде, см. [3], [4]) комплект из четырех 6-членных рекуррентных соотношений, позволяющий вычислять последовательно все полиномы из (4) в явном виде.

Отметим, что при формальной подстановке $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ система полиномов $Q_{\vec{n}}$ не может определяться соотношениями ортогональности (1), которые, очевидно, в этом случае не являются независимыми. Тем не менее для определения $Q_{[n, m]}$ всегда может служить остающаяся формально справедливой и при $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{N}$ формула Родрига (3). На ее основе с помощью метода, изложенного в [2], можно определить и остальные полиномы из “step-line” (4). Кроме того, как следует из приведенных в этой работе рассуждений, предъявленные там 6-членные рекуррентные соотношения корректны и при таком определении $Q_{\vec{n}}$.

Далее под $Q_{\vec{n}}(x)$ мы будем понимать определенную только что описанным образом (т.е. при помощи (3)) систему полиномов с параметрами

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1. \quad (5)$$

Отметим, что в этом случае полиномы $Q_{[n, m]}(x)$ благодаря (3) имеют рациональные коэффициенты, чего нельзя сказать об остальных полиномах из (4). Как следствие, коэффициенты рекуррентных соотношений из [2] также содержат иррациональности, которые имеют вид

$$t(n_1, n_2) = \frac{\int_0^1 z^{n_1} (1-z)^{(n_1+n_2)} e^{-z} dz}{\int_0^1 z^{n_1-1} (1-z)^{(n_1+n_2)} e^{-z} dz}. \quad (6)$$

При этом, хотя $t(n_1, n_2)$ также могут быть в нужном нам случае $n_1 - n_2 \leq 1$ определены рекуррентным образом, наличие иррациональностей осложняет вычисление полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$ по 6-членным соотношениям и делает его малоэффективным.

Целью настоящей работы является вывод рекуррентных соотношений с рациональными коэффициентами (по n и x) для полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$, определяемых (3), (2) и (5). Далее будут представлены два 7-членных рекуррентных соотношения, связывающих последовательные полиномы из ряда

$$\dots, Q_{[n-1, n-1]}, Q_{[n, n-1]}, Q_{[n, n]}, \dots, \quad (7)$$

а также одно 8-членное, связывающее последовательные полиномы $Q_{(n, n, n, n)}(x)$ с диагональными индексами. При этом практический вывод этих соотношений производится при помощи аналитико-численной техники, основанной на рациональной интерполяции, а обоснование – с использованием компьютерно-алгебраических вычислений.

Сформулируем основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Для полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$ из (7) справедливы соотношения:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & Q_{[n, n]} = S_1^1(z, n)Q_{[n, n-1]} + S_2^1(z, n)Q_{[n-1, n-1]} \\ & + S_3^1(z, n)Q_{[n-1, n-2]} + S_4^1(z, n)Q_{[n-2, n-2]} \\ & + S_5^1(z, n)Q_{[n-2, n-3]} + S_6^1(z, n)Q_{[n-3, n-3]}, \\ 2) \quad & Q_{[n+1, n]} = S_1^2(z, n)Q_{[n, n]} + S_2^2(z, n)Q_{[n, n-1]} \\ & + S_3^2(z, n)Q_{[n-1, n-1]} + S_4^2(z, n)Q_{[n-1, n-2]} \\ & + S_5^2(z, n)Q_{[n-2, n-2]} + S_6^2(z, n)Q_{[n-2, n-3]}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$S_j^k(z, n) = \sum_{m=0}^{\lambda_j} d_{j,m}^k(n) z^m,$$

$\lambda_j \leq 2j$, а $d_{j,m}^k(n)$ зависит от n рационально (точный вид см. в приложении).

ТЕОРЕМА 2. *Для полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$ с диагональными индексами справедливо соотношение:*

$$Q_{[n, n]} = \sum_{k=1}^7 T_k(z, n) Q_{[n-k, n-k]}. \quad (9)$$

где $T_k(z, n)$ полиномиально зависит от z и рационально от n (о точном виде см. п. 5).

Поскольку логика как эмпирического вывода, так и строгого обоснования справедливости всех соотношений (8), (9) практически одинакова, далее все рассуждения мы будем проводить на примере первого из соотношений (8).

2. Вывод рекуррентных соотношений

Обсудим вначале практический способ получения $d_{j,m}^1(n)$. Одним из возможных подходов является формальное исключение “неродриговых” (т.е. из (4), но не из (7)) полиномов из системы линейных уравнений с неизвестными $Q_{\vec{n}}(x)$ из (7), построенной с использованием 6-членных соотношений. Однако осуществление процесса такой элиминации представляет собой далеко не простую задачу, поскольку оно сопряжено с проведением массивных формальных выкладок. В ходе исключения неизвестных использующиеся промежуточные символьные значения оказываются настолько громоздкими, что проведение выкладок за разумное время представляет собой непосильную задачу для современных распространенных систем компьютерной алгебры.

Поэтому был предложен и использован достаточно простой, но эффективный подход, позволяющий преодолеть описанную сложность за счет полного отказа от манипуляций с символьными выражениями. По всей видимости, этот подход обладает достаточно большой общностью и может быть эффективно использован в широком классе аналогичных задач. В его основе лежит численный анализ линейно-полиномиальной связи последовательных $Q_{\vec{n}}(x)$ из (7) с конкретными индексами.

Итак, предположим, что соотношение вида (8)-1 существует, а коэффициенты $d_{j,m}^1(n)$ представляются в виде отношения двух полиномов от n (у нас, однако, нет никакой информации, позволяющей нам судить о степенях этих полиномов).

Пусть при фиксированном $n = N$ коэффициент $d_{j,m}^1$ принимает определенное рациональное значение

$$c_{j,m} = d_{j,m}^1(N).$$

Тогда (если $4N > \sum_{j=1}^6 (2j+1) - 1 = 47$) система линейных уравнений

$$\text{coeff}(D(z), z, 4N - p) = 0, \quad p = 0, \dots, 47, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} D(z) := & Q_{[N,N]} - (S_1^1(z, N)Q_{[N,N-1]} + S_2^1(z, N)Q_{[N-1,N-1]} \\ & + S_3^1(z, N)Q_{[N-1,N-2]} + S_4^1(z, N)Q_{[N-2,N-2]} \\ & + S_5^1(z, N)Q_{[N-2,N-3]} + S_6^1(z, N)Q_{[N-3,N-3]}) \end{aligned}$$

и использовано обозначение

$\text{coeff}(P(z), z, \nu)$ – коэффициент при z^ν в полиноме $P(z)$,

разрешима относительно набора неизвестных $\{c_{j,m}\}$. При этом, поскольку максимальное значение $\lambda_j = 2j$, обеспечивающее формальную корректность (8)-1, может и не достигаться, свободными неизвестными являются лишь

$$\Lambda = \sum_{j=1}^6 (\lambda_j + 1) \quad (11)$$

из этого набора, а остальные выражаются через них. Число Λ выясняется экспериментально и в силу сделанных предположений не зависит от N . В качестве свободных неизвестных можно выбрать набор из совокупностей $(\lambda_j + 1)$ коэффициентов при последовательных младших степенях полинома $S_j^1(z)$; числа λ_j фиксируются (для всех N) произвольным образом, но так, чтобы удовлетворять (11). Свобода выбора здесь является следствием отсутствия единственности соотношений вида (8). Для приводимого в Приложении А явного вида соотношений выбраны значения

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 3, \quad \lambda_5 = 2, \quad \lambda_6 = 2.$$

При этом для определения нужных неизвестных, очевидно, достаточно решить систему

$$\text{coeff}(D(z), z, 4N - p) = 0, \quad p = 0, \dots, \Lambda - 1 = 20. \quad (12)$$

Итак, мы предъявили способ нахождения значений $d_{j,m}^1(n)$ при фиксированных n . Теперь для определения явной аналитической структуры $d_{j,m}^1(n)$ можно использовать (для каждого коэффициента) следующую процедуру:

I. С использованием 6-членных соотношений рассчитаем большое, достаточное для проведения последующих шагов, количество полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$ из (7), входящих в соотношения (8).

II. Зафиксируем $M \in \mathbb{N}$ и некоторое достаточно большое K (к примеру, $M = 1$, $K = 50$).

III. Вычислим рациональные значения $d_{j,m}^k(n)$ при $n = M, \dots, M + K - 1$, решая системы вида (12).

IV. Вспомним о нашем предположении о рациональности зависимости $d_{j,m}^k(n)$ и попытаемся восстановить точный вид этой функции по значениям в некоторых целых точках, найденных в III пункте. Для этого используем процедуру рациональной интерполяции, являющейся частным случаем процедуры построения многоточечной аппроксимации Паде. Одним из наиболее очевидных способов ее реализации является построение обычных аппроксимаций Паде для построенного по полученным данным интерполяционного многочлена Лагранжа. При этом отметим, что сочетание степеней числителя и знаменателя, используемое для интерполяции, должно находиться либо из сторонних эмпирических соображений, либо перебором. Использование некоторых алгоритмов рациональной интерполяции, однако, частично решает данную проблему. В частности, такой алгоритм заложен в процедуру RationalInterpolation системы Maple (из пакета CurveFitting), которая по K данным рациональным значениям в рациональных точках строит нужную интерполирующую функцию. При этом, если степени как числителя, так и знаменателя исходной функции меньше $K/2$, она восстанавливается точно. В противном же случае для определения степеней все равно необходимо привлекать дополнительные соображения.

V. Для проверки точности полученной методом рациональной интерполяции в пункте IV функции необходимо увеличить K (к примеру, на 1), повторить всю последовательность действий, начиная с пункта III (в его рамках посчитав значения в недостающем количестве точек). Критерием окончания алгоритма является совпадение функций, полученных при разных K , либо очевидная малость суммы степеней числителя и знаменателя по сравнению с K . Если критерий не выполнен, необходимо значительно увеличить K (к примеру, удвоить) и вернуться к пункту III.

Чтобы проиллюстрировать реальную сложность решаемой алгоритмом проблемы, отметим, что степени по n числителей и знаменателей некоторых коэффициентов 8-членного соотношения (9) превышают 90. Естественно, оперирование с рациональ-

ными функциями такого порядка требует нетривиальной организации вычислительного процесса и серьезных затрат машинного времени.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Теперь перейдем к обоснованию справедливости полученных с использованием этого алгоритма соотношений (опять же на примере (8)-1). На идейном уровне оно достаточно просто, однако в силу сложности выкладок требует привлечения символьных вычислений в системе компьютерной алгебры. Полный листинг соответствующей программы на Maple см. в приложении А, здесь же изложим лишь суть метода доказательства. Задавшись произвольным $n \geq 0$, возьмем совокупность 5 последовательных полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$ из (7) в качестве формального “базиса”:

$$\begin{aligned} B_0 &:= Q_{(n,n,n,n)}, \\ B_1 &:= Q_{(n+1,n,n,n)}, \\ B_2 &:= Q_{(n+1,n+1,n,n)}, \\ B_3 &:= Q_{(n+1,n+1,n+1,n)}, \\ B_4 &:= Q_{(n+1,n+1,n+1,n+1)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Также введем формальный параметр

$$\tau := t(n+1, n), \tag{14}$$

через который выражаются все последующие выражения вида (6):

$$t(n+1, n+1), t(n+2, n+1), t(n+2, n+2), \dots$$

Ясно, что по рекуррентным формулам из [2] через $\tau, B_0, \dots, B_4$ могут быть выражены все последующие $Q_{\vec{n}}(x)$ из (7), в частности,

$$\begin{aligned} C_0 &:= Q_{[n+2,n+1]}, \\ C_1 &:= Q_{[n+2,n+2]}, \\ C_2 &:= Q_{[n+3,n+2]}, \\ R &:= Q_{[n+3,n+3]}. \end{aligned}$$

С другой стороны, R можно выразить и при помощи первого из соотношений (8) через $B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2$. При этом процедура такого выражения корректна при любом n , поскольку знаменатели коэффициентов $d_{j,m}^1(n)$ не имеют целых положительных

нулей. Подставив вместо последних трех полиномов их выражения через τ , $B_0, \dots, B_4$ и убедившись в формальном совпадении двух результатов, тем самым мы докажем соотношение (8)-1.

4. Одно следствие

Отметим непосредственное следствие теоремы 2, представляющее интерес с точки зрения исследования числовой природы постоянной Эйлера γ . Оно касается рекуррентной связи нормированных значений

$$\eta_n := \frac{Q_{(n,n,n,n)}(1)}{(n!)^2}. \quad (15)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для чисел η_n справедливо 8-членное рекуррентное соотношение

$$\eta_n = \sum_{k=1}^7 \frac{a_k(n)}{b(n)} \eta_{n-k} \quad (16)$$

(о точном виде многочленов $a_j(n)$ и $b(n)$ см. следующий пункт).

5. О структуре приложений

В Приложении А (см. стр. 63) приведен код программы на Maple, реализующей логику доказательства формулы (8)-1, описанную в пункте 3. Комментарии к программе приведены на английском языке. Элементы определенного в ней массива $c[j, m]$ представляют собой функции $d_{j,m}^1(n)$, определяющие коэффициенты S_j^1 из (8).

В Приложении В (см. стр. 68) на языке Maple определен массив $d[j, m]$, элементы которого суть функции $d_{j,m}^2(n)$, определяющие коэффициенты S_j^2 из (8).

Коэффициенты 8-членного соотношения (9) имеют слишком громоздкую форму, не позволяющую привести их в печатном виде. Однако, по ссылке <http://www.box.net/public/uu9ddnq7ma> можно найти файл `c8_poly.m`, представляющий собой файл данных Maple. Он содержит массив $c[k, m]$, в котором хранятся коэффициенты полиномов $T_k(z)$ как функции от n :

$$T_k(z, n) = \sum_{m=0}^{\lambda_k} c[k, m](n) z^m.$$

При этом степени полиномов $T_k(z)$ при $k = 1, \dots, 7$ таковы:

$$\lambda_k = 4; 4; 8; 7; 6; 5; 4.$$

В Приложении С (см. стр. 71) приведены явные выражения для коэффициентов $a_1(n)$ и $b(n)$ рекуррентного соотношения (16). Все коэффициенты этого соотношения содержатся в файле `c8_wof.m`, размещенном по адресу <http://www.box.net/public/uu9ddnq7ma>.

Список литературы

- [1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](#), [MR 1990569](#), [Zbl 1033.33002](#).
- [2] Д. В. Христофоров, “Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде одной системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2006, 11–26.
- [3] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100 [Mi sm903](#), [MR 1280397](#), [Zbl 0840.47026](#).
- [4] A. Aptekarev, V. Kaliaguine, “Complex rational approximation and difference operators”, *Proceedings of the Third International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory*, vol. I (Acquafredda di Maratea, 1996), *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, **52**, 1998, 3–21 [MR 1644539](#), [Zbl 0917.47028](#).