Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, Четырёхчленные
рекуррентные соотношения для γ -форм, *Совр. про-
бл. матем.*, 2007, выпуск 9, 37–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm15>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:00:00

Четырёхчленные рекуррентные соотношения для γ -форм¹

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

1. Введение

Пусть $Q_n(x)$ – многочлен, задаваемый обобщенной формулой Родрига

$$Q_n(x) = \frac{(1-x)^{-1}e^x}{(n!)^2} \frac{d^n}{dx^n} x^n \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{2n+1} x^n e^{-x}. \quad (1)$$

Рассмотрим две математические константы – постоянную Эйлера γ

$$\gamma := - \int_0^\infty \ln x e^{-x} dx,$$

и значение интегральной экспоненты $e \operatorname{Ei}(1, 1)$, где

$$\operatorname{Ei}(n, x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt.$$

Пусть f_n и g_n – последовательности $\mathbb{Z}$ -форм относительно констант γ и $e \operatorname{Ei}(1, 1)$, генерируемые полиномами Q_n по формулам

$$f_n := p_n - \gamma q_n := \int_0^\infty Q_n(x) \ln x e^{-x} dx, \quad (2)$$

и

$$g_n := e \operatorname{Ei}(1, 1) q_n - r_n := e \int_1^\infty Q_n(x) \ln x e^{-x} dx. \quad (3)$$

Настоящая работа посвящена получению и доказательству следующего результата.

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой № 1 ОМН РАН и грантом ИНТАС 03-51-6637. Работа первого автора частично поддержана исследовательским грантом РФФИ-05-01-00522, работа второго автора частично поддержана исследовательским грантом РФФИ-05-01-00697.

ТЕОРЕМА 1. Целочисленные коэффициенты p_n, q_n, r_n форм (2) и (3) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(16n - 15)q_{n+1} = (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n - n^2(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + n^2(n-1)^2(16n+1)q_{n-2} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & p_1 &= 2, & p_2 &= 31, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= 3, & q_2 &= 50, \\ r_0 &= 0, & r_1 &= 1, & r_2 &= 24. \end{aligned}$$

2. Связь γ -форм с рекуррентными соотношениями для $Q_n(1)$

Известно (см. [1]), что многочлены $Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\deg Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)} = 4n$, определяемые формулой Родрига

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) &= \frac{1}{(n!)^2} (1-x)^{-1} x^{-\alpha_2} e^x \\ &\quad \times \frac{d^n}{dx^n} x^{n+\alpha_2-\alpha_1} \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{2n+1} x^{n+\alpha_1} e^{-x}, \quad (5) \end{aligned}$$

удовлетворяют системе соотношений ортогональности

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^1 Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^\nu w_1(x) dx &= 0, \\ \int_0^1 Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^\nu w_2(x) dx &= 0, \\ \int_1^\infty Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^\nu w_1(x) dx &= 0, \\ \int_1^\infty Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^\nu w_2(x) dx &= 0, \end{aligned} \right. \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad (6)$$

где $w_1(x) := x^{\alpha_1}(1-x)e^{-x}$, $w_2(x) := x^{\alpha_2}(1-x)e^{-x}$. Нетрудно видеть (вычитая соотношения ортогональности в (6) и деля результат на константу), что соотношения ортогональности (6) сохраняют силу и при

$$w_1(x) := x^{\alpha_1}(1-x)e^{-x}, \quad w_2(x) := \frac{x^{\alpha_2} - x^{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}(1-x)e^{-x}.$$

Тем самым, устремляя $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$, а затем $\alpha_1 \rightarrow 0$, мы получаем, что многочлены $Q_n := Q_n^{(0,0)}$ (см. (1), (5)) удовлетворяют соотношениям ортогональности (6) с весовыми функциями

$$w_1(x) := (1-x)e^{-x}, \quad w_2(x) := (1-x) \ln x e^{-x}. \quad (7)$$

Рассмотрим следующие функции второго рода, связанные с системой ортогональности (6), (7)

$$R_n(z) = \int_0^\infty \frac{Q_n(x)}{z-x} (1-x) \ln x e^{-x} dx,$$

$$S_n(z) = \int_0^1 \frac{Q_n(x)}{z-x} (1-x) \ln x e^{-x} dx.$$

Также известно (например, см. [2]), что функции второго рода, порождённые $Q_n(x)$, удовлетворяют (вследствие соотношений ортогональности) тем же рекуррентным соотношениям, что и полиномы $Q_n(x)$, т.е. рекуррентным соотношениям теоремы 1' работы [3], и как следствие, рекуррентным соотношениям теорем 1 и 2 работы [4]. Таким образом, интересующие нас формы (2) и (3)

$$f_n = R_n(1), \quad g_n = eS_n(1)$$

удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и $Q_n(1)$, например, восьмичленному рекуррентному соотношению следствия теоремы 2 работы [4].

3. Получение четырёхчленного рекуррентного соотношения для форм

Полученные в [4] рекуррентные соотношения позволили вычислять формы (2) и (3) до n порядка нескольких тысяч, что в свою очередь дало богатый материал для экспериментального изучения рациональных приближений к постоянной Эйлера. В частности, исследуя общие множители последовательностей $(ap_n + bp_{n-1} + cp_{n-2})$ и $(aq_n + bq_{n-1} + cq_{n-2})$, был замечен следующий экспериментальный факт:

$$\begin{vmatrix} p_n & q_n & r_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} & r_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} & r_{n-2} \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} (n-1)!^2 (n-2)!^2 (16n-1), \quad n = 2, 3, \dots, 5000, \quad (8)$$

что в свою очередь привело к гипотезе, что p_n, q_n, r_n являются базисом решений некоторого четырёхчленного рекуррентного соотношения с рациональными по n коэффициентами. То есть верны соотношения

$$\begin{cases} p_{n+1} = K_n^{(0)} p_n + K_n^{(1)} p_{n-1} + K_n^{(2)} p_{n-2}, \\ q_{n+1} = K_n^{(0)} q_n + K_n^{(1)} q_{n-1} + K_n^{(2)} q_{n-2}, \\ r_{n+1} = K_n^{(0)} r_n + K_n^{(1)} r_{n-1} + K_n^{(2)} r_{n-2}, \end{cases}$$

причём коэффициент $K_n^{(2)}$ есть отношение последовательных определителей (8).

Экспериментальная проверка гипотезы и получение явного вида рациональных функций $K_n^{(0)}, K_n^{(1)}$ проводились численной процедурой восстановления рациональной функции по её перепределённому рациональному интерполянту.

4. Доказательство теоремы

Наша цель – строго обосновать соотношение (4), опираясь на восьмичленное рекуррентное соотношение из работы [4] (следствие теоремы 2). Для того, чтобы не возникало впечатления “везения” или “случайности” в этом обосновании, мы приведём общую процедуру проверки одного линейного рекуррентного соотношения при помощи другого.

Итак, мы находимся в следующей ситуации: есть некоторая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, есть коэффициенты $a_j(n)$ ($j = 0, \dots, m_1$) доказанного соотношения $\sum_{j=0}^{m_1} a_j(n) S_{n+j} = 0$, есть коэффициенты $b_j(n)$ ($j = 0, \dots, m_2$) экспериментального соотношения $\sum_{j=0}^{m_2} b_j(n) S_{n+j} \stackrel{?}{=} 0$, которое требуется проверить и доказать. Нужно узнать, до какого номера n надо проверять экспериментальное соотношение, чтобы быть уверенным в его истинности для всех $n \in \mathbb{N}$. Описанная ниже процедура годится для любых зависимостей коэффициентов a и b от n , для которых выполнено следующее свойство:

- (*) Любое алгебраическое выражение (полином), составленное из подвыражений вида $a_j(n+i)$, $b_j(n+i)$, k , где $i, j, k \in \mathbb{Z}$, **либо** обращается в 0 для всех натуральных n , **либо** обращается в 0 на конечном множестве исключительных значений $n \in \mathbb{N}$.

При этом существует финитная для любого фиксированного выражения процедура проверки альтернативы $(*)$ и нахождения верхней границы на элементы множества исключительных значений. Очевидно, полиномиальная зависимость a и b от n этим свойством обладает.

Будем считать, что $m_2 < m_1$, поскольку элементы S_{n+j} при $j \geq m_1$ можно выразить через предыдущие. Рассмотрим величины $\Sigma_n = \sum_{j=0}^{m_2} b_j(n)S_{n+j}$. Наша цель – найти рекуррентное соотношение для Σ_n .

$$M = \begin{pmatrix} a_0(n) \dots \dots \dots a_{m_1}(n) & & & & \\ & a_0(n+1) \dots \dots \dots & \ddots & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & a_0(n+l_1) \dots \dots \dots & a_{m_1}(n+l_1) & \\ b_0(n) \dots \dots b_{m_2}(n) & & & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_0(n+l_2) \dots \dots b_{m_2}(n+l_2) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для этого сформируем матрицу M со структурой, показанной в формуле (9), выбрав l_1 и l_2 так, чтобы $l_1 + m_1 = l_2 + m_2$ и чтобы $\text{rank}(M) = l_1 + l_2 + 1$, то есть был на единицу меньше числа строк матрицы M . Тогда $0 \leq l_1 \leq m_2$. Требуемое l_1 находится следующим образом.

Вначале построим матрицу M для $l_1 = m_2$; $l_2 = m_1$. Отметим все столбцы. В матрице, образованной отмеченными столбцами, число строк на 1 больше числа столбцов. Поэтому мы можем сформировать обнуляющий вектор-строку V для отмеченных столбцов: элемент v_i получается умножением $(-1)^i$ на определитель, полученный из выделенной подматрицы вычёркиванием i -й строки. Если последний элемент V не равен 0 (то есть не обращается в 0 при всех $n \in \mathbb{N}$), то нужные нам l_1 , l_2 , V найдены.

В противном случае можно вычеркнуть последнюю строку, и подматрица из отмеченных столбцов будет вырожденной. Но в последнем столбце у неё только один ненулевой элемент $a_{m_1}(n+l_1)$. Значит, можно вычеркнуть последний столбец и последние строки в каждом блоке (что равносильно уменьшению l_1

и l_2 на 1), и всё равно подматрица из выделенных столбцов будет вырожденной. Значит, между отмеченными столбцами есть линейное соотношение, и один из них можно исключить – сделать непомеченным. Последние l_2 столбцов линейно независимы, поэтому исключаемый столбец можно выбрать среди остальных столбцов. Теперь мы снова находимся в ситуации, когда в матрице, образованной отмеченными столбцами, число строк на 1 больше числа столбцов. Поэтому мы повторяем процедуру формирования обнуляющей строки V для отмеченных столбцов. Поскольку неотмеченные столбцы линейно зависимы от отмеченных, то V является обнуляющей строкой и для них.

Итак, пусть найдены l_1, l_2 и построена обнуляющая строка V , которая имеет вид $[\varphi_0, \dots, \varphi_{l_1}, f_0, \dots, f_{l_2}]$. По построению $f_{l_2} \neq 0$. Рассмотрим матричное произведение $V MW$, где вектор-столбец $W = [S_n, \dots, S_{n+m_1+l_1}]^T$. Считая его двумя способами, получим тождество:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l_2} f_i \Sigma_{n+i} &= [\varphi_0, \dots, \varphi_{l_1}, f_0, \dots, f_{l_2}] \cdot [0, \dots, 0, \Sigma_n, \dots, \Sigma_{n+l_2}]^T \\ &= V \cdot MW = VM \cdot W = [0, \dots, 0] \cdot W = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $f_{l_2} \neq 0$, то есть значение $n = \tilde{n}$, начиная с которого $f_{l_2}(n) \neq 0$. Поэтому проверку $\Sigma_n \stackrel{?}{=} 0$ достаточно осуществить до номера $n = \tilde{n} + l_2$.

Применим эту процедуру к рекуррентным соотношениям (4) и (16) из работы [4]. Хотя коэффициенты рекуррентного восьмичленного соотношения являются многочленами (по n) очень большой степени (порядка 80–90), тем не менее современные пакеты символьных вычислений (MAPLE) позволяют вычислять определители из (9) с такими входными данными. Для соотношения (4) и восьмичленного соотношения (16) из работы [4] оказалось, что ранг матрицы (9) для $l_1 = m_2 = 3$ и $l_2 = m_1 = 7$ равен $8 = (l_1 + l_2 + 1) - 3$, поэтому этап уменьшения l_1, l_2 будет пройден 3 раза. В итоге $l_1 = 0, l_2 = 4$, отмечать можно последние 5 столбцов, и вычисленная по ним аннулирующая строка V аннулирует и первые 3 столбца. Вычисленный таким образом многочлен $f_4(n)$

(последний элемент V) имеет вид

$$f = f_4(n) = \begin{vmatrix} a_3(n) & a_4(n) & a_5(n) & a_6(n) & a_7(n) \\ b_3(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2(n+1) & b_3(n+1) & 0 & 0 & 0 \\ b_1(n+2) & b_2(n+2) & b_3(n+2) & 0 & 0 \\ b_0(n+3) & b_1(n+3) & b_2(n+3) & b_3(n+3) & 0 \end{vmatrix}.$$

Оценку величины максимального по модулю корня этого полинома делаем через коэффициенты полинома по известной формуле:

$$|\tilde{n}| < 1 + \max_{1 \leq i \leq \deg(f)} \left| \frac{\text{coeff}(f, \deg(f) - i)}{\text{coeff}(f, \deg(f))} \right|^{1/i}.$$

Подставляя сюда явные значения коэффициентов рекуррентных соотношений (4) и (16) из работы [4], получаем

$$|\tilde{n}| < 70.$$

Численная проверка совпадения решений рекуррентных соотношений (4) и (16) из [4] до $n = 70$ завершает доказательство теоремы.

Список литературы

- [1] А. И. Аптекарев, А. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](#), [MR 1990569](#), [Zbl 1033.33002](#).
- [2] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100 [Mi sm903](#), [MR 1280397](#), [Zbl 0840.47026](#).
- [3] Д. В. Христофоров, “Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде одной системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2006, 11–26.
- [4] А. И. Боголюбский, “Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных многочленов, задаваемых формулой Родрига”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2006, 27–35.