Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Туляков, О некоторой процедуре нахождения асимптотических разложений для решений разностных уравнений, *Совр. пробл. матем.*, 2007, выпуск 9, 45–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm16>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:27:45

О некоторой процедуре нахождения асимптотических разложений для решений разностных уравнений¹

Д. Н. Туляков

1. Введение

Из общей теории разностных уравнений известно, что у линейного рекуррентного соотношения с полиномиальными по индексу коэффициентами существует базис решений, имеющих асимптотическое разложение по n специального вида. В работах [1]–[3] доказана теорема существования для разностных уравнений с полиномиальными по аргументу коэффициентами. Её точная формулировка такова:

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ (G. D. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky, 1932). *Любое линейное разностное уравнение n -го порядка*

$$\sum_{i=0}^n a_i(z)q(z+i) = 0 \quad (a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0) \quad (1)$$

с полиномиальными коэффициентами a_i имеет ровно n линейно независимых формальных решений следующего общего вида:

$$q(z) = e^{Q(z)} z^r \sum_{s=0}^{\infty} z^{-\frac{s}{p}} \sum_{k=0}^m C_{s,k} \ln^k z, \quad Q(z) = \mu z \ln z + \sum_{i=1}^p \nu_i z^{\frac{i}{p}},$$
$$p \in \mathbb{N}, \quad \mu p \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2)$$

Если плоскость комплексного переменного z разбить на области кривыми $\operatorname{Re}(Q_i(z)) = \operatorname{Re}(Q_j(z))$, $i, j = 1, \dots, n$, то в каждой такой области, уходящей в бесконечность, существуют n линейно независимых аналитических решений уравнения (1), имеющих найденную асимптотику.

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой № 1 ОМН РАН, исследовательским грантом РФФИ-05-01-00697 и грантом ИНТАС 03-51-6637.

С помощью уравнения любое решение уравнения (1) можно продолжить по вещественному направлению, но при переходе в другую область асимптотика, вообще говоря, меняется.

Общая процедура нахождения таких разложений достаточно сложна, но в большинстве случаев хватает упрощённой процедуры, применение которой будет изложено на примере соотношения (3):

$$\begin{aligned} (n+1)(16n-15)q_{n+1} &= (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n \\ &\quad - n(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + (16n+1)n(n-1)q_{n-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Итак, нашей целью будет доказательство следующей теоремы о поведении решений соотношения (3).

ТЕОРЕМА. *Существует базис из трёх решений разностного уравнения (3) со следующими асимптотиками:*

$$\begin{aligned} q_1(n) &= \left(\frac{4n}{e}\right)^n \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(1 + \frac{97}{96\sqrt{2n}} - \frac{2207}{36864n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{13308187}{53084160n\sqrt{2n}} + O(n^{-2})\right), \\ q_2(n) &= \left(\frac{4n}{e}\right)^n \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(1 - \frac{97}{96\sqrt{2n}} - \frac{2207}{36864n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{13308187}{53084160n\sqrt{2n}} + O(n^{-2})\right), \\ q_3(n) &= \left(\frac{e}{16n}\right)^n \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(1 - \frac{77}{96n} + \frac{9745}{18432n^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{7543057}{26542080n^3} + O(n^{-4})\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Асимптотические ряды эффективно продолжаются до членов любого заданного порядка.

2. Доказательство теоремы

Обозначим $d(z) = q(z+1)/q(z)$. При подстановке в (1) получим соотношение

$$\sum_{i=0}^n a_i(z) \prod_{k=1}^i d(z+k-1) = 0, \quad (5)$$

которое для нашего случая (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & (16z^2 + 65z + 51)d(z+2)d(z+1)d(z) \\
 & - (128z^3 + 808z^2 + 1614z + 975)d(z+1)d(z) \\
 & + (256z^4 + 1808z^3 + 4768z^2 + 5561z + 2418)d(z) \\
 & - (16z^3 + 81z^2 + 131z + 66) = 0.
 \end{aligned} \tag{5a}$$

Теперь находим асимптотику $d(z)$ в несколько этапов.

1°. Главный член асимптотики $d(z)$ находится из рассмотрения диаграммы Ньютона характеристического уравнения, поскольку он одинаков для $d(z)$, $d(z+1)$ и так далее. Возьмём множество точек $\mathbb{R}^2 \setminus \{(i, \deg(a_i)) \mid i = 1, \dots, n\}$, построим выпуклую оболочку этого множества (это многоугольник) и обозначим через S набор тех его сторон, относительно которых многоугольник находится “снизу”. Формально это значит, что $y \leq bx + c$ – уравнение полуплоскости, содержащей многоугольник, а её граница – прямая, содержащая сторону.

Пусть (m_j, b_j) – соответственно длина горизонтальной проекции j -й стороны и её угловой коэффициент, а через x_j обозначим абсциссы вершин верхней части многоугольника Ньютона (концов сторон из набора S). Тогда

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, \quad m_j = x_{j+1} - x_j > 0, \\
 b_j &= \frac{\deg(a_{x_{j+1}}) - \deg(a_{x_j})}{x_{j+1} - x_j}, \quad b_{j+1} < b_j.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$P_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j} d_k^{(j)} t^k,$$

где

$$d_k^{(j)} = \text{Coeff}(a_{x_j+k}, \deg(a_{x_j}) + kb_j).$$

Если $\lambda_k^{(j)}$ – корни полиномов $P_j(t)$, и $\nu_k^{(j)}$ – соответствующие им кратности, то есть ровно $\nu_k^{(j)}$ асимптотических решений $d(z)$ с главным членом $\lambda_k^{(j)} z^{-b_j}$. Для решений, у которых $\nu = 1$, можно сразу переходить к 3 этапу. В других случаях решения надо разделить на этапе 2. Предложенным способом решения разделяются не всегда, в частности, решение вида (2) с $m \neq 0$ не отделяется, но для уравнения (3) он применим.

Применив эти построения для (5a), последовательно получим: множество $\{(3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 3)\}$; двухзвенную ломаную в качестве верхней части многоугольника Ньютона, и остальные величины:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -1, \\ P_1(t) = 256t - 16, \quad P_2(t) = 16t^2 - 128t + 256, \\ \nu_1^{(1)} = 1, \quad \lambda_1^{(1)} = 1/16, \quad \nu_1^{(2)} = 2, \quad \lambda_1^{(2)} = 4. \end{aligned}$$

Поэтому у уравнения (5a) есть одно решение $d(z) \approx (16z)^{-1}$ и два решения $d(z) \approx 4z$.

2°. Уточнение асимптотики и разделение решений. Выберем фиксированный главный член $\lambda_k^{(j)} z^{-b_j}$ из найденных на этапе 1. Сделаем подстановку $d(z) = \lambda_k^{(j)} z^{-b_j} \tilde{d}(z)$ в (5), и будем искать решения $\tilde{d}(z)$ с главным членом 1. Для этого сгруппируем левую часть специальным образом:

$$\sum_{i=0}^n \left(\tilde{a}_i(z) \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \prod_{k=1}^s \tilde{d}(z + k - 1) \right). \quad (6)$$

Такая группировка соответствует разложению характеристического полинома от $\tilde{d}$ по степеням $(\tilde{d} - 1)$. Коэффициенты $\tilde{a}_i(z)$ определяются единственным образом и являются алгебраическими функциями. Из определения величин b_j , $\lambda_k^{(j)}$ и $\nu = \nu_k^{(j)}$ следует, что наибольший порядок роста по z на бесконечности среди $\tilde{a}_i(z)$ будет для $i = \nu$ (возможно и для некоторых других i), а для всех $i < \nu$ порядок роста $\tilde{a}_i(z)$ по z будет строго меньше. Считаем, что $\nu > 1$.

Вновь строим диаграмму: точки $(i; \text{ord}(\tilde{a}_i))$ для $i = 0, \dots, \nu$ берём в качестве начального множества. Здесь ord понимается как порядок роста и обобщает $\deg$: если при больших $|z|$ $f(z) = O(z^\alpha)$, то $\text{ord}(f) = \alpha$. Проводим опорную прямую к последней точке, и пусть её угловой коэффициент $\tilde{m} < 1$. Строим полином $\tilde{P}(t) = \sum_{k=0}^{\nu} \text{Coeff}(\tilde{a}_k, \text{ord}(\tilde{a}_\nu) + \tilde{m}(k - \nu)) t^k$. Каждый его коэффициент – или коэффициент при главном члене асимптотики, или 0. Тогда каждый простой корень τ полинома $\tilde{P}(t)$ соответствует отделившемуся решению $\tilde{d}(z) \approx 1 + \tau z^{-\tilde{m}}$. Снова приводим выкладки для интересующей нас конкретной ситуации. На этапе 1 мы убедились, что есть только один случай $\nu \neq 1$. Производим подстановку $d(z) = 4z\tilde{d}(z)$ в (5a) и группируем нужным

образом:

$$\begin{aligned}
& - (1024n^5 + 7232n^4 + 17792n^3 + 18112n^2 + 6528n) \\
& \quad \times [\tilde{d}(z+2)\tilde{d}(z+1)\tilde{d}(z) - 3\tilde{d}(z+1)\tilde{d}(z) + 3\tilde{d}(z) - 1] \\
& - (1024n^5 + 6720n^4 + 14624n^3 + 12912n^2 + 3984n) \\
& \quad \times [\tilde{d}(z+1)\tilde{d}(z) - 2\tilde{d}(z) + 1] \\
& + (1024n^4 + 5056n^3 + 6268n^2 + 1944n)[\tilde{d}(z) - 1] \\
& + (512n^4 + 1904n^3 + 1149n^2 - 469n + 66) = 0.
\end{aligned}$$

Точки $(0; 4)$, $(1; 4)$, $(2; 5)$. Угловой коэффициент $\tilde{m} = 1/2 < 1$. Корни полинома $\tilde{P}(t) = -1024t^2 + 512$ простые и равны $\pm\sqrt{1/2}$. Получаем асимптотику $d(z) \approx 4z(1 \pm \sqrt{1/(2z)})$.

3°. Продолжение асимптотического ряда методом итераций. Используем начало асимптотики отделившегося решения, сделаем подстановку $d(z) = \lambda_k^{(j)} z^{-b_j} (1 + \tau z^{-\tilde{m}}) \tilde{d}(z)$ и повторим преобразование (5) к виду (6). Если этап 2 был пропущен, то τ отсутствует. Поскольку решение отделившееся, то слагаемое $\tilde{a}_1(z)(\tilde{d}(z) - 1)$, соответствующее $i = 1$, является ведущим. Переносим все остальные слагаемые в правую часть, выражаем $\tilde{d}(z)$ из левой части и в результате получаем итерационное соотношение

$$\tilde{d}(z) := 1 - \frac{1}{\tilde{a}_1(z)} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^n \left(\tilde{a}_i(z) \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \prod_{k=1}^s \tilde{d}(z+k-1) \right). \quad (7)$$

Стартуя с функции $\tilde{d}(z) = 1$, из соотношения (7) будем получать функции, асимптотическое разложение которых (с ростом числа итераций) стабилизируется в силу лемм 2 и 3 из приложения.

4°. Осталось возвратиться к $d(z)$ и по асимптотическому ряду $d(z)$ получить асимптотический ряд $q(z)$. Это требует суммирования асимптотических рядов и не представляет трудностей:

$$q(z) = \text{const} \prod_t^{z-1} d(t) = \text{const} \cdot \exp \left(\sum_t^{z-1} \ln d(t) \right).$$

Итак, для соотношения (5a) делаем преобразование к виду (6) после каждой из следующих подстановок:

$$\begin{aligned}
d(z) &= (4z + 2\sqrt{2z})\tilde{d}(z), & d(z) &= (4z - 2\sqrt{2z})\tilde{d}(z), \\
d(z) &= \tilde{d}(z)/(16z).
\end{aligned}$$

Для краткости и наглядности будем проводить преобразования (5a) сразу для всех случаев, записав подстановки в виде $d(z) = d_0(z)\tilde{d}(z)$.

Представим левую часть соотношения (5a) как применение оператора L к функции d , то есть

$$\begin{aligned} L[d](z) &= a_0 + a_1d(z) + a_2d(z)d(z+1) + a_3d(z)d(z+1)d(z+2), \\ a_0 &= -(16z^3 + 81z^2 + 131z + 66), \\ a_2 &= -(128z^3 + 808z^2 + 1614z + 975), \\ a_1 &= (256z^4 + 1808z^3 + 4768z^2 + 5561z + 2418), \\ a_3 &= 16z^2 + 65z + 51. \end{aligned}$$

Применим подстановку,

$$\begin{aligned} L[d](z) &= A_0 + A_1\tilde{d}(z) + A_2\tilde{d}(z)\tilde{d}(z+1) + A_3\tilde{d}(z)\tilde{d}(z+1)\tilde{d}(z+2), \\ A_0 &= a_0, & A_1 &= a_1d_0(z), \\ A_2 &= a_2d_0(z)d_0(z+1), & A_3 &= a_3d_0(z)d_0(z+1)d_0(z+2). \end{aligned}$$

Преобразуем к виду (6),

$$\begin{aligned} L[d](z) &= \sum_{i=0}^3 \left(B_i \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \prod_{k=1}^s \tilde{d}(z+k-1) \right), \\ B_3 &= A_3, & B_2 &= A_2 + 3A_3, \\ B_1 &= A_1 + 2A_2 + 3A_3, & B_0 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Запишем равенство (7) для нашего случая, используя $L[d]$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(z) &= 1 - \frac{1}{B_1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^3 \left(B_i \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \prod_{k=1}^s \tilde{d}(z+k-1) \right) \\ &= \tilde{d}(z) - \frac{L[d](z)}{B_1}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к функции d , мы видим, что итерационное соотношение можно записать в виде

$$\begin{aligned} d(z) &= d(z) - \frac{d_0(z)L[d](z)}{B_1} \\ &= d(z) - \frac{L[d](z)}{a_1 + 2a_2d_0(z+1) + 3a_3d_0(z+1)d_0(z+2)}. \end{aligned}$$

3. Приложение

В данном разделе будут доказаны леммы о асимптотическом поведении некоторых характерных для основного раздела величин (леммы 2 и 3), которые доказываются на основе одного технического результата (лемма 1).

ЛЕММА 1. Пусть $w(z)$ – аналитическая функция в секторе $\text{Arg}(z) \in [-\alpha; \alpha]$, $\alpha < \pi$, с ограниченным модулем. Если для граничных значений $w(z)$ выполняется неравенство $|w(z)| < |z|_+^a \varphi(|z|)$, где $|z|_+ = \max(1, |z|)$, $a < 0$, φ есть функция медленного роста в $\mathbb{R}_+$ с условиями: $|t|_+ \varphi(t)$ не убывает, $\frac{\varphi(t)}{|t|_+}$ не возрастает, то для произвольного $\varepsilon > 0$ в секторе $|\text{Arg}(z)| \leq \alpha - \varepsilon$ $w'(z) = O\left(\frac{\varphi(|z|)}{|z|}\right)$.

С помощью возведения в степень задачи с различными α сводятся друг к другу, поэтому достаточно доказать неравенство для случая $\alpha = \pi/2$. Для тех z из сектора, у которых $|z| \leq 1$, модуль производной ограничен некоторой константой, поэтому считаем, что $|z| > 1$. Напишем формулу Коши для производной, взяв контур из отрезка мнимой оси и правой полуокружности, построенной на нём, как на диаметре. Преобразуем и начнём неограниченно расширять контур. Получим

$$\begin{aligned} w'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{w(s) ds}{(s-z)^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{w(Re^{it}) Re^{it} dt}{(Re^{it} - z)^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{w(it) dt}{(it - z)^2} \right) \\ &= 0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(it) dt}{(it - z)^2}, \\ |w'(z)| &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|w(it)| dt}{(it - z)(-it - \bar{z})}. \end{aligned}$$

Учитываем условия $|z| > 1$, $|\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и свойства φ . Получим

$$\begin{aligned} |w'(z)| &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|_+^a \varphi(|t|) dt}{t^2 - 2\text{Im}(z)t + |z|^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|t|_+^a \varphi(t) dt \cdot (t^2 + |z|^2)}{(t^2 + |z|^2)^2 - 4\text{Im}^2(z)t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{1}{\pi \sin^2 \varepsilon} \int_0^\infty \frac{|t|_+^a \varphi(t) dt}{t^2 + |z|^2} \\
 &< \frac{1}{\pi \sin^2 \varepsilon} \left(\int_0^{|z|} \frac{|t|_+^a \varphi(t) dt}{|z|^2} + \int_{|z|}^\infty \frac{|t|_+^a \varphi(t) dt}{t^2} \right) \\
 &< \frac{\varphi(|z|)|z|^{-1}}{\pi \sin^2 \varepsilon} \left(\int_0^{|z|} |t|_+^{a-1} dt + \int_{|z|}^\infty |t|_+^{a-1} dt \right) \\
 &= \frac{1-a}{-a\pi \sin^2 \varepsilon} \frac{\varphi(|z|)}{|z|}.
 \end{aligned}$$

При выполнении обратного преобразования изменится только константа.

ЛЕММА 2. Пусть функция $d(z)$ аналитическая в некотором секторе, содержащем положительное направление, и имеет там представление $d(z) = 1 + z^a \varphi(z)(1 + \bar{o}(1))$, где $a < 0$ и $\ln |\varphi(z)| = \bar{o}(\ln |z|)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Рассмотрим величины

$$f_n(z) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \prod_{k=1}^s d(z+k-1).$$

Тогда для натуральных n в любом более узком секторе верно представление

$$f_n(z) = \begin{cases} z^{na} \varphi^n(z)(1 + \bar{o}(1)), & \text{если } a > -1, \\ O(z^{-n} \varphi(z) |\varphi(z)|_+^{n-1}), & \text{если } a = -1, \\ O(z^{a+1-n} \varphi(z)), & \text{если } a < -1. \end{cases}$$

Будем использовать обозначение Δ для оператора разности: $\Delta h(z) = h(z+1) - h(z)$. Поскольку $\Delta h(z) = \int_0^1 h'(z+t) dt$, то для оценки разности можно применять лемму 1. Легко установить, что величины удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$f_{n+1}(z) = f_n(z+1)d(z) - f_n(z) = \Delta f_n(z) + f_n(z+1)(d(z) - 1) \quad (8)$$

и начальному условию $f_0 = 1$. Следовательно, $f_1(z) = d(z) - 1$, и база индукции верна. Индуктивный переход легко делается для каждого из трёх случаев сравнения a с -1 . На каждом шаге индукции мы сужаем сектор. Поскольку величина сужения может быть выбрана сколь угодно малой, то на фиксированном шаге действительно можно получить любой меньший сектор.

ЛЕММА 3. Пусть для функции $d(z)$ выполнены условия предыдущей леммы, при этом $a \in (-1; 0)$. Тогда результат леммы 2 дополняется оценкой изменения величин $f_n(z)$ при изменении $d(z)$. Пусть $d(z)$ изменяется на $\delta d(z) = z^b \psi(z)(1 + \bar{o}(1))$, где $b < a$, $\ln |\psi(z)| = \bar{o}(\ln |z|)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда изменение $\delta f_n(z)$ величины $f_n(z)$ имеет оценку

$$\delta f_n(z) = n z^{(n-1)a+b} \varphi^{n-1}(z) \psi(z) (1 + \bar{o}(1)).$$

Подставим в (8) $d(z) + \delta d(z)$ вместо $d(z)$, $f_n(z) + \delta f_n(z)$ вместо $f_n(z)$, вычтем исходное соотношение (8) и преобразуем. Получим

$$\delta f_{n+1}(z) = \Delta \delta f_n(z) + f_n(z+1) \delta d(z) + \delta f_n(z+1) (d(z) + \delta d(z) - 1).$$

Используя предыдущую лемму и начальное условие $\delta f_1(z) = \delta(d(z) - 1) = \delta d(z)$, по индукции получим нужный результат.

Список литературы

- [1] D. G. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky, “Analytic theory of singular difference equations”, *Acta Math.*, **60**:1 (1933), 1–89 [doi 10.1007/BF02398269](#), [MR 1555364](#), [Zbl 59.0450.03](#).
- [2] D. G. Birkhoff, “Formal theory of irregular linear difference equations”, *Acta Math.*, **54**:1 (1930), 205–246 [doi 10.1007/BF02547522](#), [MR 1555307](#), [Zbl 56.0402.01](#).
- [3] D. G. Birkhoff, “General theory of linear difference equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **12**:2 (1911), 243–284 [doi 10.2307/1988577](#), [MR 1500888](#), [Zbl 42.0359.02](#).