Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Асимптотика γ -форм, генерируемых совместно ортогональными многочленами, *Совр. пробл. матем.*, 2007, выпуск 9, 55–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm17>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 05:15:22

Асимптотика γ -форм, генерируемых совместно ортогональными многочленами¹

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов

1. Введение

Рассмотрим постоянную Эйлера γ

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = - \int_0^{\infty} \ln x e^{-x} dx.$$

Интегрирование полиномиальных последовательностей $\{Q_n\}$ генерирует γ -формы

$$f_n = p_n - \gamma q_n = \int_0^{\infty} Q_n(x) \ln x e^{-x} dx, \quad (1)$$

причем коэффициент при γ в форме (1) равен

$$q_n = \int_0^{\infty} Q_n(x) e^{-x} dx. \quad (2)$$

Настоящая работа посвящена получению асимптотики γ -форм генерируемых последовательностью многочленов

$$Q_n(x) = \frac{1}{(n!)^2} \frac{e^x}{x-1} \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} \quad (3)$$

Эти многочлены, впервые, появились в работе [1]. Они являются общими знаменателями рациональных аппроксимаций Эрмита-Паде для системы из четырех функций

$$\hat{\mu}_k(x) := \int_0^1 \frac{w_k(x)}{z-x} dx, \quad \hat{S}_k(x) := \int_1^{\infty} \frac{w_k(x)}{z-x} dx, \quad k = 1, 2,$$

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой № 1 ОМН РАН, грантами РФФИ-05-01-00522 и ИНТАС-03-51-6637.

задаваемых весами

$$w_1(x) = (1-x)e^{-x}, \quad w_2(x) = (1-x)\ln(x)e^{-x}.$$

Результатом работы является

ТЕОРЕМА. Пусть q_n и f_n определены подстановкой (3) в (2) и в (1) соответственно. Тогда справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} q_n &= (2n)! \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(4e)^{3/8}} + \mathcal{O}(n^{-1/2}) \right), \\ f_n &= p_n - \gamma q_n = (2n)! \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{(4e)^{3/8}} + \mathcal{O}(n^{-1/2}) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Доказательство теоремы

Идея доказательства состоит в получении контурных интегральных представлений для q_n и f_n , с последующим применением метода перевала. Напомним основное соотношение метода перевала

$$\int \psi(t) e^{n\varphi(t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{-n\varphi''(t_0)}} \psi(t_0) e^{n\varphi(t_0)} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})), \quad (5)$$

где контур интегрирования в левой части (5) и точка t_0 в правой части выбирается так, чтобы

$$\varphi'(t_0) = 0, \quad \varphi''(t_0)(t - t_0)^2 < 0.$$

1. Асимптотика q_n . Вначале получим интегральное представление для последовательности q_n . Подставим выражение (3) в (2) и применим формулу интегрирования по частям $2n$ раз. Заметив, что все внеинтегральные члены равны нулю, получим

$$q_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \frac{x^n}{(x-1)^{n+1}} dx.$$

Производную в последнем интеграле запишем в виде контурного интеграла по формуле Коши, имеем

$$q_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_0^\infty (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} dx \int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(s-1)^{n+1}(s-x)^{n+1}}, \quad (6)$$

Рис. 6.1. Линии уровня и перевальный контур функции Φ_1 .

где γ_x – контур, обходящий точку x против часовой стрелки.

Найдем асимптотику внутреннего интеграла

$$\int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(s-1)^{n+1}(s-x)^{n+1}}.$$

Обозначим,

$$\Phi_1(s) = \frac{s}{(s-1)(s-x)}, \quad \psi_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-x)},$$

при $x > 0$. Функция $\Phi_1(s)$ имеет две седловые точки: $s = \pm\sqrt{x}$, в которых принимает значения: $\Phi_1(\pm\sqrt{x}) = \frac{-1}{(\pm\sqrt{x}-1)^2}$. Контур γ_x можно деформировать в линию уровня аргумента $\Phi_1(s)$ – окружность $|s| = \sqrt{x}$. На этой окружности функция $\Phi_1(s)$ принимает наибольшее по модулю значение в точке $\sqrt{x}$, а наименьшее в точке $-\sqrt{x}$. Значение второй производной $\ln \Phi_1$ в точке $\sqrt{x}$ равно

$$\frac{\partial^2 \ln \Phi_1}{\partial s^2}(\sqrt{x}) = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}.$$

По формуле (5)

$$\int_{\gamma_x} \psi_1(s) \Phi_1^n(s) ds = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} i}{\sqrt{n}(\sqrt{x}-1)^{2n+1} x^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})).$$

Полученная асимптотическая формула справедлива равномерно по x на компактных подмножествах из $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Однако, подставив ее в (6), убеждаемся, что точка перевала подынтегральной функции растет со скоростью порядка n . Чтобы проверить, что старший член асимптотики не изменится при сжатии $x = ny$, выпишем остаточный член. Сделаем замену переменной $e^{-z^2} = \left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_1(\sqrt{x})}\right)^n$, тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(s-1)^{n+1}(s-x)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n i}{\sqrt{n}(\sqrt{x}-1)^{2n+1}x^{1/4}} \int_{-z_*}^{z_*} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, x, n) dz, \end{aligned} \quad (7)$$

где функция R имеет вид

$$\begin{aligned} R(z, x, n) &= \frac{e^{z^2/n}(\sqrt{x}-1)^2 - 2(x+1) + e^{-z^2/n}(\sqrt{x}+1)^2}{-4\sqrt{x}e^{-z^2/n}z^2/n} \\ &= e^{z^2/n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{4k}}{(2k+1)!n^{2k}} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4k+2}}{(2k+2)!n^{2k+1}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

а $z_* > 0$ определяется из уравнения

$$e^{-z_*^2} = \left(\frac{\Phi_1(-\sqrt{x})}{\Phi_1(\sqrt{x})} \right)^n = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)^{2n}. \quad (9)$$

Подставим (7) в выражение (6) для q_n :

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{(-1)^n n^{-1/2}}{2\pi} \int_0^\infty (\sqrt{x}+1)^{2n+1} x^{n-1/4} e^{-x} dx \\ &\quad \times \int_{-z_*}^{z_*} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, x, n) dz. \end{aligned}$$

Теперь сделаем замену $x = ny$:

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{n^{2n+3/4}}{2\pi} \int_0^\infty (\sqrt{y}+1/\sqrt{n})^{2n+1} y^{n-1/4} e^{-ny} dy \\ &\quad \times \int_{-z_*}^{z_*} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, ny, n) dz. \end{aligned}$$

Из разложения (8) видно, что $R(z, ny, n) = 1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})$. Кроме того, из определения (9) z_* следует, что $z_* \approx 2(n/y)^{1/4}$, поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{-z_*}^{z_*} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, ny, n) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, ny, n) dz (1 + \mathcal{O}(e^{-(n/y)^{1/2}})). \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$q_n = \frac{n^{2n+3/4}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (\sqrt{y} + 1/\sqrt{n})^{2n+1} y^{n-1/4} e^{-ny} dy (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})).$$

Асимптотику этого интеграла также найдем методом перевала. Пусть

$$\varphi_2(y) = 2 \ln(\sqrt{y} + 1/\sqrt{n}) + \ln y - y, \quad \psi_2(y) = (\sqrt{y} + 1/\sqrt{n}) y^{-1/4}.$$

Функция φ_2 достигает глобального максимума на полуоси в точке $y_0 = 2 - 1/\sqrt{2n} + 3/(8n) + \mathcal{O}(n^{-3/2})$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2(y_0) &= -2 + 2 \ln 2 + \sqrt{\frac{2}{n}} - \frac{3}{8n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \\ \varphi_2''(y_0) &= -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \\ \psi_2(y_0) &= 2^{1/4} + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, асимптотическая формула для q_n имеет вид

$$\begin{aligned} q_n &= (2n)^{2n+1/4} e^{-2n+\sqrt{2n}-3/8} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})) \\ &= \pi^{-1/2} (2n)! (8n)^{-1/4} e^{\sqrt{2n}-3/8} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})). \end{aligned}$$

Первая формула в (4) получена.

2. Асимптотика f_n . Аналогично предыдущему пункту, получаем интегральное выражение для f_n :

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^{\infty} (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} dx \\ &\quad \times \int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(s-x)^{n+1}} \int_{\gamma_s} \frac{\ln t dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуем интеграл по γ_s . Контур γ_s может быть деформирован в два берега отрицательной полуоси. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_s} \frac{\ln t \, dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}} &= 2\pi i \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}} \\ &= (-1)^n 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+s)^{n+1}}. \end{aligned}$$

По теореме Фубини, поменяем порядок интегрирования в (10):

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_0^{\infty} (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} dx \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \frac{dt}{t+1} \int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(t+s)^{n+1}(s-x)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рис. 6.2. Линии уровня и перевальный контур функции Φ_3 .

Найдем асимптотику внутреннего интеграла. Положим,

$$\Phi_3(s) = \frac{s}{(s-x)(t+s)}.$$

Функция $\Phi_3(s)$ имеет две точки перевала $s_0^{\pm} = \pm i\sqrt{tx}$, в которых принимает значения равные по модулю. Деформируем контур γ_x так, чтобы он проходил через перевальные точки в направлениях наискорейшего спуска. Тогда

$$\int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(t+s)^{n+1}(s-x)^{n+1}} = (I - \bar{I}), \quad (12)$$

где

$$I = \int_{\gamma_x^+} \frac{s^n ds}{(t+s)^{n+1}(s-x)^{n+1}}.$$

Сделаем замену переменной:

$$e^{-z^2} = \left(\frac{\Phi_3(s)}{\Phi_3(i\sqrt{tx})} \right)^n,$$

После некоторых преобразований получим:

$$I = \frac{(-1)^n n^{-1/2} e^{\pi i/4}}{(1 - i\sqrt{t/x})^{2n+1} x^{n+3/4} t^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, -t/x, n) dz, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} R(z, -t/x, n) &= \\ &= \frac{e^{z^2/n} (1 - i\sqrt{t/x})^2 - 2(1 - t/x) + e^{-z^2/n} (1 + i\sqrt{t/x})^2}{-4i\sqrt{t/x} e^{-z^2/n} z^2/n} \\ &= e^{z^2/n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{4k}}{(2k+1)! n^{2k}} - \frac{1 - t/x}{2i\sqrt{t/x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4k+2}}{(2k+2)! n^{2k+1}} \right). \end{aligned}$$

Обозначим,

$$g(t) = \frac{e^{\pi i/4}}{(1 - i\sqrt{t/x})^{2n+1} t^{1/4}} R^{-1/2}(z, -t/x, n) \quad (14)$$

Будем считать, что ветви радикалов, входящих в определение $g(t)$, голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и положительны при подходе к $\mathbb{R}_+$ сверху. Таким образом, $g(t) = g_+(t)$ при $t > 0$. Легко видеть, что при таком определении ветвей $\bar{g}(t) = g_-(t)$ при $t > 0$. Функция $g(t)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Кроме того, $g(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Поэтому для проведения в (11) интегрирования по t , имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{(g(t) - \bar{g}(t)) dt}{t+1} &= \left(\int_{(0, -\infty)_+} - \int_{(0, -\infty)_-} \right) \frac{g(t) dt}{t+1} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{t=-1} g(t) = \frac{2\pi i}{(1 + 1/\sqrt{x})^{2n+1}} R^{-1/2}(z, 1/x, n). \end{aligned}$$

Подставляем найденное (см. (12)), (13), (14)) в выражение (11) для f_n :

$$f_n = \frac{n^{-1/2}}{2\pi} \int_0^\infty (\sqrt{x} + 1)^{2n+1} x^{n-1/4} e^{-x} dx \\ \times \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} R^{-1/2}(z, 1/x, n) dz. \quad (15)$$

Теперь делаем замену $x = ny$ и замечаем, что

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} R^{-1/2}(z, 1/ny, n) dz = \sqrt{\pi} + \mathcal{O}(n^{-1/2}).$$

Имеем в (15)

$$f_n = n^{2n+3/4} \sqrt{\pi} \int_0^\infty (\sqrt{y} - 1/\sqrt{n})^{2n+1} y^{n-1/4} e^{-ny} dy (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})).$$

Асимптотику этого интеграла также найдем методом перевала. Пусть

$$\varphi_4(y) = 2 \ln(\sqrt{y} - 1/\sqrt{n}) + \ln y - y, \quad \psi_4(y) = (\sqrt{y} + 1/\sqrt{n}) y^{-1/4}$$

Функция φ_4 достигает глобального максимума на полуоси в точке $y_0 = 2 + 1/\sqrt{2n} + 3/(8n) + \mathcal{O}(n^{-3/2})$,

$$\varphi_4(y_0) = -2 + 2 \ln 2 - \sqrt{\frac{2}{n}} - \frac{3}{8n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \\ \varphi_4''(y_0) = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \\ \psi_4(y_0) = 2^{1/4} + \mathcal{O}(n^{-1/2}).$$

Таким образом, асимптотическая формула для f_n имеет вид

$$f_n = 2\pi(2n)^{2n+1/4} e^{-2n-\sqrt{2n}-3/8} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})) \\ = 2\pi^{1/2} (2n)! (8n)^{-1/4} e^{-\sqrt{2n}-3/8} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})).$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03330-0), [MR 1990569](https://mr.ams.org/mr1990569), [Zbl 1033.33002](https://zb1.org/zb11033.33002).