Общероссийский математический портал

А. И. Боголюбский, Приложения, *Совр. пробл. матем.*, 2007, выпуск 9, 63–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:38:21

Приложения (А. И. Боголюбский)

Приложение А

Maple-программа с доказательством первого
7-членного рекуррентного соотношения,
содержащая его коэффициенты

```
> restart;
> # *****
> # This worksheet contains computational proof
> # of one of the 7-term RRs. Correctness of this
> # RR is derived from the correctness of 4 6-term
> # stepline RRs
> # *****
> # First of all, let us introduce known 6-term stepline RR
> # *****
> RR6_from:=proc(ind1, ind2, ind3, ind4)
> # *****
> # returns 6-term stepline recurrence relation formula notation,
> # starting from the Q[ind1, ..., ind4]
> # (must belong to the stepline!)
> # Output format: (RESULT) = 0
> # *****
> local j,d1, d2, d3, A, n, t1, t2, t3, res;
> d1:=ind1-ind2;
> d2:=ind1-ind3;
> d3:=ind1-ind4;
> t1 := t_0[n+1, n];
> t2 := t_0[n, n];
> if [d1, d2, d3] = [0, 0, 0] then
> t3 := t_0[n, n-1];
> n:=ind1+1;
> A[0] := -t1-2*n;
> A[1] := -2*n-7*n^2;
> A[2] := -2*t2*n-3*n^3+2*n^2-7*t2*n^2;
> A[3] := -2*n^3-9*n^4;
> A[4] := -2*t3*n^3-9*t3*n^4+3*n^4;
> res:=A[4]*Q[n-1, n-1, n-1, n-1] + A[3]*Q[n, n-1, n-1, n-1]+
> A[2]*Q[n, n, n-1, n-1] + A[1]*Q[n, n, n, n-1] +
> (z+A[0])*Q[n, n, n, n] - Q[n+1, n, n, n]
> elif [d1, d2, d3] = [1, 1, 1] then
> t3 := t_0[n, n-1];
> n:=ind1;
> A[0] := -5*n-4+t1;
> A[1] := 1-3*n-4*t1-7*n^2+t1^2-3*t1*n;
> A[2] := -24*n^3-6*n+2*t1*n-25*n^2+7*t1*n^2;
> A[3] := -25*t2*n^2-6*t2*n+3*n^2+7*t2*t1*n^2-n^3-9*n^4-
> 2*t1*n^2+2*t2*t1*n+3*t1*n^3-24*t2*n^3;
> A[4] := -27*n^5-7*n^3-30*n^4+9*t1*n^4+2*t1*n^3;
> res:=A[4]*Q[n, n-1, n-1, n-1] + A[3]*Q[n, n, n-1, n-1] +
> A[2]*Q[n, n, n, n-1] + A[1]*Q[n, n, n, n] +
> (z+A[0])*Q[n+1, n, n, n] - Q[n+1, n+1, n, n]
> elif [d1, d2, d3] = [0, 1, 1] then
> t1 := t_0[n+1, n+1];
> t2 := t_0[n+1, n];
> t3 := t_0[n, n];
> n:=ind1;
> A[0] := -t1-2*n-1;
> A[1] := -3-9*n-7*n^2;
> A[2] := 1-3*n^3-7*t2*n^2+3*n-9*t2*n+n^2-3*t2;
> A[3] := -8*n^3-9*n^4-2*n^2;
```

```

> A[4] := n^3+3*n^4-8*t3*n^3-9*t3*n^4-2*t3*n^2;
> res:=A[4]*Q[n, n, n-1, n-1] + A[3]*Q[n, n, n, n-1] +
> A[2]*Q[n, n, n, n] + A[1]*Q[n+1, n, n, n] +
> (z+A[0])*Q[n+1, n+1, n, n] - Q[n+1, n+1, n+1, n]
> elif [d1, d2, d3] = [0, 0, 1] then
> t1 := t_0[n+1, n+1];
> t2 := t_0[n+1, n];
> n:=ind1;
> A[0] := -5*n-6+t1;
> A[1] := -3-5*t1-10*n-3*t1*n+t1^2-7*n^2;
> A[2] := -14-24*n^3+3*t1-51*n+7*t1*n^2+9*t1*n-61*n^2;
> A[3] := 4+13*n^2+7*t2*t1*n^2+15*n-t1*n^2-7*n^3-9*n^4-
> t1+3*t2*t1-3*t1*n-14*t2-61*t2*n^2-
> 51*t2*n+3*t1*n^3+9*t2*t1*n-24*t2*n^3;
> A[4] := -27*n^5+8*t1*n^3-38*n^3-57*n^4+
> 9*t1*n^4-8*n^2+2*t1*n^2;
> res:=A[4]*Q[n, n, n, n-1] + A[3]*Q[n, n, n, n] +
> A[2]*Q[n+1, n, n, n] + A[1]*Q[n+1, n+1, n, n] +
> (z+A[0])*Q[n+1, n+1, n+1, n] - Q[n+1, n+1, n+1, n+1]
> else
> error "multi-index [ind1, ind2, ind3, ind4]
> must belong to the stepline"
> end if;
> return res
> end proc:
> # *****
> # internal service routine
> # *****
> next_on_SL:=proc(ind)
> # *****
> # returns multi-index following after 'ind' on the stepline
> # *****
> local d1, d2, d3, res;
> d1:=ind[1]-ind[2];
> d2:=ind[1]-ind[3];
> d3:=ind[1]-ind[4];
> if [d1, d2, d3] = [0, 0, 0] then
> res:=[ind[1]+1, op(2..4, ind)]
> elif [d1, d2, d3] = [1, 1, 1] then
> res:=[ind[1], ind[2]+1, ind[3], ind[4]]
> elif [d1, d2, d3] = [0, 1, 1] then
> res:=[ind[1], ind[2], ind[3]+1, ind[4]]
> elif [d1, d2, d3] = [0, 0, 1] then
> res:=[op(1..3, ind), ind[4]+1]
> else
> error "multi-index ind must belong to the stepline"
> end if;
> return res
> end proc:

> # *****
> # The method we are using to prove 7-term RR is quite simple:
> # let us fix index n, and take 5 consequent "basis"
> # polynomials
> # Q[n, n, n, n], ... Q[n+1, n+1, n+1, n+1] on the stepline.
> # Further, we express the polynomial far enough from the
> # first ones (Q[n+3, n+3, n+3, n+3]) using the 6-term RRs,
> # and using 7-term RR. The results coincide, q.e.d.
> # *****
> Q[n, n, n, n] := B[0]:
> Q[n+1, n, n, n] := B[1]:
> Q[n+1, n+1, n, n] := B[2]:
> Q[n+1, n+1, n+1, n] := B[3]:
> Q[n+1, n+1, n+1, n+1] := B[4]:
> # *****
> # We will need also some parameter "tau" to recurrently express
> # Hermite-kind integrals t_0[n, m] in terms of this parameter.
> # tau equals first of these integrals we need.
> # Eventually, all entries of this free parameter
> # will be eliminated.
> # *****

```

```

> t_0[n+1, n] := tau:
> t_0[n+1, n+1] := 3*(n+1)-2*(n+1)/(1-tau):
> for j from 1 to 15 do
>   t_0[n+1+j, n+j] := simplify(3*(n+j)+2-(2*(n+j)+1)/((n+j)/t_0[n+j,
>   n+j]-3*(n+j)-1)):
>   t_0[n+1+j, n+1+j] := simplify(3*(n+j+1)-2*(n+j+1)/(1-t_0[n+j+1,
>   n+j])):
> end do:

> # *****
> # now let's compute all stepline polynomials up to
> # Q[n+3, n+3, n+3] using 6-term RRs
> # *****
> ind:=[n, n, n, n]:
> for j from 0 to 7 do
>   q, q_tmp:=selectremove(has, RR6_from(op(ind)), Q);
>   q:=-q;
>   q_val:=0;
>   for k from 0 to 4 do
>     q_tmp:=collect(q_tmp, B[k]);
>     c_tmp:=collect(expand(coeff(q_tmp, B[k], 1)), z);
>     q_val:=q_val+B[k]*add(simplify(coeff(c_tmp, z, m))*z^m,
>     m=0..degree(c_tmp, z));
>   end do;
>   q_val:=q_tmp;
>   assign(q, q_val);
>   ind:=next_on_SL(ind)
> end do:

> # *****
> # Coefficients of 7-term RR to be proved
> # *****
> c[1,0]:=n->(-18954729*n^18+475501914*n^17-5709165687*n^16+43469502120*
> n^15-23425969264*n^14+944456549994*n^13-2937964703173*n^12+7176308978
> 564*n^11-13890421859022*n^10+21370392419763*n^9-26076164020818*n^8+250
> 46173010216*n^7-18674801819127*n^6+1056580680505*n^5-4372106280552*n^
> 4+1243289225536*n^3-215462345952*n^2+16617615360*n+145350656)/(1434890
> 7*n^16-343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^
> 12-483394474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+487372522086
> 0*n^8-6471794720620*n^7+6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526
> 066*n^4-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

> c[1,1]:=n->(-99910908*n^17+2390953059*n^16-26876526327*n^15+1883014486
> 83*n^14-919734939135*n^13+3317992743213*n^12-9135792953726*n^11+195620
> 41333401*n^10-32882771920698*n^9+43489611452724*n^8-45065918180973*n^7
> +36190756581710*n^6-22093565620386*n^5+9940109169458*n^4-3135406639075
> *n^3+636656118220*n^2-70436375424*n+2743290880)/(14348907*n^16-3433108
> 86*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-48339447445
> 8*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-64717947
> 20620*n^7+6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4-143658
> 5539036*n^3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

> c[2,0]:=n->(96367968*n^20-2467854540*n^19+29673703701*n^18-22255583141
> 7*n^17+1166637592872*n^16-4539415419945*n^15+13592887153064*n^14-32055
> 365793031*n^13+60444564255786*n^12-92040735609636*n^11+113863820736404
> *n^10-114748140791904*n^9+94108174672917*n^8-62410517834634*n^7+329475
> 87600913*n^6-13394009637132*n^5+3906926236023*n^4-680068630201*n^3+163
> 86420552*n^2+19507817968*n-2985148672)/(14348907*n^16-343310886*n^15+
> 3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-483394474458*n^11+
> 1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-6471794720620*n^7
> +6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4-1436585539036*n^
> 3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

> c[2,1]:=n->(-116208432*n^19+2829490299*n^18-32899261887*n^17+242435970
> 756*n^16-1266194200743*n^15+4965181473861*n^14-15117067716648*n^13+364
> 94015528582*n^12-70844424055732*n^11+111729068408057*n^10-144340261309
> 323*n^9+153829958045159*n^8-135965120868836*n^7+99758691959182*n^6-602
> 86613748588*n^5+29306515812564*n^4-10987118024327*n^3+2955456001056*n^
> 2-502534308944*n+40196961024)/(14348907*n^16-343310886*n^15+3865111344
> *n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-483394474458*n^11+13388825347
> 29*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-6471794720620*n^7+67177136
> 52503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4-1436585539036*n^3+434220
> 694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

```

```

> c[2,2]:=n->(-92116440*n^18+2427760269*n^17-29871360387*n^16+2288073840
399*n^15-1226838592611*n^14+4905746910000*n^13-15204990302515*n^12+3743
5682041482*n^11-74327694947011*n^10+119938192805795*n^9-15753046073594
2*n^8+167685833096459*n^7-143186751928495*n^6+96428445145175*n^5-49910
137290547*n^4+19088828912285*n^3-5062487795588*n^2+828020172416*n-6265
9052544)/(14348907*n^16-343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13
+133273490211*n^12-483394474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407
*n^9+4873725220860*n^8-6471794720620*n^7+6717713652503*n^6-53830377478
82*n^5+3257932526066*n^4-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-8015844249
6*n+6785478656):

> c[2,3]:=n->(-100973790*n^17+2458446066*n^16-28264965147*n^15+203598379
359*n^14-1027587743964*n^13+3849350369832*n^12-11058745955854*n^11+248
29685286484*n^10-44001183817563*n^9+61736690298536*n^8-68397457115929*n
n^7+59324912846147*n^6-39666602988184*n^5+19945885955244*n^4-725343969
7169*n^3+1788224159396*n^2-265035653248*n+17613145088)/(14348907*n^16-
343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-4833
94474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-6
471794720620*n^7+6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4
-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

> c[2,4]:=n->1:

> c[3,0]:=n->(153763596*n^21-4456152468*n^20+60987467133*n^19-5239769303
52*n^18-3168821941038*n^17-14337138780270*n^16+50350491204344*n^15-140
544935648387*n^14-316697796237678*n^13-581810722917003*n^12+872200956
42443*n^11-1083617155084929*n^10+1098176916145396*n^9-906267047435990*n
n^8+601862533213417*n^7-315340711591972*n^6+126081367233980*n^5-362201
60743277*n^4+6544086870063*n^3-434391193080*n^2-76482115088*n+13928873
728)/(14348907*n^15-328961979*n^14+3536149365*n^13-23628457350*n^12+10
9645032861*n^11-373749441597*n^10+965133093132*n^9-1918801122275*n^8+2
954924098585*n^7-3516870622035*n^6+3200843030468*n^5-2182194717414*n^4
+1075737808652*n^3-360847730384*n^2+73372963840*n-6785478656):

> c[3,1]:=n->(652609548*n^20-17104605732*n^19+210456658998*n^18-16166352
71907*n^17+8694515899503*n^16-34785878911065*n^15+107320943729644*n^14
-260959431955821*n^13+506249847337872*n^12-786784644873939*n^11+975256
526882674*n^10-948376667616910*n^9+695179857178206*n^8-344807354418272
*n^7+66611471119219*n^6+58585081968537*n^5-66417169901508*n^4+34760450
734413*n^3-10932298914500*n^2+1989825045696*n-162442694656)/(14348907*
n^15-328961979*n^14+3536149365*n^13-23628457350*n^12+109645032861*n^11
-373749441597*n^10+965133093132*n^9-1918801122275*n^8+2954924098585*n^7
-3516870622035*n^6+3200843030468*n^5-2182194717414*n^4+1075737808652*
n^3-360847730384*n^2+73372963840*n-6785478656):

> c[3,2]:=n->(-43046721*n^19+1775544381*n^18-29334244122*n^17+2827748550
33*n^16-1850869255158*n^15+8909469811665*n^14-33060366015984*n^13+9731
7597294468*n^12-231114771120998*n^11+446658770496236*n^10-704312595434
902*n^9+904149363586348*n^8-938811884327290*n^7+779818764165276*n^6-50
9623095649246*n^5+255621465604557*n^4-94757797707683*n^3+2440148285041
2*n^2-3888929128896*n+288221722624)/(14348907*n^15-328961979*n^14+3536
149365*n^13-23628457350*n^12+109645032861*n^11-373749441597*n^10+96513
3093132*n^9-1918801122275*n^8+2954924098585*n^7-3516870622035*n^6+3200
843030468*n^5-2182194717414*n^4+1075737808652*n^3-360847730384*n^2+733
72963840*n-6785478656):

> c[3,3]:=n->(-2187*n^7+20817*n^6-83601*n^5+183668*n^4-238475*n^3+183071
*n^2-76977*n+13684)/(81*n^4-558*n^3+1438*n^2-1644*n+704):

> c[4,0]:=n->(-461290788*n^22+13533440310*n^21-188384398677*n^20+1654885
694871*n^19-10293200763273*n^18+48205239484158*n^17-176451482383562*n^16
+517205251201253*n^15-1233639407112140*n^14+2419625368109545*n^13-39
26861555258201*n^12+5287408171925733*n^11-590300483308976*n^10+544240
5694188302*n^9-4110928363252788*n^8+2511041142616075*n^7-1215236562692
671*n^6+45111215380207*n^5-121461708908436*n^4+21153343139018*n^3-163
9514947632*n^2-117889173472*n+26518086144)/(14348907*n^15-328961979*n^14
+3536149365*n^13-23628457350*n^12+109645032861*n^11-373749441597*n^10
+965133093132*n^9-1918801122275*n^8+2954924098585*n^7-3516870622035*n^6
+3200843030468*n^5-2182194717414*n^4+1075737808652*n^3-360847730384*
n^2+73372963840*n-6785478656):

```

```

> c[4,1]:=n->(1037904273*n^21-27787987008*n^20+351868326129*n^19-2803065
> 602499*n^18+15759796628880*n^17-66481920156942*n^16+218301370746255*n^
> 15-571063052077548*n^14+1207445917188416*n^13-2080138330461733*n^12+29
> 27274794677710*n^11-3355075410481656*n^10+3101981844351364*n^9-2268643
> 375301211*n^8+1262502936793094*n^7-488558100768913*n^6+93279580378635*
> n^5+22974275794032*n^4-24291203246892*n^3+8691334987318*n^2-1611215415
> 864*n+128703724160)/(14348907*n^14-300264165*n^13+2935621035*n^12-1775
> 7215280*n^11+74130602301*n^10-225488236995*n^9+514156619142*n^8-89048
> 883991*n^7+1173948330603*n^6-1168973960829*n^5+862895108810*n^4-456404
> 499794*n^3+162928809064*n^2-34990112256*n+3392739328):
> c[4,2]:=n->(14348907*n^21+258280326*n^20-11981337345*n^19+173262540267
> *n^18-1488805415694*n^17+8949215460609*n^16-40557249615834*n^15+144414
> 869705190*n^14+413945758755329*n^13+968775156630274*n^12-1865380131959
> 762*n^11+2964013288530208*n^10-3884049740097972*n^9+418105996988315*n
> ^8-3670392908061999*n^7+2597918402060285*n^6-1457895289770538*n^5+6327
> 544320807180*n^4-204504358682130*n^3+46261323977200*n^2-6525190066304*n
> +431220100608)/(14348907*n^15-328961979*n^14+3536149365*n^13-236284573
> 50*n^12+109645032861*n^11-373749441597*n^10+965133093132*n^9-191880112
> 2275*n^8+2954924098585*n^7-3516870622035*n^6+3200843030468*n^5-2182194
> 717414*n^4+107573808652*n^3-360847730384*n^2+73372963840*n-6785478656
> ):
> c[4,3]:=n->(-243*n^6+1647*n^5-4599*n^4+6778*n^3-5565*n^2+2415*n-433)/(
> 9*n-16):
> c[5,0]:=n->(461290788*n^22-13520095236*n^21+187985765439*n^20-16495330
> 13829*n^19+10249953725385*n^18-47969051502600*n^17+175526906951476*n^16
> 6-514532881705099*n^15+1227887211907954*n^14-2410562127613909*n^13+391
> 718225622305*n^12-5282720388743863*n^11+5908501754841568*n^10-5458642
> 147577112*n^9+413311131399432*n^8-2532577386991599*n^7+12317105006757
> 49*n^6-461347451340637*n^5+126624159099024*n^4-23174875998820*n^3+2207
> 950591776*n^2+17282784704*n-18190672896)/(14348907*n^14-300264165*n^13
> +2935621035*n^12-17757215280*n^11+74130602301*n^10-225488236995*n^9+51
> 4156619142*n^8-890487883991*n^7+1173948330603*n^6-1168973960829*n^5+86
> 2895108810*n^4-456404499794*n^3+162928809064*n^2-34990112256*n+3392739
> 328):
> c[5,1]:=n->(6377292*n^21+34012224*n^20-3141702045*n^19+48585663729*n^1
> 8-425371270365*n^17+2574471996090*n^16-11730569031780*n^15+42130389606
> 084*n^14-122455242411388*n^13+292339415580064*n^12-577394750058759*n^1
> 1+945442337820588*n^10-1281206119784018*n^9+1429804082135676*n^8-13033
> 35297962398*n^7+958799622118557*n^6-559473567470863*n^5+252511941866119
> 6*n^4-84856129435388*n^3+19952850899632*n^2-2924255852288*n+2007069081
> 60)/(14348907*n^14-300264165*n^13+2935621035*n^12-17757215280*n^11+741
> 30602301*n^10-225488236995*n^9+514156619142*n^8-890487883991*n^7+11739
> 48330603*n^6-1168973960829*n^5+862895108810*n^4-456404499794*n^3+16292
> 8809064*n^2-34990112256*n+3392739328):
> c[5,2]:=n->(-972*n^9+12204*n^8-67575*n^7+216572*n^6-442638*n^5+598016*
> n^4-533667*n^3+303032*n^2-99228*n+14256)/(81*n^3-396*n^2+646*n-352):
> c[6,0]:=n->(-153763596*n^23+4807730214*n^22-71462215170*n^21+671913668
> 718*n^20-4485475391508*n^19+22618599651036*n^18-89481520202794*n^17+28
> 4693080763928*n^16-740721483723038*n^15+1593806412832250*n^14-2856329
> 09446034*n^13+4279786367498300*n^12-5366061507674396*n^11+561904726276
> 8480*n^10-4889955978554470*n^9+3507128837238766*n^8-2046848193714394*n
> ^7+954060740141764*n^6-345379808086344*n^5+92949080837904*n^4-17236618
> 997568*n^3+1872392384256*n^2-63051122688*n-5232623616)/(14348907*n^14-
> 300264165*n^13+2935621035*n^12-17757215280*n^11+74130602301*n^10-22548
> 8236995*n^9+514156619142*n^8-890487883991*n^7+1173948330603*n^6-116897
> 3960829*n^5+862895108810*n^4-456404499794*n^3+162928809064*n^2-3499011
> 2256*n+3392739328):
> c[6,1]:=n->(-2125764*n^22-7440174*n^21+1069928514*n^20-18147899502*n^1
> 9+171678305412*n^18-1117963522476*n^17+5472471286640*n^16-211157525126
> 84*n^15+66042187045232*n^14-170199475334270*n^13+364665896037520*n^12-
> 652038169089716*n^11+972989596669408*n^10-1208157375757840*n^9+1241226
> 243203058*n^8-1045992888914758*n^7+714130315769460*n^6-388127358738036
> *n^5+163722623961544*n^4-51591199102640*n^3+11412231112352*n^2-21578569
> 515904*n+102596634624)/(14348907*n^14-300264165*n^13+2935621035*n^12-1
> 7757215280*n^11+74130602301*n^10-225488236995*n^9+514156619142*n^8-890
> 487883991*n^7+1173948330603*n^6-1168973960829*n^5+862895108810*n^4-456
> 404499794*n^3+162928809064*n^2-34990112256*n+3392739328):
> c[6,2]:=n->(36*n^8-406*n^7+1968*n^6-5352*n^5+8928*n^4-49354*n^3+6012*n^
> 2-2168*n+336)/(9*n-16):

```

```

> # *****
> # Now let us compute Q[n+3, n+3, n+3, n+3]
> # using 7-term RR and call it "p".
> # *****
> N:=n+3:
> p:=expand(
> (c[1,0](N)+c[1,1](N)*z )*Q[N, N, N-1, N-1]+
> (c[2,0](N)+c[2,1](N)*z+c[2,2](N)*z^2+c[2,3](N)*z^3+
> c[2,4](N)*z^4)*Q[N-1, N-1, N-1, N-1]+
> (c[3,0](N)+c[3,1](N)*z+c[3,2](N)*z^2+
> c[3,3](N)*z^3)*Q[N-1, N-1, N-2, N-2]+
> (c[4,0](N)+c[4,1](N)*z+c[4,2](N)*z^2+
> c[4,3](N)*z^3)*Q[N-2, N-2, N-2, N-2]+
> (c[5,0](N)+c[5,1](N)*z+c[5,2](N)*z^2)*Q[N-2, N-2, N-3, N-3]+
> (c[6,0](N)+c[6,1](N)*z+c[6,2](N)*z^2)*Q[N-3, N-3, N-3, N-3]):
> p_tmp:=p:
> p:=0:
> for k from 0 to 4 do
> p_tmp:=collect(p_tmp, B[k]);
> c_tmp:=collect(expand(coeff(p_tmp, B[k], 1)), z);
> p:=p+B[k]*add(simplify(coeff(c_tmp, z, m))*z^m, m=0..degree(c_tmp,
> z));
> end do:

> # *****
> # Final step:
> # comparing results of 6-term and 7-term evaluation
> # *****
> simplify(Q[N, N, N, N]-p);
> # *****
> # Q.E.D. !
> # *****

```

0

Приложение В

Коэффициенты второго 7-членного рекуррентного соотношения, записанные в нотации Maple

```

> d[1,0]:=->(-31414068*n^19+533776716*n^18-4307719320*n^17+22003996275
> *n^16-79919232282*n^15+219548926782*n^14-473087607120*n^13+81716606378
> 2*n^12-1144973497172*n^11+1307258282295*n^10-1214406110533*n^9+91161640
> 60246*n^8-546098809275*n^7+255973075886*n^6-90984800226*n^5+2320405429
> 0*n^4-3759776116*n^3+242197824*n^2+29891056*n-5359200)/(2834352*n^17-5
> 2514244*n^16+456415965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n^13-2638634303
> 7*n^12+57153737889*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9-144201150257
> *n^8+126212496700*n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-20874637258*n^4+
> 6677161572*n^3-1504358176*n^2+212925328*n-14229600):

> d[1,1]:=->(80542836*n^18-1282550841*n^17+9487872306*n^16-43242669153*
> n^15+135729184950*n^14-310597605783*n^13+535173759603*n^12-70795180165
> 1*n^11+729498834964*n^10-597326990599*n^9+405986152776*n^8-24939077735
> 9*n^7+151092365907*n^6-88631680738*n^5+44648114258*n^4-17133499300*n^3
> +4539092736*n^2-732491152*n+54146400)/(2834352*n^17-52514244*n^16+4564
> 15965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n^13-26386343037*n^12+5715373788
> 9*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9-144201150257*n^8+126212496700
> *n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-20874637258*n^4+6677161572*n^3-15
> 04358176*n^2+212925328*n-14229600):

```

```

> d[2,0]:=->(91644048*n^20-1579101480*n^19+12864426804*n^18-6601708623
> 6*n^17+239901481215*n^16-657954491508*n^15+1417200494904*n^14-24621094
> 74703*n^13+3512859748772*n^12-41263478276059*n^11+4122453186578*n^10-34
> 11593811328*n^9+2350238493962*n^8-1337731312956*n^7+622944994917*n^6-2
> 34575499578*n^5+70375573248*n^4-16422937272*n^3+2839055632*n^2-3255888
> 00*n+18480000)*n/(2834352*n^17-52514244*n^16+456415965*n^15-2473942662
> *n^14+9375575796*n^13-26386343037*n^12+57153737889*n^11-97397095341*n^10
> +10132305140912*n^9-144201150257*n^8+126212496700*n^7-88287128337*n^6+
> 48795110398*n^5-20874637258*n^4+6677161572*n^3-1504358176*n^2+21292532
> 8*n-14229600);

> d[2,1]:=->(184469076*n^20-3538819692*n^19+31415866443*n^18-1716443758
> 08*n^17+646975500336*n^16-1785912658371*n^15+3737321993925*n^14-604999
> 9844965*n^13+72655682195910*n^12-7592423483560*n^11+5869979119593*n^10-
> 3480798190249*n^9+1523244179866*n^8-441185991759*n^7+44898941671*n^6+3
> 0570814044*n^5-20180814036*n^4+6596184520*n^3-1334189280*n^2+2157232416
> *n-8131200)/(2834352*n^17-52514244*n^16+456415965*n^15-2473942662*n^14
> +9375575796*n^13-26386343037*n^12+57153737889*n^11-97397095341*n^10+13
> 2305140912*n^9-144201150257*n^8+126212496700*n^7-88287128337*n^6+48795
> 110398*n^5-20874637258*n^4+6677161572*n^3-1504358176*n^2+212925328*n-1
> 4229600);

> d[2,2]:=->(711422352*n^19-11559845583*n^18+87490018647*n^17-409194424
> 539*n^16+1322429840109*n^15-3126201984666*n^14+5576936909625*n^13-7625
> 034939390*n^12+8015129853806*n^11-6408107067940*n^10+3763273844244*n^9
> -1463058235419*n^8+211508651773*n^7+161451244433*n^6-143871464460*n^5+
> 63112380816*n^4-18075050368*n^3+3429545824*n^2-390286784*n+19588800)/(
> 2834352*n^17-52514244*n^16+456415965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n
> ^13-26386343037*n^12+57153737889*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9
> -144201150257*n^8+126212496700*n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-20
> 874637258*n^4+6677161572*n^3-1504358176*n^2+212925328*n-14229600);

> d[2,3]:=->(-120223764*n^18+2006412849*n^17-15667638840*n^16+7605220205
> 61*n^15-257091475446*n^14+642504105117*n^13-1229780717901*n^12+1842896
> 184869*n^11-2192182426368*n^10+2086922530549*n^9-1596156505548*n^8+8980
> 560587277*n^7-481075398131*n^6+185696160758*n^5-54629827234*n^4+114858
> 67476*n^3-1502614624*n^2+80004240*n+2772000)/(2834352*n^17-52514244*n
> ^16+456415965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n^13-26386343037*n^12+571
> 53737889*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9-144201150257*n^8+12621
> 2496700*n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-20874637258*n^4+6677161572
> *n^3-1504358176*n^2+212925328*n-14229600);

> d[2,4]:=->1;

> d[3,0]:=->(-80306640*n^23+1569811104*n^22-14181009552*n^21+7868535858
> 0*n^20-300161605662*n^19+833240490309*n^18-1732705456482*n^17+27230469
> 95431*n^16-3185645929505*n^15+2593110862815*n^14-1071192764082*n^13-57
> 7414818623*n^12+1520421855190*n^11-1536168886265*n^10+1012366890156*n^9
> -460204686744*n^8+132282940739*n^7-11669424675*n^6-9518406642*n^5+563
> 1019460*n^4-1718799136*n^3+350091696*n^2-47547552*n+3326400)/(2834352*
> n^17-52514244*n^16+456415965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n^13-2638
> 6343037*n^12+57153737889*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9-144201
> 150257*n^8+126212496700*n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-2087463725
> 8*n^4+6677161572*n^3-1504358176*n^2+212925328*n-14229600);

> d[3,1]:=->(-217064124*n^22+1524304008*n^21+8481898233*n^20-1660294042
> 11*n^19+1102057865649*n^18-4514120209215*n^17+13100261875839*n^16-2862
> 8044281185*n^15+48686796057702*n^14-65664227216584*n^13+70941494227255
> *n^12-61588934379000*n^11+42809056110177*n^10-23518514212296*n^9+99135
> 20374428*n^8-2978572912391*n^7+483668526029*n^6+62364342746*n^5-710092
> 39044*n^4+25158513216*n^3-5366261872*n^2+693586720*n-42504000)/(283435
> 2*n^17-52514244*n^16+456415965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n^13-26
> 386343037*n^12+57153737889*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9-1442
> 01150257*n^8+126212496700*n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-20874637
> 258*n^4+6677161572*n^3-1504358176*n^2+212925328*n-14229600);

> d[3,2]:=->(2699011692*n^21-47479509747*n^20+392809077666*n^19-2031077
> 640114*n^18+7354923416190*n^17-19801983882978*n^16+41054403799962*n^15
> -66944349680505*n^14+86872862802585*n^13-90085232869834*n^12+743462442
> 667733*n^11-48049004131880*n^10+23321474078143*n^9-7492700303363*n^8+64
> 6492671367*n^7+936770564865*n^6-694951224690*n^5+282882887876*n^4-7769
> 7498592*n^3+14511019888*n^2-1690362784*n+93508800)/(2834352*n^17-52514
> 244*n^16+456415965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n^13-26386343037*n^12
> +57153737889*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9-144201150257*n^8
> +126212496700*n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-20874637258*n^4+6677
> 161572*n^3-1504358176*n^2+212925328*n-14229600);

```



```

> d[3,3]:=n->(-2187*n^6+11340*n^5-23229*n^4+24320*n^3-14133*n^2+4424*n-5
> 88)/(81*n^3-315*n^2+394*n-154):

> d[4,0]:=n->(240919920*n^23-4253260104*n^22+34620271236*n^21-1708911924
> 48*n^20+562257790146*n^19-1254560447826*n^18+1734626042091*n^17-602134
> 039591*n^16-3758936055891*n^15+11401207373963*n^14-19614621714485*n^13
> +24266192795939*n^12-22987882122158*n^11+17019622793908*n^10-985200422
> 2566*n^9+4382804377482*n^8-1430763336619*n^7+299737244737*n^6-15384778
> 234*n^5-15149180316*n^4+6587305536*n^3-1513856912*n^2+211706592*n-1441
> 4400)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n^14-2067206589*n^13+73083
> 69207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10-59321331282*n^9+729838096
> 30*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-33291972264*n^5+15503138134*n^4
> -5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+14229600):

> d[4,1]:=n->(-542069820*n^23+7716523320*n^22-42391198368*n^21+619048392
> 75*n^20+582971936481*n^19-4659368547744*n^18+18837859899726*n^17-52430
> 210080146*n^16+109698123235920*n^15-17944877132188*n^14+2341447220877
> 34*n^13-246055672356605*n^12+208695266189506*n^11-142147832531347*n^10
> +76623100052044*n^9-31633135767570*n^8+9209817124795*n^7-134896614055
> *n^6-279800213602*n^5+251364539844*n^4-85878456480*n^3+17963811312*n^2
> -2277654432*n+136382400)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n^14-20
> 67206589*n^13+7308369207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10-593213
> 31282*n^9+72983809630*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-33291972264*
> n^5+15503138134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+14229600
> ):

> d[4,2]:=n->(2710349100*n^22-52310977659*n^21+477449822412*n^20-2739429
> 866448*n^19+11076606326169*n^18-33525879803379*n^17+78730533326542*n^1
> 6-146659948893504*n^15+219586727593080*n^14-265910746039214*n^13+26033
> 5400186667*n^12-204280115967309*n^11+125565653285000*n^10-570953504376
> 46*n^9+15834793546167*n^8+6404242939249*n^7-3539092652901*n^6+221521240
> 5206*n^5-852654141004*n^4+227257081568*n^3-41562215824*n^2+4758223328*
> n-259089600)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n^14-2067206589*n^1
> 3+7308369207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10-59321331282*n^9+72
> 983809630*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-33291972264*n^5+15503138
> 134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+14229600):

> d[4,3]:=n->(-243*n^7+1728*n^6-5193*n^5+8557*n^4-8360*n^3+4851*n^2-1552
> *n+212)/(9*n^2-28*n+22):

> d[5,0]:=n->(-240919920*n^24+4458120768*n^23-37991706696*n^22+195467374
> 584*n^21-661926941766*n^20+1463035536252*n^19-1677847397508*n^18-14316
> 39315106*n^17+11761028025152*n^16-31020057302782*n^15+54853050088604*n
> ^14-73252085727196*n^13+76967588449004*n^12-64631247260184*n^11+434769
> 31571482*n^10-23232907082710*n^9+9642458487906*n^8-2951879371774*n^7+5
> 73335443590*n^6-17355374796*n^5-32871933800*n^4+13245038144*n^3-290806
> 4096*n^2+2384656448*n-24393600)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n
> ^14-2067206589*n^13+7308369207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10-
> 59321331282*n^9+72983809630*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-332919
> 72264*n^5+15503138134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+14
> 229600):

> d[5,1]:=n->(1204599600*n^23-25673639148*n^22+258828720624*n^21-1641599
> 067474*n^20+7347618520830*n^19-24672992190102*n^18+64494596815164*n^17
> -134368301582208*n^16+226542557708264*n^15-311972294203610*n^14+352506
> 886056536*n^13-326853094880018*n^12+247477822319576*n^11-1511659567075
> 68*n^10+72614763242264*n^9-25857525541096*n^8+5629534604510*n^7+157093
> 918648*n^6-745871190344*n^5+357764076448*n^4-102570467232*n^3+19328356
> 032*n^2-2242176896*n+122707200)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n
> ^14-2067206589*n^13+7308369207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10
> -59321331282*n^9+72983809630*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-33291
> 972264*n^5+15503138134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+1
> 4229600):

> d[5,2]:=n->(-972*n^9+9612*n^8-41286*n^7+101120*n^6-155718*n^5+156494*n
> ^4-102784*n^3+42630*n^2-10160*n+1064)/(81*n^3-315*n^2+394*n-154):

```

```

> d[6,0]:=n->(80306640*n^25-1683027720*n^24+16274493432*n^23-95400436284
> *n^22+371414606526*n^21-966623745114*n^20+1455370603362*n^19+184747568
> 458*n^18-8100624784104*n^17+26625888635266*n^16-55585428179988*n^15+86
> 702597536386*n^14-106443225579726*n^13+105051126305300*n^12-8394828839
> 8650*n^11+54208223589784*n^10-27968242720536*n^9+11243032482500*n^8-33
> 28779690316*n^7+612423812864*n^6-4509209536*n^5-41092487712*n^4+156632
> 75640*n^3-3350469888*n^2+432124416*n-26611200)/(2834352*n^16-49679892*
> n^15+406736073*n^14-2067206589*n^13+7308369207*n^12-19077973830*n^11+3
> 8075764059*n^10-59321331282*n^9+72983809630*n^8-71217340627*n^7+549951
> 56073*n^6-33291972264*n^5+15503138134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^
> 2-198695728*n+14229600):
>
> d[6,1]:=n->(-401533200*n^24+9561712716*n^23-107803477530*n^22+76557151
> 0206*n^21-3842795691558*n^20+14500535643198*n^19-42703852450608*n^18+1
> 00562463144686*n^17-192424170567540*n^16+302292046286728*n^15-39219853
> 6682928*n^14+421098001054694*n^13-373438808007878*n^12+271664000521444
> *n^11-159775746261714*n^10+73746351818698*n^9-24892470143532*n^8+47596
> 20512446*n^7+565365754904*n^6-876733083312*n^5+387128173008*n^4-106835
> 995232*n^3+19616424576*n^2-2228412672*n+119750400)/(2834352*n^16-49679
> 892*n^15+406736073*n^14-2067206589*n^13+7308369207*n^12-19077973830*n^
> 11+38075764059*n^10-59321331282*n^9+72983809630*n^8-71217340627*n^7+54
> 995156073*n^6-33291972264*n^5+15503138134*n^4-5371499124*n^3+130566244
> 8*n^2-198695728*n+14229600):
>
> d[6,2]:=n->(36*n^9-418*n^8+2106*n^7-6036*n^6+10836*n^5-12630*n^4+9558*
> n^3-4532*n^2+1224*n-144)/(9*n^2-28*n+22):

```

Приложение С

Явный вид двух коэффициентов 8-членного рекуррентного соотношения для рациональных приближений постоянной Эйлера

$$\begin{aligned}
 a_1(n) = & -38118941416341000848473455153125019514338017280n^{85} \\
 & + 10463211834436750048985097922324846177783638392832n^{84} \\
 & - 1392356979939130039834763952330505582880161085521 \\
 & \quad 920n^{83} \\
 & + 119082316680577231219528874090951430123193672049688 \\
 & \quad 576n^{82} \\
 & - 7298089239254394189821468582514386430877752808874606 \\
 & \quad 592n^{81} \\
 & + 3366591638975739360490676967641511398634135301267859 \\
 & \quad 86560n^{80} \\
 & - 1181659685896782628344219701712224019082555628240248 \\
 & \quad 8852480n^{79}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 3018095698413999503678032483575917250476967119393768 \\ & \quad 69216256n^{78} \\ & - 4312998266968994608993555454957900255477290548120000 \\ & \quad 859994112n^{77} \\ & - 5997575504930474587277875753063131562958029111628859 \\ & \quad 4977429504n^{76} \\ & + 6861914244433912950757425594073475961259441091732597 \\ & \quad 054189184000n^{75} \\ & - 2943059323330534851431254783065552044671858108135662 \\ & \quad 75075094510848n^{74} \\ & + 9256540579063718942689916284372478240446195394512111 \\ & \quad 090613790920832n^{73} \\ & - 2402981832023762685593951238836474841999133356723757 \\ & \quad 68621877379820480n^{72} \\ & + 5390947154546194863501991462988607459420565893790858 \\ & \quad 325673574715673312n^{71} \\ & - 1070589020020927794223571108675800584909983292758272 \\ & \quad 50947122474062014544n^{70} \\ & + 1910077983395542968085350497268480017258166060430355 \\ & \quad 092583535305257701432n^{69} \\ & - 3092741578947598332359737249042450933221439686228929 \\ & \quad 7681274391681641772472n^{68} \\ & + 4578447978426925718495473372814040768577022514912322 \\ & \quad 68660553884362428853748n^{67} \\ & - 6232266797555843027884977736337141324323643293842070 \\ & \quad 993487018492593551099216n^{66} \\ & + 7835877738550739508217693606059228014632674959809881 \\ & \quad 9456655869239150208728538n^{65} \\ & - 9133441341195026292085085232257794910772949392192165 \\ & \quad 50207450174441749814005650n^{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 9899126274046741861350454019399204135022588996158240 \\
& \quad 551792368655026878914598460n^{63} \\
& - 1000143886927034122093058098810834319415531554337305 \\
& \quad 13160667412774807122287934907n^{62} \\
& + 9439192169141705158495816853935384199969461629044764 \\
& \quad 48951637661077404083832804659n^{61} \\
& - 8336030967922143657689150067762342153806594441691179 \\
& \quad 648616766085054263830518435331n^{60} \\
& + 6898265023022168649563515651751481344788309782613665 \\
& \quad 7495297110195241912343325722525n^{59} \\
& - 5354857751988914028788009191063779766347343319592931 \\
& \quad 58489499490211031729727583471264n^{58} \\
& + 3902335484641426227787803018892916414860673662406058 \\
& \quad 855038192973286076553471567768176n^{57} \\
& - 2671009461239368527341668401798593987829318700802263 \\
& \quad 9744007444987848076640415268052069n^{56} \\
& + 1717340155306353875285915385717848843276036950923404 \\
& \quad 91894447151137023043066668401168071n^{55} \\
& - 1036924672487756892512893924551068061882784894098296 \\
& \quad 544819121070550473949441036515644814n^{54} \\
& + 5874989133351634918108297086954838732471198396619241 \\
& \quad 163080143702454255794797003147013278n^{53} \\
& - 3118880461526195862415248085635147274281967737510378 \\
& \quad 1913817860438984888095677701808164539n^{52} \\
& + 1547605712203451444493233188624659672339961078702811 \\
& \quad 52926123473314416771188453282460549541n^{51} \\
& - 7149503790279437406582047867861210221688818882790272 \\
& \quad 29014241152724422700096203365941866684n^{50} \\
& + 3055187129913863703514301054638987440205193433287278 \\
& \quad 860718761986642511603118397966314823844n^{49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1194342936457443541212475394796226242423131887351755 \\
& \quad 0502112110775534572529301488127646365983n^{48} \\
& + 4183300290366308537966052608147687758167946800328005 \\
& \quad 5286584905232593934423427525874695854675n^{47} \\
& - 1254420755555354773774619469402689859138207600501172 \\
& \quad 41851581581740180142187058177964818498684n^{46} \\
& + 2814496864443277425952335159687791482490074990030661 \\
& \quad 28485198962419774380435425354311136541352n^{45} \\
& - 1574518394481512168967066897991059301248105456813728 \\
& \quad 10590237182387130867226435561008806971551n^{44} \\
& - 3030129912403242819953559785732803446800418515423739 \\
& \quad 921651203153287256462398786603652025140153n^{43} \\
& + 2392619767591540193045602772746400263521884942035337 \\
& \quad 0822872140112211437862281100141692682672906n^{42} \\
& - 1264708235509689690554431642393498636540760470295789 \\
& \quad 77234605269900615878067619711622435311315602n^{41} \\
& + 5571659683364069289155791554006483183196981072199189 \\
& \quad 35900359880844462203301076882628672522491707n^{40} \\
& - 2177314817867384778807762711390117440194358933987252 \\
& \quad 092193688675513411905984406379571205778666647n^{39} \\
& + 7750494058373643126656044609773811401745889332462433 \\
& \quad 777358700486222173245807923550478391101273351n^{38} \\
& - 2547793310571784513245150158215939949129288722132066 \\
& \quad 0416134376830957147919519314545114117023247759n^{37} \\
& + 7795920960734071515434413452253793374606934610707867 \\
& \quad 0326398142418152230935177949468678695943032572n^{36} \\
& - 2231367524074560161254664868628215196005233794968522 \\
& \quad 73635558330282293525886276718674212735656833084n^{35} \\
& + 5993086254923890534417920625658814454670559207080652 \\
& \quad 63910511839895629031913334745179114872341899887n^{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 151358709178844332691271990974086910291495785178d6080 \\
& \quad 574381201427199544551420472264579060361184664827n^{33} \\
& + 35993730029431021538464713083818583083777695211193431 \\
& \quad 58925114687361172515220211285302194794470909163n^{32} \\
& - 80662108874038299444841110087855091842084565724802429 \\
& \quad 53762745267273576351861916719758156908483166023n^{31} \\
& + 17042316806406208979804777269538112507548222863374523 \\
& \quad 641824079489601975289013747649301969223382816537n^{30} \\
& - 33952000047022899691711300732485761896870627407317491 \\
& \quad 372968154147169130873748814477733598375762026693n^{29} \\
& + 63772353356877072361787552328050795991464412743093954 \\
& \quad 274253663687298353930610045704985909713738345888n^{28} \\
& - 11289865192220749864634176344553615512137455388312814 \\
& \quad 4456392734384745865673958472883566928068345464498n^{27} \\
& + 18828190059417034060777104179702361955570717383514052 \\
& \quad 1148047229037272601221635173409691165230842810600n^{26} \\
& - 29558795579987978404575023043458936222476039545328509 \\
& \quad 0797693931057883237885175251940925444352365051204n^{25} \\
& + 43645627457576595254610182250218489236043316199956892 \\
& \quad 2063154291642023203919992893845967053262156649318n^{24} \\
& - 60549472486903217098018943925093257142772810002894850 \\
& \quad 9976622020114770918808342795069140057524573959312n^{23} \\
& + 78823376035173706713731023876958793181814504109082104 \\
& \quad 9041923101940208438536657304151910325019723582221n^{22} \\
& - 96149967212908743005812814470065181602491837167394754 \\
& \quad 6645040454958628686035620282666483169538771240989n^{21} \\
& + 10971732384184454503480767370252965177772906797506021 \\
& \quad 31288234189249775012407790330939496198167878299169n^{20} \\
& - 11690004545298325645618677135637786180966795819348880 \\
& \quad 05995187153299096302453166463740022702422403174407n^{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 11604757416003564981569944902197205033893409705301666 \\
& \quad 16900314336436170065623458631283056492619678253195n^{18} \\
& - 10707295956689358530424391236676847477354851587205654 \\
& \quad 29761595795377070277650817672439867346281792056301n^{17} \\
& + 91567037341191919841235253826196731481251136799700716 \\
& \quad 8215541147127449373154221271104137939333822228610n^{16} \\
& - 72349577768434967798932981739172132929729991630265821 \\
& \quad 3040956965074615124217545178993111696558929979408n^{15} \\
& + 52624737437593844414028688349863034137392369667284742 \\
& \quad 2931924131768848295092056011249063915098903943080n^{14} \\
& - 35089619501792811438735008244740352399801721941974951 \\
& \quad 2843350159354321190805031556239981268513322285424n^{13} \\
& + 21344506369245075027079196591186883496810201000140644 \\
& \quad 2311519883074329156954300884984520603972681745568n^{12} \\
& - 11776980871160806899019171173573766942870394586260612 \\
& \quad 1524119332208253718669579244640431705281067772352n^{11} \\
& + 58544871181545092990311631512492354854268206011795919 \\
& \quad 242761724951252275841529814685059798468756772992n^{10} \\
& - 26009622736787223295798003283351264357866293282368312 \\
& \quad 172487255282686266759338461601798596411194016256n^9 \\
& + 10225552413000563763320175546199037928201460576221689 \\
& \quad 104984064130587212591832559021930508329123207168n^8 \\
& - 35142199113089679238182030923731689699006308036035359 \\
& \quad 25975061366357382094633427944071808332444216320n^7 \\
& + 10394252674191250015831064601416460971071494314550803 \\
& \quad 80592373920999041110504414036611559799936323584n^6 \\
& - 25923446163734302117706318911275267746157885071474448 \\
& \quad 7772481077514261352997154036520804304879894528n^5 \\
& + 53009871195332225675209850501516217756330394565744307 \\
& \quad 422635487223070939800801825187105748523876352n^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 85333013883176601656748232639855904720222811532537511 \\
& \quad 76928656629624981002819414625096020330479616n^3 \\
& + 10139182772527756352931945850974723145142312016564308 \\
& \quad 74722154379364773067546238757681173331705856n^2 \\
& - 79052951094894651100001760675375421464584022011736577 \\
& \quad 363437257216444267435861179799214184464384n \\
& + 3033748079458899454666296800053073083415180036827573 \\
& \quad 300082121698680433170908843226665918136320, \\
b(n) = & 1774502445243460384325488429542026770495045632n^{83} \\
& - 715553206991481857876959618495211025359485403136n^{82} \\
& + 134863715773407329880090090804409485658943669796864n^{81} \\
& - 161339230150888086886250284965163837410024527 \\
& \quad 62214400n^{80} \\
& + 1392349859110775168029297995700697278478759450315833 \\
& \quad 344n^{79} \\
& - 9303394385891854974563137582451146472947303945035324 \\
& \quad 2112n^{78} \\
& + 5033810979409154750223220389851437693221727722894760 \\
& \quad 796160n^{77} \\
& - 22747749373989818860738317036369731111865652808703120 \\
& \quad 8801280n^{76} \\
& + 8781249962128984198353309600076947821682913246287001 \\
& \quad 113833472n^{75} \\
& - 2945714287905574689664009327797282898869421453114448 \\
& \quad 79153630720n^{74} \\
& + 8703109185313305576907492317476415046866700848430895 \\
& \quad 924872797696n^{73} \\
& - 2289256407219655796846783025004112550571873292411593 \\
& \quad 61297520250944n^{72} \\
& + 5408675742859919317436033245569905578604872703290101 \\
& \quad 256994317225152n^{71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1156276747402735760336781798073234291363875764784683 \\
& \quad 51013556657656528n^{70} \\
& + 2250637891156888200879967373246003488724387442062092 \\
& \quad 932259769909544672n^{69} \\
& - 4009825486504116401291754897413228272961268504048829 \\
& \quad 5450584127870905148n^{68} \\
& + 6569092838299783263420188177618684578967084324444714 \\
& \quad 46259393575532856136n^{67} \\
& - 99350136210988069369281509765372056889248050653763370 \\
& \quad 77074170630112074686n^{66} \\
& + 1391942479158538557806630676930674569649261896368236 \\
& \quad 81487229288621051375356n^{65} \\
& - 1812127962378316957480583627359029163413533820570333 \\
& \quad 108706263032780785735791n^{64} \\
& + 2198073175757351970499091418250393405258853990823718 \\
& \quad 9273008262308457274155335n^{63} \\
& - 2490119436064481865414882035071191635724937279614326 \\
& \quad 33885869719228454740579663n^{62} \\
& + 2640267834780874407226616533563234069695811406111291 \\
& \quad 820770731837157878462281205n^{61} \\
& - 2625132577607923592845350658764111110938491410451318 \\
& \quad 3567889864758970408536600720n^{60} \\
& + 2451705813124347774876652774392599290838173208500926 \\
& \quad 55631201482850574072375079332n^{59} \\
& - 21540734926377393954774535323382815124362522016776714 \\
& \quad 23449774687783751098760668773n^{58} \\
& + 17828716579469758091901897869146875513827905474484284 \\
& \quad 942182165047229517761929982567n^{57} \\
& - 13918026087735310719006096856078672715480221076096770 \\
& \quad 1763871530275881228567077557130n^{56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10259070273263406923099083665459560365739227715268633 \\
& \quad 96563574992902209965750887930870n^{55} \\
& - 71471879125363393518209460786476576551739904605215699 \\
& \quad 92991815329639087431284559641791n^{54} \\
& + 47101726133599206792583407786189058795457113527694635 \\
& \quad 386787455942824224451933461715037n^{53} \\
& - 29386486127542013650072684809100543083354398370225311 \\
& \quad 7131559906731648948453367972624872n^{52} \\
& + 17368519508086956538844561416064079828681483953427245 \\
& \quad 07079619681019259110696500637033844n^{51} \\
& - 97306149749027493340509549140829936055918065455935543 \\
& \quad 47074446993959016857265187249891635n^{50} \\
& + 51701523566461903670610673940553637106693926171922782 \\
& \quad 889242574341915264779348508377616359n^{49} \\
& - 26064070202671508721960382144789707437083894763027004 \\
& \quad 7002483294381611005268346913372538768n^{48} \\
& + 12471419104388038878042229769746060418169090148645743 \\
& \quad 12795050861426612348857391712070166836n^{47} \\
& - 56656932076773194003425820668753225774680735795151544 \\
& \quad 48110317187065517799911962417981583999n^{46} \\
& + 24442943468166428311461494345721572131868842731967660 \\
& \quad 951445551203249259287083898250951511435n^{45} \\
& - 10015869549396484294858785302551106253047031768445862 \\
& \quad 7546137131920049686799624197057156983806n^{44} \\
& + 38985421761094597414701078801941071759694809731564208 \\
& \quad 0208972885144485659519139048472970998532n^{43} \\
& - 14414865018753929591357112614689503323017206908286583 \\
& \quad 08193725499544889056783594155814875599977n^{42} \\
& + 50629403576633510185837729253582390806896286434267737 \\
& \quad 37185708518492430451408358873910750561785n^{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 16890432838219464110002587745483704220981994990293472 \\
& \quad 864784581042253419479939826782074073281873n^{40} \\
& + 53512938531208556102357141881353110241984276985726452 \\
& \quad 987718732602478236422810827365267239014615n^{39} \\
& - 16097676467920284715264230663065909813282600203922843 \\
& \quad 0483895428364482400718583881362426495668568n^{38} \\
& + 45965459618233747447661085158500093519446212906790636 \\
& \quad 8396252317361830209793425689085526415719316n^{37} \\
& - 12454092627217469813045607651206548923087259782285832 \\
& \quad 46982224544417068045552608883003208460228353n^{36} \\
& + 32005303729074870550992521393066736184400840552946771 \\
& \quad 69292350859163075428788506406864594246633627n^{35} \\
& - 77973371966387489591050575689258469470545646691371493 \\
& \quad 59212124422177058265276806681425037937820293n^{34} \\
& + 17998503174572432485720716816549762362705335779889715 \\
& \quad 255484388375088111378355404537246191419624137n^{33} \\
& - 39337557810448049308040710556127590842371145545063442 \\
& \quad 766122424532710554072606434065970350742662343n^{32} \\
& + 81345981836093547791183229791070593055938289375506655 \\
& \quad 376483267964305856128730378902074025679363835n^{31} \\
& - 15902226895391379719042819445359396103967008735972849 \\
& \quad 9659855375454204001870198668554949956052468828n^{30} \\
& + 29360508058715850544209049321205973516227617779928804 \\
& \quad 4825852004813062934605616524293416294068318582n^{29} \\
& - 51144015058453836954007756680310401989191582684869884 \\
& \quad 3045793197543587524484555482128011046672190920n^{28} \\
& + 83953732668579879163281523289377018273291950643858889 \\
& \quad 0513904952350734483287252501449195925230869586n^{27} \\
& - 12969651013506751528496670828855138129424423830539057 \\
& \quad 15015191011170165300756637281528726205495585590n^{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 18828815899641053621658410410341993591346152430458848 \\ & \quad 28199042668227316137938212809580945581628673828n^{25} \\ & - 25645655037985137147325921293700231799030294758916311 \\ & \quad 60872231306982374412016345593254279588212402775n^{24} \\ & + 32711998707988618763877771761357609131643320291331132 \\ & \quad 99898718582194490434055997607646297537791362085n^{23} \\ & - 38995514947554042763398758957016848519642005630319229 \\ & \quad 25993856349509545866033814549986004084215081399n^{22} \\ & + 43345080843021350298879679382537592901296277341941231 \\ & \quad 78746458397009575281650762455976539087579543489n^{21} \\ & - 44808489673722012855820080722347558685237867466055061 \\ & \quad 10523701854156680034335173072947392011039028453n^{20} \\ & + 42954363041265358940848951088086984173464075776742435 \\ & \quad 93413062883631057778262432979539781238254377615n^{19} \\ & - 38057384588996958742748278587912362714477924253600818 \\ & \quad 17739124954240229134185874013788515478169220014n^{18} \\ & + 31046098415018211113825892630607975483780840469035632 \\ & \quad 08417530362085215702987981464954469510678393016n^{17} \\ & - 23217410920882242653554488227499619990402780770225743 \\ & \quad 84625292672361894526344847776013861774526839880n^{16} \\ & + 15836363304054924858345124002891415412033686716872378 \\ & \quad 15790779416384491452380291895887447446258075832n^{15} \\ & - 97937002574070122157478507422811114008295150437488137 \\ & \quad 1560079702150405162879445198817552403513371536n^{14} \\ & + 54527783034098235399628382137953126788416912910434167 \\ & \quad 5293905701091464330277575549282365788302310928n^{13} \\ & - 27099943597245272697022752896350738086486002197222546 \\ & \quad 2586698129499467783011880718770637214136083872n^{12} \\ & + 11897520830343297004013928558067810449618719428682002 \\ & \quad 5233133428439628844202195505258382363548000704n^{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 45538338895228311467572912371847989602740333636447558 \\ & \quad 018545963829385315401367821159099286815691520n^{10} \\ & + 14939950566186193539693050454154355295366112858382749 \\ & \quad 315203448875737751343503850915745941040764928n^9 \\ & - 41061564983424638696633263319257863823328554801393457 \\ & \quad 77519816949819477602257475866607056012032512n^8 \\ & + 91515016435862451431428506373785234082456627132048806 \\ & \quad 5352897435616233476492437821732531177047040n^7 \\ & - 15726148043154985128631739712842393254765815616913856 \\ & \quad 8899526065422542443981151156469095419777024n^6 \\ & + 19044215871508992062142486326386009148977065069829099 \\ & \quad 889026999269615049172716044237323611541504n^5 \\ & - 13109906768228023907511883094421678119231061824166799 \\ & \quad 83029257424584554670584914850491112824832n^4 \\ & + 89067170955507413408266926637458009099338439553285964 \\ & \quad 35832724162778948146749777467043217408n^3 \\ & + 41039968564638175643969243334636565691128803746478137 \\ & \quad 14114240068455283879083498129895456768n^2. \end{aligned}$$