Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Сергеев, Геометрическое квантование пространств петель, *Совр. пробл. матем.*, 2009, выпуск 13, 3–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm24>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:08:00

Содержание

Часть I. Предварительные сведения	14
Глава 1. Многообразия Фреше	15
1.1. Векторные пространства Фреше	15
1.1.1. Основные определения	15
1.1.2. Производная	17
1.2. Многообразия Фреше	21
1.2.1. Основные определения	21
1.2.2. Векторные расслоения Фреше	25
1.2.3. Связности	28
1.2.4. Дифференциальные формы	33
1.2.5. Симплектические и комплексные структуры	35
Глава 2. Группы Ли–Фреше	38
2.1. Группа токов	40
2.1.1. Основные свойства	40
2.1.2. Экспоненциальное отображение алгебры петель	42
2.1.3. Комплексификация	44
2.2. Группа диффеоморфизмов	46
2.2.1. Конечномерные подалгебры в алгебре $\text{Vect}_\omega(S^1)$	47
2.2.2. Экспоненциальное отображение алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$	49
2.2.3. Простота группы $\text{Diff}_+(S^1)$	53
Глава 3. Многообразия флагов и представления	59
3.1. Многообразия флагов	59
3.1.1. Геометрическое определение многообразий флагов	59
3.1.2. Борелевские и параболические подалгебры	61
3.1.3. Алгебраическое определение многообразий флагов	65
3.2. Неприводимые представления	68
3.2.1. Неприводимые представления комплексных полупростых групп Ли	68
3.2.2. Конструкция Бореля–Вейля	70
3.2.3. Метод орбит и коприсоединенное представление	72

Глава 4. Центральные расширения и когомологии	77
4.1. Центральные расширения групп Ли и проективные представления	77
4.2. Когомологии алгебр Ли	79
4.3. Когомологии групп Ли	83
Глава 5. Грассманианы гильбертова пространства	87
5.1. Грассманиан $\text{Gr}_b(H)$	87
5.2. Грассманиан Гильберта–Шмидта $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$	90
5.3. Плюккерovo вложение и детерминантное расслоение	96
Глава 6. Квазиконформные отображения	101
6.1. Определение и основные свойства	101
6.2. Существование квазиконформных отображений	107
Часть II. Пространства петель компактных групп Ли	115
Глава 7. Пространство петель	116
7.1. Комплексное однородное представление	116
7.2. Симплектическая структура	119
7.3. Комплексная структура	126
7.4. Кэлерова структура	127
7.5. Универсальное флаговое многообразие	129
7.6. Пространство петель $\Omega_T G$	132
Глава 8. Центральные расширения	134
8.1. Центральные расширения и S^1 -расслоения	134
8.2. Центральные расширения алгебр и групп петель	139
8.3. Коприсоединенное представление группы петель	142
Глава 9. Грассмановы реализации	146
9.1. Соболевское пространство полудифференцируемых петель	146
9.2. Грассманова реализация	150
9.3. Доказательство теоремы факторизации	155
Часть III. Пространства комплексных структур	157
Глава 10. Группа Вирасоро	158
10.1. Группа и алгебра Вирасоро	158

10.2. Коприсоединенное действие группы Вирасоро	161
10.3. Кэлерова структура	168

Глава 11. Универсальное пространство Тейхмюллера 176

11.1. Определение универсального пространства Тейхмюллера	176
11.2. Кэлерова структура	181
11.3. Подпространства $T(G)$ и $\text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$	187
11.4. Грассманова реализация универсального пространства Тейхмюллера	192
11.5. Грассманова реализация пространств $\text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ и $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$	199

Часть IV. Квантование конечномерных кэлеровых многообразий 205

Глава 12. Квантование по Дираку 206

12.1. Классические системы	206
12.1.1. Фазовые пространства	206
12.1.2. Алгебры наблюдаемых	208
12.2. Квантование классических систем	209

Глава 13. Предквантование Костанта–Сурьо 211

13.1. Предквантование кокасательного расслоения	211
13.2. Предквантование Костанта–Сурьо	213
13.2.1. Отображение предквантования	213
13.2.2. Поляризации	218

Глава 14. Квантование Блатнера–Костанта–Стернберга 221

14.1. Квантование Баргмана–Фока	221
14.2. Фоковские пространства полуформ	224
14.2.1. KS-действие на фоковских пространствах	224
14.2.2. Полуформы	226
14.3. Метаплектическая структура	231
14.3.1. Расслоение метаплектических реперов	231
14.3.2. Расслоение кэлеровых реперов	232
14.4. Спаривание Блатнера–Костанта–Стернберга (BKS-спаривание)	234

14.5. Квантование Блатнера–Костанта–Стернберга (BKS-квантование)	237
14.5.1. Подъем φ_f^t -действия	237
14.5.2. Квантование квантуемых наблюдаемых	238
14.5.3. Квантование общих наблюдаемых	240

Часть V. Квантование пространств петель **242**

Глава 15. Квантование пространства $\Omega\mathbb{R}^d$ **243**

15.1. Представление Гейзенберга	244
15.1.1. Фоковское пространство	244
15.1.2. Алгебра и группа Гейзенберга	245
15.1.3. Представление Гейзенберга	246
15.2. Действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$	248
15.3. Представление алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$	250
15.4. Твисторная интерпретация	251
15.4.1. Твисторное расслоение	251
15.4.2. Фоковское расслоение	252
15.5. Расслоение квантования	253
15.5.1. Расслоение полуформ	254
15.5.2. Расслоение квантования	255
15.6. Твисторное квантование пространства петель $\Omega\mathbb{R}^d$	255
15.7. Квантование универсального пространства Тейхмюллера	257

Глава 16. Квантование пространства $\Omega_T G$ **264**

16.1. Представления алгебр петель	264
16.1.1. Аффинные алгебры	264
16.1.2. Представления старшего веса аффинных алгебр	267
16.2. Представления групп петель	269
16.2.1. Неприводимые представления аффинных групп	269
16.2.2. Конструкция Бореля–Вейля	270
16.3. Твисторная интерпретация $\Omega_T G$	272
16.3.1. Проективное представление группы $\mathrm{Vect}(S^1)$	272
16.3.2. Конструкция Гудмана–Уолаха	275
16.3.3. Твисторное квантование пространства $\Omega_T G$	276
Список литературы	280
Предметный указатель	286

Предисловие

Эта книга посвящена бесконечномерным кэлеровым многообразиям, точнее, трем конкретным примерам таких многообразий – пространствам петель компактных групп Ли, пространствам Тейхмюллера комплексных структур на пространствах петель и грассманианам гильбертовых пространств. Есть мнение, что в бесконечномерном случае не может существовать удовлетворительной теории, охватывающей весь класс кэлеровых многообразий. Оно базируется на убеждении в том, что класс бесконечномерных кэлеровых многообразий слишком богат и его представители настолько сильно отличаются друг от друга, что изучение каждого из них должно составить отдельную теорию, не похожую на остальные. В настоящий момент трудно сказать, насколько справедливо подобное мнение, но заведомо верно то, что все три упомянутых бесконечномерных кэлеровых многообразия заслуживают специального изучения. Каждое из них является универсальным объектом в некоторой категории, содержащей конечномерные аналоги рассматриваемого многообразия. Одним из следствий этого факта является то, что многие объекты кэлеровой геометрии указанных конечномерных многообразий могут быть получены сужением из соответствующих объектов универсального многообразия. Данное наблюдение может оказаться полезным ввиду того, что изучение кэлеровой геометрии универсального объекта зачастую оказывается более естественным и доступным, нежели для его конечномерных аналогов.

Выбор трех бесконечномерных кэлеровых многообразий для нашего исследования ни в коем случае не является случайным. Он мотивирован тем значением, которое имеют указанные пространства для различных задач современной математической физики. К сожалению, у нас нет возможности рассмотреть эти интригующие связи с математической физикой в данном издании за единственным исключением. Поскольку наш первоначальный интерес к бесконечномерным кэлеровым многообразиям возник при изучении работ по геометрическому квантованию пространств петель (связанных с теорией струн), мы дополнили эту книгу второй частью, посвященной указанному направлению (вместе

с коротким обзором геометрического квантования конечномерных кэлеровых многообразий).

Среди работ по геометрическому квантованию бесконечномерных фазовых многообразий, которые произвели на меня наибольшее впечатление, необходимо упомянуть, прежде всего, статьи Бовика–Раджива [14] и Кириллова–Юрьева [44]. (Вниманием к этим статьям я обязан своему коллеге А. Д. Попову из Объединенного института ядерных исследований в Дубне.) Следом за ними я приступил к изучению монографии Прессли–Сигала [65] по группам петель, ставшей для меня настольной книгой по бесконечномерным кэлеровым многообразиям. Она же побудила меня изложить в краткой форме геометрические идеи, лежащие в основе теории пространств петель. Стоит отметить также стимулирующую работу Нага–Сулливана [58], в которой была выявлена роль универсального пространства Тейхмюллера и соболевского пространства полудифференцируемых функций на окружности для геометрического квантования пространств петель и теории струн.

Представим теперь наших “главных героев” более подробно. Первым из них является пространство петель ΩG компактной группы Ли G . Оно является кэлеровым многообразием Фреше и может рассматриваться как универсальное многообразие флагов группы G в том смысле, что ΩG содержит все флаговые многообразия группы G в качестве комплексных кэлеровых подмногообразий. На этом пространстве имеется, по существу, единственная естественная симплектическая форма. С другой стороны, оно обладает множеством различных комплексных структур, совместимых с указанной симплектической формой. Допустимые комплексные структуры на ΩG параметризуются точками пространства $\text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$, состоящего из сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности, рассматриваемых с точностью до преобразований Мебиуса.

Пространство $\mathcal{S} = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ – наш второй “герой”. Оно является кэлеровым многообразием Фреше, обладающим единственной естественной комплексной структурой и однопараметрическим семейством совместимых симплектических форм. Указанные формы задаются реализациями канонической формы Кириллова на различных коприсоединенных орбитах группы Вирасоро (являющейся центральным расширением группы $\text{Diff}_+(S^1)$), изоморфных $\mathcal{S}$. Пространство $\mathcal{S}$ можно также рас-

смаатривать как “регулярную” часть универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Последнее пространство, введенное и изученное Л. Альфорсом и Л. Берсом, состоит из квазисимметричных гомеоморфизмов окружности (т.е. сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов S^1 , продолжающихся до квазиконформных гомеоморфизмов круга), рассматриваемых с точностью до преобразований Мебиуса. Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ является комплексным банаховым многообразием, наделенным естественной кэлеровой псевдометрикой. Указанная псевдометрика редуцируется до кэлеровой метрики на $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Как можно догадаться по названию, универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ содержит все классические пространства Тейхмюллера (компактных римановых поверхностей конечного рода) в качестве комплексных подмногообразий. Более того, кэлерова псевдометрика на $\mathcal{T}$ редуцируется до кэлеровой метрики Вейля–Петерсона на каждом из указанных классических пространств Тейхмюллера.

Группа квазисимметричных гомеоморфизмов окружности действует естественным образом на соболевском пространстве V полудифференцируемых функций на окружности, сохраняя его симплектическую форму. Это действие определяет вложение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в бесконечномерный грассманиан $\mathrm{Gr}_b(V)$ пространства V . Построенное отображение порождает также вложение “регулярной” части $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ в “регулярную” часть грассманиана $\mathrm{Gr}_b(V)$, совпадающую с грассманианом Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V) \subset \mathrm{Gr}_b(V)$. Грассманиан Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ – наш третий “герой” – является кэлеровым гильбертовым многообразием. Его можно рассматривать в качестве универсального грассманова многообразия, поскольку все конечномерные грассманианы содержатся в $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ в виде комплексных подмногообразий. Более того, пространство петель ΩG также может быть вложено в $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$, точнее, в зигелев диск Гильберта–Шмидта $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, отождествляемый с “нижней полусферой” в $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Таковы три главных героя нашей книги, которую можно рассматривать как введение в кэлерову геометрию этих замечательных пространств и отправную точку для их более детального изучения. Основные свойства указанных пространств суммированы в таблице, размещенной ниже.

	Пространства петель	Грассмановы многообразия	Пространства комплексных структур
Универсальные пространства	$HG = H^{1/2}(S^1, G)/G$	$\mathrm{Gr}_b(H)$	$\mathcal{T} = QS(S^1)/\mathrm{Möb}(S^1)$
Регулярные части	$\Omega G = LG/G$	$\mathrm{Gr}_{HS}(H)$	$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Möb}(S^1)$
Конечномерные аналоги	$F(G) = G/K$	$\mathrm{Gr}(\mathbb{C}^d)$	$T(G)$
Расслоения над	$\Omega_T G = LG/T$	$\mathrm{Det}(H)$	$\mathrm{Diff}_+(S^1)/S^1$

Коротко о содержании книги.

Книга I: кэлерова геометрия пространств петель. Для того чтобы облегчить чтение книги, мы собрали в **части I** те необходимые сведения, которые могут рассматриваться как внешние по отношению к основному содержанию книги.

Мы начинаем с *глав 1 и 2*, посвященных многообразиям Фреше и группам Ли–Фреше. Основной ссылкой для этих глав может служить фундаментальная работа Гамильтона [32], которая является нашим главным “путеводителем” по теории многообразий Фреше.

Глава 3 содержит необходимые сведения о многообразиях флагов и неприводимых представлениях полупростых групп Ли. Здесь собран стандартный набор фактов, которые можно найти в общих руководствах по группам и алгебрам Ли и теории их представлений.

Глава 4 посвящена центральным расширениям групп и алгебр Ли, играющим важную роль в теории представлений бесконечномерных групп и алгебр Ли. Хорошим введением в этот предмет может служить соответствующая глава из книги Прессли–Сигала [65]. Это относится и к следующей *главе 5*, в которой изучаются грассманианы гильбертова пространства.

В *главе 6* речь идет о квазиконформных отображениях. Этому классическому направлению посвящены многие книги, в частности, прекрасная книга Альфорса [1].

Часть II посвящена пространствам петель ΩG компактных групп Ли G .

В *главе 7* описывается кэлерова геометрия пространства петель ΩG и каноническое вложение флаговых многообразий группы G в ΩG .

В *главе 8*, где изучаются центральные расширения групп и алгебр петель, мы следуем в основном книге Прессли–Сигала [65]. Последнее справедливо и по отношению к следующей *главе 9*, в которой строится грассманова реализация пространств петель.

Часть III посвящена различным пространствам комплексных структур на пространствах петель ΩG .

Мы начинаем *главу 10* с описания коприсоединенного действия группы Вирасоро и его орбит, принадлежащего А. А. Кириллову. Среди указанных орбит только два типа допускают кэлерову структуру, а именно, “регулярная” часть $\mathcal{S} = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ и однородное пространство $\mathcal{R} = \text{Diff}_+(S^1)/S^1$.

В *главе 11* вводится универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ и строится псевдокэлерова структура на нем с помощью вложения $\mathcal{T}$ в комплексное банахово пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в круге. Классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где G – фуксова группа, отождествляются с подпространствами $\mathcal{T}$, состоящими из G -инвариантных квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 . Кэлерова псевдометрика на $\mathcal{T}$ допускает редукцию до естественной кэлеровой метрики на “регулярной” части $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ и метрики Вейля–Петерсона на $T(G)$. Грассманова реализация пространства $\mathcal{T}$ была построена С. Нагом и Д. Сулливаном в работе [58]. Указанная реализация согласуется с естественной грассмановой реализацией “регулярной” части $\mathcal{S}$.

Книга II: Геометрическое квантование пространств петель. В **части IV** дается краткое введение в теорию геометрического квантования конечномерных кэлеровых многообразий. Более подробное изложение этой теории можно найти в различных книгах, посвященных указанному предмету, например, [29] и [71].

В главе 12 приводится определение квантования по Дираку классических систем. Предквантование Костанта–Сурьо симплектических многообразий с целочисленными симплектическими формами строится в главе 13.

Глава 14 посвящена квантованию Блатнера–Костанта–Стернберга (кратко: BKS-квантованию). Более подробное изложение этого предмета можно найти в [29], [71]. Вводятся фоковские пространства полуформ на кэлеровом фазовом многообразии и определяется BKS-спаривание между ними. Пользуясь указанным спариванием, можно построить квантование исходного фазового многообразия в фоковском пространстве полуформ.

Геометрическое квантование пространств петель рассматривается в части V. Она открывается главой 15, посвященной геометрическому квантованию пространства петель d -мерного векторного пространства. Квантование указанного пространства использует твисторную конструкцию фоковского расслоения полуформ над пространством комплексных структур соболевского пространства V полудифференцируемых функций на S^1 . Имеется проективное действие симплектической группы Гильберта–Шмидта пространства V на этом расслоении, инфинитезимальная версия которого определяет квантование исходного пространства петель. В конце главы обсуждается геометрическое квантование универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Стандартный дираковский подход к квантованию, изложенный выше, неприменим ко всему пространству $\mathcal{T}$. Более перспективным в данном случае выглядит подход, основанный на “квантовом исчислении” А. Конна и Д. Сулливана. (Мы признательны А. Конну за то, что он обратил наше внимание на указанный подход, изложенный в [16].)

В главе 16 строится геометрическое квантование пространства петель ΩG компактной группы Ли G . Оно основано на теореме Бореля–Вейля для групп петель, приведенной в книге Прессли–Сигала [65]. Мы следуем той же схеме, что и в главе 15, пользуясь проективным действием группы диффеоморфизмов на фоковском расслоении, построенным Гудманом–Уолахом в [26], [27].

Заклучая предисловие, хочу выразить благодарность всем своим коллегам, способствовавшим появлению этой книги. Ее первая часть является расширенной версией книги, опубликованной Московским центром непрерывного математического образования в 2001 г. Вторая часть основана на совместной статье

с Й. Давидовым [17], опубликованной в Трудах Математического института им. В. А. Стеклова в 1999 г. Указанная статья базировалась на прежних исследованиях автора совместно с А. Д. Поповым.

В основу данной книги легли лекционные курсы, прочитанные мною в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова в 1995–96 гг., Институте математики Китайской академии наук в Пекине в 1998–99 гг. по приглашению профессоров Лю Цзыкена и Чжоу Щаньюя и в Нагойском университете в 2003 г. по приглашению профессора Риочи Кобаяши. Я глубоко благодарен этим математикам и учреждениям за их приглашения и гостеприимство.

Москва

Декабрь, 2009

Часть I

Предварительные
сведения

Глава 1. Многообразия Фреше

Эта глава посвящена многообразиям Фреше, локальной моделью которых являются пространства Фреше. Наше изложение начинается с напоминания основных фактов о пространствах Фреше в п. 1.1. В п. 1.2 вводятся многообразия Фреше и определяются различные геометрические структуры на этих многообразиях, включая векторные расслоения и связности, дифференциальные формы, симплектические и комплексные структуры.

§ 1.1. Векторные пространства Фреше

1.1.1. Основные определения. В отличие от банаховых пространств, топология которых определяется нормой, топология векторных пространств Фреше задается системой полунорм. Напомним, что

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Полунормой* на векторном пространстве F называется вещественнозначная функция $p: F \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. $p(f) \geq 0$ для любого $f \in F$;
2. $p(f + g) \leq p(f) + p(g)$ для любых $f, g \in F$;
3. $p(cf) = |c|p(f)$ для любого $f \in F$ и любого элемента c базового числового поля k (мы рассматриваем в качестве базовых полей только $k = \mathbb{R}$ и $k = \mathbb{C}$).

Как видно из этого определения, единственным отличием полунормы от нормы является то, что от полунормы p не требуется выполнения свойства: $p(f) = 0 \iff f = 0$.

Система полунорм $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ определяет на векторном пространстве F единственную *топологию*, для которой

$$f_j \rightarrow f \iff p_n(f_j - f) \rightarrow 0 \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Эта топология является хаусдорфовой, если выполнено следующее условие:

$$f = 0 \iff p_n(f) = 0 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{f_j\}$ элементов F называется *последовательностью Коши* относительно указанной топологии, если $p_n(f_j - f_k) \rightarrow 0$ при $j, k \rightarrow \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Пространство F называется *полным*, если любая последовательность Коши элементов из F имеет предел в F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Хаусдорфово топологическое векторное пространство F с топологией, задаваемой счетной системой полунорм, называется *пространством Фреше*, если оно полно.

ПРИМЕР 1. Любое *банахово пространство* есть пространство Фреше с системой полунорм, представленной единственной нормой.

ПРИМЕР 2. Векторное пространство $C^\infty[a, b]$, состоящее из C^∞ -гладких вещественнозначных функций f на интервале $[a, b]$, есть пространство Фреше с системой полунорм

$$p_n(f) = \sum_{j=0}^n \sup_{[a, b]} |f^{(j)}(x)|.$$

ПРИМЕР 3. Векторное пространство $C^\infty(X)$, состоящее из C^∞ -гладких вещественнозначных функций f на компактном многообразии X , есть пространство Фреше с системой полунорм

$$p_n(f) = \sum_{|j|=0}^n \sup_X |d^j f(x)|.$$

ПРИМЕР 4. Пусть $V \rightarrow X$ есть векторное расслоение над компактным римановым многообразием X , снабженное римановой метрикой и связностью. Тогда векторное пространство $C^\infty(X, V)$, состоящее из C^∞ -гладких сечений f расслоения $V \rightarrow X$, является пространством Фреше с системой полунорм

$$p_n(f) = \sum_{|j|=0}^n \sup_X |D^j f(x)|,$$

где $D^j f$ есть j -я ковариантная производная сечения f , а “длина” $|h|$ сечения h вычисляется с помощью метрик на X и V .

Замкнутое подпространство пространства Фреше является снова пространством Фреше и то же самое верно для факторпространства пространства Фреше по замкнутому подпространству.

ПРИМЕР 5. Векторное пространство $C_{2\pi}^\infty$, состоящее из C^∞ -гладких вещественнозначных 2π -периодических функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$, можно отождествить с замкнутым подпространством пространства Фреше $C^\infty[0, 2\pi]$, состоящим из функций $f \in C^\infty[0, 2\pi]$ таких, что все их производные $f^{(j)}$ совпадают в конечных точках: $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi)$. Отсюда следует, что $C_{2\pi}^\infty$ есть также пространство Фреше.

Многие хорошо известные свойства банаховых пространств, такие, как теорема Хана–Банаха и теорема о замкнутом графике, выполняются и для пространств Фреше.

Однако имеется ряд свойств банаховых пространств, которые не переносятся на случай пространств Фреше. Например, теорема о существовании и единственности решения для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах не распространяется на общие пространства Фреше. Другой пример: пространство, двойственное к пространству Фреше, которое не является банаховым пространством, не может быть пространством Фреше. В частности, пространство, двойственное к пространству Фреше $C^\infty(X)$, состоящему из C^∞ -гладких вещественнозначных функций на компактном многообразии X , которое совпадает с пространством $\mathcal{D}'(X)$ обобщенных функций на X , не является пространством Фреше. Заметим также, что пространство $L(F, G)$ линейных операторов, действующих из пространства Фреше F в другое пространство Фреше G , вообще говоря, не является пространством Фреше.

1.1.2. Производная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть F и G есть пространства Фреше и $A: F \rightarrow G$ – непрерывное отображение. *Производной* отображения A в точке $f \in F$ в направлении $h \in F$ называется предел

$$D_f A(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(f + th) - A(f)}{t} \in G.$$

Отображение A дифференцируемо в точке f в направлении h , если этот предел существует. Отображение A непрерывно дифференцируемо (или принадлежит классу $C^1(U)$) на открытом подмножестве $U \subset F$, если указанный предел существует для любого $f \in U$ и всех $h \in F$ и отображение

$$DA: U \times F \longrightarrow G$$

непрерывно.

ПРИМЕР 6. Пусть $f: [a, b] \rightarrow F$ есть путь в пространстве Фреше F , т.е. непрерывное отображение из отрезка $[a, b]$ в F . Если обозначить через $\mathbf{1}$ единичный вектор на прямой $\mathbb{R}$, то производная $f'(t)$ (в том случае, когда она существует) совпадает с $D_{f(t)}(\mathbf{1})$.

ПРИМЕР 7. Непрерывное линейное отображение $L: F \rightarrow G$ пространств Фреше принадлежит классу C^1 и $D_f L(h) = Lh$, поскольку

$$D_f L(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(f + th) - Lf}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tLh}{t} = Lh.$$

ПРИМЕР 8. Пусть U есть относительно открытое подмножество полосы $[a, b] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2$ и $F = F(x, y)$ – гладкая функция на U . Обозначим через $\mathcal{U}$ открытое подмножество в $C^\infty[a, b]$, состоящее из функций $y = f(x)$, графики которых лежат внутри U . Рассмотрим отображение $A: \mathcal{U} \rightarrow C^\infty[a, b]$, задаваемое формулой

$$A(f)(x) = F(x, f(x)).$$

Тогда A принадлежит классу C^1 и

$$D_f A(h)(x) = d_y F(x, f(x))h(x).$$

ПРИМЕР 9. Более общим образом, пусть X – компактное многообразие и $V \rightarrow X$, $W \rightarrow X$ – два векторных расслоения над X . Для заданного открытого подмножества U в пространстве V обозначим через $\mathcal{U}$ открытое подмножество в пространстве $C^\infty(X, V)$, состоящее из сечений f расслоения $V \rightarrow X$, образы которых лежат в U : $f(X) \subset U$. Пусть $F: U \rightarrow W$ есть произвольное гладкое *послойное отображение*, переводящее каждый слой V_p , $p \in X$, расслоения $V \rightarrow X$ в слой W_p расслоения $W \rightarrow X$ над той же точкой p .

Введем *послойный оператор* $A: \mathcal{U} \rightarrow C^\infty(X, W)$, действующий по формуле

$$A(f) = F \circ f.$$

Обозначим через x локальную координату на X в окрестности точки $p \in X$, через y и z — координаты в слоях V_p и W_p соответственно. Тогда отображение F в окрестности p задается некоторой функцией $z = F(x, y)$. Сечение f имеет локальное представление $y = f(x)$, а послыйный оператор A задается локально формулой $A(f)(x) = F(x, f(x))$.

Производная A в выбранных локальных координатах имеет вид

$$D_f A(h)(x) = d_y F(x, f(x))h(x),$$

где $d_y F$ — матрица частных производных функции F по y , применяемая к вектор-функции h , представляющей в локальных координатах сечение $h \in C^\infty(X, V)$.

Если A есть C^1 -отображение $F \rightarrow G$, то

$$D_f A(h_1 + h_2) = D_f A(h_1) + D_f A(h_2).$$

Иными словами, непрерывно дифференцируемое отображение A обязательно линейно по h . Это важное свойство показывает, что производная “ведет себя” как дифференциал по отношению к переменной h .

Более того, отображение $A: U \subset F \rightarrow G$ непрерывно дифференцируемо на открытом выпуклом подмножестве $U \subset F$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение

$$L: U \times U \times F \longrightarrow G, \quad L = L(f_1, f_2)h,$$

которое линейно по h и для любых $f_1, f_2 \in U$ удовлетворяет соотношению

$$A(f_1) - A(f_2) = L(f_1, f_2)(f_1 - f_2).$$

В этом случае $D_f A(h) = L(f, f)h$.

Если два отображения $A: F \rightarrow G$ и $B: G \rightarrow H$ непрерывно дифференцируемы, то их композиция $B \circ A: F \rightarrow H$ также непрерывно дифференцируема и выполняется правило дифференцирования сложной функции

$$D_f [B \circ A](h) = D_{A(f)} B(D_f A(h)).$$

Если, в частности, $f(t)$ есть C^1 -путь в F и $A: F \rightarrow G$ — C^1 -отображение, то $A(f(t))$ есть C^1 -путь в G и

$$A(f(t))' = D_{f(t)} A(f'(t)).$$

Предположим теперь, что базовое числовое поле есть $k = \mathbb{C}$ и $A: U \subset F \rightarrow G$ – отображение между комплексными пространствами Фреше. Будем называть это отображение *голоморфным*, если оно принадлежит классу $C^1(U)$ и его производная $DA: F \times F \rightarrow G$ комплексно линейна по $h \in F$.

Итерируя определение производной, можно ввести производные высших порядков для отображений пространств Фреше. В частности, *вторая производная* отображения $A: F \rightarrow G$ определяется формулой

$$D_f^2 A(h, k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{f+tk} A(h) - D_f A(h)}{t}.$$

Отображение $A: U \rightarrow G$ принадлежит классу $C^2(U)$ на открытом подмножестве $U \subset F$, если DA принадлежит $C^1(U)$, что эквивалентно существованию и непрерывности второй производной как отображения $D^2 A: U \times F \times F \rightarrow G$.

Подобно первой производной, вторая производная $D_f^2 A(h, k)$ линейна отдельно по h и k , если A принадлежит классу C^2 . Более того, в этом случае она может быть определена как предел второй конечной разности

$$D_f^2 A(h, k) = \lim_{t, s \rightarrow 0} \frac{A(f + th + sk) - A(f + th) - A(f + sk) + A(f)}{ts}$$

и симметрична по h, k .

По индукции определим *производную* $D_f^n A(h_1, \dots, h_n)$ *n-го порядка* как частную производную производной $(n-1)$ -го порядка $D_f^{n-1} A(h_1, \dots, h_{n-1})$ по f в направлении h_n :

$$\begin{aligned} D_f^n A(h_1, \dots, h_n) &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{f+th_n}^{n-1} A(h_1, \dots, h_{n-1}) - D_f^{n-1} A(h_1, \dots, h_{n-1})}{t}. \end{aligned}$$

Снова отображение $A: U \rightarrow G$ принадлежит классу $C^n(U)$ на открытом подмножестве $U \subset F$, если $D_f^n A(h_1, \dots, h_n)$ существует и непрерывно как отображение $D^n A: U \times F \cdots \times F \rightarrow G$. В этом случае производная $D_f^n A(h_1, \dots, h_n)$ симметрична и линейна по $h_1, \dots, h_n$. Будем говорить, что отображение $A: U \rightarrow G$ принадлежит классу $C^\infty(U)$ на открытом подмножестве $U \subset F$, если оно принадлежит всем классам $C^n(U)$ при $n \in \mathbb{N}$.

§ 1.2. Многообразия Фреше

1.2.1. Основные определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Многообразием Фреше* называется хаусдорфово топологическое пространство $\mathcal{X}$, наделенное *атласом*, т.е. покрытием $\mathcal{X}$ открытыми подмножествами (*координатными окрестностями*) $\{U_\alpha\}$, и набором *карт*, т.е. гомеоморфизмами (*координатными отображениями*)

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \xrightarrow{\approx} u_\alpha \subset F_\alpha$$

на открытые подмножества u_α в *модельных* пространствах Фреше F_α . *Функции перехода*

$$\varphi_{\beta\alpha}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{\varphi_\beta} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

задаются гладкими (т.е. класса C^∞) отображениями пространств Фреше.

Если все пространства Фреше F_α в этом определении являются банаховыми пространствами E_α , мы называем такое $\mathcal{X}$ *банаховым многообразием*. В случае, когда все F_α совпадают с сепарабельным гильбертовым пространством $H \cong l_2$, такое X называется *гильбертовым многообразием*.

Имеется еще одна спецификация приведенного определения в случае, когда базовое числовое поле есть $k = \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Комплексное многообразие Фреше* есть многообразие Фреше $\mathcal{X}$, для которого все модельные пространства Фреше F_α комплексны, а функции перехода $\varphi_{\beta\alpha}$ голоморфны.

Приведем еще определение (замкнутого) подмногообразия Фреше, которое понадобится нам в дальнейшем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Замкнутое подмножество $\mathcal{Y}$ многообразия Фреше $\mathcal{X}$ называется *подмногообразием Фреше* в $\mathcal{X}$, если для любой точки $y \in \mathcal{Y}$ найдется координатная окрестность U многообразия $\mathcal{X}$ с координатной картой, которая отображает U на окрестность u в произведении пространств Фреше $F \times G$, отождествляя при этом $U \cap \mathcal{Y}$ с подмножеством $u \cap F \times \{0\}$.

ПРИМЕР 10. Пусть X есть (конечномерное) гладкое многообразие. Тогда множество всех гладких подмногообразий X , обозначаемое через $\mathcal{S}(X)$, является многообразием Фреше. Действительно, рассмотрим подмногообразие $S \in \mathcal{S}(X)$ с нормальным расслоением $NS = (TX|S)/TS$.

Рассмотрим локальный экспоненциальный диффеоморфизм

$$\exp: v \longrightarrow V,$$

отображающий окрестность v нулевого сечения расслоения NS на трубчатую окрестность V подмногообразия S в X :

$$\exp: \left\{ \begin{array}{l} \text{окрестность } v \text{ нуле-} \\ \text{вого сечения в } NS \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{трубчатая окрестность } V \\ \text{подмногообразия } S \text{ в } X \end{array} \right\}.$$

Этот диффеоморфизм задает локальное координатное отображение φ , обратное к которому

$$\varphi^{-1}: \mathfrak{v} \longrightarrow \mathfrak{V}$$

переводит окрестность $\mathfrak{v}$ нуля в пространстве Фреше $C^\infty(S, NS)$, которая состоит из сечений расслоения NS , имеющих образы в v , на окрестность $\mathfrak{V}$ подмногообразия S в $\mathcal{S}(X)$, которая состоит из подмногообразий в X , лежащих в V :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \left\{ \begin{array}{l} \text{окрестность } \mathfrak{v} \text{ нуля в пространстве} \\ \text{Фреше } C^\infty(S, NS) \end{array} \right\} &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{окрестность } \mathfrak{V} \\ \text{образа } S \text{ в } \mathcal{S}(X) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 11. Пусть X есть компактное гладкое многообразие и $\pi: E \rightarrow X$ — *гладкое расслоение*, т.е. E есть гладкое многообразие, а проекция π является гладким отображением, касательное к которому π_* сюръективно. Тогда пространство гладких сечений расслоения E , обозначаемое через $C^\infty(X, E)$, является многообразием Фреше.

Для того чтобы построить координатные карты на многообразии $C^\infty(X, E)$, определим для заданного сечения f *вертикальное векторное расслоение* $T_f^v E \rightarrow X$, *ассоциированное с f* , слой которого в точке $p \in X$ совпадает с ядром отображения π_* , суженного на $T_{f(p)} E$. Выберем окрестность u нулевого сечения расслоения $T_f^v E \rightarrow X$ вместе с послойным диффеоморфизмом u на трубчатую окрестность U образа $f(X)$ в E . Этот диффеоморфизм задает

локальное координатное отображение φ , обратное к которому

$$\varphi^{-1}: \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{U}$$

переводит окрестность $\mathfrak{u}$ нулевого сечения в пространстве Фреше $C^\infty(X, T_f^v E)$, которая состоит из сечений расслоения $T_f^v E \rightarrow X$, имеющих образы в $\mathfrak{u}$, на окрестность $\mathfrak{U}$ сечения f в $C^\infty(X, E)$, которая состоит из сечений расслоения $E \rightarrow X$, имеющих образы в U :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}: \left\{ \begin{array}{l} \text{окрестность } \mathfrak{u} \text{ нулевого сечения в про-} \\ \text{странстве Фреше } C^\infty(X, T_f^v E) \end{array} \right\} &\longrightarrow \\ &\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{окрестность } \mathfrak{U} \text{ сечения } f \\ \text{в } C^\infty(X, E) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Функции перехода задаются послойными операторами, рассмотренными в примере 9 (см. п. 1.1).

ПРИМЕР 12. Пространство $C^\infty(X, Y)$ гладких отображений из гладкого компактного многообразия X в гладкое многообразие Y является частным случаем рассмотренной конструкции в случае, когда расслоение $E = X \times Y \rightarrow X$ тривиально. Группа $\text{Diff}(X)$ диффеоморфизмов X на себя совпадает с открытым подмножеством в $C^\infty(X, Y)$ и потому наследует структуру многообразия Фреше.

ПРИМЕР 13. Последний пример особенно интересен для нас в ситуации, когда X есть окружность, которую мы отождествляем с $S^1 = \{|z| = 1: z \in \mathbb{C}\}$. В этом случае многообразие $C^\infty(S^1, Y)$ называется *пространством (свободных) петель* в многообразии Y .

Рассмотрим наиболее простой пример подобного пространства, когда Y также совпадает с окружностью S^1 . Многообразие $C^\infty(S^1, S^1)$ состоит из счетного числа связных компонент, обозначаемых через $C_k^\infty(S^1, S^1)$ с $k \in \mathbb{Z}$, которые нумеруются индексом (числом вращения) отображения $S^1 \rightarrow S^1$. Поднимаясь на универсальные накрытия, мы можем сопоставить отображению $f: S^1 \rightarrow S^1$ отображение $\tilde{f}: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, заданное с точностью до произвольной аддитивной постоянной вида $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В частности, поднятиями отображений $f \in C_0^\infty(S^1, S^1)$ индекса 0 являются отображения $\tilde{f}$, которые задаются гладкими 2π -периодическими функциями, т.е. принадлежат пространству

Фреше $C_{2\pi}^\infty$ (см. пример 5 в п. 1.1). Тем самым получаем глобальную координатную карту

$$\varphi: C_0^\infty(S^1, S^1) \xrightarrow{\approx} C_{2\pi}^\infty/2\pi\mathbb{Z}, \quad f \mapsto [\tilde{f}],$$

для всей компоненты $C_0^\infty(S^1, S^1)$. Подобным же образом, отображения $f \in C_k^\infty(S^1, S^1)$ индекса k допускают поднятия $\tilde{f}$, удовлетворяющие соотношению: $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi k$. Сдвигая такую функцию на kx , т.е. заменяя $\tilde{f}(x)$ на $f_1(x) := \tilde{f}(x) - kx$, получим 2π -периодическую функцию f_1 . Следовательно, мы опять получаем глобальную координатную карту

$$\varphi: C_k^\infty(S^1, S^1) \xrightarrow{\approx} C_{2\pi}^\infty/2\pi\mathbb{Z}$$

на компоненте $C_k^\infty(S^1, S^1)$. Для всего многообразия $C^\infty(S^1, S^1)$ получаем диффеоморфизм

$$C^\infty(S^1, S^1) \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z} \times C_{2\pi}^\infty/2\pi\mathbb{Z}.$$

ПРИМЕР 14. Рассмотрим открытое подмножество $\text{Diff}(S^1)$ в $C^\infty(S^1, S^1)$, состоящее из всех диффеоморфизмов окружности S^1 . Она имеет две связные компоненты: связную компоненту единицы $\text{Diff}_+(S^1)$, состоящую из диффеоморфизмов S^1 , сохраняющих ориентацию (эта компонента содержится в подпространстве $C_1^\infty(S^1, S^1)$), и компоненту $\text{Diff}_-(S^1)$, состоящую из диффеоморфизмов S^1 , обращающих ориентацию S^1 (эта компонента содержится в подпространстве $C_{-1}^\infty(S^1, S^1)$).

Отображения $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ поднимаются до функций $\tilde{f}$, удовлетворяющих соотношению

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi.$$

Эти функции имеют 2π -периодические производные $\tilde{f}'(x)$, которые всюду положительны, поскольку диффеоморфизмы f сохраняют ориентацию. Кроме того:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}'(x) dx = \frac{\tilde{f}(2\pi) - \tilde{f}(0)}{2\pi} = 1,$$

т.е. среднее функции $\tilde{f}'(x)$ по периоду равно 1. Обозначим через C подмножество в $C_{2\pi}^\infty$, состоящее из гладких 2π -периодических

строгих положительных функций на вещественной прямой со средним, равным 1. Это открытое выпуклое подмножество аффинного подпространства коразмерности 1 в $C_{2\pi}^\infty$ и, следовательно, подмногообразие Фреше. Рассуждение, приведенное выше, показывает, что многообразие $\text{Diff}_+(S^1)$ диффеоморфно $S^1 \times C$. Действительно, функция $\tilde{f}$ определяется функцией f' с точностью до аддитивной постоянной $f(0) \in \mathbb{R}$, а функция $\tilde{f}$, в свою очередь, определяется функцией $f: S^1 \rightarrow S^1$ с точностью до аддитивной постоянной $2\pi n \in 2\pi\mathbb{Z}$. Поэтому $\tilde{f}'$ определяет f с точностью до элемента из $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Так как множество C стягиваемо, отсюда следует, что группа $\text{Diff}_+(S^1)$ гомотопически эквивалентна S^1 .

1.2.2. Векторные расслоения Фреше. Пусть заданы многообразия Фреше $\mathcal{X}$ и $\mathcal{V}$ и отображение $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$, являющееся гладкой сюръекцией, каждый слой $\pi^{-1}(x)$, $x \in \mathcal{X}$, которой имеет структуру векторного пространства Фреше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Многообразие Фреше $\mathcal{V}$ называется *векторным расслоением Фреше* над $\mathcal{X}$, если выполняются следующие условия. Существует атлас $\{U_\alpha\}$ координатных окрестностей на $\mathcal{X}$ такой, что для любого α прообраз $V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$ координатной окрестности $\{U_\alpha\}$ принадлежит координатной окрестности на $\mathcal{V}$. Соответствующие координатные карты имеют вид

$$\varphi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow u_\alpha = \varphi(U_\alpha) \subset F_\alpha, \quad (1.1)$$

$$\psi_\alpha: V_\alpha \longrightarrow v_\alpha = \psi_\alpha(V_\alpha) = u_\alpha \times G_\alpha \quad (1.2)$$

и совместимы в том смысле, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} V_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\psi_\alpha} & v_\alpha = u_\alpha \times G_\alpha \subset F_\alpha \times G_\alpha \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{проекция} \\ U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & u_\alpha \subset F_\alpha \end{array}$$

Структура векторного пространства на слоях π , индуцированная из правой вертикальной стрелки, совпадает с исходной и функции перехода

$$\psi_{\beta\alpha} := \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times G_\alpha \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times G_\beta$$

линейны по второму аргументу.

Применяя это определение с очевидными изменениями в банаховой и гильбертовой ситуации, получим определение банаховых и гильбертовых векторных расслоений. Если все пространства Фреше в данном определении, также как и слои отображения π , комплексны, а функции перехода голоморфны, получаем определение голоморфного векторного расслоения Фреше.

ПРИМЕР 15. *Касательное расслоение $T\mathcal{X}$ многообразия Фреше $\mathcal{X}$ является векторным расслоением Фреше. Слой $T\mathcal{X}$ в точке $x \in \mathcal{X}$ образован векторами $x'(t)|_{t=0}$, где $x(t)$ – гладкий путь на многообразии $\mathcal{X}$, выходящий из x . Координатные функции перехода расслоения $T\mathcal{X}$ задаются производными координатных функций перехода многообразия $\mathcal{X}$.*

ПРИМЕР 16. Если, в частности, $\mathcal{X} = C^\infty(X, Y)$, то путь $f: [0, 1] \rightarrow C^\infty(X, Y)$ задается отображением $f: [0, 1] \times X \rightarrow Y$, т.е. однопараметрическим семейством отображений $f_t: X \rightarrow Y$, $t \in [0, 1]$. Для $x \in X$ образ $f_t(x)$ при $0 \leq t \leq 1$ задает путь в Y , касательный вектор которого в точке $f_t(x)$ совпадает с производной $f'_t(x) \in T_{f_t(x)}Y = f_t^*(TY)_x$. Следовательно, f'_t есть сечение обратного образа $f_t^*TY \rightarrow X$ касательного расслоения TY относительно отображения f_t и

$$T_f C^\infty(X, Y) = C^\infty(X, f^*TY).$$

ПРИМЕР 17. Пусть X есть (конечномерное) гладкое многообразие и $\mathcal{S}(X)$ – многообразие Фреше его гладких компактных подмногообразий (см. пример 10). Тогда его касательное расслоение $T\mathcal{S}(X)$ имеет слоем в точке $S \in \mathcal{S}(X)$ пространство Фреше $C^\infty(S, NS)$ гладких сечений нормального расслоения NS .

В дальнейшем нам понадобится еще одно векторное расслоение, связанное с многообразием Фреше $\mathcal{S}(X)$. Именно, обозначим через $C^\infty(S)$ пространство Фреше гладких функций на S . Тогда объединение пространств $C^\infty(S)$ по всем $S \in \mathcal{S}(X)$ является векторным расслоением Фреше $C^\infty\mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$. Действительно, координатная карта φ на $\mathcal{S}(X)$ в окрестности подмногообразия $S \in \mathcal{S}(X)$ отображает эту окрестность в пространство Фреше $C^\infty(S, NS)$ гладких сечений нормального расслоения NS . Пользуясь этим отображением, мы можем отождествить диффеоморфно подмногообразия S' , близкие к S , с подмногообразием S , совпадающим с нулевым сечением расслоения NS . Соответственно, гладкие функции на S' можно отождествить

с гладкими функциями на S , что задает координатную карту ψ на $C^\infty \mathcal{S}(X)$ в окрестности подмногообразия S со значениями в $C^\infty(S, NS) \times C^\infty(S)$, совместимую с координатной картой φ на $\mathcal{S}(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Отображение $\mathcal{A}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ многообразий Фреше называется *гладким*, если для любой точки $x \in \mathcal{X}$ найдутся координатные карты φ в окрестности этой точки и ψ в окрестности ее образа $y = \mathcal{A}(x)$ такие, что композиция $\psi \circ \mathcal{A} \circ \varphi^{-1}$, называемая иначе *локальным представителем* отображения $\mathcal{A}$, является гладким отображением пространств Фреше.

Будем говорить, что гладкое отображение $\mathcal{A}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ является *иммерсией* (соотв. *субмерсией*), если для любой точки $x \in \mathcal{X}$ найдутся координатные карты в окрестности x и ее образа $y = \mathcal{A}(x)$ такие, что локальный представитель $\mathcal{A}$ является иммерсией (соотв. субмерсией) пространств Фреше, т.е. включением в виде слагаемого (соотв. проекцией на слагаемое) в прямой сумме пространств Фреше.

ПРИМЕР 18. Гладкое отображение $\mathcal{A}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ многообразий Фреше порождает *касательное отображение* $T(\mathcal{A}): T\mathcal{X} \rightarrow T\mathcal{Y}$ их касательных расслоений. Это отображение переводит каждый слой $T_x\mathcal{X}$ над точкой $x \in \mathcal{X}$ в слой $T_y\mathcal{Y}$ над ее образом $y = \mathcal{A}(x) \in \mathcal{Y}$. В координатной карте оно задается производной соответствующего локального представителя. Линейное отображение $D\mathcal{A}: T_x\mathcal{X} \rightarrow T_y\mathcal{Y}$, индуцированное $T(\mathcal{A})$ на касательном пространстве $T_x\mathcal{X}$, задается *производной* отображения $\mathcal{A}$ в точке x , что согласуется с определением, данным в п. 1.1.2, в случае, когда $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ являются пространствами Фреше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Гладкое отображение $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ многообразий Фреше называется *расслоением Фреше*, если оно является субмерсией и для любой точки $x \in \mathcal{X}$ найдется открытая окрестность U этой точки такая, что существуют многообразие Фреше $\mathcal{F}$ и диффеоморфизм $\psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{F}$ такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\psi} & U \times \mathcal{F} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{проекция} \\ U & \xrightarrow{\text{id}} & U \end{array}$$

Как и в конечномерной ситуации, гладкое отображение $\mathcal{A}: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ расслоения $\pi_1: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{X}$ в расслоение $\pi_2: \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{X}$ называется *отображением расслоений*, если оно переводит слои в слои, т.е. для любой точки $x \in \mathcal{X}$ посылает слой $\pi_1^{-1}(x)$ над этой точкой в слой $\pi_2^{-1}(x)$ над ее образом.

ПРИМЕР 19. Пусть $\pi_1: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{X}$ и $\pi_2: \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{X}$ — два расслоения Фреше. Из них можно образовать новое расслоение над $\mathcal{X}$, называемое *расслоенным произведением* этих расслоений, которое является замкнутым подмногообразием в произведении $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$. Именно, положим

$$\mathcal{E}_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E}_2 = \{(e_1, e_2) \in \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 : \pi_1(e_1) = \pi_2(e_2)\}.$$

Это замкнутое подмножество в произведении $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, поскольку $\mathcal{E}_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E}_2$ совпадает с прообразом диагонали Δ в произведении $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ относительно отображения прямого произведения $\pi_1 \times \pi_2: \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Для доказательства того, что оно является расслоением над $\mathcal{X}$ и подмногообразием в $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$, рассмотрим произвольную точку $x \in \mathcal{X}$ и выберем открытую окрестность U такую, что отображения $\pi_1: \pi_1^{-1}(U) \rightarrow U$ и $\pi_2: \pi_2^{-1}(U) \rightarrow U$ совместимы с проекциями $U \times \mathcal{F}_1 \rightarrow U$ и $U \times \mathcal{F}_2 \rightarrow U$ соответственно в смысле определения 9. Это порождает диффеоморфизм $\pi_1^{-1}(U) \times \pi_2^{-1}(U) \subset \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ в $U \times \mathcal{F}_1 \times U \times \mathcal{F}_2$. Сужая указанный диффеоморфизм на диагональ Δ в $U \times U$, получим для $\mathcal{E}_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E}_2$ локальный диффеоморфизм ψ , существование которого требуется в определении 9. Аналогичное рассуждение показывает, что $\mathcal{E}_1 \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E}_2$ является замкнутым подмногообразием в произведении $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.

1.2.3. Связности. Пусть $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$ есть векторное расслоение Фреше над многообразием Фреше $\mathcal{X}$. Для заданной точки $v \in \mathcal{V}$ обозначим через $V_v = \text{Ker } D\pi$ подпространство в $T_v\mathcal{V}$, образованное векторами, зануляемыми производной $D\pi: T_v\mathcal{V} \rightarrow T_{\pi(v)}\mathcal{X}$. По аналогии с конечномерным определением, мы хотим определить связность $\mathcal{H}$ на $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$ как распределение, сопоставляющее каждой точке $v \in \mathcal{V}$ подпространство H_v в $T_v\mathcal{V}$, дополнительное к V_v .

Касательное расслоение $T\mathcal{V}$ можно рассматривать как векторное расслоение Фреше $\pi_{\mathcal{V}}: T\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ над $\mathcal{V}$, а также как векторное

расслоение Фреше $T\pi: T\mathcal{V} \rightarrow T\mathcal{X}$ над $T\mathcal{X}$. Таким образом, имеется естественная проекция

$$(\pi_{\mathcal{V}}, T\pi): T\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \oplus T\mathcal{X}, \quad \delta v \longmapsto (\pi_{\mathcal{V}}(\delta v), T\pi(\delta v)),$$

где $\delta v \in T\mathcal{V}$. При этом отображение композиции $\pi \circ \pi_{\mathcal{V}}: T\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$ задает на $T\mathcal{V}$ структуру расслоения над $\mathcal{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Связностью* на векторном расслоении Фреше $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$ называется гладкое отображение

$$\mathcal{H}: \mathcal{V} \oplus T\mathcal{X} \longrightarrow T\mathcal{V}$$

расслоений над $\mathcal{X}$, которое билинейно и удовлетворяет условию

$$(\pi_{\mathcal{V}}, T\pi) \circ \mathcal{H} = \text{id} \quad \text{на } \mathcal{V} \oplus T\mathcal{X}.$$

Билинейность указанного отображения означает, что для любой точки $x \in \mathcal{X}$ сужение $\mathcal{H}$ на слой над точкой x является отображением $\mathcal{H}_x: \mathcal{V}_x \oplus T_x\mathcal{X} \rightarrow T_x\mathcal{V}$, которое линейно по обоим аргументам.

Для того чтобы осознать смысл данного определения в локальных терминах, рассмотрим координатную окрестность U в многообразии $\mathcal{X}$, над которой имеют место следующие отождествления:

$$TU \longleftrightarrow U \times F, \quad \pi^{-1}(U) \longleftrightarrow U \times G, \quad T(U \times G) \longleftrightarrow (U \times G) \times (F \times G).$$

В этих терминах наша связность $\mathcal{H}$ допускает следующее представление:

$$\mathcal{H}(x, v, \xi) = (x, v, H_1(x, v, \xi), H_2(x, v, \xi)),$$

где $x \in U$, $v \in G$, $\xi \in F$. Так как $(\pi_{\mathcal{V}}, T\pi) \circ \mathcal{H} = \text{id}$ на $\mathcal{V} \oplus T\mathcal{X}$, то $H_1(x, v, \xi) = \xi$, и из условия билинейности вытекает, что отображение $H_2(x, v, \xi)$ билинейно по (v, ξ) . Будем обозначать указанное отображение, называемое *символом Кристоффеля* связности $\mathcal{H}$, через

$$\Gamma: U \times G \times F \longrightarrow G, \quad \Gamma_x(v, \xi) := H_2(x, v, \xi).$$

Обозначим, как и выше, через V подрасслоение в $T\mathcal{V}$, совпадающее с ядром $\text{Ker } T\pi$ касательного отображения $T\pi: T\mathcal{V} \rightarrow T\mathcal{X}$. Оно называется *вертикальным подрасслоением* расслоения $T\mathcal{V}$.

Дополнительное подрасслоение H в $T\mathcal{V}$, совпадающее с образом $\text{Im } \mathcal{H}$ отображения $\mathcal{H}: \mathcal{V} \oplus T\mathcal{X} \rightarrow T\mathcal{V}$, называется *горизонтальным подрасслоением* расслоения $T\mathcal{V}$. Заметим, что вертикальное подрасслоение V однозначно определяется отображением $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$, тогда как горизонтальное подрасслоение H задается связностью $\mathcal{H}$.

Существует и другой подход к определению связности, основанный на понятии *ковариантной производной*. Ковариантная производная определяется в терминах связности $\mathcal{H}$ следующим образом. Рассмотрим путь $v(t)$ в $\mathcal{V}$, имеющий в локальных координатах вид $v(t) = (x(t), g(t))$, где $x(t) \in U$, $g(t) \in G$. Тогда его ковариантная производная $\nabla v(t)$ равна

$$\nabla v(t) = (\xi(t), \Xi(t)),$$

где

$$\xi(t) = x'(t), \quad \Xi(t) = g'(t) - \Gamma_{x(t)}(g(t), \xi(t)).$$

Путь $v(t)$ в $\mathcal{V}$, накрывающий путь $x(t)$ в $\mathcal{X}$, называется *горизонтальным*, если $\nabla v(t) = 0$.

В случае банаховых многообразий мы всегда можем найти для заданного пути $x(t)$ в $\mathcal{X}$ с начальным значением $x(0)$ однозначно определенное горизонтальное поднятие $v(t)$ в $\mathcal{V}$, накрывающее $x(t)$. В то же время для общих многообразий Фреше горизонтальное поднятие может не существовать, и даже если такое поднятие существует, оно может оказаться не единственным. Этот феномен объясняется отсутствием теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений на пространствах Фреше.

По определению, *связностью на многообразии Фреше $\mathcal{X}$* называется связность на его касательном расслоении $T\mathcal{X}$. Если $x(t)$ – путь в $\mathcal{X}$, то его производная $v(t) := x'(t)$ является путем в $T\mathcal{X}$. Ковариантная производная $\nabla v(t)$ указанного пути называется иначе *ускорением* пути $x(t)$. Путь $x(t)$ называется *геодезическим путем* в $\mathcal{X}$, если его ускорение равно нулю. Будем говорить, что связность $\mathcal{H}$ на $T\mathcal{X}$ *симметрична*, если ее локальные представители $\Gamma_x(\xi, \eta)$ симметричны по $(\xi, \eta) \in T_x\mathcal{X} \times T_x\mathcal{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Кривизной $\mathcal{R}$ связности $\mathcal{H}$ на векторном расслоении Фреше $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$ называется трilinearное отображение*

$$\mathcal{R}: \mathcal{V} \times T\mathcal{X} \times T\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{V},$$

задаваемое в терминах локальных представителей формулой

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x(v, \xi, \eta) := & D\Gamma_x(v, \xi, \eta) - D\Gamma_x(v, \eta, \xi) \\ & - \Gamma_x(\Gamma_x(v, \xi), \eta) + \Gamma_x(\Gamma_x(v, \eta), \xi),\end{aligned}$$

в которой $\Gamma_x(v, \xi)$ – локальный представитель связности $\mathcal{H}$. Это определение не зависит от выбора локальной карты.

ПРИМЕР 20. Рассмотрим многообразие Фреше $C^\infty(X, Y)$ гладких отображений из компактного многообразия X в многообразии Y . Предположим, что многообразие Y наделено связностью, задаваемой локально символом Кристоффеля $\Gamma_y(\xi, \eta)$. Тогда мы можем определить связность на $C^\infty(X, Y)$ локально с помощью символа Кристоффеля

$$\left(\Gamma_f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \right) (x) = \Gamma_{f(x)}(\tilde{\xi}(x), \tilde{\eta}(x)) \text{ для } x \in X,$$

где $f \in C^\infty(X, Y)$, $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in T_f C^\infty(X, Y) = C^\infty(X, f^*TY)$ (см. пример 16 в п. 1.2.2). Заметим, что $\tilde{\xi}(x), \tilde{\eta}(x) \in T_{f(x)}Y$.

Путь $f(t)$ в $C^\infty(X, Y)$, вычисленный в точке $x \in X$, задает путь $f_t(x)$ в пространстве Y . Путь $f(t)$ в $C^\infty(X, Y)$ является геодезическим тогда и только тогда, когда путь $f_t(x)$ является геодезическим в Y при любом $x \in X$. Кривизна $\mathcal{R}$ введенной связности на $C^\infty(X, Y)$ задается в терминах кривизны R связности на Y по формуле

$$\mathcal{R}_f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})(x) = R_{f(x)}(\tilde{\xi}(x), \tilde{\eta}(x), \tilde{\zeta}(x)),$$

т.е. определяется поточечно кривизной R .

ПРИМЕР 21. Рассмотрим многообразие Фреше $\mathcal{S}(X)$, состоящее из гладких компактных подмногообразий S риманова многообразия X (см. пример 10 в п. 1.2.1 и пример 17 в п. 1.2.2). Для произвольных $S \in \mathcal{S}(X)$ и $f \in C^\infty(S)$ можно определить векторные расслоения Tf и Nf над S , полагая

$$Tf := \text{график } Df = \{(v, D_v f) : v \in TS\} \subset TX \times \mathbb{R}$$

и $Nf = TX \times \mathbb{R} / Tf$.

Имеют место следующие естественные изоморфизмы

$$T_S \mathcal{S}(X) = C^\infty(S, NS), \quad T_{(S, f)} C^\infty \mathcal{S}(X) = C^\infty(S, Nf).$$

Векторное расслоение Nf можно включить в следующую точную последовательность отображений векторных расслоений над S

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow Nf \longrightarrow NS \longrightarrow 0,$$

которая индуцирует точную последовательность отображений векторных пространств Фреше

$$0 \longrightarrow C^\infty(S) \longrightarrow C^\infty(S, Nf) \longrightarrow C^\infty(S, NS) \longrightarrow 0.$$

Ввиду приведенных выше изоморфизмов, указанная точная последовательность совпадает с

$$0 \longrightarrow C^\infty(S) \longrightarrow T_{(S,f)}C^\infty\mathcal{S}(X) \longrightarrow T_S\mathcal{S}(X) \longrightarrow 0.$$

Третья стрелка в этой последовательности задается касательным отображением к проекции векторного расслоения $C^\infty\mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(X)$, тогда как вторая стрелка реализует $C^\infty(S)$ в виде вертикального подпространства этого расслоения в точке $f \in C^\infty(S)$.

Для того, чтобы определить дополнительное подпространство к этому вертикальному пространству, нам нужна связность на $C^\infty\mathcal{S}(X)$, порожденная римановой связностью на X . Указанная связность $\mathcal{H}$ допускает следующее описание. Мы можем отождествить нормальное расслоение NS произвольного $S \in \mathcal{S}(X)$ с подрасслоением касательного расслоения $TX|S$, состоящим из векторов, ортогональных к TS относительно римановой метрики на X . Тогда $NS \times \mathbb{R}$ есть подрасслоение, дополнительное к Tf в расслоении $TX \times \mathbb{R}$, поэтому мы можем отождествить расслоение $Nf = TX \times \mathbb{R}/Tf$ с $NS \times \mathbb{R}$. Возьмем $Hf = NS \times \{0\}$ в качестве горизонтального подрасслоения, дополнительного к вертикальному подрасслоению $\{0\} \times \mathbb{R}$. Тогда пространство $C^\infty(S, Hf)$, дополнительное к вертикальному подпространству $C^\infty(S)$, будет задавать горизонтальное подпространство для нашей связности $\mathcal{H}$. Заметим, что оно проектируется изоморфно на пространство $C^\infty(S, NS) = T_S\mathcal{S}(X)$, поскольку $Hf = NS \times \{0\} \sim NS$.

Вычислим кривизну этой связности. С помощью римановой связности ∇ на X , мы можем определить ковариантные производные ∇f функции $f \in C^\infty(S)$ и $\nabla \xi$ сечения $\xi \in C^\infty(S, NS)$ и вычислить их скалярное произведение $\nabla f \cdot \nabla \xi$ в $TX|S$. Кривизна $\mathcal{R}$ связности $\mathcal{H}$ является трилинейным отображением

$$\mathcal{R}: C^\infty\mathcal{S}(X) \times TC^\infty\mathcal{S}(X) \times TC^\infty\mathcal{S}(X) \longrightarrow C^\infty\mathcal{S}(X),$$

значение которого в точке $S \in \mathcal{S}(X)$ можно интерпретировать как линейное отображение

$$\mathcal{R}_S: C^\infty(S) \times C^\infty(S, NS) \times C^\infty(S, NS) \longrightarrow C^\infty(S).$$

Это отображение задается явной формулой

$$\mathcal{R}_S(f, \xi, \eta) = \nabla f \cdot \nabla \xi \cdot \eta - \nabla f \cdot \nabla \eta \cdot \xi.$$

1.2.4. Дифференциальные формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Дифференциальная форма* степени r (или, короче, *r -форма*) на многообразии Фреше $\mathcal{X}$ есть гладкое отображение

$$\omega: \underbrace{T\mathcal{X} \times \cdots \times T\mathcal{X}}_r \longrightarrow \mathbb{C}$$

r -й прямой степени $T\mathcal{X} \times \cdots \times T\mathcal{X}$ касательного расслоения $T\mathcal{X}$, значение которого

$$\omega_x: T_x\mathcal{X} \times \cdots \times T_x\mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$$

в произвольной точке $x \in \mathcal{X}$ является r -мультилинейным альтернирующим отображением. Иными словами, ω_x есть r -мультилинейная кососимметричная форма на $T_x\mathcal{X}$. Обозначим пространство r -форм на $\mathcal{X}$ через $\Omega^r(\mathcal{X})$. Гладкие функции на $\mathcal{X}$ отождествляются с формами степени 0.

Ограничение r -формы ω на координатную окрестность U многообразия $\mathcal{X}$ можно рассматривать как гладкое отображение открытого подмножества пространства Фреше F в векторное пространство $\Omega^r(F)$, состоящее из r -мультилинейных кососимметричных r -форм на F . Для заданных гладких векторных полей $\xi_1, \dots, \xi_r$ на $U \subset F$, обозначим через $\omega(\xi_1, \dots, \xi_r)$ отображение из U в $\mathbb{C}$, значение которого в точке $x \in U$ равно $\omega_x(\xi_1(x), \dots, \xi_r(x))$, иначе говоря, значению r -формы $\omega_x \in \Omega^r(F)$ на векторах $\xi_1(x), \dots, \xi_r(x)$ из F .

Дифференциальные формы на многообразиях Фреше обладают многими свойствами дифференциальных форм на конечномерных многообразиях. В частности, можно определить их внешнее дифференцирование и внешнее произведение также, как в конечномерном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Внешней производной r -формы ω на $\mathcal{X}$ называется $(r+1)$ -форма $d\omega$ на $\mathcal{X}$, которая определяется локально следующим образом. Значение $d\omega$ на гладких векторных полях $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r$, заданных в координатной окрестности $U \subset F$, равно*

$$\begin{aligned} d\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r) &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \xi_i \left(\omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_r) \right) + \\ &+ \sum_{i,j=0 \leq i < j}^r (-1)^{i+j} \omega \left([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_r \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Это определение не зависит от выбора локальных данных в том смысле, что существует единственная $(r+1)$ -форма на $\mathcal{X}$, согласованная с указанными локальными представлениями (см. [47], гл. V, предложение 3.2).

ПРИМЕР 22. Если f есть 0-форма на $\mathcal{X}$, т.е. гладкое отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$, то df_x для любого $x \in \mathcal{X}$ совпадает с касательным отображением

$$T_x f: T_x \mathcal{X} \longrightarrow T_{f(x)} \mathbb{C}.$$

Кроме того, для произвольного векторного поля ξ на $\mathcal{X}$ справедливо равенство

$$df(\xi) = \xi f.$$

Если ω есть 1-форма на $\mathcal{X}$, то локально

$$d\omega(\xi, \eta) = \xi(\omega(\eta)) - \eta(\omega(\xi)) - \omega([\xi, \eta]).$$

Для 2-формы ω справедливо локальное соотношение

$$\begin{aligned} d\omega(\xi, \eta, \zeta) &= \xi(\omega(\eta, \zeta)) + \eta(\omega(\zeta, \xi)) + \zeta(\omega(\xi, \eta)) - \\ &- \omega([\xi, \eta], \zeta) - \omega([\eta, \zeta], \xi) - \omega([\zeta, \xi], \eta). \end{aligned} \quad (1.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Внешним произведением r -формы ω и s -формы ψ на $\mathcal{X}$ называется $(r+s)$ -форма $\omega \wedge \psi$ на $\mathcal{X}$, которая локально определяется следующим образом. Значение $\omega \wedge \psi$ на произвольных гладких векторных полях $\xi_1, \dots, \xi_{r+s}$, заданных в координатной окрестности $U \subset F$, равно*

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \psi)(\xi_1, \dots, \xi_{r+s}) &= \\ &= \sum_{i=1}^{r+s} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(r)}) \psi(\xi_{\sigma(r+1)}, \dots, \xi_{\sigma(r+s)}), \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам σ чисел $(1, \dots, r + s)$ и $\epsilon(\sigma)$ есть четность σ .

Снова приведенное определение не зависит от выбора локальных данных в том смысле, что существует единственная $(r + s)$ -форма $\omega \wedge \psi$ на $\mathcal{X}$, которая согласована с указанными локальными представлениями.

В частности, внешнее произведение функции f и формы ω равно $f \wedge \omega = f\omega$. Легко проверить, что внешнее произведение двух форм ω и ψ на $\mathcal{X}$ связано с внешней производной обычной формулой

$$d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\psi$$

и квадрат d равен нулю: $dd\omega = 0$.

1.2.5. Симплектические и комплексные структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. *Симплектическая структура* на многообразии Фреше $\mathcal{X}$ задается 2-формой ω на $\mathcal{X}$, обладающей следующими свойствами:

1. ω замкнута, т.е. $d\omega = 0$;
2. ω невырождена в каждой точке $x \in \mathcal{X}$, т.е. для любого $\xi \in T_x\mathcal{X}$, $\xi \neq 0$, найдется $\eta \in T_x\mathcal{X}$ такое, что $\omega_x(\xi, \eta) \neq 0$.

Многообразие Фреше $\mathcal{X}$, наделенное симплектической структурой ω , называется *симплектическим*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что мы пользуемся здесь самым слабым из возможных определений невырожденности. Для банахового многообразия, локально моделируемого банаховым пространством E , распространенным требованием невырожденности ω является условие обратимости линейного оператора A_x , действующего из $T_x\mathcal{X} \sim E$ в сопряженное пространство $T_x^*\mathcal{X} \sim E'$, который определяется равенством $\omega_x(\cdot, \eta) = A_x(\cdot)(\eta)$. Указанное условие должно выполняться для всех $x \in \mathcal{X}$ и всех ненулевых $\eta \in T_x^*\mathcal{X}$.

Большинство многообразий Фреше, рассматриваемых в этой книге, являются симплектическими в смысле определения 15. Кроме того, они обычно обладают, наряду с симплектической структурой, совместимой почти комплексной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. *Почти комплексной структурой* на многообразии Фреше $\mathcal{X}$ называется гладкий автоморфизм J касательного векторного расслоения $T\mathcal{X}$, сужение J_x которого на $T_x\mathcal{X}$

для $x \in \mathcal{X}$ удовлетворяет условию

$$J_x^2 = -\text{id}.$$

Многообразие Фреше $\mathcal{X}$, наделенное почти комплексной структурой, называется *почти комплексным*.

Если J есть почти комплексная структура на многообразии Фреше $\mathcal{X}$, то автоморфизм J может быть продолжен комплексно-линейным образом на *комплексифицированное* касательное расслоение $T^{\mathbb{C}}\mathcal{X} = T\mathcal{X} \otimes \mathbb{C}$, так что $T^{\mathbb{C}}\mathcal{X}$ будет разлагаться в прямую сумму подрасслоений

$$T^{\mathbb{C}}\mathcal{X} = T^{1,0}\mathcal{X} \oplus T^{0,1}\mathcal{X},$$

где сужение J_x на $T_x^{1,0}\mathcal{X}$ для любого $x \in \mathcal{X}$ задается умножением на i , а сужение J_x на $T_x^{0,1}\mathcal{X}$ задается умножением на $-i$. Гладкие сечения расслоений $T_x^{1,0}\mathcal{X}$ и $T_x^{0,1}\mathcal{X}$ называются иначе *векторными полями типа $(1, 0)$ и $(0, 1)$* соответственно.

Почти комплексная структура J на многообразии Фреше $\mathcal{X}$ называется *интегрируемой* или *формально интегрируемой* комплексной структурой, если скобка любых двух векторных полей на $\mathcal{X}$ типа $(1, 0)$ является снова векторным полем типа $(1, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Почти комплексная структура J определяет на каждом касательном пространстве $T_x\mathcal{X}$ комплексную структуру, задаваемую действием оператора J_x . В частности, любое комплексное многообразие Фреше $\mathcal{X}$ имеет естественную почти комплексную структуру, задаваемую умножением на i на пространстве $T_x\mathcal{X}$. Эта почти комплексная структура автоматически интегрируема. Для конечномерных многообразий *теорема Ньюлендера–Ниренберга* утверждает, что обратное также верно, а именно, любое почти комплексное многообразие с интегрируемой почти комплексной структурой является, на самом деле, *комплексным*. Это означает, что на нем можно построить атлас, состоящий из локальных комплексных карт, таким образом, что в определяемых ими комплексных координатах исходная почти комплексная структура будет задаваться умножением на i в касательных пространствах. Для многообразий Фреше указанная теорема, вообще говоря, неверна (см. [51]), поэтому для доказательства того, что рассматриваемое многообразие Фреше является комплексным, необходимо построить на нем, следуя определению 5 из п. 1.2.1, атлас из локальных комплексных карт.

Наиболее важным классом многообразий Фреше, изучаемых в этой книге, является класс кэлеровых многообразий Фреше, обладающих одновременно симплектической и комплексной структурами, которые совместимы друг с другом в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Комплексное симплектическое многообразие Фреше $\mathcal{X}$ называется *кэлеровым многообразием Фреше*, если его комплексная структура J и симплектическая структура ω *совместимы* в следующем смысле:

1. $\omega_x(J_x\xi, J_x\eta) = \omega_x(\xi, \eta)$ для любых $\xi, \eta \in T_x\mathcal{X}$, $x \in \mathcal{X}$;
2. симметричная форма g на $T\mathcal{X} \times T\mathcal{X}$, задаваемая равенством

$$g_x(\xi, \eta) := \omega_x(\xi, J_x\eta),$$

положительно определена для всех $x \in \mathcal{X}$.

Такая форма g называется *кэлеровой метрикой* на $\mathcal{X}$.

Библиографические указания

Ключевой ссылкой для этой главы является статья Гамильтона [32], посвященная теореме Нэша–Мозера. Ее первая часть может служить превосходным введением в теорию многообразий Фреше, которому мы и следуем в нашем изложении (за исключением пп. 1.2.4, 1.2.5). Определение 10 связности на векторном расслоении Фреше заимствовано из книги [47]. Последнюю книгу можно рекомендовать читателям, интересующимся теорией бесконечномерных многообразий с особым вниманием к банаховому случаю.

Глава 2. Группы Ли–Фреше

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. *Группой Ли–Фреше* называется многообразие Фреше $\mathcal{G}$, наделенное структурой группы так, что операции группового умножения

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad (g, h) \longmapsto g \cdot h,$$

и взятия обратного элемента

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad g \longmapsto g^{-1},$$

являются гладкими отображениями многообразий Фреше. *Алгеброй Ли–Фреше* группы Ли–Фреше $\mathcal{G}$ называется касательное пространство $\mathfrak{G} = T_1\mathcal{G}$ в единице $\mathbf{1}$ группы $\mathcal{G}$.

Для $g \in \mathcal{G}$ обозначим через

$$\begin{aligned} L_g: \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}, & L_g(h) &= g \cdot h, \\ R_g: \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G}, & R_g(h) &= h \cdot g \end{aligned}$$

соответственно *левый* и *правый сдвиги* на группе $\mathcal{G}$.

Любой элемент ξ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ порождает с помощью левых сдвигов векторное поле X_ξ на $\mathcal{G}$, инвариантное относительно этих сдвигов. Соответствие $\xi \longmapsto X_\xi$ позволяет рассматривать элементы алгебры Ли $\mathfrak{G}$ как лево-инвариантные векторные поля на группе Ли $\mathcal{G}$. Лево-инвариантные векторные поля на $\mathcal{G}$ образуют алгебру Ли относительно операции скобки векторных полей, которая индуцирует скобку Ли на алгебре Ли $T_1\mathcal{G} = \mathfrak{G}$ с помощью отождествления $\xi \longmapsto X_\xi$ (оправдывая тем самым использование термина “алгебра Ли” по отношению к пространству $T_1\mathcal{G}$). Заметим, что существует единственная связность $\mathcal{H}$ на $\mathcal{G}$, называемая *связностью Кармана–Маурера*, кривизна которой равна нулю, а лево-инвариантные поля являются горизонтальными по отношению к $\mathcal{H}$.

Подчеркнем, что выбор лево-инвариантных векторных полей и левых сдвигов в этом рассуждении является хотя и традиционным, но совершенно произвольным – с таким же успехом мы

могли бы использовать право-инвариантные векторные поля и правые сдвиги.

Если в определении группы Ли–Фреше группа $\mathcal{G}$ является банаховым (соотв. гильбертовым) многообразием, будем говорить, что $\mathcal{G}$ есть *банахова* (соотв. *гильбертова*) *группа Ли*.

Предположим, что для любого элемента ξ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ существует единственная однопараметрическая подгруппа $\gamma_\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$ такая, что $\gamma'_\xi(0) = \xi$. Тогда, как и в конечномерном случае, можно определить *экспоненциальное отображение*

$$\exp: \mathfrak{G} \longrightarrow \mathcal{G},$$

полагая $\exp \xi := \gamma_\xi(\mathbf{1})$. В частности, для банаховых групп Ли $\mathcal{G}$ указанное выше условие всегда выполняется. Действительно, любой элемент $\xi \in \mathfrak{G}$ можно отождествить с лево-инвариантным векторным полем X_ξ , которое интегрируется до однопараметрической группы преобразований $\varphi_\xi^t: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$. В этом случае $\gamma_\xi(t) := \varphi_\xi^t(\mathbf{1})$.

Дополним определение расслоений Фреше, данное в п. 1.2.2 (см. определение 9) определением главного расслоения Фреше. Будем говорить, что группа Ли–Фреше $\mathcal{G}$ *действует на многообразии Фреше $\mathcal{X}$* , если существует гладкое отображение

$$\mathcal{G} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}, \quad (g, x) \longmapsto g \cdot x$$

такое, что $\mathbf{1} \cdot x = x$ и $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $\mathcal{G}$ есть группа Ли–Фреше, действующая на многообразии Фреше $\mathcal{E}$. Это многообразие называется *главным $\mathcal{G}$ -расслоением Фреше*, если задана гладкая субмерсия $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ многообразия Фреше $\mathcal{E}$ на другое многообразие Фреше $\mathcal{X}$ такая, что для любого $x \in \mathcal{X}$ найдутся открытая окрестность U точки x и диффеоморфизм ее прообраза $\pi^{-1}(U)$ в $\mathcal{E}$ на $U \times \mathcal{G}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. действие группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{E}$ совместимо с естественным действием группы $\mathcal{G}$ на втором сомножителе в $U \times \mathcal{G}$;
2. следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times \mathcal{G} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{проекция} \\ U & \xrightarrow{\text{id}} & U \end{array}$$

коммутативна.

Рассмотрим теперь два наиболее важных примера групп Ли–Фреше, играющих особую роль в этой книге.

§ 2.1. Группа токов $C^\infty(X, G)$

2.1.1. Основные свойства. Пусть X есть гладкое компактное многообразие и G – группа Ли. Пространство $C^\infty(X, G)$ всех гладких отображений из X в G является многообразием Фреше, как было отмечено в п. 1.2.1 (см. пример 12). Напомним, каким образом вводится структура многообразия Фреше на пространстве $C^\infty(X, G)$ в рассматриваемом частном случае.

Экспоненциальное отображение $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ задает локальный диффеоморфизм $\exp: \mathfrak{u} \rightarrow U$, отображающий открытую окрестность $\mathfrak{u}$ нуля в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ на открытую окрестность U единицы $e \in G$:

$$\exp: \left\{ \begin{array}{l} \text{открытая окрест-} \\ \text{ность } \mathfrak{u} \text{ нуля в } \mathfrak{g} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{открытая окрестность } U \\ \text{единицы в } G \end{array} \right\}.$$

Пользуясь этим диффеоморфизмом, можно построить локальную карту в окрестности $\mathcal{U} = C^\infty(X, U)$ единичного отображения $\mathbf{1} := X \rightarrow e \in G$ пространства $C^\infty(X, U)$. Она задается гомеоморфизмом

$$\chi: \mathcal{U} := C^\infty(X, \mathfrak{u}) \longrightarrow C^\infty(X, U) = \mathcal{U},$$

определяемым поточечным применением экспоненциального отображения $\exp: \mathfrak{u} \rightarrow U$. Обратное отображение $\varphi_1 := \chi^{-1}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ дает гомеоморфизм окрестности $\mathcal{U}$ единицы $\mathbf{1} \in C^\infty(X, U)$ на открытое подмножество $\mathcal{U}$ в пространстве Фреше $C^\infty(X, \mathfrak{g})$.

Многообразие $C^\infty(X, G)$ является группой относительно поточечного умножения. Пользуясь этой групповой структурой, можно построить локальные карты в любой точке пространства $C^\infty(X, G)$. Для построения локальной карты в произвольной точке $\gamma \in C^\infty(X, G)$ обозначим через $\mathcal{U}_\gamma$ окрестность γ вида $\mathcal{U}_\gamma := \gamma \cdot \mathcal{U}$ и определим локальную карту φ_γ в окрестности $\mathcal{U}_\gamma$ как композицию

$$\varphi_\gamma := \varphi_1 \circ \gamma^{-1}: \mathcal{U}_\gamma \rightarrow \mathcal{U},$$

где отображение $\gamma^{-1}: \mathcal{U}_\gamma \rightarrow \mathcal{U}$ задается умножением на γ^{-1} слева. Окрестности $\{\mathcal{U}_\gamma\}$ и отображения $\{\varphi_\gamma\}$ с $\gamma \in C^\infty(X, G)$ образуют открытый атлас и систему локальных карт на пространстве

$C^\infty(X, G)$, которые задают структуру многообразия Фреше на $C^\infty(X, G)$, локальной моделью которого является пространство Фреше $C^\infty(X, \mathfrak{g})$.

Поточечное умножение и взятие обратного в группе $C^\infty(X, G)$ являются гладкими отображениями относительно введенной структуры многообразия Фреше, поэтому $C^\infty(X, G)$ есть группа Ли–Фреше, называемая *группой токов* на X со значениями в группе G .

Алгебра Ли группы $C^\infty(X, G)$ совпадает с пространством Фреше $C^\infty(X, \mathfrak{g})$, при этом скобка Ли в $C^\infty(X, \mathfrak{g})$ задается поточечным применением скобки Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Экспоненциальное отображение

$$\exp: C^\infty(X, \mathfrak{g}) \longrightarrow C^\infty(X, G),$$

задаваемое поточечным применением экспоненциального отображения $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$, является локальным гомеоморфизмом в окрестности нуля.

Обратимся теперь к наиболее важному для нас примеру групп токов $C^\infty(X, G)$, отвечающему случаю $X = S^1$. В этом случае группа $C^\infty(S^1, G)$ носит специальное название *группы петель* группы Ли G и обозначается через

$$LG := C^\infty(S^1, G).$$

Алгебра Ли группы LG совпадает с *алгеброй петель*

$$L\mathfrak{g} := C^\infty(S^1, \mathfrak{g}).$$

Поскольку все операции в группе петель LG определяются поточечно, можно ожидать, что свойства группы петель LG будут близки к соответствующим свойствам самой группы Ли G . И это ожидание оправдывается в большинстве случаев, хотя имеются и некоторые различия, как показывают нижеследующие примеры.

Рассмотрим сначала гомотопическую структуру группы LG . Введем *пространство центрированных петель*

$$\Omega G := LG/G$$

группы Ли G , где G в знаменателе отождествляется с группой постоянных отображений $S^1 \rightarrow g_0 \in G$. Пространство ΩG можно реализовать в виде замкнутого подмногообразия группы петель LG ,

состоящего из отображений $\gamma \in LG$, переводящих единицу группы петель $\mathbf{1} \in LG$ в единицу e группы G : $\gamma(\mathbf{1}) = e$. Отождествим группу петель LG с прямым произведением $\Omega G \times G$. Хорошо известно (см., например, [36]) что группы гомотопий пространства ΩG совпадают с группами гомотопий группы G со сдвигом на единицу:

$$\pi_i(\Omega G) \cong \pi_{i+1}(G).$$

Отсюда следует, что

$$\pi_i(LG) \cong \pi_i(\Omega G) \oplus \pi_i(G) \cong \pi_{i+1}(G) \oplus \pi_i(G).$$

В частности, группа $\pi_0(LG)$ совпадает с прямой суммой $\pi_1(G) \oplus \pi_0(G)$, т.е. группа петель LG связна тогда и только тогда, когда группа G связна и односвязна. Фундаментальная группа группы петель LG совпадает с $\pi_2(G) \oplus \pi_1(G) \cong \pi_1(G)$, поскольку $\pi_2(G) = 0$ для любой связной компактной группы Ли G . Следовательно, группа петель LG связна и односвязна, если группа Ли G сама является связной и односвязной.

2.1.2. Экспоненциальное отображение алгебры петель.

Как было указано, экспоненциальное отображение

$$\exp: L\mathfrak{g} \longrightarrow LG$$

алгебры петель $L\mathfrak{g}$ задается поточечным применением экспоненциального отображения $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$.

В случае, когда G является компактной группой Ли, оно обладает следующим хорошо известным свойством. Обозначим через G° связную компоненту единицы группы G . Тогда экспоненциальное отображение $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G^\circ$ сюръективно. Это свойство вытекает из того, что каждый элемент G° содержится в некоторой однопараметрической подгруппе группы G . Однако, для группы петель LG указанное утверждение, вообще говоря, неверно.

Рассмотрим, например, односвязную группу $G = \mathrm{SU}(2)$. Тогда элемент

$$LG \ni \gamma: z \longrightarrow \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}, \quad z \in S^1,$$

не является экспонентой никакого элемента алгебры петель $L\mathfrak{g}$.

Действительно, если предположить, что $\gamma = \exp \xi$ для некоторого отображения $\xi \in C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$, то матрица $\gamma(z)$, будучи функцией от $\xi(z)$, должна была бы коммутировать с $\xi(z)$ при любом

$z \in S^1$. Из этого условия вытекает, что матрица $\xi(z)$ должна быть диагональной при любом $z \in S^1$, т.е.

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{if(z)} & 0 \\ 0 & e^{-if(z)} \end{pmatrix}$$

для некоторой вещественнозначной функции f на S^1 . В частности, $z = e^{if(z)}$, что невозможно, поскольку логарифм $\ln(z)$ не допускает выделения непрерывной ветви на окружности.

Справедливо, однако, следующее свойство группы петель LG , которое можно рассматривать как замену свойства сюръективности отображения $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G^\circ$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть G есть связная компактная группа Ли. Тогда экспоненциальное отображение

$$\exp: L\mathfrak{g} \longrightarrow (LG)^\circ$$

имеет плотный образ в связной компоненте единицы $(LG)^\circ$ группы петель LG .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этого утверждения, заметим, прежде всего, что связная компактная группа Ли G является прямым произведением тора и связной полупростой компактной группы Ли. Наше утверждение для тора легко проверить непосредственно, поэтому достаточно рассмотреть случай полупростой связной компактной группы Ли G . В этом случае группа G может быть реализована в виде связной компоненты группы автоморфизмов $\text{Aut } \mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (поскольку произвольная полупростая связная компактная группа Ли G является конечным накрытием над $(\text{Aut } \mathfrak{g})^\circ$). В этом случае критические точки экспоненциального отображения $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ лежат на замкнутой гиперповерхности Γ в $\mathfrak{g}$, делящей $\mathfrak{g}$ на внутреннюю выпуклую область D , содержащую 0 , и ее дополнение. Образ Γ при экспоненциальном отображении, обозначаемый через $\exp \Gamma$, содержится в подмногообразии G коразмерности ≥ 3 . Рассмотрим теперь произвольную петлю $\gamma(z) \in (LG)^\circ$, проходящую через $e \in G$: $\gamma(1) = e$. Мы утверждаем, что ее можно аппроксимировать гладкими петлями из $(LG)^\circ$, которые являются экспонентами в LG (петля $\delta(z)$ в LG называется экспонентой, если ее можно представить в виде $\delta = \exp \xi$ для некоторой петли $\xi \in L\mathfrak{g}$).

Гладко деформируя, при необходимости, петлю γ , мы можем аппроксимировать ее гладкими петлями $\tilde{\gamma} \in (LG)^\circ$ с началом в e

так, чтобы $\tilde{\gamma}(e^{it})$ не пересекали $\exp \Gamma$ при $0 < t < 2\pi$. Так как экспоненциальное отображение $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ локально диффеоморфно вдоль $\tilde{\gamma}(e^{it})$ при $t < 2\pi$, мы можем, начиная с e , выбрать непрерывную ветвь логарифма петли $\tilde{\gamma}(e^{it})$ при $t < 2\pi$. В результате получим гладкий (но, вообще говоря, не замкнутый) путь $\xi(e^{it})$, $0 \leq t < 2\pi$, в $\mathfrak{g}$ такой, что $\exp \xi = \tilde{\gamma}$.

Предельная точка ξ_0 пути $\xi(e^{it})$ при $t \rightarrow 2\pi - 0$ принадлежит $\bar{D}$. Если множество $\exp \Gamma$ не содержит e , то ξ_0 не может принадлежать $\Gamma = \partial D$, поскольку $\exp \xi_0 = e$. Следовательно, $\xi_0 \in D$, откуда следует, что она должна совпадать с нулем (иначе, $\exp$ была бы равна e на всей орбите точки ξ_0 в $D \setminus 0$ относительно присоединенного действия Ad , являющейся гладким подмногообразием в $\mathfrak{g}$ положительной размерности). Следовательно, $\xi(e^{it})$, $0 \leq t \leq 2\pi$, является гладкой петлей в $\mathfrak{g}$ такой, что $\exp \xi = \tilde{\gamma}$, тем самым мы нашли логарифм петли $\tilde{\gamma}$ в $\mathfrak{g}$.

Если множество $\exp \Gamma$ содержит e , то, в отличие от рассмотренного случая, может оказаться, что предельная точка $\lim_{t \rightarrow 2\pi - 0} \xi(e^{it}) = \xi_0$ принадлежит Γ . Но в такой ситуации петля $\tilde{\gamma}$ окажется не стягиваемой, т.е. $\tilde{\gamma} \notin (LG)^\circ$ вопреки нашему предположению. Чтобы доказать это, заметим, что в рассматриваемом случае путь $\xi(e^{it})$ гомотопен линейному пути $\xi_0(e^{it}) := t \frac{\xi_0}{2\pi}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, с теми же конечными точками 0 и ξ_0 , что и $\xi(e^{it})$. Соответственно, петля $\tilde{\gamma}$ гомотопна петле $\gamma_0(e^{it})$ в G , задаваемой посредством

$$\gamma_0: S^1 \ni e^{it} \mapsto \exp \left(t \frac{\xi_0}{2\pi} \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Легко видеть, что петля γ_0 не стягиваема в G , поэтому петля $\tilde{\gamma}$ также не стягиваема в G .

2.1.3. Комплексификация. Группа петель LG , подобно компактным группам Ли, допускает комплексификацию.

Напомним, что комплексификация алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с комплексной алгеброй Ли

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Комплексификацией* связной группы Ли G называется связная комплексная группа Ли $G^{\mathbb{C}}$, обладающая следующими свойствами:

1. алгебра Ли группы $G^{\mathbb{C}}$ совпадает с комплексификацией $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
2. группа $G^{\mathbb{C}}$ содержит группу G в качестве подгруппы, т.е. существует мономорфизм $i: G \rightarrow G^{\mathbb{C}}$.

В частности, группа G , допускающая комплексификацию, должна обладать нетривиальными гомоморфизмами в комплексные группы Ли (мономорфизм i является одним из них).

Комплексификация $G^{\mathbb{C}}$, введенная выше, существует и однозначно определена для любой связной компактной группы Ли G . Например, комплексификация группы $G = S^1$ совпадает с мультипликативной группой $G^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ комплексных чисел, а комплексификация группы $G = \mathrm{SU}(n)$ совпадает с $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$. Для некомпактной группы $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ ее комплексификация также совпадает с $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$.

Приведем пример группы Ли, которая не допускает комплексификации в указанном выше смысле. Как было отмечено, комплексификация группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ совпадает с группой $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ односвязна, в то же время фундаментальная группа группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Обозначим через G универсальную накрывающую группу группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Имеется гомоморфизм $\pi: G \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, ядро которого равно $\mathbb{Z}$. Допустим, что группа G обладает комплексификацией $G^{\mathbb{C}}$. Тогда эта комплексификация должна быть накрывающей группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Действительно, композиция π с естественным вложением $i: \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ дает нетривиальный гомоморфизм группы G в комплексную группу Ли $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ с ядром, равным $\mathbb{Z}$. Этот гомоморфизм продолжается до накрывающего гомоморфизма $G^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ с тем же ядром. Но такое накрытие не может существовать, поскольку группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ односвязна. Свойство группы G , которым мы воспользовались, может быть сформулировано еще таким образом: любой гомоморфизм группы G в связную комплексную группу Ли пропускается через группу $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ или (еще одна формулировка) ядро такого гомоморфизма должно содержать $\mathbb{Z}$.

В случае группы петель $LG = C^{\infty}(S^1, G)$ связной компактной группы Ли G ее комплексификация совпадает с группой петель $LG^{\mathbb{C}} = C^{\infty}(S^1, G^{\mathbb{C}})$ комплексифицированной группы $G^{\mathbb{C}}$. Группа $LG^{\mathbb{C}}$ есть комплексная группа Ли–Фреше, моделью которой является алгебра Ли–Фреше $C^{\infty}(S^1, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$.

§ 2.2. Группа диффеоморфизмов $\text{Diff}(X)$

Пусть X есть компактное гладкое многообразие и $\text{Diff}(X)$ – группа диффеоморфизмов X . Группа $\text{Diff}(X)$ является многообразием Фреше, будучи открытым подмножеством многообразия Фреше $C^\infty(X, X)$. Она также является группой Ли–Фреше относительно указанной структуры многообразия Фреше.

Группа $\text{Diff}(X)$ тесно связана с группой токов $C^\infty(X, G)$, рассмотренной в предыдущем параграфе 2.1. Именно, $\text{Diff}(X)$ действует гладким образом на многообразии $C^\infty(X, G)$ посредством “репараметризации” отображений из $C^\infty(X, G)$.

Алгебра Ли группы $\text{Diff}(X)$ совпадает с алгеброй Ли–Фреше

$$C^\infty(X, TX) =: \text{Vect}(X)$$

гладких касательных векторных полей на X .

Экспоненциальное отображение

$$\exp: \text{Vect}(X) \longrightarrow \text{Diff}(X)$$

определяется также, как в начале этой главы. Именно, любое векторное поле $\xi \in \text{Vect}(X)$ порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов φ_t^ξ многообразия X , определяемую следующим образом. Образ $y(t) := \varphi_t^\xi(x)$ произвольной точки $x \in X$ под действием диффеоморфизма φ_t^ξ совпадает с точкой интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения $y' = \xi(y)$ с начальным условием: $y = x$ при $t = 0$, отвечающей параметру t . Мы полагаем $\exp \xi := \varphi_1^\xi$.

Обратимся теперь к случаю многообразия $X = S^1$, представляющему для нас наибольший интерес. Как было отмечено в п. 1.2.1 (пример 14), группа $\text{Diff}(S^1)$ состоит из двух связанных компонент, причем связная компонента единицы $\text{Diff}_+(S^1)$ образована отображениями из $\text{Diff}(S^1)$, сохраняющими ориентацию S^1 .

Алгебра Ли группы $\text{Diff}(S^1)$ совпадает с алгеброй $\text{Vect}(S^1)$ гладких касательных векторных полей на окружности S^1 . Элементы $v \in \text{Vect}(S^1)$ можно записывать в виде $v = v(\theta) \frac{d}{d\theta}$, где $v(\theta)$ – гладкая 2π -периодическая функция от θ . Скобка двух векторных полей $v_1, v_2 \in \text{Vect}(S^1)$ задается обычной формулой

$$\left[v_1(\theta) \frac{d}{d\theta}, v_2(\theta) \frac{d}{d\theta} \right] = \{v_1(\theta)v_2'(\theta) - v_1'(\theta)v_2(\theta)\} \frac{d}{d\theta}.$$

Обозначим через $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ комплексификацию алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$, отождествляемую с комплексным векторным пространством Фреше $T_{\text{id}}^{\mathbb{C}}\text{Diff}(S^1)$:

$$\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1) := \text{Vect}(S^1) \otimes \mathbb{C}.$$

Удобно задавать коэффициенты $v(\theta)$ векторных полей $v = v(\theta)\frac{d}{d\theta}$ из алгебры $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ рядами Фурье

$$v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta}, \quad v_n \in \mathbb{C}.$$

В этих терминах вещественная подалгебра $\text{Vect}(S^1)$ алгебры $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ выделяется соотношениями: $v_{-n} = \bar{v}_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Комплексифицированная алгебра Ли $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ (как векторное пространство) имеет естественный базис, задаваемый векторными полями

$$e_n = ie^{in\theta} \frac{d}{d\theta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$[e_n, e_m] = (n - m)e_{n+m}, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

2.2.1. Конечномерные подалгебры в алгебре $\text{Vect}_{\omega}(S^1)$.

Рассмотрим подалгебру $\text{Vect}_{\omega}(S^1)$ алгебры $\text{Vect}(S^1)$, состоящую из векторных полей $v(\theta)\frac{d}{d\theta}$ с вещественно аналитическими коэффициентами $v(\theta)$. Такие $v(\theta)$ задаются рядами Фурье вида

$$v(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n e^{in\theta}, \quad v_{-n} = \bar{v}_n,$$

сходящимися в некоторой окрестности S^1 на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Алгебра Ли $\text{Vect}_{\omega}(S^1)$ обладает следующим интересным свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В алгебре $\text{Vect}_{\omega}(S^1)$ не существует конечномерных подалгебр Ли размерности > 3 . Более того, в каждой размерности $d = 1, 2, 3$ существует ровно одна (с точностью до изоморфизма) подалгебра Ли размерности d в $\text{Vect}_{\omega}(S^1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства этого утверждения заметим, прежде всего, что скобка двух (не равных тождественно нулю) векторных полей $v_1, v_2 \in \text{Vect}_\omega(S^1)$ может быть тождественным нулем тогда и только тогда, когда эти поля линейно зависимы, т.е. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \equiv 0$ для некоторых констант λ_1, λ_2 . Следовательно, любая нетривиальная коммутативная подалгебра в $\text{Vect}_\omega(S^1)$ обязательно одномерна. В частности, ранг любой нетривиальной подалгебры в $\text{Vect}_\omega(S^1)$ (т.е. размерность ее картановской подалгебры) равен 1.

Покажем, что любая подалгебра $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\text{Vect}_\omega(S^1)$ размерности ≥ 3 *полупроста*, т.е. не содержит ненулевых коммутативных идеалов. Предположим, напротив, что подалгебра $\mathfrak{g}$ содержит такой идеал, который, как было только что отмечено, является обязательно одномерным. Выберем базис $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ в $\mathfrak{g}$ таким образом, чтобы наш идеал порождался e_1 (по предположению, указанный базис имеет, по крайней мере, три элемента). Тогда

$$[e_1, e_2] = \lambda e_1 \text{ и } [e_1, e_3] = \mu e_1,$$

где $\lambda, \mu \neq 0$, поскольку e_1, e_2, e_3 линейно независимы. Следовательно, $[e_1, \mu e_2 - \lambda e_3] = 0$, откуда вытекает линейная зависимость элементов e_1, e_2, e_3 , вопреки нашему предположению.

Заметим, что ограничение на размерность подалгебры Ли $\mathfrak{g}$ в этом утверждении является существенным, поскольку, как мы увидим ниже, единственная двумерная подалгебра, содержащаяся в алгебре $\text{Vect}_\omega(S^1)$, не является полупростой.

Покажем далее, что *любая конечномерная подалгебра $\mathfrak{g}$ в алгебре $\text{Vect}_\omega(S^1)$ размерности ≥ 3 проста*, т.е. не содержит нетривиальных идеалов. Действительно, любая полупростая алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму простых идеалов. Если подалгебра $\mathfrak{g}$ не является простой, она содержит идеал I размерности, не превосходящей $\frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}$. Выберем базис в $\mathfrak{g}$ вида $\{e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_k\}$ так, чтобы векторы $e_1, \dots, e_m$ образовывали базис идеала I . Ясно, что $m \geq 2$ (иначе идеал I был бы коммутативен). Скобки

$$[e_1, f_1] \in I, \quad \dots, \quad [e_1, f_k] \in I, \quad [e_1, e_2] \in I$$

отличны от нуля (иначе, соответствующие векторы были бы линейно зависимы), поэтому они образуют набор из $k+1 > m$ ненулевых векторов в m -мерной подалгебре I . Следовательно, они линейно зависимы, откуда вытекает, что векторы $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_k$ линейно зависимы, вопреки нашему предположению.

Сверяясь со списком простых алгебр Ли, можно убедиться в том, что только две простые алгебры Ли размерности 3 могут обладать свойствами, указанными выше. Именно, это некомпактная алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ и компактная алгебра Ли $\mathfrak{su}(2)$. Сравнивая скобки Ли в алгебрах Ли $\mathfrak{su}(2)$ и $\text{Vect}_\omega(S^1)$, можно показать, что вторая возможность не реализуется. Стандартное вложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ в алгебру $\text{Vect}_\omega(S^1)$ реализует $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ в виде подалгебры Ли в алгебре $\text{Vect}_\omega(S^1)$, порождаемой тремя векторными полями $d/d\theta$, $\cos \theta d/d\theta$, $\sin \theta d/d\theta$. Эта подалгебра совпадает с алгеброй Ли группы Мебиуса $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ всех дробно-линейных автоморфизмов единичного круга.

Любая двумерная подалгебра в алгебре $\text{Vect}_\omega(S^1)$ обязательно некоммутативна, поскольку, как мы видели ранее, зануление скобки двух векторных полей из $\text{Vect}_\omega(S^1)$ влечет их линейную зависимость. Так как все двумерные некоммутативные алгебры Ли изоморфны, то существует только одна (с точностью до изоморфизма) двумерная подалгебра Ли в алгебре $\text{Vect}_\omega(S^1)$. Одна из ее реализаций внутри $\text{Vect}_\omega(S^1)$ дается подалгеброй, порождаемой двумя векторными полями $v_1 = \cos \theta d/d\theta$, $v_2 = d/d\theta + \sin \theta d/d\theta$.

2.2.2. Экспоненциальное отображение алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$. Изучим теперь более подробно экспоненциальное отображение

$$\exp: \text{Vect}(S^1) \longrightarrow \text{Diff}_+(S^1).$$

Напомним, что это отображение сопоставляет касательному векторному полю $v = v(\theta) \frac{d}{d\theta}$ на окружности S^1 диффеоморфизм $\exp v := \varphi_1^v$, где φ_t^v — однопараметрическая подгруппа диффеоморфизмов в группе $\text{Diff}_+(S^1)$ с касательным вектором v в начале $\text{id} \in \text{Diff}_+(S^1)$. Иными словами, $y_\theta(t) := \varphi_t^v(\theta)$ есть решение уравнения $\frac{dy_\theta}{dt} = v(y_\theta)$ с начальным условием $y_\theta(0) = \theta$.

Для конечномерных групп Ли легко доказать, пользуясь теоремой об обратной функции, что отображение $\exp$ (производная которого в нуле равна единице) локально обратимо. Однако, как мы уже неоднократно отмечали выше, теорема об обратной функции, вообще говоря, неверна для многообразий Фреше. По этой причине нас не должно удивлять следующее предложение, доказанное в [32], [65].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Экспоненциальное отображение*

$$\exp: \text{Vect}(S^1) \rightarrow \text{Diff}_+(S^1)$$

не является ни локально инъективным, ни локально сюръективным ни в какой окрестности нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что экспонента не является инъективной ни в какой окрестности нуля. Обозначим через $R_{2\pi/n}$ поворот окружности S^1 на угол $\frac{2\pi}{n}$ и заметим, что этот поворот можно выбрать сколь угодно близким к тождественному отображению $\text{id} \in \text{Diff}_+(S^1)$ при достаточно большом n .

Рассмотрим однопараметрические подгруппы группы $\text{Diff}_+(S^1)$ вида $f \circ S^1 \circ f^{-1}$, где $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ и S^1 отождествляется с подгруппой поворотов в группе $\text{Diff}_+(S^1)$. Обозначим через Γ_n подгруппу в $\text{Diff}_+(S^1)$, состоящую из диффеоморфизмов f , коммутирующих с поворотом $R_{2\pi/n}$:

$$R_{2\pi/n}^{-1} \circ f \circ R_{2\pi/n} = f.$$

Иными словами, это подгруппа, состоящая из $(2\pi/n)$ -периодических диффеоморфизмов в $\text{Diff}_+(S^1)$. Элемент $f \in \Gamma_n$ можно записать в виде

$$f(\theta) = \theta + h(\theta) \pmod{2\pi},$$

где h – гладкая $(2\pi/n)$ -периодическая функция на $\mathbb{R}$, а S^1 отождествляется с $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Если $f \in \Gamma_n$, то однопараметрическая подгруппа $f \circ S^1 \circ f^{-1}$ содержит $R_{2\pi/n}$, поскольку

$$f^{-1} \circ R_{2\pi/n} \circ f = R_{2\pi/n} \in S^1 \implies R_{2\pi/n} \in f \circ S^1 \circ f^{-1}.$$

Следовательно, все однопараметрические подгруппы Γ_n указанного выше вида пересекаются по $R_{2\pi/n}$, тем самым, экспонента не инъективна вблизи нуля.

Для доказательства того, что экспонента не является сюръекцией на некоторую окрестность id в группе $\text{Diff}_+(S^1)$, воспользуемся диффеоморфизмами из Γ_n , являющимися малыми деформациями поворота $R_{2\pi/n}$. Такие диффеоморфизмы $f \in \Gamma_n$ задаются формулой

$$f(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{n} + \epsilon \sin(n\theta) \pmod{2\pi}.$$

Для достаточно большого n и достаточно малого $\epsilon > 0$ диффеоморфизм указанного вида можно сделать сколь угодно близким к тождественному отображению. Точка $\theta = 0$ является *периодической точкой этого диффеоморфизма порядка n* , т.е.

$$f^n(0) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}(0) = 0 \pmod{2\pi},$$

но $f^n \neq \text{id}$, поскольку производная f^n в нуле равна (по правилу дифференцирования сложной функции) $(1 + \epsilon n)^n$. Более того, для достаточно малого ϵ диффеоморфизм f близок к повороту и потому не имеет неподвижных точек.

Отсюда следует, что f не является экспонентой никакого векторного поля $v \in \text{Vect}(S^1)$. Действительно, допуская противное, предположим, что $f = \exp v$ для некоторого $v \in \text{Vect}(S^1)$. Векторное поле $v = v(\theta) \frac{d}{d\theta}$ не обращается в нуль, поскольку f не имеет неподвижных точек. Следовательно, векторное поле $v(\theta) \frac{d}{d\theta}$ можно преобразовать в постоянное векторное поле $c \frac{d}{d\theta}$ с помощью гладкой замены переменной $\chi = \chi(\theta)$ вида

$$\chi(\theta) = c \int_0^\theta \frac{dt}{v(t)}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

где нормировочная константа $c = 2\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{dt}{v(t)} \right)^{-1}$ выбирается из условия: $\chi(2\pi) = 2\pi$. Это рассуждение показывает, что однопараметрическая подгруппа, порождаемая вектором v , сопряжена повороту R :

$$f = \chi^{-1} \circ R \circ \chi.$$

Тогда $f^n = \chi^{-1} \circ R^n \circ \chi$ и, поскольку $f^n(0) = 0$, поворот R^n имеет неподвижную точку, т.е. $R^n = \text{id}$, что противоречит соотношению $f^n \neq \text{id}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Последнее предложение утверждает, что существуют диффеоморфизмы в $\text{Diff}_+(S^1)$, которые не представляются в виде экспоненты гладкого векторного поля на окружности. Можно задаться вопросом, существуют ли диффеоморфизмы в $\text{Diff}_+(S^1)$, которые не представляются в виде n -й степени (относительно композиции) некоторого диффеоморфизма из $\text{Diff}_+(S^1)$? Ясно, что такие диффеоморфизмы, если они существуют, также не допускают представления в виде экспонент гладких векторных полей. Попробуем построить указанный диффеоморфизм, задавая его снова формулой вида

$$f(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{n} + \epsilon \tilde{h}(\theta) \pmod{2\pi}, \quad (2.1)$$

где $\epsilon > 0$ достаточно мало (отображение f является диффеоморфизмом S^1 , если ϵ не превосходит $1/\max |\tilde{h}'|$). Функция $\tilde{h}$, $0 \leq \tilde{h} \leq 1$, — это гладкая $2\pi/n$ -периодическая функция на

вещественной оси, сужение которой на интервал $[0, 2\pi/n)$ обозначается через h . Заметим, что нули функции $\tilde{h}$ являются n -периодическими точками диффеоморфизма f . Верно следующее утверждение.

Предположим, что h обращается в нуль на интервале $[0, 2\pi/n)$ в конечном числе точек, и это число не делится на n . Тогда для достаточно малого ϵ диффеоморфизм f , задаваемый формулой (2.1), не допускает представления в виде n -й степени какого-либо диффеоморфизма из $\text{Diff}_+(S^1)$.

Для доказательства этого утверждения заметим, что: если g есть диффеоморфизм из $\text{Diff}_+(S^1)$, то число орбит n -периодических точек отображения g^n кратно n . Последнее утверждение является следствием следующего комбинаторного факта: число орбит k -периодических точек отображения g^n кратно наибольшему общему делителю чисел n и k , обозначаемому через (n, k) , который легко проверить прямым подсчетом.

Чтобы вывести наше утверждение из замечания о числе n -орбит отображения g^n , достаточно показать, что диффеоморфизм f не имеет других n -периодических точек помимо тех, которые даются нулями функции $\tilde{h}$. Действительно, допустим на минуту, что мы уже показали, что множество n -периодических точек диффеоморфизма f совпадает с множеством нулей функции $\tilde{h}$. Число орбит n -периодических точек равно числу нулей функции h на интервале $[0, 2\pi/n)$, которое не делится на n по предположению. Следовательно, согласно приведенному выше замечанию, диффеоморфизм f не допускает представления в виде g^n ни для какого диффеоморфизма $g \in \text{Diff}_+(S^1)$.

Для доказательства того, что диффеоморфизм f не имеет других n -периодических точек помимо даваемых нулями функции $\tilde{h}$, предположим от противного, что существует n -периодическая точка θ_0 , в которой $h(\theta_0) > 0$. Рассмотрим орбиту $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n = \theta_0\}$ этой точки на S^1 под действием диффеоморфизма f . Тогда θ_n можно представить в виде

$$\theta_n = f^n(\theta_0) = \theta_0 + \epsilon(\tilde{h}(\theta_0) + \tilde{h}(\theta_1) + \dots + \tilde{h}(\theta_{n-1})) \mod 2\pi.$$

Если $f^n(\theta_0) = \theta_0 \mod 2\pi$, то $\epsilon(h(\theta_0) + \dots + h(\theta_{n-1})) = 0 \mod 2\pi$. Коэффициент при ϵ в последнем соотношении положителен и не превосходит n , поскольку $0 \leq h \leq 1$. Тем самым, это соотношение не может выполняться при $\epsilon < \frac{2\pi}{n}$, т.е. $f^n(\theta_0)$ не может равняться

θ_0 по модулю 2π . Полученное противоречие доказывает, что n -периодические точки диффеоморфизма f могут задаваться только нулями функции h , откуда следует, что диффеоморфизм f не допускает представления в виде g^n ни для какого диффеоморфизма $g \in \text{Diff}_+(S^1)$.

Пользуясь доказанным утверждением, легко построить конкретные примеры диффеоморфизмов $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, не допускающих представления в виде n -й степени ($n > 1$) какого-либо диффеоморфизма из $\text{Diff}_+(S^1)$. Например, можно взять диффеоморфизм f вида (2.1) с

$$h(\theta) = \sin^2(n \frac{\theta}{2}) \text{ при } 0 \leq \theta < 2\pi/n.$$

Или выбрать $h(\theta) = h_0(\frac{\pi}{n}(\theta + 1))$, где h_0 — гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$ вида

$$h_0(t) = (t - 1)^2(t + 1)^2 \text{ или } h_0(t) = e^{1/(t^2 - 1)} \text{ при } -1 \leq t < 1.$$

Все эти диффеоморфизмы f не допускают представления в виде n -й степени какого-либо диффеоморфизма из $\text{Diff}_+(S^1)$.

2.2.3. Простота группы $\text{Diff}_+(S^1)$. Одним из замечательных свойств группы $\text{Diff}_+(S^1)$ является ее простота, означающая, что единственными нормальными подгруппами в $\text{Diff}_+(S^1)$ являются единица и сама группа $\text{Diff}_+(S^1)$. Этот факт (который можно было предвидеть, исходя из предложения 2 в п. 2.2.1) доказан М. Эрманом в работах [33], [34]. В данном пункте будет дано доказательство следующего, более слабого утверждения, содержащегося в [33].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Любая нормальная подгруппа группы $\text{Diff}_+(S^1)$, содержащая подгруппу поворотов S^1 , совпадает со всей группой $\text{Diff}_+(S^1)$.*

Свойство простоты группы $\text{Diff}_+(S^1)$ тесно связано со следующей задачей, берущей свое начало от Пуанкаре и Данжуа: *когда диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ сопряжен повороту?* Мы уже касались этой задачи при доказательстве предложения 3 в п. 2.2.2. Здесь мы обсудим ее более подробно после короткого отступления, посвященного числу вращения Пуанкаре.

ОТСТУПЛЕНИЕ 1 (число вращения Пуанкаре). Пусть f есть произвольный диффеоморфизм из группы $\text{Diff}_+(S^1)$. Обозначим

через $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ его поднятие на $\mathbb{R}$, индуцированное универсальным накрывающим отображением

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1.$$

Тогда $\tilde{f}$ является диффеоморфизмом $\mathbb{R}$ вида $\tilde{f} = \text{id} + h$, где h – гладкая периодическая функция на вещественной оси с периодом 1. Обозначим множество диффеоморфизмов $\mathbb{R}$ указанного вида через $\text{Diff}_1(\mathbb{R})$. (Напомним, что функция $\tilde{f}$ определяется функцией f с точностью до целочисленной аддитивной постоянной). Заметим, что любой сдвиг $\tilde{R}_\lambda: x \mapsto x + \lambda$ вещественной оси $\mathbb{R}$ на вещественное число λ проектируется под действием указанного выше накрывающего отображения в поворот R_α окружности S^1 на угол $\alpha \equiv \lambda \pmod{1}$.

А. Пуанкаре обнаружил, что произвольный диффеоморфизм $\tilde{f} \in \text{Diff}_1(\mathbb{R})$, если итерировать его достаточно много раз, становится похожим на сдвиг $\tilde{R}_\lambda$. Более точно, существует равномерный предел

$$\frac{\tilde{f}^k - \text{id}}{k} \longrightarrow \lambda \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

где λ – вещественное число, которое называется *числом вращения* диффеоморфизма $\tilde{f}$ и обозначается через $\lambda = \tilde{\rho}(\tilde{f})$.

Отображение $\tilde{\rho}: \text{Diff}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно в C^0 -топологии. Более того, для любого сдвига $\tilde{R}_\lambda$ справедливы соотношения:

$$\tilde{\rho}(\tilde{R}_\lambda) = \lambda \text{ и } \tilde{\rho}(\tilde{R}_n \circ \tilde{f}) = n + \tilde{\rho}(\tilde{f}) \text{ для любого } n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому после проекции на S^1 получаем корректно определенное непрерывное отображение

$$\rho: \text{Diff}_+(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1,$$

сопоставляющее диффеоморфизму $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ его *число Пуанкаре* $\rho(f) \in S^1$. Это число является инвариантом относительно сопряжений.

Если число вращения диффеоморфизма $\tilde{f} \in \text{Diff}_1(\mathbb{R})$ рационально, т.е. $\tilde{\rho}(\tilde{f}) = \frac{p}{q}$ с взаимно простыми целыми числами p и q , то существует простой критерий его сопряженности сдвигу, а именно: *диффеоморфизм $\tilde{f}$ сопряжен сдвигу $\tilde{R}_{p/q}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{f}^q = \tilde{R}_p$.*

Ситуация в случае иррационального числа Пуанкаре является более сложной – все зависит от арифметической природы указанного числа. В. И. Арнольд (см. [4]) построил пример диффеоморфизма с иррациональным числом Пуанкаре, который не сопряжен сдвигу, и высказал гипотезу, что существует множество $A \subset S^1 \setminus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ полной меры Хаара на S^1 такое, что любой диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ с числом Пуанкаре $\alpha \in A$ сопряжен сдвигу R_α . Эта гипотеза была доказана М. Эрманом в работе [34]. Как и ожидалось, множество A в теореме Эрмана имеет диофантову природу и может быть охарактеризовано в терминах разложения числа α в непрерывную дробь.

Мы приведем здесь более простой результат Эрмана подобного типа, достаточный для доказательства сформулированного выше предложения 4.

Напомним, что, согласно принципу Дирихле, *любое иррациональное число λ можно аппроксимировать рациональными числами так, что при этом выполняется следующее соотношение*

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2},$$

где $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ – несократимая дробь.

Будем говорить, что число λ удовлетворяет *диофантову условию* (B_ϵ) с некоторым $\epsilon > 0$, если существует константа $C_\epsilon > 0$ такая, что для всех рациональных чисел p/q выполняется неравенство

$$\left| \lambda - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_\epsilon}{q^{2+\epsilon}}.$$

Если число λ удовлетворяет диофантову условию (B_ϵ) для любого ϵ (с константой C_ϵ , зависящей от ϵ), то число λ называется *числом Рота*, отвечающие таким числам точки $\alpha \in S^1$ образуют множество полной меры Хаара на окружности. (Числа, которые не удовлетворяют условию (B_ϵ) ни при каком $\epsilon > 0$, называются *числами Ливуилля*.)

ЛЕММА 1 (см. [33]). *Предположим, что $\alpha \in S^1 \setminus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ удовлетворяет условию (B_ϵ) при некотором $\epsilon > 0$. Тогда найдется окрестность U поворота R_α в группе $\text{Diff}_+(S^1)$ такая, что любой диффеоморфизм $f \in U$ допускает представление вида*

$$f = R_\beta \circ (g \circ R_\alpha \circ g^{-1})$$

с некоторыми $g \in \text{Diff}_+(S^1)$ и $\beta \in S^1$.

Доказательство леммы можно найти в статье [33], мы покажем только, как из нее вывести предложение 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Пусть H есть нормальная подгруппа в группе $\text{Diff}_+(S^1)$, содержащая S^1 . Выберем $\alpha \in S^1 \setminus (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, удовлетворяющее диофантову условию (B_ϵ) с некоторым $\epsilon > 0$. Поворот $R_\alpha \in H$ (поскольку $H \supset S^1$), а из леммы 1 вытекает, что и целая окрестность U поворота R_α принадлежит H ввиду нормальности H . Следовательно, подгруппа H открыта и потому содержит окрестность единицы в группе $\text{Diff}_+(S^1)$. Отсюда вытекает, что подгруппа H также замкнута, и следовательно должна совпадать со всей группой $\text{Diff}_+(S^1)$ ввиду связности $\text{Diff}_+(S^1)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В предложении 3 из п. 2.2.2 мы доказали, что существуют диффеоморфизмы из $\text{Diff}_+(S^1)$, не допускающие представления в виде экспоненты гладкого векторного поля на окружности. Пользуясь предложением 4, легко доказать, что, тем не менее, экспоненты гладких векторных полей порождают всю группу $\text{Diff}_+(S^1)$. Более точно, произвольный диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ может быть представлен в виде композиции

$$f = \exp v_1 \circ \cdots \circ \exp v_k$$

для некоторых гладких векторных полей $v_1, \dots, v_k \in \text{Vect}(S^1)$.

Другим нетривиальным следствием предложения 4 является то, что группа $\text{Diff}_+(S^1)$ *не допускает комплексификации*. Другими словами, *не существует комплексной группы Ли, имеющей комплексифицированную алгебру $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ своей алгеброй Ли*.

Это утверждение вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Группа $\text{Diff}_+(S^1)$ не допускает нетривиальных гомоморфизмов в связные комплексные группы Ли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем группу Мебиуса $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ дробно-линейных автоморфизмов единичного круга, которую можно рассматривать как подгруппу группы $\text{Diff}_+(S^1)$. Обозначим через $G_n := \text{PSL}^{(n)}(2, \mathbb{R})$ группу, которая является n -кратным накрытием группы $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Более подробно, обозначим через λ отображение, являющееся n -кратным накрытием окружности S^1 , задаваемым формулой $\lambda: z \mapsto z^n$. Тогда, по определению, группа G_n состоит из диффеоморфизмов окружности S^1 ,

которые являются n -кратными накрытиями диффеоморфизмов из $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Иначе говоря, для любого $\varphi \in G_n$ существует элемент $\psi \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ такой, что

$$\lambda \circ \varphi = \psi \circ \lambda.$$

На уровне алгебр Ли, алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ порождается векторными полями $\frac{d}{d\theta}$, $\sin \theta \frac{d}{d\theta}$, $\cos \theta \frac{d}{d\theta}$, а алгебра Ли группы G_n (изоморфная $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$) порождается векторными полями $\frac{d}{d\theta}$, $\sin(n\theta) \frac{d}{d\theta}$, $\cos(n\theta) \frac{d}{d\theta}$.

Центр группы G_n состоит из поворотов $\{R_{2\pi k/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$. Также, как в п. 2.1.3, можно показать, что любой гомоморфизм из группы G_n в связную комплексную группу Ли должен пропускаться через группу $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Иными словами, его ядро должно содержать все повороты из центра группы G_n . Отсюда следует, что ядро любого гомоморфизма из группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в связную комплексную группу Ли должно содержать все повороты вида $\{R_{2\pi k/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\}$ для любого n и, тем самым, все повороты из S^1 . Но ядро является нормальной подгруппой в $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, а любая нормальная подгруппа в $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, содержащая S^1 , должна совпадать, согласно предложению 4, со всей группой $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Это доказывает, что не существует нетривиальных гомоморфизмов из группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в связные комплексные группы Ли.

Библиографические указания

Общие свойства групп и алгебр Ли–Фреше приводятся в статье Гамильтона [32], уже упоминавшейся в библиографических указаниях к главе 1, а также в статье Милнора [55]. (См. также [47], где можно найти сведения, относящиеся к случаю банаховых групп Ли.)

Основными ссылками для параграфов 2.1 и 2.2 служат книга Прессли–Сигала [65] и статья Гамильтона [32]. В частности, предложение 1 приведено в п. 3.2 книги [65], также как пример, предшествующий этому предложению (доказательство предложения 1, принадлежащее К. А. Трушкину, заимствовано из [81]). Предложение 2 доказывается, например, в статье [72] (см. также [81]). Свойство экспоненциального отображения для алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$, являющееся предметом предложения 3, было указано Р. Гамильтоном в статье [32]. Решение задачи, рассмотренной

в замечании 3, предложено В.В. Кругловым (см. [81]). Простота группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$, также как и более простая версия этого утверждения, содержащаяся в предложении 4, доказаны Эрманом [33], [34]. Предложение 5 о несуществовании комплексификации группы $\text{Diff}_+(S^1)$ приведено в [65].

Глава 3. Многообразия флагов и представления

Многообразия флагов – это компактные кэлеровы многообразия с однородным действием некоторой группы Ли. Характеристическим свойством этих многообразий является существование двух типов представлений в виде однородных пространств, именно, “вещественного” представления в виде фактора компактной группы Ли G , и “комплексного” представления в виде фактора комплексифицированной группы Ли $G^{\mathbb{C}}$. Из вещественного представления вытекает, что флаговое многообразие компактно и однородно относительно действия группы G левыми сдвигами, а из комплексного представления следует, что оно является комплексным кэлеровым многообразием.

Многообразия флагов тесно связаны с представлениями группы G с помощью конструкции Бореля–Вейля. Эта конструкция приводится в п. 3.2.2 (необходимые сведения из теории представлений полупростых групп Ли даны в п. 3.2.1). Последний п. 3.2.3 содержит обзор метода орбит, связанного с коприсоединенным представлением группы G , лежащего в основе многих конструкций из этой книги.

§ 3.1. Многообразия флагов

3.1.1. Геометрическое определение многообразий флагов. Для того чтобы определить многообразия флагов в $\mathbb{C}^n$, фиксируем разложение числа n в сумму натуральных чисел

$$n = k_1 + \dots + k_r$$

и обозначим $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_r)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. *Многообразие флагов типа $\mathbf{k}$ в $\mathbb{C}^n$ есть пространство*

$$\begin{aligned} \mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n) = \{ \text{флаги } \mathbf{E} = (E_1, \dots, E_r) : E_i \text{ — линейные} \\ \text{подпространства в } \mathbb{C}^n : E_1 \subset \dots \subset E_r \\ \text{с } \dim E_i = k_1 + \dots + k_i \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В частности, при $\mathbf{k} = (k, n - k)$ получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{Fl}_{(k, n-k)}(\mathbb{C}^n) &= \{\text{подпространства } E \subset \mathbb{C}^n \text{ размерности } k\} \\ &= \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n),\end{aligned}$$

т.е. многообразие флагов в этом случае есть не что иное, как *грассманово многообразие* k -мерных подпространств в $\mathbb{C}^n$. При $k = 1$ оно совпадает с $(n - 1)$ -мерным комплексным проективным пространством $\mathrm{Fl}_{(1, n-1)}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{CP}^{n-1}$.

При $\mathbf{k} = (1, \dots, 1)$ многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n) =: \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ называется *многообразием полных флагов*

$$\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n) = \{E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_{n-1} \subset E_n = \mathbb{C}^n : \dim E_i = i\}.$$

Унитарная группа $U(n)$ действует транзитивно на многообразии флагов $\mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n)$, так что $\mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n)$ совпадает с однородным пространством этой группы. Более подробно, фиксируем базис в $\mathbb{C}^n$ и обозначим через $\mathbf{E}^0$ *стандартный флаг* в $\mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n)$ с $\mathbf{E}^0 = (E_1^0, \dots, E_r^0)$, где E_i^0 есть подпространство в $\mathbb{C}^n$, порождаемое первыми $k_1 + \dots + k_i$ векторами нашего базиса. Подгруппа изотропии группы $U(n)$ в точке $\mathbf{E}^0$ совпадает с прямым произведением

$$U_{\mathbf{k}}(n) = U(k_1) \times \dots \times U(k_r),$$

так что флаговое многообразие $\mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n)$ является однородным пространством группы $U(n)$ вида

$$\mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n) = U(n)/U_{\mathbf{k}}(n) = U(n)/U(k_1) \times \dots \times U(k_r). \quad (3.2)$$

С другой стороны, комплексная линейная группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ также действует на $\mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n)$ транзитивно. Ее подгруппа изотропии в стандартном флаге $\mathbf{E}^0 \in \mathrm{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n)$ совпадает с подгруппой $P_{\mathbf{k}}$ блочных верхне-треугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} * & r_1 & * & & * & \dots & * \\ \hline r_1 & \boxed{\quad} & & & & & \\ 0 & * & r_2 & * & \dots & * & \\ & \boxed{\quad} & & & & & \\ & & r_2 & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_n & \boxed{\quad} & * \\ & & & & & r_n & \end{pmatrix}$$

Поэтому наряду с “вещественным” однородным представлением (3.2), мы получаем для многообразия $\text{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n)$ “комплексное” представление в виде однородного пространства группы $\text{GL}(n, \mathbb{C})$:

$$\text{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n) = \text{GL}(n, \mathbb{C})/P_{\mathbf{k}}. \quad (3.3)$$

В частных случаях $\mathbf{k} = (k, n-k)$ и $\mathbf{k} = (1, \dots, 1)$ оно сводится к хорошо известным однородным представлениям для грассмано-ва многообразия

$$\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = \text{U}(n)/\text{U}(k) \times \text{U}(n-k) = \text{GL}(n, \mathbb{C})/P_{(k, n-k)}$$

и многообразия полных флагов

$$\text{Fl}(\mathbb{C}^n) = \text{U}(n)/T^n = \text{GL}(n, \mathbb{C})/B_+,$$

где $T^n = \text{U}(1) \times \dots \times \text{U}(1)$ — n -мерный тор и $B_+ = P_{(1, \dots, 1)}$ — стандартная борелевская подгруппа верхне-треугольных матриц.

Заметим, что многообразие флагов $\text{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n)$ можно также представить в виде однородного пространства комплексной полупростой группы Ли, заменяя группу $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ группой $\text{SL}(n, \mathbb{C})$. Соответствующие однородные представления примут вид

$$\text{Fl}_{\mathbf{k}}(\mathbb{C}^n) = \text{SU}(n)/\text{SU}_{\mathbf{k}}(n) = \text{SL}(n, \mathbb{C})/SP_{\mathbf{k}},$$

где

$$\begin{aligned} \text{SU}_{\mathbf{k}}(n) &= \text{S}[\text{U}(k_1) \times \dots \times \text{U}(k_n)] = \text{U}(k_1) \times \dots \times \text{U}(k_n) \cap \text{SL}(n, \mathbb{C}), \\ SP_{\mathbf{k}}(n) &= P_{\mathbf{k}} \cap \text{SL}(n, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

3.1.2. Борелевские и параболические подалгебры. Для того чтобы дать инвариантное определение флаговых многообразий, нам понадобятся некоторые сведения, относящиеся к борелевским и параболическим подалгебрам. Напомним их здесь, предполагая, что читатель знаком с основами теории полупростых алгебр и групп Ли, представленными, например, в книгах [77], [76], [28], [68].

Пусть $G_{\mathbb{C}}$ есть комплексная полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Напомним, что *картановской подалгеброй* в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ называется максимальная коммутативная подалгебра $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, для которой

все операторы вида $\text{ad } x$, $x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, являются диагональными в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Все картановские подалгебры в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ сопряжены друг другу относительно присоединенного действия группы $G_{\mathbb{C}}$ на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Стандартным примером картановской подалгебры в случае общей матричной алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \text{gl}(n, \mathbb{C})$ является алгебра всех диагональных матриц в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Фиксируем теперь картановскую подалгебру $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ в комплексной полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ и рассмотрим присоединенное действие ad подалгебры $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Заметим, что операторы $\text{ad } h$ с различными $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ коммутируют друг с другом. Собственные подпространства присоединенного представления, имеющие вид

$$\mathfrak{g}_{\alpha} = \{\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} : \text{ad } h(\xi) = \alpha(h)\xi\},$$

где α – линейный функционал на $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ (т.е. элемент двойственного пространства $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$), называются *корневыми подпространствами*. Линейные функционалы α из этого определения называются *корнями* алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, а собственные векторы ξ – *корневыми векторами*. В частности, корневое подпространство $\mathfrak{g}_0$, отвечающее нулевому функционалу $\alpha = 0 \in \mathfrak{h}^*$, совпадает с самой картановской подалгеброй $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму своих корневых подпространств

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad (3.4)$$

где Δ обозначает множество всех ненулевых корней алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Это разложение, называемое *корневым разложением*, задает фильтрацию в алгебре $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, поскольку

$$[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}.$$

Подмножество $\Pi \subset \Delta$ называется *множеством простых корней*, если любой корень $\alpha \in \Delta$ можно представить в виде линейной комбинации корней из Π с целочисленными коэффициентами, так что все эти коэффициенты одновременно либо положительны, либо отрицательны. Такие подмножества Π , образующие базисы в $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$, всегда существуют. Более того, можно показать, что все они сопряжены друг другу относительно коприсоединенного действия группы $G_{\mathbb{C}}$.

Фиксируем некоторое множество $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ простых корней алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Выбор Π задает на $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ (и, следовательно, на Δ)

частичное упорядочение: именно, для $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ отношение $\alpha \geq \beta$ означает, что

$$\alpha - \beta = \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i \text{ с } a_i \geq 0.$$

В частности, корень $\alpha \in \Delta$ называется *положительным* (обозначение: $\alpha \in \Delta^+$), если

$$\alpha = \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i \text{ с } a_i > 0.$$

Пользуясь формой Киллинга $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, можно отождествить двойственное пространство $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ с $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, так что любой корень α можно также рассматривать как элемент α^* алгебры $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Сопоставим корню α алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ *двойственный корень* или *кокорень* $\alpha^\vee$ по формуле

$$\alpha^\vee = 2 \frac{\alpha^*}{(\alpha, \alpha)}.$$

Хорошо известно, что *система простых корней* $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ и ее *матрица Картана*, задаваемая как

$$c_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j^\vee),$$

однозначно определяют алгебру Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

ПРИМЕР 23. Рассмотрим в качестве примера комплексную полупростую алгебру Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Выберем в $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ стандартную картановскую подалгебру $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, состоящую из диагональных матриц. Обозначим через E_{ij} матрицу, имеющую 1 на (i, j) -м месте, и нули во всех остальных местах. Матрицы E_{ij} являются корневыми векторами алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$:

$$\text{ad}(z_1, \dots, z_n)E_{ij} = (z_i - z_j)E_{ij},$$

где через $(z_1, \dots, z_n)$ обозначается диагональная матрица $\text{diag}(z_1, \dots, z_n)$.

Введем функционал $\epsilon_i \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ по формуле

$$\epsilon_i(z_1, \dots, z_n) = z_i.$$

Тогда корни алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ относительно $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ будут иметь вид

$$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_j : i \neq j\}.$$

Корни

$$\Pi = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\}$$

образуют систему простых корней, так что множество положительных корней совпадает с

$$\Delta^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j : i < j\}.$$

По аналогии с борелевской подалгеброй верхне-треугольных матриц в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, определим *стандартную борелевскую подалгебру* $\mathfrak{b}_+$ комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ как

$$\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_+,$$

где $\mathfrak{n}_+$ – нильпотентная подалгебра вида

$$\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

В частном случае алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, рассмотренной в примере 23, подалгебра $\mathfrak{n}_+$ совпадает с подалгеброй наддиагональных матриц, в то время как $\mathfrak{b}_+$ есть подалгебра верхне-треугольных матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22. *Борелевской подалгеброй* называется подалгебра $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, сопряженная стандартной борелевской подалгебре $\mathfrak{b}_+$ относительно присоединенного действия группы $G_{\mathbb{C}}$ на $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. (Более инвариантным образом, борелевская подалгебра является максимальной разрешимой подалгеброй в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.) Любая подалгебра $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, содержащая борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}$, называется *параболической*.

Как и в случае борелевских подалгебр, можно определить параболические подалгебры $\mathfrak{p}$ как подалгебры в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, сопряженные одной из стандартных параболических подалгебр. Указанные стандартные подалгебры (их явное описание дано ниже) аналогичны параболическим подалгебрам $\mathfrak{p}_{\mathbf{k}}$ алгебры $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, являющимися алгебрами Ли параболических подгрупп $P_{\mathbf{k}}$ из п. 3.1.1.

Приведем теперь определение стандартных параболических подалгебр в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Для этого фиксируем множество $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$

простых корней алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ и произвольное упорядоченное подмножество π множества $\{1, \dots, l\}$. Сопоставим π подмножество $\Pi_{\pi} \subset \Pi$ простых корней с индексами из π . Для определения стандартной параболической подалгебры $\mathfrak{p}_{\pi}$, обозначим через Δ_{π} линейную оболочку простых корней из Π_{π} в Δ и введем *редуктивную подалгебру Леви* вида

$$\mathfrak{l}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\pi}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Определим также *нильпотентную подалгебру* алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, полагая

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^{+} \setminus \Delta_{\pi}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

По определению, *стандартная параболическая подалгебра* $\mathfrak{p}_{\pi}$ есть

$$\mathfrak{p}_{\pi} = \mathfrak{l}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u}.$$

Она содержит стандартную борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}_{+}$ и потому действительно является параболической подалгеброй. В случае алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ подалгебра $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ совпадает с подалгеброй блочно-диагональных матриц в алгебре $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, тогда как $\mathfrak{u}$ совпадает с подалгеброй блочных наддиагональных матриц.

3.1.3. Алгебраическое определение многообразий флагов. После предыдущего алгебраического отступления мы можем перейти к инвариантному определению флаговых многообразий комплексной полупростой группы Ли $G_{\mathbb{C}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23. Пусть $\mathfrak{p}$ есть произвольная параболическая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ и P – соответствующая ей параболическая подгруппа группы $G_{\mathbb{C}}$, имеющая $\mathfrak{p}$ своей алгеброй Ли. (Иначе, параболическую подгруппу P можно определить как нормализатор $N(\mathfrak{p})$ подалгебры $\mathfrak{p}$ в $G_{\mathbb{C}}$ относительно присоединенного представления.) *Многообразием флагов* группы $G_{\mathbb{C}}$, ассоциированным с параболической подалгеброй $\mathfrak{p}$, называется однородное пространство вида

$$F = G_{\mathbb{C}}/P. \quad (3.5)$$

Наряду с “комплексным” представлением (3.5), выбранным за определение многообразия флагов F , существует и “вещественное” представление F в виде однородного пространства вещественной группы Ли. Именно, предположим, что группа $G_{\mathbb{C}}$ совпадает с комплексификацией $G^{\mathbb{C}}$ компактной группы Ли G . Тогда G действует транзитивно на $G^{\mathbb{C}}/P$ и

$$F = G/G \cap P = G/L, \quad (3.6)$$

где подгруппа Леви $L = G \cap P$ в случае стандартной параболической подалгебры $\mathfrak{p}$ имеет своей алгеброй Ли алгебру, задаваемую вещественной формой $\mathfrak{l}$ подалгебры Леви $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$, введенной выше в п. 3.1.2. (Более инвариантным образом, подгруппу Леви L можно определить как централизатор некоторого тора в G .)

Итак, мы получили для многообразия флагов F два различных представления в виде однородного пространства

$$F = G/L = G^{\mathbb{C}}/P.$$

Из комплексного представления (3.5) вытекает, что F есть комплексное многообразие, наделенное G -инвариантной комплексной структурой. Пространство касательных векторов типа $(1, 0)$ в начале относительно этой структуры отождествляется с подалгеброй $\bar{\mathfrak{u}}$ в разложении

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u} \oplus \bar{\mathfrak{u}}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u},$$

где комплексное сопряжение в алгебре $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ выбрано так, что $\bar{\bar{\mathfrak{g}}} = \mathfrak{g}$.

Из вещественного представления (3.6) вытекает, что F компактно и кэлерово. Заметим также, что F односвязно, если группа G односвязна. Можно показать, что флаговые многообразия F исчерпывают все односвязные компактные кэлеровы G -многообразия с транзитивным действием компактной полупростой группы Ли G (см. [10], [78]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из вещественного представления (3.6) следует, что алгебра Ли $\mathfrak{p}$ параболической подгруппы P имеет вид

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u}$$

где $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$ – подалгебра Леви и $\mathfrak{u}$ – нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{p}$, описанная для случая стандартных параболических подалгебр

в п. 3.1.2. Параболические подалгебры можно также определить в терминах так называемого канонического элемента.

Именно, для любой параболической подалгебры $\mathfrak{p}$ существует единственный элемент ξ (принадлежащий центру подалгебры Леви $\mathfrak{l}^{\mathbb{C}}$), для которого оператор $\text{ad } \xi$ имеет только мнимые целочисленные собственные значения, принадлежащие $\sqrt{-1}\mathbb{Z}$. Такой элемент ξ называется каноническим элементом параболической подалгебры $\mathfrak{p}$. (Это утверждение доказано, например, в [15], теорема 4.4.)

Воспользуемся этим эквивалентным определением параболических подалгебр для построения некоторого канонического расслоения, ассоциированного с флаговым многообразием. Важность канонического расслоения станет очевидной в п. 7.5, где будет показано, что пространство петель ΩG можно рассматривать в качестве универсального флагового многообразия группы G .

Обозначим через $\mathfrak{g}_j$ собственное подпространство оператора $\text{ad } \xi$ с собственным значением $\sqrt{-1}j$. В терминах $\mathfrak{g}_j$ параболическая подалгебра $\mathfrak{p}$ и нильпотентная подалгебра $\mathfrak{u}$ могут быть описаны следующим образом:

$$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_i, \quad \mathfrak{u} = \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{g}_i.$$

Определим теперь симметрическое пространство $N = N(F)$, канонически ассоциированное с флаговым многообразием F , полагая

$$N = G/K,$$

где K – подгруппа G , имеющая алгеброй Ли

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \left[\bigoplus_i \mathfrak{g}_{2i} \right].$$

Так как алгебра Ли $\mathfrak{l}$ подгруппы Леви L содержится в $\mathfrak{g}_0$, то существует однородное расслоение

$$F = G/L \longrightarrow G/K = N$$

флагового многообразия F над ассоциированным симметрическим пространством N . Тем самым мы построили для нашего флагового многообразия F ассоциированное симметрическое G -пространство $N = N(F)$ и каноническое однородное расслоение

$F \rightarrow N$. Заметим, что симметрическое пространство N однозначно определяется многообразием F , в то же время каноническое расслоение $F \rightarrow N$ задается неоднозначно из-за того, что различные точки N могут иметь один и тот же стабилизатор K . Число таких точек конечно, поэтому может существовать не более конечного числа канонических расслоений указанного выше вида.

Важность многообразий флагов объясняется, в частности, тем, что все неприводимые представления группы G могут быть реализованы в пространствах голоморфных сечений комплексных линейных расслоений над флаговыми многообразиями группы G . Указанная реализация дается конструкцией Бореля–Вейля, приведенной в п. 3.2.2. Прежде, чем переходить к ее построению, нам необходимо напомнить некоторые основные факты из теории представлений комплексных полупростых групп Ли. Эти факты собраны в следующем п. 3.2.1 (более подробное изложение указанной теории можно найти в книгах [76], [77], [28], [39], [68]).

§ 3.2. Неприводимые представления

3.2.1. Неприводимые представления комплексных полупростых групп Ли. Пусть $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ есть картановская подалгебра комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ и $\rho: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End } V$ – представление алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ в комплексном векторном пространстве V .

Весом представления ρ называется линейный функционал $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$, для которого существует вектор $v \in V \setminus \{0\}$, называемый *весовым вектором* такой, что

$$\rho(h)v = \lambda(h)v \text{ для любого } h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}.$$

Линейное подпространство V_{λ} , состоящее из векторов $v \in V$, удовлетворяющих соотношению $\rho(h)v = \lambda(h)v$ для любого $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, называется *весовым подпространством* с весом λ .

Обозначим через $\Delta_{\rho}(V) \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ пространство весов представления ρ . Имеется *весовое разложение* представления ρ , аналогичное корневому разложению (3.4) для присоединенного представления $\rho = \text{ad}$ из п. 3.1.2. Оно имеет вид

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \Delta_{\rho}(V)} V_{\lambda},$$

где V_{λ} – весовое подпространство с весом λ .

Фиксируем систему $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ простых корней алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. Среди весов представления особую роль играют *старшие веса*, являющиеся максимальными элементами в множестве всех весов представления по отношению к частичному порядку на пространстве $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$, введенному в п. 3.1.2. Старший вес Λ представления ρ характеризуется тем свойством, что его весовой вектор v зануляется под действием нильпотентной подалгебры $\mathfrak{n}_+$, т.е.

$$\rho(\xi)v = 0 \text{ для любого } \xi \in \mathfrak{n}_+.$$

Сопоставим системе $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ простых корней алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ двойственную систему весов $\{\omega_1, \dots, \omega_l\}$, определяемых соотношением

$$(\omega_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij},$$

где $\alpha_j^\vee$ – кокорень, ассоциированный с α_j (см. п. 3.1.2). Элементы $\omega_1, \dots, \omega_l \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ называются *фундаментальными весами* и образуют базис в пространстве весов, так что любой вес $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_j (\lambda, \alpha_j^\vee) \omega_j$$

и однозначно определяется коэффициентами $(\lambda, \alpha_j^\vee)$. Вес λ называется *доминантным*, если все коэффициенты $(\lambda, \alpha_j^\vee)$ являются неотрицательными числами.

Старшие веса однозначно определяют неприводимые представления комплексной полупростой алгебры Ли. Более точно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть ρ есть неприводимое представление комплексной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Тогда оно обладает единственным старшим весом Λ . Этот вес доминантен и любой другой вес $\lambda \in \Delta_\rho(V)$ записывается в виде

$$\lambda = \Lambda - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_k}, \text{ где } \alpha_{i_j} \in \Pi.$$

Неприводимое представление однозначно (с точностью до эквивалентности) определяется своим старшим весом.

В дополнение к последнему утверждению теоремы заметим, что неприводимое представление можно восстановить по старшему весу Λ с помощью следующей конструкции. Пусть v_Λ есть

весовой вектор, отвечающий весу Λ . Тогда по определению

$$\rho(\xi)v_\Lambda = 0 \text{ для любого } \xi \in \mathfrak{n}_+, \quad (3.7)$$

$$\rho(h)v_\Lambda = \Lambda(h)v_\Lambda \text{ для любого } h \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим векторы, которые получаются из старшего вектора v_Λ под действием элементов нильпотентной подалгебры $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Более точно, обозначим

$$v_{i_1 \dots i_k} = \rho(\xi_{-i_k}) \cdot \dots \cdot \rho(\xi_{-i_1})v_\Lambda,$$

где $\xi_{-i} \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$. Векторы $\{v_\Lambda, v_{i_1 \dots i_k}\}$ порождают подпространство $\widehat{V}$ с естественным действием представления ρ . Искомое пространство представления V получается из $\widehat{V}$ факторизацией по максимальному инвариантному подпространству в $\widehat{V}$ (отличному от $\widehat{V}$) и наделяется индуцированным действием представления ρ .

В теории представлений групп петель LG принято пользоваться вместо высших и доминантных весов *младшими* и *антидоминантными весами*, двойственными к введенным старшим и доминантным весам. Главным основанием для такой замены является тот факт, что конструкция Бореля–Вейля неприводимых представлений комплексных полупростых групп Ли, описываемая в следующем п. 3.2.2, естественно формулируется именно в терминах младших и антидоминантных весов. Для того, чтобы перейти к младшим и антидоминантным весам, достаточно в приведенных выше определениях заменить нильпотентную подалгебру $\mathfrak{n}_+$ ее партнером $\mathfrak{n}_-$, определяемым посредством

$$\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Отсюда следует, в частности, что вес λ антидоминантен тогда и только тогда, когда вес $-\lambda$ доминантен. Если V есть представление алгебры $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ со старшим весом Λ , то представление $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ с младшим весом $-\Lambda$ реализуется в двойственном векторном пространстве V^* . Приведенная выше теорема 1 допускает очевидную переформулировку в терминах антидоминантных младших весов.

3.2.2. Конструкция Бореля–Вейля. Конструкция Бореля–Вейля, представленная в этом пункте, реализует неприводимое представление комплексной полупростой группы Ли, ассоциированное с заданным младшим весом (или характером подгруппы Картана), в пространстве голоморфных сечений комплексного линейного расслоения над многообразием полных флагов.

Предположим, что группа Ли $G^{\mathbb{C}}$ является комплексификацией компактной группы Ли G и H – ее картановская подгруппа. *Характером* группы H называется гомоморфизм $\lambda: H \rightarrow \mathbb{C}^*$ в мультипликативную группу ненулевых комплексных чисел $\mathbb{C}^*$. Группа $X(H)$ всех характеров H является свободной абелевой группой порядка, равного $\dim H$. Если $\lambda \in X(H)$ есть характер H , то отображение λ_* , касательное к λ , линейно и потому принадлежит двойственному пространству $\mathfrak{h}^*$. Это задает мономорфизм группы $X(H)$ в $\mathfrak{h}^*$, который позволяет отождествить характер λ с соответствующим линейным функционалом λ_* .

Допустим теперь, что подгруппа H совпадает с *максимальным тором* (т.е. H – максимальная коммутативная подгруппа в $G^{\mathbb{C}}$, изоморфная произведению нескольких экземпляров группы $\mathbb{C}^*$). Пусть $R: G^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ есть линейное представление группы $G^{\mathbb{C}}$. Если $\lambda \in X(H)$ – характер подгруппы H , то, по аналогии с п. 3.2.1, он называется *весом представления* R , если существует вектор $v \in V \setminus \{0\}$, называемый *весовым вектором*, такой что

$$R(h)v = \lambda(h)v \text{ для любого } h \in H. \quad (3.9)$$

Векторы $v \in V$, удовлетворяющие соотношению (3.9), образуют *весовое подпространство* V_λ , ассоциированное с весом λ .

Любое представление $R: G^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ группы $G^{\mathbb{C}}$ допускает *весовое разложение*

$$V = \bigoplus_{\text{веса } \lambda \text{ представления } R} V_\lambda,$$

где суммирование ведется по всем весам $\lambda \in X(H)$ представления R . Это разложение аналогично весовому разложению алгебр Ли из п. 3.2.1. Более того, веса представления R группы $G^{\mathbb{C}}$ можно отождествить с соответствующими весами ассоциированного представления $R_*: \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathrm{End} V$ алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, при этом ассоциированные весовые подпространства будут совпадать.

Предположим далее, что максимальный комплексный тор H является комплексификацией некоторого максимального тора T в группе G . По аналогии с п. 3.1.1, определим многообразие полных флагов F , ассоциированное с T , как

$$F = G/T = G^{\mathbb{C}}/B_+, \quad (3.10)$$

где B_+ – стандартная борелевская подгруппа в $G^{\mathbb{C}}$, имеющая стандартную борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}_+$ из п. 3.1.2 своей алгеброй Ли. На уровне алгебр Ли однородные представления (3.10) отвечают разложениям

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_- = \mathfrak{b}_+ \oplus \mathfrak{n}_-. \quad (3.11)$$

Пусть $\lambda \in X(H)$ – характер подгруппы H , ассоциированный с младшим весом алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Его можно продолжить до голоморфного гомоморфизма $\lambda: B_+ \rightarrow \mathbb{C}^*$ борелевской подгруппы B_+ , полагая равным 1 на подгруппе N_+ , имеющей нильпотентную подалгебру $\mathfrak{n}_+$ своей алгеброй Ли. Определим *однородное комплексное линейное расслоение L_λ над флаговым многообразием $F = G^{\mathbb{C}}/B_+$, ассоциированное с характером λ* :

$$\begin{array}{c} L_\lambda = G^{\mathbb{C}} \times_{B_+} \mathbb{C} \\ \downarrow \\ F = G^{\mathbb{C}}/B_+ \end{array}$$

где $G^{\mathbb{C}} \times_{B_+} \mathbb{C}$ отождествляется с фактором $G^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$ по отношению эквивалентности: $(gb, c) \sim (g, \lambda(b)c)$ для любых $g \in G^{\mathbb{C}}$, $b \in B_+$ и $c \in \mathbb{C}$. Сечения линейного расслоения L_λ можно отождествить с функциями $f: G^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющими соотношению

$$f(gb) = \lambda(b^{-1})f(g) \text{ для любых } g \in G^{\mathbb{C}}, b \in B_+. \quad (3.12)$$

Обозначим через Γ_λ *пространство голоморфных сечений расслоения L_λ* или, другими словами, пространство голоморфных функций на $G^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих условию (3.12). Группа $G^{\mathbb{C}}$ действует слева на расслоении L_λ и, следовательно, на пространстве Γ_λ .

ТЕОРЕМА 2 (ТЕОРЕМА БОРЕЛЯ–ВЕЙЛЯ). *Если вес λ антидоминантен, то представление группы G в пространстве голоморфных сечений Γ_λ , построенное выше, является неприводимым представлением младшего веса λ и все неприводимые представления группы G могут быть реализованы подобным образом.*

3.2.3. Метод орбит и коприсоединенное представление. В этом пункте дается краткий обзор другого метода построения неприводимых представлений групп Ли, использующего

орбиты коприсоединенного представления группы на пространстве, двойственном к ее алгебре Ли (подробнее об этом методе см. книгу [39]). Хотя мы не пользуемся этим методом для построения представлений, нам показалось полезным объяснить его идею с тем, чтобы иметь мотивировку для изучения коприсоединенных представлений различных бесконечномерных групп, рассматриваемых в книге.

Начнем с напоминания основных фактов о характерах неприводимых представлений. Пусть $T: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ – конечномерное представление группы Ли G . Определим его *характер* как функцию $\chi_T: G \rightarrow \mathbb{C}^*$, задаваемую формулой

$$\chi_T(g) := \mathrm{Tr} T(g), g \in G.$$

Эта функция постоянна на классах сопряженности и зависит только от класса эквивалентности представления T . Более того, она является гомоморфизмом по отношению к операции тензорного произведения представлений, т.е. $\chi_{T_1 \otimes T_2} = \chi_{T_1} \chi_{T_2}$. Характер неприводимого представления определяет его однозначно с точностью до эквивалентности.

Пусть G – компактная группа Ли и $L^2(G, dg)$ обозначает пространство всех квадратично интегрируемых функций на G относительно меры Хаара dg . Характеры всех неприводимых унитарных представлений группы G образуют ортонормированный базис в подпространстве $L^2(G, dg)$, состоящем из функций, постоянных на классах сопряженности.

Определение характера представления T , данное выше, справедливо, очевидно, только для конечномерных представлений T . Однако часто удается определить характер бесконечномерного представления как обобщенную функцию на группе G . Именно, обозначим через $\mathcal{D}(G)$ пространство C^∞ -гладких функций на группе G и предположим, что все операторы вида

$$T(f) := \int_G f(g) T(g) dg, \quad f \in \mathcal{D}(G),$$

являются ядерными, т.е. имеют след (определение класса ядерных операторов или операторов со следом дано ниже в п. 5.3). Тогда мы можем определить характер представления T как обобщенную функцию на пространстве $\mathcal{D}(G)$ пробных функций или, другими словами, как непрерывный линейный функционал на

$\mathcal{D}(G)$, действующий по формуле

$$\chi_T(f) := \text{Tr } T(f), \quad f \in \mathcal{D}(G).$$

Если, в частности, группа G полупроста, то характер χ_T можно задать формулой

$$\chi_T(f) = \int_G \chi_T(g) f(g) dg,$$

где χ_T – некоторая измеримая локально интегрируемая функция на G . Как и в случае конечномерных представлений, характер $\chi_T(f)$ постоянен на классах сопряженности, т.е.

$$\chi_T(f) = \text{Tr } T(f) = \text{Tr}[T(g)T(f)T(g^{-1})]$$

для любых $f \in \mathcal{D}(G)$, $g \in G$. Снова неприводимое представление однозначно определяется (с точностью до эквивалентности) своим характером.

Обратимся теперь к *коприсоединенному представлению* группы G . Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G и $\mathfrak{g}^*$ – двойственное к ней пространство. Присоединенное действие Ad группы G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ индуцирует по двойственности *коприсоединенное действие* Ad^* группы G на пространстве $\mathfrak{g}^*$.

Рассмотрим орбиту $F = G \cdot \varphi$ произвольной точки $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ в пространстве $\mathfrak{g}^*$ относительно коприсоединенного действия и обозначим через G_φ подгруппу изотропии в точке φ . Пусть $\mathfrak{g}_\varphi$ есть алгебра Ли группы G_φ . Тогда касательное пространство к орбите F в точке φ можно отождествить с фактором $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\varphi$.

Орбиты F коприсоединенного представления являются симплектическими многообразиями, наделенными канонической *симплектической формой Кириллова* ω_F . Эта форма порождается G_φ -инвариантной 2-формой ω_φ на $\mathfrak{g}$, задаваемой формулой

$$\omega_\varphi(\xi, \eta) := \varphi([\xi, \eta]), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Ядро ω_φ на пространстве $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{g}_\varphi$, поэтому форму ω_φ можно спустить до формы на $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\varphi$ (обозначаемой той же буквой), которая является уже невырожденной G_φ -инвариантной 2-формой на $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\varphi$. Последнюю форму можно продолжить до невырожденной G -инвариантной 2-формы ω_F на F , которая не зависит от выбора точки φ на орбите F . Более того, форма ω_φ удовлетворяет тождеству Якоби, поэтому задает коцикл на $\mathfrak{g}$. Отсюда следует, что индуцированная G -инвариантная 2-форма ω_F

замкнута на F , и потому определяет симплектическую структуру на F .

Можно показать, что любое G -однородное (относительно действия связной группы Ли G симплектическими преобразованиями) симплектическое многообразие M локально изоморфно орбите группы G или ее центрального расширения $\tilde{G}$ в коприсоединенном представлении (см. [46]).

Поясним теперь идею *метода орбит*. Мы хотим построить неприводимое унитарное представление T по орбите коприсоединенного представления в $\mathfrak{g}^*$.

Пусть $F = G \cdot \varphi$ – такая орбита. Построим по ней одномерное унитарное представление группы G_φ . В окрестности единицы группы G_φ определим его формулой

$$\chi(\exp \xi) = e^{2\pi i \varphi(\xi)},$$

где $\exp: \mathfrak{g}_\varphi \rightarrow G_\varphi$ – экспоненциальное отображение. Оно продолжается до представления подгруппы изотропии G_φ и индуцирует неприводимое унитарное представление T_F всей группы G , если орбита F является *целочисленной*, т.е. каноническая симплектическая форма ω_F является целочисленной формой на F (определение целочисленной формы дано в начале п. 8.1).

Характер неприводимого унитарного представления T_F дается формулой

$$\chi_F(\exp \xi) = \frac{1}{p_F(\exp \xi)} \int_F e^{2\pi i \varphi(\xi)} \beta_F(\varphi), \quad \xi \in \mathfrak{g}, \quad (3.13)$$

где β_F – лиувиллева форма объема на F , порождаемая симплектической формой ω_F , а p_F – некоторая гладкая инвариантная (относительно сопряжений) функция на G , равная 1 в точке $e \in G$. Формулу (3.13) нужно понимать в смысле обобщенных функций, т.е. для любой пробной функции $f \in \mathcal{D}(G)$ должен сходиться интеграл

$$\chi_F(f) = \text{Tr } T_F(f) = \int_F \left\{ \int_{\mathfrak{g}} \frac{f(\exp \xi)}{p_F(\exp \xi)} e^{2\pi i \varphi(\xi)} d\xi \right\} \beta_F(\varphi),$$

где $d\xi$ – мера Лебега на $\mathfrak{g}$.

В частности, для компактных групп G будем иметь $\dim T_F := \chi_F(e) = \text{Vol } F < \infty$, а интегральные орбиты будут при этом соответствовать многообразиям флагов. В этом случае метод орбит

эквивалентен методу Бореля–Вейля, описанному в предыдущем п. [3.2.2](#).

Библиографические указания

Содержание этой главы носит в основном справочный характер и может быть найдено в целом ряде книг. В частности, общие свойства многообразий флагов представлены в [\[6\]](#), [\[15\]](#), [\[61\]](#). С основами теории представлений полупростых алгебр и групп Ли можно познакомиться по книгам [\[77\]](#), [\[76\]](#), [\[28, 68\]](#). Конструкция Бореля–Вейля объясняется, например, в книге [\[6\]](#). Метод орбит излагается в [\[39\]](#), [\[43\]](#).

Глава 4. Центральные расширения и когомологии алгебр и групп Ли

В первом параграфе этой главы (п. 4.1) мы напомним определение и основные свойства центральных расширений алгебр и групп Ли. В частности, отмечается связь между центральными расширениями групп Ли и их проективными представлениями. В п. 4.2 вводятся когомологии алгебр Ли и дается несколько важных примеров, в которых возникают указанные когомологии (в том числе, приводится когомологическая интерпретация центральных расширений). Последний параграф 4.3 посвящен когомологиям групп Ли и их связи с проективными представлениями.

§ 4.1. Центральные расширения групп Ли и проективные представления

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24. *Центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{G}$ (над полем $\mathbb{R}$) называется алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{G}}$, которую можно включить в точную последовательность гомоморфизмов алгебр Ли*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{G}} \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow 0, \quad (4.1)$$

где $\mathbb{R}$ рассматривается как абелева алгебра Ли и образ мономорфизма $\mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathfrak{G}}$ содержится в центре алгебры $\tilde{\mathfrak{G}}$. Два центральных расширения $\tilde{\mathfrak{G}}_1$ и $\tilde{\mathfrak{G}}_2$ одной и той же алгебры Ли $\mathfrak{G}$ называются *эквивалентными*, если существует коммутативная диаграмма гомоморфизмов алгебр Ли

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{G}}_1 & \longrightarrow & \mathfrak{G} \longrightarrow 0 \\ & & \text{id} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{G}}_2 & \longrightarrow & \mathfrak{G} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Из точной последовательности (4.1) вытекает, что алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{G}}$, как векторное пространство, изоморфна $\mathfrak{G} \oplus \mathbb{R}$, а скобка Ли в $\tilde{\mathfrak{G}}$, ввиду центральности образа отображения $\mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathfrak{G}}$, имеет

вид

$$[(\xi, s), (\eta, t)] = [(\xi, 0), (\eta, 0)] = ([\xi, \eta], \omega(\xi, \eta)),$$

где ω – кососимметричная билинейная форма на $\mathfrak{G}$, называемая *коциклом центрального расширения*.

По аналогии с определением 24, вводятся и центральные расширения групп Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25. *Центральным расширением группы Ли $\mathcal{G}$ называется группа Ли $\tilde{\mathcal{G}}$, которую можно включить в точную последовательность гомоморфизмов групп Ли*

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 1,$$

где образ группы окружности под действием мономорфизма $S^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ содержится в центре группы $\tilde{\mathcal{G}}$.

С топологической точки зрения отображение $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ является главным S^1 -расслоением. Рассмотрим случай, когда это S^1 -расслоение является тривиальным, т.е. $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ допускает глобальное сечение $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$. С помощью указанного сечения мы можем отождествить группу $\tilde{\mathcal{G}}$ с группой $\mathcal{G} \times S^1$, наделенной умножением

$$(g, \lambda) \cdot (h, \mu) = (gh, \lambda\mu c(g, h)),$$

где $c(g, h) = \sigma(g)\sigma(h)\sigma(gh)^{-1}$ называется *коциклом центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$* .

Центральные расширения групп Ли тесно связаны с их проективными представлениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26. *Проективным (унитарным) представлением группы Ли $\mathcal{G}$ называется отображение*

$$\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{U}(H)$$

группы $\mathcal{G}$ в группу унитарных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H , удовлетворяющее соотношению

$$\rho(g_1)\rho(g_2) = c(g_1, g_2)\rho(g_1g_2) \quad \text{для всех } g_1, g_2 \in \mathcal{G},$$

где $c(g_1, g_2)$ – комплексное число по модулю равное 1, которое называется *коциклом проективного представления*.

Другое проективное представление $\rho': \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{U}(H)$ той же группы Ли $\mathcal{G}$ эквивалентно представлению ρ , если

$$\rho'(g) = \lambda(g)\rho(g), \quad g \in \mathcal{G},$$

для некоторого $\lambda: \mathcal{G} \rightarrow S^1$.

Любое проективное унитарное представление ρ группы Ли $\mathcal{G}$ определяет настоящее унитарное представление $\tilde{\rho}$ некоторого центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ группы $\mathcal{G}$, которое является топологически тривиальным S^1 -расслоением с коциклом, равным коциклу проективного представления. Именно, определим

$$\tilde{\rho}(g, \lambda) := \lambda\rho(g) \quad \text{для всех } g \in \mathcal{G}, \lambda \in S^1.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}((g_1, \lambda_1) \cdot (g_2, \lambda_2)) &= \lambda_1\lambda_2 c(g_1, g_2)\rho(g_1g_2) = \lambda_1\lambda_2\rho(g_1)\rho(g_2) \\ &= \tilde{\rho}(g_1, \lambda_1)\tilde{\rho}(g_2, \lambda_2) \end{aligned}$$

для всех $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in S^1$.

Обратно, любое унитарное представление $\tilde{\rho}$ топологически тривиального центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ такого, что $\tilde{\rho}(\lambda) = \lambda \cdot \mathrm{id}$ для любого $\lambda \in S^1$, задает проективное представление ρ группы $\mathcal{G}$, которое определяется следующим образом. Коцикл c центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ задается в терминах тривиализующего сечения $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ формулой

$$c(g_1, g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)\sigma(g_1g_2)^{-1}, \quad g_1, g_2 \in \mathcal{G}.$$

Тогда отображение ρ , определяемое посредством $\rho(g) := \tilde{\rho}(\sigma(g))$, задает проективное представление $\rho: \mathcal{G} \rightarrow \mathrm{U}(H)$, поскольку

$$\begin{aligned} \rho(g_1g_2) &= \tilde{\rho}(\sigma(g_1g_2)) = \tilde{\rho}(c(g_1, g_2)^{-1}\sigma(g_1)\sigma(g_2)) \\ &= c(g_1, g_2)^{-1}\rho(g_1)\rho(g_2) \end{aligned}$$

для любых $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$.

§ 4.2. Когомологии алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{G}$ есть алгебра Ли и $\rho: \mathfrak{G} \rightarrow \mathrm{End} V$ — представление $\mathfrak{G}$ в векторном пространстве V . Иными словами, V есть $\mathfrak{G}$ -модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27. q -Коцепью алгебры $\mathfrak{G}$ с коэффициентами в V называется кососимметричный непрерывный q -линейный функционал на алгебре $\mathfrak{G}$ со значениями в V , т.е. непрерывное отображение

$$\alpha: \underbrace{\mathfrak{G} \times \cdots \times \mathfrak{G}}_q \longrightarrow V,$$

которое кососимметрично и q -линейно. Множество всех таких коцепей обозначается через $C^q(\mathfrak{G}, V)$.

Определим дифференциал (кограничное отображение)

$$\delta_q: C^q(\mathfrak{G}, V) \longrightarrow C^{q+1}(\mathfrak{G}, V)$$

по формуле

$$\begin{aligned} \delta_q \alpha(\xi_1, \dots, \xi_{q+1}) &= \sum_{1 \leq i \leq q+1} (-1)^i \xi_i \alpha(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_{q+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j-1} \alpha([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_{q+1}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\alpha \in C^q(\mathfrak{G}, V)$, $\xi_1, \dots, \xi_{q+1} \in \mathfrak{G}$.

Легко проверить, что кограничные отображения обладают свойством: $\delta_q \circ \delta_{q-1} = 0$, поэтому мы получаем комплекс

$$\dots \longrightarrow C^{q-1}(\mathfrak{G}, V) \xrightarrow{\delta_{q-1}} C^q(\mathfrak{G}, V) \xrightarrow{\delta_q} C^{q+1}(\mathfrak{G}, V) \longrightarrow \dots$$

Когомологии этого комплекса называются *когомологиями алгебры Ли $\mathfrak{G}$ с коэффициентами в $\mathfrak{G}$ -модуле V* и обозначаются через

$$\begin{aligned} H^q(\mathfrak{G}, V) &:= \text{Ker } \delta_q / \text{Im } \delta_{q-1} = \\ &= \frac{\{\xi \in C^q(\mathfrak{G}, V) : \delta_q \xi = 0\}}{\{\xi \in C^q(\mathfrak{G}, V) : \xi = \delta_{q-1} \eta \text{ для некоторого } \eta \in C^{q-1}(\mathfrak{G}, V)\}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В частном случае, когда V совпадает с основным числовым полем $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, рассматриваемым как тривиальный $\mathfrak{G}$ -модуль, когомологии $H^q(\mathfrak{G}, k)$ обозначаются через $H^q(\mathfrak{G})$.

Приведенное выше выражение для кограничного отображения выглядит также, как внешняя производная дифференциальной формы. Это объясняется тем, что дифференциальные формы на гладком многообразии X можно отождествить с коцепями

алгебры Ли $\text{Vect}(X)$ векторных полей на X с коэффициентами в модуле $C^\infty(X)$ гладких функций на X , рассматриваемом как $\text{Vect}(X)$ -модуль.

Приведем несколько конкретных примеров когомологий алгебр Ли.

ПРИМЕР 24 (когомологии $H^0(\mathfrak{G}, V)$). Полагая $C^{-1}(\mathfrak{G}, V) = 0$, получим

$$\begin{aligned} H^0(\mathfrak{G}, V) &= \text{Ker} \{ \delta_0 : C^0(\mathfrak{G}, V) = V \longrightarrow C^1(\mathfrak{G}, V) \} \\ &= \{ v \in V : \xi v = 0 \text{ для любого } \xi \in \mathfrak{G} \}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Другими словами, $H^0(\mathfrak{G}, V)$ совпадает с множеством инвариантов $\mathfrak{G}$ -модуля V .

ПРИМЕР 25 (когомологии $H^1(\mathfrak{G})$). В этом случае дифференциал $\delta_0 : C^0(\mathfrak{G}) \rightarrow C^1(\mathfrak{G})$ тривиален, поскольку действие алгебры $\mathfrak{G}$ на k тривиально. Поэтому

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{G}) &= \text{Ker} [\delta_1 : C^1(\mathfrak{G}) = \mathfrak{G}^* \longrightarrow C^2(\mathfrak{G})] \\ &= \{ \beta \in \mathfrak{G}^* : \beta([\xi, \eta]) = 0 \text{ для всех } \xi, \eta \in \mathfrak{G} \} \\ &= (\mathfrak{G} / [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}])^*. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Иначе говоря, $H^1(\mathfrak{G})$ состоит из непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{G} / [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

ПРИМЕР 26 (когомологии $H^1(\mathfrak{G}; \mathfrak{G})$). Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{G}$ как $\mathfrak{G}$ -модуль относительно присоединенного действия ad алгебры $\mathfrak{G}$ на самой себе. Тогда $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ интерпретируется как множество внешних дифференцирований алгебры $\mathfrak{G}$. Напомним, что гомоморфизм $\phi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ называется *дифференцированием* алгебры Ли $\mathfrak{G}$, если

$$\phi([\xi, \eta]) = [\phi(\xi), \eta] + [\xi, \phi(\eta)].$$

Внутренние дифференцирования, определяемые формулой

$$\xi \longmapsto [\xi, \xi_0] = \text{ad}_{\xi_0}(\xi),$$

где ξ_0 – фиксированный элемент алгебры $\mathfrak{G}$, могут служить примером дифференцирований алгебры Ли.

Множество *внешних дифференцирований* совпадает, по определению, с фактором множества всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{G}$ по модулю внутренних дифференцирований.

Покажем, что $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ совпадает с множеством внешних дифференцирований алгебры $\mathfrak{G}$.

Действительно, коцепи из $C^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ задаются линейными отображениями $\phi: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$. Условие $\delta_1\phi = 0$ означает, что ϕ есть дифференцирование, поскольку

$$\delta_1\phi(\xi, \eta) = \phi([\xi, \eta]) - \xi\phi(\eta) + \eta\phi(\xi) = \phi([\xi, \eta]) - [\xi, \phi(\eta)] - [\phi(\xi), \eta].$$

Коцепи из $C^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$, принадлежащие образу отображения $\delta_0: C^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) \rightarrow C^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$, совпадают с внутренними дифференцированиями алгебры $\mathfrak{G}$, так как

$$\xi \in \mathfrak{G} = C^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) \implies \delta_0\xi(\eta) = -\xi \cdot \eta = [-\xi, \eta].$$

ПРИМЕР 27 (когомологии $H^2(\mathfrak{G})$). Когомологии $H^2(\mathfrak{G})$ можно отождествить с классами эквивалентности центральных расширений алгебры Ли $\mathfrak{G}$, рассмотренных в предыдущем параграфе 4.1.

Действительно, сопоставим коциклу $\omega \in C^2(\mathfrak{G})$ центральное расширение

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow k \oplus \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow 0,$$

где отображение $k \rightarrow k \oplus \mathfrak{G}$ является вложением $s \mapsto (s, 0)$, а отображение $k \oplus \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ совпадает с проекцией $(s, \xi) \mapsto \xi$. Скобка в алгебре $\tilde{\mathfrak{G}} = k \oplus \mathfrak{G}$ задается формулой

$$[(s, \xi), (t, \eta)] = (\omega(\xi, \eta), [\xi, \eta]).$$

Тождество Якоби в алгебре $\tilde{\mathfrak{G}}$ эквивалентно условию коцикличности ω . Более того, когомологичные коциклы соответствуют эквивалентным центральным расширениям, а нуль в $H^2(\mathfrak{G})$ отвечает тривиальному центральному расширению $\tilde{\mathfrak{G}} = k \oplus \mathfrak{G}$.

ПРИМЕР 28 (когомологии $H^3(\mathfrak{G})$). Когомологии $H^3(\mathfrak{G})$ полу-простой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ интерпретируются как инвариантные симметричные билинейные формы на $\mathfrak{G}$.

Действительно, мы можем сопоставить любой такой форме $\langle \cdot, \cdot \rangle$ класс $H^3(\mathfrak{G})$, задаваемый 3-коциклом вида

$$\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \ni (\xi, \eta, \zeta) \longmapsto \langle \xi, [\eta, \zeta] \rangle.$$

Помимо приведенных примеров, демонстрирующих важность когомологий алгебр Ли, имеется еще одно обстоятельство, свидетельствующее в пользу введения указанного понятия. А именно,

когомологии алгебры Ли $\mathfrak{G}$ тесно связаны с когомологиями де Рама соответствующей группы Ли $\mathcal{G}$, рассматриваемой как гладкое многообразие. Обозначим последние группы когомологий через $H_{\text{top}}^q(\mathcal{G}, k)$. Связь между $H_{\text{top}}^q(\mathcal{G}, k)$ и когомологиями алгебры Ли $\mathfrak{G}$ устанавливается следующим образом.

Построим сначала отображение коцепного комплекса $C^\bullet(\mathfrak{G})$ в комплекс де Рама $\Omega^\bullet(\mathcal{G})$ группы $\mathcal{G}$. Обозначим через $\Omega_{\text{inv}}^q(\mathcal{G})$ подпространство дифференциальных форм степени q в пространстве $\Omega^q(\mathcal{G})$, инвариантных относительно правых трансляций на группе $\mathcal{G}$. Форма из $\Omega_{\text{inv}}^q(\mathcal{G})$ однозначно определяется ее сужением на касательное пространство $T_e\mathcal{G} = \mathfrak{G}$, иначе говоря, имеется изоморфизм

$$\Omega_{\text{inv}}^q(\mathcal{G}) \xleftarrow{\approx} \Lambda^q(\mathfrak{G}) = C^q(\mathfrak{G}).$$

Более того, дифференциал $\delta_q: C^q(\mathfrak{G}) \rightarrow C^{q+1}(\mathfrak{G})$ совпадает с сужением внешнего дифференциала $d_q: \Omega^q(\mathcal{G}) \rightarrow \Omega^{q+1}(\mathcal{G})$ на $\Omega_{\text{inv}}^q(\mathcal{G})$. Поэтому имеется канонический гомоморфизм

$$H^q(\mathfrak{G}) \longrightarrow H_{\text{top}}^q(\mathcal{G}, k). \quad (4.6)$$

Этот гомоморфизм является изоморфизмом, если $k = \mathbb{R}$ и $\mathcal{G}$ есть компактная группа Ли (в этом случае любой форме на $\mathcal{G}$ можно сопоставить право-инвариантную форму, усредняя исходную форму по $\mathcal{G}$). В комплексном случае $k = \mathbb{C}$ построенный гомоморфизм является изоморфизмом, если $\mathcal{G}$ есть комплексная полупростая группа Ли. Изоморфизм (4.6) имеет место и для некоторых бесконечномерных групп Ли, например для группы петель $LG = C^\infty(S^1, G)$ компактной группы Ли G (в этом случае $k = \mathbb{R}$).

§ 4.3. Когомологии групп Ли

Пусть $\mathcal{G}$ есть группа Ли и V является $\mathcal{G}$ -модулем, т.е. задано представление $\rho: \mathcal{G} \rightarrow \text{GL}(V)$ группы $\mathcal{G}$ в векторном пространстве V . Имеются два естественных определения коцепного комплекса со значениями в $\mathcal{G}$ -модуле V . В первом определении коцепи задаются эквивариантными функциями на группе $\mathcal{G}$ со значениями в V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28. q -Коцепью группы $\mathcal{G}$ со значениями в V называется функция

$$\varphi: \underbrace{\mathcal{G} \times \cdots \times \mathcal{G}}_{q+1} \longrightarrow V,$$

обладающая следующим свойством эквивариантности:

$$\varphi(gg_0, \dots, gg_q) = g \cdot \varphi(g_0, \dots, g_q),$$

где “ $\cdot$ ” в правой части обозначает действие группы $\mathcal{G}$ на V , задаваемое представлением ρ . Пространство всех q -коцепей обозначается через $C^q(\mathcal{G}, V)$, а *дифференциал*

$$\delta_q: C^q(\mathcal{G}, V) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{G}, V)$$

задается формулой

$$\delta_q \varphi(g_0, \dots, g_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi(g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_{q+1}).$$

Во втором определении коцепи задаются произвольными функциями на группе $\mathcal{G}$ со значениями в V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29. q -Коцепью группы $\mathcal{G}$ со значениями в V называется функция

$$\psi: \underbrace{\mathcal{G} \times \dots \times \mathcal{G}}_{q+1} \longrightarrow V.$$

Пространство всех q -коцепей на группе $\mathcal{G}$ со значениями в V обозначается снова через $C^q(\mathcal{G}, V)$, но *дифференциал*

$$\delta_q: C^q(\mathcal{G}, V) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{G}, V)$$

задается в этом случае формулой

$$\begin{aligned} \delta_q \psi(g_1, \dots, g_{q+1}) &= g_1 \cdot \psi(g_2, \dots, g_{q+1}) + \\ &+ \sum_{i=1}^q (-1)^i \psi(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{q+1}) + (-1)^{q+1} \psi(g_1, \dots, g_q). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Связь $\varphi \leftrightarrow \psi$ между двумя этими определениями коцепей устанавливается формулами:

$$\varphi(g_0, \dots, g_q) = g_0 \cdot \psi(g_0^{-1} g_1, g_1^{-1} g_2, \dots, g_{q-1}^{-1} g_q), \quad (4.8)$$

$$\psi(g_1, \dots, g_q) = \varphi(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \cdot \dots \cdot g_q). \quad (4.9)$$

Когомологи группы $\mathcal{G}$ со значениями в $\mathcal{G}$ -модуле V в обоих случаях определяются как когомологии коцепного комплекса $\{C^q(\mathcal{G}, V), \delta_q\}$, т.е. как

$$H^q(\mathcal{G}, V) = \frac{\text{Ker} [\delta_q: C^q(\mathcal{G}, V) \rightarrow C^{q+1}(\mathcal{G}, V)]}{\text{Im} [\delta_{q-1}: C^{q-1}(\mathcal{G}, V) \rightarrow C^q(\mathcal{G}, V)]}.$$

Рассмотрим теперь связь между 2-мерными когомологиями группы $\mathcal{G}$ с ее проективными представлениями и центральными расширениями (см. п. 4.1).

Пусть $\rho: \mathcal{G} \rightarrow \text{U}(V)$ есть проективное представление группы Ли $\mathcal{G}$, удовлетворяющее соотношению

$$\rho(g_1)\rho(g_2) = c(g_1, g_2)\rho(g_1g_2) \text{ для любых } g_1, g_2 \in \mathcal{G},$$

где $c(g_1, g_2)$ есть коцикл представления ρ . Из ассоциативности умножения в группах $\mathcal{G}$ и $\text{U}(V)$ вытекает, что c является 2-коциклом группы $\mathcal{G}$ со значениями в мультипликативной группе S^1 с тривиальным действием группы $\mathcal{G}$, задаваемым отображением $\rho: \mathcal{G} \rightarrow 1$. Иными словами, для любых трех элементов g_1, g_2, g_3 группы $\mathcal{G}$ справедливо соотношение

$$c(g_2, g_3)c(g_1g_2, g_3)^{-1}c(g_1, g_2g_3)c(g_1, g_2)^{-1} = 1,$$

которое означает, что $\delta_2 c = 1$ (мы пользуемся здесь мультипликативным аналогом отображения δ_2 из определения 29).

С другой стороны, эквивалентное проективное представление вида

$$\rho'(g) = \lambda(g)\rho(g)$$

с $\lambda: \mathcal{G} \rightarrow S^1$, будет отвечать коциклу

$$c'(g_1, g_2) = c(g_1, g_2)\lambda(g_1g_2)\lambda(g_1)^{-1}\lambda(g_2)^{-1},$$

т.е. коциклу $c' \in C^2(\mathcal{G}, S^1)$, когомологичному коциклу $c \in C^2(\mathcal{G}, S^1)$. Тем самым, класс $[c]$ коцикла c в когомологиях $H^2(\mathcal{G}, S^1)$ зависит только от класса эквивалентности проективного представления ρ . Следовательно, классы эквивалентности проективных представлений группы Ли $\mathcal{G}$ в гильбертовом пространстве V отождествляются с когомологиями $H^2(\mathcal{G}, S^1)$.

С другой стороны, в п. 4.1 мы сопоставили каждому топологически тривиальному центральному расширению $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$

его коцикл s , который есть не что иное как 2-коцикл группы $\mathcal{G}$ со значениями в тривиальном $\mathcal{G}$ -модуле S^1 . Более того, эквивалентные центральные расширения группы $\mathcal{G}$ соответствуют когомологичным коциклам в $H^2(\mathcal{G}, S^1)$. Поэтому, класс $[s]$ коцикла s в $H^2(\mathcal{G}, S^1)$ зависит только от класса эквивалентности центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ и мы можем отождествить *множество классов эквивалентности (топологически тривиальных) центральных расширений группы Ли $\mathcal{G}$ с когомологиями $H^2(\mathcal{G}, S^1)$* .

Библиографические указания

Более подробное изложение сведений, приведенных в этой главе, можно найти в книгах [31], [21], [22]. Центральные расширения и проективные представления, также как когомологии алгебр и групп Ли, будут играть важную роль при изучении групп петель и групп диффеоморфизмов во второй и третьей частях этой книги.

Глава 5. Грассманианы гильбертова пространства

В этой главе вводятся бесконечномерные грассмановы многообразия, состоящие из замкнутых подпространств в гильбертовом пространстве H . Мы предполагаем, что пространство H поляризовано, т.е. разложено в прямую сумму замкнутых (бесконечномерных) подпространств $H = H_+ \oplus H_-$, и рассматриваем грассманианы, состоящие из подпространств, “близких” к H_+ в различных смыслах. Наиболее важным случаем является так называемый *грассманиан Гильберта–Шмидта*, который вводится в п. 5.2. Он представляет собой гильбертово кэлерово многообразие, обладающее многими чертами обычных конечномерных грассманианов. В частности, это многообразие является однородным пространством гильбертовой группы Ли и может быть снабжено естественным детерминантным расслоением, построенным в п. 5.3.

§ 5.1. Грассманиан $\text{Gr}_b(H)$

Пусть H есть комплексное (сепарабельное) гильбертово пространство. Предположим, что H *поляризовано*, т.е. разлагается в прямую ортогональную сумму

$$H = H_+ \oplus H_- \quad (5.1)$$

замкнутых бесконечномерных подпространств. Обозначим через pr_+ (соотв. pr_-) ортогональную проекцию $\text{pr}_+ : H \rightarrow H_+$ (соотв. $\text{pr}_- : H \rightarrow H_-$).

В качестве стандартного примера подобного поляризованного гильбертова пространства H можно взять гильбертово пространство $L_0^2(S^1, \mathbb{C})$, состоящее из L^2 -функций на единичной окружности S^1 с нулевым средним по S^1 . Функции $f \in L_0^2(S^1, \mathbb{C})$ имеют

разложения Фурье, сходящиеся в L^2 -смысле, вида

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k z^k, \quad f_0 = 0,$$

где $z = e^{i\theta}$. Для этой конкретной реализации пространства H в качестве H_+ (соотв. H_-) берется подпространство, состоящее из функций $f \in L_0^2(S^1, \mathbb{C})$, имеющих нулевые коэффициенты Фурье с отрицательными (соотв. положительными) индексами:

$$H_+ = \left\{ f \in H : f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k \right\},$$

$$H_- = \left\{ f \in H : f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k z^k \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30. Грассманиан $\text{Gr}_b(H)$ состоит из всех замкнутых подпространств $W \subset H$, для которых ортогональная проекция $\text{pr}_+ : W \rightarrow H_+$ является оператором Фредгольма.

Напомним, что линейный оператор $T : H_1 \rightarrow H_2$, отображающий гильбертово пространство H_1 в гильбертово пространство H_2 , называется *оператором Фредгольма*, если он обладает конечномерными ядром и коядром. Для такого оператора можно определить *индекс Фредгольма* по формуле

$$\text{ind } T := \dim(\text{Ker } T) - \dim(\text{Coker } T).$$

Индекс Фредгольма оператора T является топологическим инвариантом T , т.е. не изменяется при ограниченных непрерывных деформациях оператора T . Эквивалентное определение: оператор T является оператором Фредгольма, если он обратим по модулю компактных операторов, т.е. если существует оператор $S : H_2 \rightarrow H_1$ такой, что операторы $\text{id}_{H_1} - ST$ и $\text{id}_{H_2} - TS$ компактны.

Мы можем переформулировать определение 30 в следующей эквивалентной форме: подпространство $W \in \text{Gr}_b(H)$ тогда и только тогда, когда оно совпадает с образом ограниченного линейного оператора

$$w : H_+ \longrightarrow H$$

такого, что оператор $w_+ := \text{pr}_+ \circ w$ фредгольмов.

Относительно поляризации $H = H_+ \oplus H_-$ любой линейный оператор $w \in \text{End } H$ может быть записан в блочной форме

$$w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a: H_+ \rightarrow H_+, & b: H_- \rightarrow H_+ \\ c: H_+ \rightarrow H_-, & d: H_- \rightarrow H_- \end{pmatrix}.$$

В этих терминах подпространство $W \in \text{Gr}_b(H)$ тогда и только тогда, когда оператор a является фредгольмовым.

Для любого подпространства $W \in \text{Gr}_b(H)$ обозначим через

$$U_W = \{W' \in \text{Gr}_b(H) : \text{ортогональная проекция } W' \rightarrow W \text{ является изоморфизмом}\}. \quad (5.2)$$

Введем на $\text{Gr}_b(H)$ структуру комплексного банахова многообразия, для которой множества U_W играют роль координатных окрестностей. Более точно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Грассманиан $\text{Gr}_b(H)$ является комплексным банаховым многообразием, имеющим в качестве локальной модели банахово пространство $B(H_+, H_-)$ ограниченных линейных операторов $w: H_+ \rightarrow H_-$. Координатные окрестности*

$$U_W = \{W' \in \text{Gr}_b(H) : \text{ортогональная проекция } W' \rightarrow W \text{ является изоморфизмом}\}, \quad (5.3)$$

определенные выше, образуют атлас многообразия $\text{Gr}_b(H)$ с координатными картами, задаваемыми отображениями

$$U_W \ni W' \longmapsto w' \in B(W, W^\perp).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство по существу повторяет доказательство предложения 7.1.2 из [65]. Для того, чтобы показать, что атлас $\{U_W\}$ с указанными картами действительно определяет на $\text{Gr}_b(H)$ структуру комплексного банахова многообразия, рассмотрим пересечение $U_{W_1} \cap U_{W_2} \neq \emptyset$ двух координатных окрестностей. Замена координат в пространстве H , преобразующая разложение $H = W_1 \oplus W_1^\perp$ в разложение $H = W_2 \oplus W_2^\perp$, дается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : W_1 \oplus W_1^\perp \rightarrow W_2 \oplus W_2^\perp,$$

в которой операторы a и d фредгольмовы, а операторы b и c ограничены. Если подпространство $W \in U_{W_1} \cap U_{W_2}$, тогда его можно

представить, с одной стороны, в виде графика ограниченного оператора $w_1: W_1 \rightarrow W_1^\perp$, а, с другой, в виде графика ограниченного оператора $w_2: W_2 \rightarrow W_2^\perp$. Ортогональная проекция подпространства W на пространства W_1 и W_2 является изоморфизмом, который определяет изоморфизм $v: W_1 \rightarrow W_2$, так что W является графиком оператора $w_2 \circ v: W_1 \rightarrow W_2^\perp$. Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w_2 \circ v \end{pmatrix},$$

как операторы из W_1 в $W_2 \oplus W_2^\perp$. Иными словами, замена координат

$$B(W_1, W_1^\perp) \longrightarrow B(W_2, W_2^\perp), \quad w_1 \longmapsto w_2,$$

задаваемая формулой

$$w_2 = (c + dw_1)(a + bw_1)^{-1},$$

является голоморфным отображением, определенным на открытом подмножестве $U_{W_1} \cap U_{W_2}$, отождествляемом с подмножеством $\{w_1 \in B(W_1, W_1^\perp): a + bw_1 \text{ обратим}\}$.

Заметим, что многообразие $\text{Gr}_b(H)$ состоит из счетного числа связных компонент, нумеруемых индексом Фредгольма оператора w_+ для подпространства $W \in \text{Gr}_b(H)$, совпадающего с образом линейного оператора $w: H_+ \rightarrow H$. Будем говорить, что подпространство W имеет виртуальную размерность d , если индекс оператора w_+ равен d .

§ 5.2. Грассманиан Гильберта–Шмидта $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$

Напомним, что линейный оператор $T: H_1 \rightarrow H_2$, действующий из комплексного гильбертова пространства H_1 в другое комплексное гильбертово пространство H_2 , называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если для некоторого ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в пространстве H_1 ряд

$$\sum_i \|Te_i\| < \infty$$

сходится. Заметим, что это условие выполняется для любого ортонормированного базиса в пространстве H_1 , если оно справедливо хотя бы для одного ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в H_1 .

Определим *норму Гильберта–Шмидта* оператора T формулой

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Операторы Гильберта–Шмидта $T: H_1 \rightarrow H_2$ образуют комплексное гильбертово пространство $\text{HS}(H_1, H_2)$ с введенной выше нормой. Более того, пространство $\text{HS}(H, H)$ операторов Гильберта–Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H , является двусторонним идеалом в алгебре $B(H)$ всех линейных ограниченных операторов в H .

Обозначим через $\text{GL}(H)$ группу всех линейных ограниченных операторов в пространстве H , имеющих ограниченные обратные операторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31. *Общая линейная группа Гильберта–Шмидта* $\text{GL}_{\text{HS}}(H)$ состоит из линейных операторов $A \in \text{GL}(H)$, в блочных представлениях которых (относительно поляризации $H = H_+ \oplus H_-$)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

“вне-диагональные” члены b и c являются операторами Гильберта–Шмидта (коротко: HS -операторами). Обозначим через $\text{U}_{\text{HS}}(H)$ пересечение группы $\text{GL}_{\text{HS}}(H)$ с группой $\text{U}(H)$ всех унитарных операторов в пространстве H .

Иными словами, группа $\text{GL}_{\text{HS}}(H)$ состоит из операторов $A \in \text{GL}(H)$, для которых “вне-диагональные” члены b и c “малы” по отношению к “диагональным” членам a и d .

Введем теперь на $\text{GL}_{\text{HS}}(H)$ структуру банаховой группы Ли. Именно, рассмотрим подалгебру $B_{\text{HS}}(H)$ алгебры $B(H)$, состоящую из операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in B(H),$$

для которой операторы b и c являются операторами Гильберта–Шмидта. Алгебра $B_{\text{HS}}(H)$ есть банахова алгебра с нормой, задаваемой формулой

$$\|A\| := \|A\| + \|b\|_2 + \|c\|_2.$$

Группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ совпадает с группой обратимых элементов в алгебре $\mathrm{B}_{\mathrm{HS}}(H)$ и является комплексной *банаховой группой Ли*. Соответственно, $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H)$ есть вещественная банахова группа Ли, комплексификация которой совпадает с группой $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$.

С группой $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ связано грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32. *Грассманиан Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из всех замкнутых подпространств $W \subset H$ таких, что ортогональная проекция $\mathrm{pr}_+ : W \rightarrow H_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\mathrm{pr}_- : W \rightarrow H_-$ является оператором Гильберта–Шмидта.

Другими словами, $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из подпространств $W \subset H$, которые “мало” отличаются от подпространства H_+ в том смысле, что проекция $\mathrm{pr}_+ : W \rightarrow H_+$ является “почти изоморфизмом” (напомним, что фредгольмовы операторы обратимы по модулю компактных операторов, см. п. 5.1), а проекция $\mathrm{pr}_- : W \rightarrow H_-$ “мала”.

Эквивалентно, подпространство $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ тогда и только тогда, когда оно совпадает с образом линейного оператора

$$w : H_+ \longrightarrow H$$

такого, что оператор $w_+ := \mathrm{pr}_+ \circ w$ фредгольмов, а $w_- := \mathrm{pr}_- \circ w$ есть оператор Гильберта–Шмидта.

Легко видеть, что если $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, то график любого HS-оператора $w' : W \rightarrow W^\perp$ также принадлежит $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$. Обозначим множество всех таких подпространств через U_W :

$$U_W = \{W' \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H) :$$

$$W' \text{ есть график HS-оператора } w' : W \rightarrow W^\perp\}.$$

Также, как в п. 5.1, это определение может быть переписано в виде

$$U_W = \{W' \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H) : \text{ортогональная проекция } W' \rightarrow W \text{ является изоморфизмом}\}. \quad (5.4)$$

Введенная выше группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ действует естественным образом на пространстве $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$. Рассмотрим, в частности, действие ее унитарной подгруппы $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H)$ на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ и покажем,

что оно транзитивно. Это позволит нам получить реализацию $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ в виде однородного пространства группы $\text{U}_{\text{HS}}(H)$, аналогичную реализации конечномерного грассманиана в виде однородного пространства унитарной группы.

Для того, чтобы доказать, что действие группы $\text{U}_{\text{HS}}(H)$ на $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ является транзитивным, необходимо построить для заданного подпространства $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ оператор $A \in \text{U}_{\text{HS}}(H)$ такой, что $A(H_+) = W$. Рассмотрим изометрический оператор $w: H_+ \rightarrow H$, образ которого совпадает с подпространством W , и обозначим через $w^\perp: H_- \rightarrow H$ изометрический оператор с образом $W^\perp$. Тогда оператор

$$A = w \oplus w^\perp: H = H_+ \oplus H_- \rightarrow H = W \oplus W^\perp$$

задает изометрию пространства H на себя и потому является унитарным. Более того, он отображает подпространство H_+ на W и имеет блочное представление вида

$$A = \begin{pmatrix} w_+ & w_+^\perp \\ w_- & w_-^\perp \end{pmatrix}.$$

Здесь, оператор w_+ является фредгольмовым, а w_- – оператором Гильберта–Шмидта, поскольку $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$. Так как оператор A является унитарным, отсюда следует, что $A \in \text{U}_{\text{HS}}(H)$.

Подгруппа изотропии группы $\text{U}_{\text{HS}}(H)$ в точке $H_+ \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ совпадает с $\text{U}(H_+) \times \text{U}(H_-)$, поэтому справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Грассманиан $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ является однородным пространством группы $\text{U}_{\text{HS}}(H)$ вида*

$$\text{Gr}_{\text{HS}}(H) = \text{U}_{\text{HS}}(H) / \text{U}(H_+) \times \text{U}(H_-).$$

Грассманиан Гильберта–Шмидта $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ имеет структуру комплексного гильбертова многообразия, определяемую следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Грассманиан $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ есть комплексное гильбертово многообразие, имеющее в качестве локальной модели гильбертово пространство операторов Гильберта–Шмидта $\text{HS}(H_+, H_-)$. Координатные окрестности*

$$U_W = \{W' \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H): W' \text{ является графиком HS-оператора } w': W \rightarrow W^\perp\}$$

образуют атлас многообразия $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ с координатными картами, задаваемыми отображениями

$$U_W \ni W' \longmapsto w' \in \text{HS}(W, W^\perp).$$

Это предложение доказывается также, как предложение 6 из п. 5.1.

На многообразии $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ можно выбрать и другой атлас, который во многих отношениях является более удобным. Для его построения отождествим пространство H с гильбертовым пространством $L^2(S^1, \mathbb{C})$. Последнее пространство обладает каноническим базисом, задаваемым функциями $\{z^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Подпространство H_+ порождается элементами $\{z^k\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а подпространство H_- — элементами $\{z^k\}$, $k \in \mathbb{Z}_-$, где мы обозначаем через $\mathbb{Z}_+$ подмножество неотрицательных целых чисел в $\mathbb{Z}$, а через $\mathbb{Z}_-$ его дополнение в $\mathbb{Z}$.

Выберем в качестве “координатных” подпространств в H замкнутые линейные подпространства $H_S \subset H$, порождаемые векторами $\{z^s\}$, $s \in S$, которые нумеруются подмножествами $S \subset \mathbb{Z}$, соразмерными с $\mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что подмножество $S \subset \mathbb{Z}$ соразмерно с $\mathbb{Z}_+$, если множества $S - \mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{Z}_+ - S$ состоят из конечного числа точек. Множество всех таких подмножеств $S \subset \mathbb{Z}$ обозначается через $\mathcal{S}$, а число $|S - \mathbb{Z}_+| - |\mathbb{Z}_+ - S|$ называется виртуальной мощностью подмножества S . Заметим, что виртуальная размерность подпространства H_S в точности совпадает с виртуальной мощностью подмножества S .

ЛЕММА 2. *Для любого подпространства $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ существует подмножество $S \in \mathcal{S}$ такое, что ортогональная проекция*

$$\text{pr}_S: W \longrightarrow H_S$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, то ортогональная проекция $\text{pr}_+: W \rightarrow H_+$ имеет конечномерные ядро и коядро, поэтому существует подмножество $S_0 \in \mathcal{S}$, содержащее $\mathbb{Z}_+$, для которого ортогональная проекция

$$\text{pr}: W \longrightarrow H_{S_0}$$

инъективна. Если она не является сюръективной, то найдется элемент $s \in S_0$, для которого z^s не принадлежит $\text{pr}(W)$. В этом

случае заменим подмножество S_0 на $S_1 := S_0 \setminus \{s\}$. При этом проекция $\text{rg}: W \rightarrow H_{S_1}$ все еще останется инъективной. Если она не сюръективна, повторим описанную процедуру. Так как дополнение подпространства $\text{rg}_+(W)$ в H_+ конечномерно, то после конечного числа шагов мы придем к подмножеству S , для которого проекция $\text{rg}_S: W \rightarrow H_S$ является изоморфизмом.

Исходя из доказанной леммы, мы можем определить атлас на многообразии $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, образованный открытыми подмножествами $\{U_S\}_{S \in \mathcal{S}}$, где координатная окрестность $U_S = U_{H_S}$ состоит, по определению, из подпространств, являющихся графиками операторов Гильберта–Шмидта $H_S \rightarrow H_S^\perp = H_{S^\perp}$ с $S^\perp = \mathbb{Z} - S$.

Так как группа $U_{\text{HS}}(H)$ действует транзитивно на грассманиане $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, то по любой метрике на касательном пространстве $T_{H_+} \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ в начале $H_+ \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, инвариантной относительно действия подгруппы изотропии $U(H_+) \times U(H_-)$, можно построить $U_{\text{HS}}(H)$ -инвариантную кэлерову метрику на $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$.

Касательное пространство $T_{H_+} \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ совпадает с гильбертовым пространством операторов Гильберта–Шмидта $\text{HS}(H_+, H_-)$, и инвариантная метрика на нем может быть задана формулой

$$(A, B) \longmapsto \text{Re} \{ \text{tr}(AB^*) \}, \quad A, B \in \text{HS}(H_+, H_-).$$

Мнимая часть комплексного скалярного произведения $\text{tr}(AB^*)$:

$$\omega(A, B) := \text{Im} \{ \text{tr}(AB^*) \}$$

определяет на $T_{H_+} \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ невырожденную инвариантную 2-форму, которая продолжается до $U_{\text{HS}}(H)$ -инвариантной симплектической формы на $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$.

Тем самым, на $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ задана *кэлерова структура*, превращающая $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ в *кэлерово гильбертово многообразие*.

В главе 9 нам понадобится "гладкая" часть $\text{Gr}^\infty(H)$ грассманиана $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, которая определяется в терминах открытого покрытия $\{U_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33. Грассманиан $\text{Gr}^\infty(H)$ состоит из графиков всех ограниченных линейных операторов $w: H_S \rightarrow H_{S^\perp}^\perp$, $S \in \mathcal{S}$, матричные компоненты w_{pq} которых с $p \in \mathbb{Z} - S$, $q \in S$ быстро убывают, иначе говоря, для этих компонент величины вида $|p - q|^r w_{pq}$ ограничены (равномерно по p и q) при любом r .

§ 5.3. Плюккерово вложение и детерминантное расслоение

Также, как в конечномерном случае, грассманиан Гильберта–Шмидта $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ можно реализовать с помощью плюккерова вложения в виде подмногообразия проективного гильбертова пространства.

Для того, чтобы определить плюккерово вложение, введем понятие допустимого базиса подпространства $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$. Предположим, что подпространство $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ имеет виртуальную размерность d . Модельным примером такого подпространства в случае гильбертова пространства $H = L_0^2(S^1, \mathbb{C})$ может служить подпространство $W = z^{-d}H_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34. Базис подпространства W , состоящий из элементов $\{w_k\}_{k \geq -d}$, называется *допустимым*, если:

1. линейное отображение

$$w: z^{-d}H_+ \longrightarrow W,$$

заданное на базисных элементах $\{z^k\}_{k \geq -d}$ формулой $z^k \mapsto w_k$, является непрерывным изоморфизмом;

2. композиция w с ортогональной проекцией на подпространство $z^{-d}H_+$:

$$\text{pr} \circ w: z^{-d}H_+ \longrightarrow z^{-d}H_+$$

является оператором с детерминантом.

Напомним определения класса Tr операторов со следом и близкого к нему класса $\text{Det} = 1 + \text{Tr}$ операторов с детерминантом. Линейный оператор $T: H_1 \rightarrow H_2$, действующий из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 , называется *оператором со следом* или *ядерным оператором*, если для некоторых ортонормированных базисов $\{e_i\}$ в пространстве H_1 и $\{f_i\}$ в пространстве H_2 ряд

$$\sum_i (Te_i, f_i)$$

сходится. Если это условие выполняется для некоторых ортонормированных базисов в пространствах H_1 и H_2 , то оно выполнено

и для любых ортонормированных базисов $\{e_i\}$ в пространстве H_1 и $\{f_i\}$ в пространстве H_2 и сумма

$$\sum_i (Te_i, f_i)$$

не зависит от выбора этих базисов. Она называется *следом* оператора T и обозначается через $\text{Tr } T$. Операторы $T: H \rightarrow H$ со следом, действующие в гильбертовом пространстве H , образуют двусторонний идеал $\text{Tr}(H, H)$ в алгебре $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов в H , который содержится в идеале $\text{HS}(H, H)$ операторов Гильберта–Шмидта. Более того, легко видеть, что произведение двух операторов Гильберта–Шмидта из пространства $\text{HS}(H, H)$ принадлежит пространству $\text{Tr}(H, H)$, т.е. является ядерным оператором. След оператора $T \in \text{Tr}(H, H)$ совпадает с суммой его собственных значений

$$\text{tr } T = \sum_i \lambda_i(T)$$

и ведет себя как матричный след.

Если $T: H \rightarrow H$ есть оператор со следом, то для оператора $I - T$, где I – тождественный оператор, можно определить *детерминант* по формуле

$$\det(I - T) := \prod_i (1 - \lambda_i(T)).$$

Произведение в правой части сходится, поскольку для оператора $T: H \rightarrow H$ со следом сумма $\sum_i |\lambda_i(T)|$ всегда конечна. Операторы вида $A = I - T$, где $T \in \text{Tr}(H, H)$, называются *операторами с детерминантом* и множество таких операторов обозначается через $\text{Det}(H, H)$. Ясно, что класс $\text{Det}(H, H)$ замкнут относительно произведения операторов.

Возвращаясь к определению 34, заметим, что второе условие в этом определении означает, что изоморфизм w “достаточно близок” к тождественному. Более того, из него вытекает, что ортогональная проекция $\text{pr}_S \circ w: z^{-d}H_+ \rightarrow H_S$ на любое подпространство H_S виртуальной размерности d имеет детерминант, а любые два допустимых базиса одного и того же подпространства $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ связаны заменой координат, обладающей детерминантом.

Пользуясь понятием допустимого базиса, мы можем определить плюккерову координату подпространства $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35. Пусть W есть подпространство виртуальной размерности d , имеющее допустимый базис w . *Плюккеровой координатой* подпространства W называется функция переменной $S \in \mathcal{S}$, имеющая вид

$$\pi_S(w) = \begin{cases} \det(\text{pr}_S \circ w) & \text{для } S \in \mathcal{S} \text{ виртуальной мощности } d, \\ 0 & \text{для } S \in \mathcal{S} \text{ любой виртуальной} \\ & \text{мощности, отличной от } d. \end{cases}$$

Если w' – другой допустимый базис подпространства W , то

$$\pi_S(w') = \Delta_{ww'} \pi_S(w),$$

где $\Delta_{ww'}$ – детерминант замены переменных, связывающей w с w' . Следовательно, *проективный класс $[\pi_S(w)]$ не зависит от выбора допустимого базиса w подпространства W и однозначно определяется самим подпространством W .*

В терминах плюккеровой координаты можно переопределить окрестности U_S следующим образом:

$$W \in U_S \iff \pi_S(w) \neq 0 \text{ для любого допустимого базиса } w \text{ в } W.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Плюккерovo отображение*

$$\pi: \text{Gr}_{\text{HS}}(H) \longrightarrow P(\mathcal{H}), \quad W \longmapsto [\pi_S(w)]_{S \in \mathcal{S}},$$

задает голоморфное вложение грассманиана $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ в проективизацию гильбертова пространства $\mathcal{H} = l^2(\mathcal{S})$.

Мы опускаем доказательство этого утверждения (которое можно найти в [65], предложение 7.5.2), заметим только, что оно основано на соотношении

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} |\pi_S(w)|^2 = \det(w^* w) < \infty, \quad (5.5)$$

выполненном для любого допустимого базиса w подпространства $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$.

Построим теперь голоморфное линейное расслоение над $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, являющееся аналогом детерминантного расслоения над конечномерными грассманианами.

Предположим, что подпространство $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$ имеет виртуальную размерность d . Рассмотрим линейное пространство, состоящее из формальных полубесконечных форм вида

$$[\lambda, w] := \lambda w_{-d} \wedge w_{-d+1} \wedge \cdots,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $w = \{w_k\}_{k \geq -d}$ — допустимый базис в подпространстве W . Если w' — другой допустимый базис в W , то мы отождествим пару $[\lambda', w']$ с парой $[\lambda, w]$ при условии, что $\lambda' = \lambda \Delta_{ww'}$, где $\Delta_{ww'}$ — детерминант замены переменных, связывающей w с w' .

Линейное пространство $\text{Det } W$, получаемое из пространства полубесконечных форм вида $[\lambda, w]$ факторизацией по указанному отношению эквивалентности, совпадает с комплексной прямой.

Обозначим через Det объединение пространств $\text{Det } W$ по всем $W \in \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Естественная проекция*

$$\text{Det} \longrightarrow \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$$

является голоморфным линейным расслоением.

Это предложение выводится из того факта, что сужение расслоения Det на любую координатную окрестность U_S тривиально и функция перехода этого расслоения в пересечении $U_{S_1} \cap U_{S_2} \neq \emptyset$ задается (в обозначениях из п. 5.1) формулой

$$[\lambda_1, w_1] \longmapsto [\lambda_2, w_2],$$

где

$$w_2 = (c + dw_1)(a + bw_1)^{-1}, \quad \lambda_2 = \lambda \det(a + bw_1).$$

Это определяет на Det структуру голоморфного линейного расслоения.

Добавим несколько замечаний, относящихся к плюккерovu вложению и детерминантному расслоению.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Расслоение Det можно наделить естественной эрмитовой метрикой, задаваемой формулой

$$\|[\lambda, w]\|^2 := |\lambda|^2 \det(w^* w)^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Плюккерovo вложение $\pi: \text{Gr}_{\text{HS}}(H) \rightarrow P(\mathcal{H})$ допускает поднятие до голоморфного отображения

$$\tilde{\pi}: \text{Det} \rightarrow \mathcal{H},$$

которое линейно на слоях, при этом *расслоение* Det *совпадает с обратным образом тавтологического линейного расслоения над* $P(\mathcal{H})$ *при вложении* π . Более того, поднятое отображение $\tilde{\pi}: \text{Det} \rightarrow \mathcal{H}$ сохраняет нормы (это вытекает из соотношения (5.5) выше).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Голоморфное линейное расслоение Det не имеет нетривиальных голоморфных (глобальных) сечений. Напротив, двойственное расслоение Det^* обладает многими такими сечениями. Например, все плюккеровы координаты π_S являются голоморфными сечениями расслоения Det^* . Действительно, формула $[\lambda, w] \mapsto \lambda \pi_S(w)$ задает голоморфную функцию $\text{Det} \rightarrow \mathbb{C}$, которая линейна на слоях и индуцирует глобальное голоморфное сечение расслоения Det^* .

Заметим также, что симплектическая форма многообразия $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, построенная в п. 5.2, представляет класс Черна комплексного линейного расслоения $\text{Det} \rightarrow \text{Gr}_{\text{HS}}(H)$. Иначе говоря, она *индуцирована формой Фубини–Штуди на* $P(\mathcal{H})$ *при плюккеровом вложении* $\pi: \text{Gr}_{\text{HS}}(H) \rightarrow P(\mathcal{H})$.

Библиографические указания

Основной ссылкой для этой главы является книга Прессли–Сигала [65]. Большинство приведенных утверждений содержатся в главе 7 этой книги.

Глава 6. Квазиконформные отображения

В этой главе вводятся квазиконформные отображения и доказываются основные теоремы о существовании и единственности для таких отображений. Квазиконформные отображения будут играть важную роль в главе 11, в которой изучается универсальное пространство Тейхмюллера. Более подробное изложение теории квазиконформных отображений см. в [1], [49].

§ 6.1. Определение и основные свойства

Пусть $w: D \rightarrow w(D)$ есть гомеоморфизм, отображающий область D на римановой сфере $\bar{\mathbb{C}}$ на другую область $w(D)$ на $\bar{\mathbb{C}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36. Предположим, что $w: D \rightarrow w(D)$ есть гомеоморфизм, обладающий локально L^1 -интегрируемыми производными (в обобщенном смысле) в D . Тогда w называется *квазиконформным*, если существует измеримая комплекснозначная функция $\mu \in L^\infty(D)$ такая, что

$$\|\mu\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{z \in D} |\mu(z)| =: k < 1 \quad (6.1)$$

и выполняется следующее *уравнение Бельтрами*

$$w_{\bar{z}} = \mu w_z \quad (6.2)$$

для почти всех $z \in D$.

Функция $\mu = \mu_w$ называется *дифференциалом Бельтрами* или *комплексной дилатацией* отображения w , а константа k часто упоминается в названии *k -квазиконформных отображений*.

В частности, при $k = 0$ гомеоморфизм w задает конформное отображение из области D в область $w(D)$. Для диффеоморфизмов w их квазиконформность означает, что инфинитезимально указанные отображения переводят малые круги в малые эллипсы, эксцентриситеты которых (отношения больших осей к малым) ограничены единой константой $K < \infty$, связанной с указанной

выше константой $k = \|\mu\|_\infty$ соотношением

$$K = \frac{1+k}{1-k}.$$

Константа K называется *максимальной дилатацией* отображения w и также часто упоминается в названии *K -квазиконформных отображений*.

Термин “дифференциал Бельтрами” для комплексной дилатации μ объясняется поведением μ при конформных заменах переменной. Именно, из уравнения (6.2) вытекает, что при конформной замене f комплексная дилатация должна удовлетворять соотношению

$$\mu(f(z)) = \mu(z) \frac{f_z(z)}{f_{\bar{z}}(z)},$$

выполняющемуся для почти всех $z \in D$. В общем случае, функционал φ_w , определенный на комплекснозначных функциях w , называется *дифференциалом типа (m, n)* с $m, n \in \mathbb{Z}$, если форма $\varphi_w(z) dz^m d\bar{z}^n$ остается инвариантной при конформных заменах переменной. В смысле этого определения комплексная дилатация μ_w является дифференциалом типа $(-1, 1)$.

Обратное к K -квазиконформному отображению f является снова K -квазиконформным. Композиция K_1 -квазиконформного отображения f с K_2 -квазиконформным отображением g является $(K_1 K_2)$ -квазиконформным отображением. Указанное свойство композиции может быть выведено из правила преобразования дифференциалов Бельтрами. Именно, если f и g – два квазиконформных отображения, заданных в области D и обладающих дифференциалами Бельтрами μ_f и μ_g соответственно, то справедливо следующее правило преобразования:

$$\mu_{f \circ g^{-1}}(g(z)) = \frac{\mu_f(z) - \mu_g(z)}{1 - \mu_f(z)\overline{\mu_g(z)}} \cdot \frac{g_z(z)}{g_{\bar{z}}(z)}, \quad (6.3)$$

для почти всех $z \in D$. В частности,

$$\mu_{g^{-1}}(g(z)) = -\mu_g(z) \cdot \frac{g_z(z)}{g_{\bar{z}}(z)},$$

так что $|\mu_{g^{-1}}(g(z))| = |\mu_g(z)|$ для почти всех $z \in D$.

Из закона преобразования (6.3) можно вывести следующее правило преобразования дифференциалов Бельтрами μ_w по отношению к композициям w с конформными отображениями f . Если f – конформное отображение (т.е. $\mu_f \equiv 0$), то

$$\mu_{f \circ w}(z) \equiv \mu_w(z), \quad \mu_{w \circ f} = (\mu_w \circ f) \frac{\overline{f_z}}{f_z}.$$

Из указанного правила преобразования дифференциалов Бельтрами вытекает следующее свойство единственности решений уравнения (6.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Предположим, что квазиконформные гомеоморфизмы w_1 и w_2 в области D удовлетворяют одному и тому же уравнению Бельтрами*

$$w_{\bar{z}} = \mu w_z$$

для почти всех $z \in D$, где μ – дифференциал Бельтрами в D , удовлетворяющий условию (6.1). Тогда отображения $w_1 \circ w_2^{-1}$ и $w_2 \circ w_1^{-1}$ конформны. Обратно, композиция $f \circ w_1$ с любым конформным отображением f , заданным на $w_1(D)$, удовлетворяет тому же уравнению Бельтрами, что и w_1 .

Квазиконформные гомеоморфизмы обладают регулярным поведением на границе согласно следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3 (МОРИ; см. [1]). *Пусть $w: \Delta \rightarrow \Delta$ есть K -квазиконформный гомеоморфизм единичного круга на себя, нормированный условием: $w(0) = 0$. Тогда следующая точная оценка*

$$|w(z_1) - w(z_2)| < 16|z_1 - z_2|^{1/K}$$

выполняется для всех $z_1 \neq z_2 \in \Delta$. Иными словами, гомеоморфизм w удовлетворяет условию Гельдера порядка $1/K$ в круге Δ .

Из теоремы Мори вытекает, в частности, что отображение w продолжается до гомеоморфизма замкнутого единичного круга $\bar{\Delta}$. Другим следствием теоремы Мори является тот факт, что K -квазиконформные гомеоморфизмы w единичного круга Δ на себя, нормированные условием $w(0) = 0$, образуют компактное семейство в топологии нормальной сходимости (т.е. равномерной сходимости на компактных подмножествах). Этот результат легко переносится на области $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ общего вида.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Рассмотрим семейство всех K -квазиконформных отображений в области D , нормированных условием, что любое отображение семейства переводит две фиксированные различные точки $z_1, z_2 \in D$ в две другие фиксированные различные точки ζ_1, ζ_2 . Тогда указанное семейство является компактным в топологии нормальной сходимости и любое отображение w этого семейства удовлетворяет условию Гельдера*

$$|w(z_1) - w(z_2)| < A|z_1 - z_2|^{1/K}$$

на любом компактном подмножестве в D , где константа A зависит только от K и компактного подмножества.

В частности, любой квазиконформный гомеоморфизм $w: D_1 \rightarrow D_2$ продолжается до гомеоморфизма $w: \bar{D}_1 \rightarrow \bar{D}_2$ замыканий рассматриваемых областей и, следовательно, определяет гомеоморфизм их границ.

Можно поставить обратный вопрос: когда заданный гомеоморфизм $w: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ продолжается до квазиконформного гомеоморфизма $D_1 \rightarrow D_2$. Удобно рассмотреть эту задачу для начала в частном случае, когда обе области совпадают с верхней полуплоскостью: $D_1 = D_2 = H$.

Предположим, что $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ есть монотонно возрастающий гомеоморфизм расширенной вещественной прямой $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{C}}$, удовлетворяющий условию: $f(\infty) = \infty$. Назовем его *квазисимметричным*, если существует константа $A > 0$ такая, что следующее конечно-разностное условие

$$\frac{1}{A} \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq A \quad (6.4)$$

выполняется для всех $x \in \mathbb{R}$ и всех $t > 0$.

Это условие можно рассматривать в качестве одного из вариантов условия на перекрестное отношение четверок точек. Напомним, что *перекрестное отношение* четырех различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 на комплексной плоскости задается величиной

$$\rho = \rho(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Равенство перекрестных отношений

$$\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \rho(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$$

является необходимым и достаточным условием существования дробно-линейного преобразования комплексной плоскости, переводящего четверку точек z_1, z_2, z_3, z_4 в четверку точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$. В случае квазиконформных отображений перекрестные отношения могут меняться, но контролируемым образом. Условие квазисимметричности (6.4) выражает эту “контролируемость” в удобном виде. Именно, для заданного гомеоморфизма $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ выберем четверку точек вида $\vec{x} := (x - t, x, x + t, \infty)$ на $\overline{\mathbb{R}}$ с перекрестным отношением $\rho(\vec{x}) =: \rho$ и сопоставим ей величину

$$M(\rho(\vec{x})) = M(\rho) := \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

Если, в частности, $\rho = 1/2$, то $M(\rho) = 1$. В этом случае условие (6.4) означает, что соответствующее перекрестное отношение четверки точек $f(\vec{x}) := (f(x - t), f(x), f(x + t), \infty)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{A} \leq M(\rho(f(\vec{x}))) \leq A.$$

То же самое условие может быть переписано в терминах $\rho(f(\vec{x}))$ в виде

$$\frac{1}{A+1} \leq \rho(f(\vec{x})) \leq \frac{A}{A+1}$$

или

$$\frac{1}{2} - \epsilon \leq \rho(f(\vec{x})) \leq \frac{1}{2} + \epsilon,$$

где $\epsilon = \epsilon(A) := \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1}$.

ТЕОРЕМА 4 (БЕРЛИНГ–АЛЬФОРС, см. [1], [49])). *Предположим, что $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ есть монотонно возрастающий гомеоморфизм расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ на себя, удовлетворяющий условию: $f(\infty) = \infty$. Тогда его можно продолжить до квазиконформного гомеоморфизма $w: H \rightarrow H$ тогда и только тогда, когда f квазисимметричен, т.е. если существует константа $A > 0$ такая, что*

$$\frac{1}{A} \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq A$$

для всех $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

Мы уже пояснили выше, из каких соображений можно вывести необходимость условия (6.4). Достаточность этого условия основана на следующей замечательной формуле Берлинга–Альфorsa, которая дает квазиконформное продолжение w квазисимметричного гомеоморфизма f на верхнюю полуплоскость H :

$$w(x+iy) = \frac{1}{2} \int_0^1 (f(x+ty) + f(x-ty)) dt + i \int_0^1 (f(x+ty) - f(x-ty)) dt$$

для $x + it \in H$.

Сформулируем также аналог вышеприведенной теоремы для случая единичной окружности S^1 . Будем говорить, что сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f: S^1 \rightarrow S^1$ является *квазисимметричным*, если он удовлетворяет для некоторого $0 < \epsilon < 1$ неравенству

$$\frac{1}{2}(1 - \epsilon) \leq \rho(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) \leq \frac{1}{2}(1 + \epsilon) \quad (6.5)$$

для любой четверки точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S^1$ с перекрестным отношением $\rho(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{2}$.

Аналог теоремы Берлинга–Альфorsa для окружности S^1 утверждает, что *сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f: S^1 \rightarrow S^1$ продолжается до квазиконформного гомеоморфизма $w: \Delta \rightarrow \Delta$ тогда и только тогда, когда он квазисимметричен*. Дуади и Эрл (см. [19]) нашли явный оператор продолжения E , который сопоставляет квазисимметричному гомеоморфизму f его продолжение до квазиконформного гомеоморфизма w круга Δ и является конформно инвариантным в том смысле, что $E(w \circ f) = w \circ E(f)$ для любого дробно-линейного автоморфизма Δ .

Образ C окружности S^1 при квазиконформном гомеоморфизме расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется *квазиокружностью*, а области D_1, D_2 , дополнительные к C в $\mathbb{C}$, называются *квазикругами*. Все квазиокружности имеют нулевую площадь, а их хаусдорфова размерность всегда меньше 2. Однако, она может принимать любое значение λ с $1 \leq \lambda < 2$ (см. [24]).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Имеется естественное описание квазиокружностей в терминах квазиконформных отражений. Напомним, что *отражением* относительно жордановой кривой C на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, делящей $\mathbb{C} \setminus C$ на две области

D_1, D_2 , называется сохраняющий ориентацию инволютивный гомеоморфизм φ плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, который отображает область D_1 на D_2 (и обратно) и оставляет на месте каждую точку C . Квазиокружности характеризуются следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Жорданова кривая C на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ является квазиокружностью тогда и только тогда, когда существует квазиконформное отражение относительно C .*

Мы опускает доказательство этого предложения, отсылая за ним к книге [49], теорема 6.1.

Квазиокружности, проходящие через $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$, можно еще описать с помощью следующего простого геометрического критерия. Именно, жорданова кривая C , проходящая через ∞ , является квазиокружностью тогда и только тогда, когда существует константа $c > 0$, для которой выполняется следующее условие: для любых трех конечных точек z_1, z_2, z_3 на C таких, что z_2 лежит между z_1 и z_3 , справедливо неравенство

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| < c|z_1 - z_3|$$

(см. [1], [49]).

§ 6.2. Существование квазиконформных отображений

Ключевую роль в теории квазиконформных отображений играет следующая теорема существования решений уравнения Бельтрами (6.2).

ТЕОРЕМА 5 (ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ). *Для любой измеримой функции μ в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ такой, что $\|\mu\|_\infty = k < 1$, существует квазиконформное отображение w на D , комплексная дилатация которого совпадает с μ почти всюду на D . Другими словами, существует решение w уравнения Бельтрами*

$$w_{\bar{z}} = \mu w_z,$$

выполненного для почти всех $z \in D$.

Как мы уже отмечали ранее (см. предложение 11 в п. 6.1), любое другое решение $\tilde{w}$ указанного уравнения Бельтрами имеет

вид

$$\tilde{w} = w \circ f,$$

где f – некоторое конформное отображение.

Из приведенной теоремы существования вытекает следующее обобщение теоремы Римана: Пусть D_1 и D_2 – две области на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, границы которых состоят более, чем из одной точки. Если μ – измеримая функция на D_1 с $\|\mu\|_\infty < 1$, то существует квазиконформное отображение области D_1 на D_2 , комплексная дилатация которого совпадает с μ почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подробное доказательство теоремы 5 приводится в [1], здесь мы остановимся только на его главных моментах. Отметим, прежде всего, что достаточно доказать сформулированную теорему в случае всей плоскости, поскольку любая функция $\mu \in L^\infty(D)$ с условием $\|\mu\|_\infty < 1$ продолжается (нулем вне D) на всю плоскость с сохранением оценки $\|\mu\|_\infty < 1$.

Переходя к доказательству теоремы существования для комплексной плоскости, рассмотрим вначале случай, когда комплексная дилатация μ имеет компактный носитель.

При этом предположении покажем, что существует единственное решение уравнения Бельтрами (6.2):

$$w_{\bar{z}} = \mu w_z,$$

удовлетворяющее условиям:

$$w(0) = 0 \text{ и } w_z - 1 \in L^p,$$

где $p > 2$ – некоторое число, достаточно близкое к 2, которое будет выбрано позже.

Введем оператор Коши–Грина

$$Ph(\zeta) := -\frac{1}{\pi} \int h(z) \left(\frac{1}{z - \zeta} - \frac{1}{z} \right) dx dy,$$

где интеграл берется по всей комплексной плоскости. Указанный оператор корректно определен на функциях $h \in L^p$ с $p > 2$ и задает непрерывную функцию $Ph(\zeta)$ (функция $Ph(\zeta)$ даже непрерывна по Гельдеру с показателем $1 - \frac{2}{p}$).

Частные производные Ph (в обобщенном смысле) удовлетворяют уравнениям

$$(Ph)_{\bar{z}} = h, \quad (Ph)_z = Th,$$

где T – интегральный оператор Кальдерона–Зигмунда, определяемый посредством

$$Th(\zeta) := -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int h(z) \frac{1}{(z - \zeta)^2} dx dy.$$

Здесь интеграл берется в смысле *главного значения*, т.е.

$$Th(\zeta) := -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|z - \zeta| > \epsilon} h(z) \frac{1}{(z - \zeta)^2} dx dy.$$

Оператор Th корректно определен на функциях h класса C_0^2 (т.е. C^2 -гладких функциях с компактными носителями). Для таких h функция $Th(\zeta)$ является C^1 -гладкой. Оператор T изометричен в L^2 -смысле, т.е.

$$\|Th\|_2 = \|h\|_2.$$

Отсюда следует, что его можно продолжить до линейного ограниченного оператора на L^2 . Более того, можно показать, пользуясь неравенством Кальдерона–Зигмунда, что оператор T ограничен на функциях $h \in L^p$ с $p > 1$:

$$\|Th\|_p \leq C_p \|h\|_p,$$

и $C_p \rightarrow 1$ при $p \rightarrow 2$. Выберем теперь $p > 2$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|\mu\|_\infty C_p < 1$.

Вернемся к построению решения w уравнения Бельтрами (6.2), удовлетворяющего условиям: $w(0) = 0$ и $w_z - 1 \in L^p$.

Покажем сначала, что такое решение, если оно существует, определено единственным образом. Предположим, что w – решение указанного вида и рассмотрим функцию

$$W := w - P(w_{\bar{z}}).$$

Тогда ее частная производная по $\bar{z}$ равна нулю, следовательно, W есть целая функция. С другой стороны, из условия $w_z - 1 \in L^p$ следует, что производная W , равная $W' = w_z - T(w_{\bar{z}})$, удовлетворяет соотношению $W' - 1 \in L^p$, поскольку $w_{\bar{z}} = \mu w_z$ принадлежит L^p . Это возможно только в том случае, если $W' \equiv 1$, т.е. $W(z) \equiv z + \text{const}$. Константа равна нулю ввиду нормировки, поэтому $W(z) \equiv z$ и

$$w = P(w_{\bar{z}}) + z.$$

Дифференцируя это уравнение по z , получим для w_z интегральное уравнение

$$w_z = T(w_{\bar{z}}) + 1 = T(\mu w_z) + 1,$$

в котором оператор $h \mapsto T(\mu h)$ является сжимающим, так как

$$\|T \circ \mu\|_p \leq \|\mu\|_\infty C_p < 1.$$

Допустим теперь, что $\tilde{w}$ – другое решение уравнения (6.2), удовлетворяющее условиям: $\tilde{w}(0) = 0$ и $\tilde{w}_z - 1 \in L^p$. Тогда функция $\tilde{w} - w$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{w}_z - w_z = T(\mu(\tilde{w}_z - w_z)),$$

из которого следует, ввиду единственности его решения, что $\tilde{w}_z = w_z$ почти всюду. Тогда из уравнения Бельтрами вытекает, что также $\tilde{w}_{\bar{z}} = w_{\bar{z}}$ почти всюду. Следовательно, $\tilde{w} - w$ есть константа, равная нулю ввиду нормировки.

Для доказательства существования решения w уравнения (6.2), удовлетворяющего условиям: $w(0) = 0$ и $w_z - 1 \in L^p$, воспользуемся интегральным уравнением

$$h = T(\mu h) + T\mu.$$

Его единственное L^p -решение дает нам искомое решение уравнения Бельтрами (6.2), задаваемое формулой

$$w = P(\mu(h+1)) + z. \quad (6.6)$$

Действительно, так как $\mu(h+1) \in L^p$ (напомним, что μ имеет компактный носитель), то функция $P(\mu(h+1))$ корректно определена и непрерывна. Производные w (в обобщенном смысле) равны

$$w_{\bar{z}} = \mu(h+1), \quad w_z = T(\mu(h+1)) + 1 = h+1$$

и $w_z - 1 = h \in L^p$. Поэтому функция w , задаваемая формулой (6.6), удовлетворяет уравнению (6.2) и условиям: $w(0) = 0$ и $w_z - 1 \in L^p$. Согласно теореме единственности (см. предложение 11), построенное решение w уравнения (6.2) будет однозначно определено, если мы предположим дополнительно, что оно оставляет на месте не только начало 0, но и две другие точки, скажем

$z = 1$ и $z = \infty$. Обозначим такое нормализованное решение через $w[\mu]$.

Для окончания доказательства остается избавиться от условия компактности носителя комплексной дилатации μ . Этого можно добиться с помощью следующего приема из [1], п. VB.

Заметим, что случай, в котором $\mu \equiv 0$ в окрестности 0, можно свести к рассмотренному, воспользовавшись отражением относительно единичной окружности S^1 . Более подробно, положим для заданной комплексной дилатации μ , обращающейся в нуль в окрестности 0:

$$\tilde{\mu}(z) := \mu\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{z^2}{\bar{z}^2}.$$

Тогда $\tilde{\mu}$ имеет компактный носитель, поэтому можно найти нормализованное решение $\tilde{w} = w[\tilde{\mu}]$ уравнения Бельтрами с комплексной дилатацией $\tilde{\mu}$, удовлетворяющее дополнительным условиям, указанным в начале доказательства. Тогда “отраженная” функция

$$w(z) := \frac{1}{\tilde{w}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

будет совпадать с нормализованным решением $w[\mu]$ уравнения Бельтрами (6.2).

В общем случае разложим заданную комплексную дилатацию μ в сумму $\mu = \mu_\infty + \mu_0$ комплексной дилатации μ_∞ , имеющей компактный носитель, и комплексной дилатации μ_0 , равной нулю в окрестности 0. Нам хотелось бы записать $w[\mu]$ в виде композиции $w[\mu_\infty] \circ w[\mu_0]$ соответствующих нормализованных решений $w[\mu_\infty]$ и $w[\mu_0]$. Но это, к сожалению, невозможно ввиду формулы композиции (6.3) для комплексных дилатаций. Однако, принимая во внимание формулу (6.3), мы можем записать $w[\mu]$ в виде композиции

$$w[\mu] = w[\lambda] \circ w[\mu_0],$$

где комплексная дилатация

$$\lambda := \left[\left(\frac{\mu - \mu_0}{1 - \mu\bar{\mu}_0} \right) \left(\frac{w[\mu_0]z}{\bar{w}[\mu_0]\bar{z}} \right) \right] \circ (w[\mu_0])^{-1}$$

все еще имеет компактный носитель. Этим завершается доказательство теоремы существования.

Ввиду теоремы единственности (предложение 11 в п. 6.1), справедливо следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой измеримой функции μ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с $\|\mu\|_\infty < 1$ существует единственное нормализованное квазиконформное отображение в $\mathbb{C}$, оставляющее на месте точки $0, 1, \infty$, комплексная дилатация которого совпадает с μ почти всюду на $\mathbb{C}$.

В качестве примера применения теоремы существования 5 построим решение уравнения Бельтрами (6.2) в верхней полуплоскости $H = H_+$, сохраняющее H . Для этого продолжим дилатацию μ в нижнюю полуплоскость $H^* = H_-$ по симметрии, полагая:

$$\hat{\mu}(z) := \overline{\mu(\bar{z})} \text{ при } z \in H_-. \quad (6.7)$$

Тогда, применяя теорему существования к уравнению Бельтрами с комплексной дилатацией $\hat{\mu}$, получим решение w_μ этого уравнения, оставляющее на месте точки $0, 1, \infty$. Из единственности решения вытекает, что w_μ удовлетворяет соотношению

$$w_\mu(\bar{z}) = \overline{w_\mu(z)}.$$

Таким образом, w_μ отображает вещественную ось на себя и, следовательно, сохраняет верхнюю полуплоскость H_+ .

С другой стороны, для продолжения заданной комплексной дилатации μ на всю плоскость $\mathbb{C}$ можно воспользоваться методом, предложенным в начале доказательства теоремы 5, т.е. продолжить μ нулем вне H_+ , полагая

$$\check{\mu}(z) = 0 \text{ при } z \in H_-.$$

Применяя теорему существования к уравнению Бельтрами с комплексной дилатацией $\check{\mu}$, получим квазиконформное отображение w^μ , которое конформно в нижней полуплоскости H_- и оставляет на месте точки $0, 1, \infty$.

Первый метод построения решения w_μ уравнения Бельтрами в H_+ называется *вещественно аналитическим*, поскольку в этом случае w_μ вещественно аналитически зависит от μ . Соответственно, второй метод называется *комплексно аналитическим*, поскольку w^μ зависит от μ голоморфным образом (строгое доказательство этих утверждений дано в [56], глава 1.2).

Оба метода переносятся на случай уравнения Бельтрами в единичном круге Δ . Для этого в первом методе нужно заменить

преобразование симметрии (6.7) отражением относительно единичной окружности $S^1 := \partial\Delta$. Иными словами, комплексная дилатация μ , заданная в единичном круге $\Delta = \Delta_+$, продолжается на его внешность Δ_- по формуле

$$\hat{\mu}\left(\frac{1}{z}\right) := \overline{\mu(z)} \cdot \frac{z^2}{\bar{z}^2} \quad \text{при } z \in \Delta.$$

Теорема существования решения уравнения Бельтрами с продолженной дилатацией $\hat{\mu}$ дает квазиконформный гомеоморфизм $w_\mu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, который сохраняет Δ_+ и Δ_- и оставляет на месте точки $\pm 1, -i$. Второй метод приводит к квазиконформному гомеоморфизму $w^\mu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, который конформен на Δ_- и оставляет на месте точки $\pm 1, -i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Имеется интересное утверждение, доказанное Манье, Садом и Сулливаном, характеризующее квазиконформные гомеоморфизмы как голоморфные возмущения тождественного гомеоморфизма. Более точно, скажем, что гомеоморфизм $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ является голоморфным возмущением тождественного, если его можно включить в семейство гомеоморфизмов $f_\lambda: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, зависящих от параметра $\lambda \in \Delta$ и таких, что для любого фиксированного $z_0 \in \mathbb{C}$ функция $f_\lambda(z_0)$ голоморфна по $\lambda \in \Delta$ и

$$f_0 = \text{id}, \quad f_{\lambda_0} = f \quad \text{для некоторого } \lambda_0 \in \Delta.$$

В работе [52] показано, что любое отображение f_λ из такого семейства обязательно продолжается до квазиконформного гомеоморфизма $\tilde{f}_\lambda$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с комплексной дилатацией, не превосходящей по модулю $(1 + |\lambda|)/(1 - |\lambda|)$.

Обратно, любой квазиконформный гомеоморфизм f расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ является голоморфным возмущением тождественного. Действительно, если $f = w^\mu$ для некоторого дифференциала Бельтрами μ с $\|\mu\|_\infty = k < 1$, то мы можем включить f в голоморфное семейство квазиконформных гомеоморфизмов, задаваемое посредством

$$f_\lambda := w^{\lambda\mu/k}.$$

Библиографические указания

Ключевыми ссылками для этой главы могут служить лекции Альфорса по квазиконформным отображениям [1] и книга Лехто [49]. Большинство приведенных утверждений содержится в этих изданиях. В частности, мы следуем лекциям Альфорса при доказательстве основной теоремы существования для квазиконформных отображений.

Часть II

Пространства петель компактных групп Ли

Глава 7. Пространство петель ΩG

Пусть G – компактная группа Ли. *Пространством петель* или *пространством централизованных петель* называется пространство (правых) смежных классов группы петель $LG = C^\infty(S^1, G)$ вида

$$\Omega G = LG/G, \quad (7.1)$$

где $LG = C^\infty(S^1, G)$ – группа гладких отображений окружности $S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ в группу G , а G в знаменателе отождествляется с группой постоянных отображений $S^1 \rightarrow g_0 \in G$.

Пространство петель ΩG есть однородное пространство группы Ли–Фреше LG с естественным действием группы LG на нем левыми сдвигами. Начало (нейтральный элемент) пространства ΩG задается классом $o := [1] = [G]$ постоянных отображений.

Пространство ΩG можно отождествить (как однородное пространство) с подгруппой $L_1 G$ отображений $\gamma \in LG$ таких, что

$$\gamma: 1 \in S^1 \longrightarrow \gamma(1) = e \in G,$$

сопоставляя классу $[\gamma]$ петли $\gamma \in LG$ отображение $\gamma(1)^{-1}\gamma \in L_1 G$. При таком отождествлении пространство ΩG реализуется в виде замкнутого подмногообразия (корузмерности 1) многообразия Фреше LG и потому также является многообразием Фреше. Заметим, что указанное отождествление ΩG с подгруппой $L_1 G$ не каноническое, поскольку подгруппа G в группе петель LG не является нормальной.

§ 7.1. Комплексное однородное представление

Одной из главных особенностей пространства петель ΩG , играющей ключевую роль при исследовании его кэлеровой геометрии, является существование двух видов однородных представлений. А именно, наряду с “вещественным” представлением (7.1) пространства ΩG в виде однородного пространства вещественной группы Ли–Фреше LG , имеется еще и “комплексное” представление ΩG в виде однородного пространства комплексной группы

Ли–Фреше $LG^{\mathbb{C}} = C^{\infty}(S^1, G^{\mathbb{C}})$, где $G^{\mathbb{C}}$ есть комплексификация группы Ли G . Более точно, справедливо следующее представление

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}} / L^+ G^{\mathbb{C}}, \quad (7.2)$$

где $L^+ G^{\mathbb{C}} = \text{Hol}(\Delta, G^{\mathbb{C}})$ – подгруппа отображений из $LG^{\mathbb{C}}$, продолжающихся гладким образом до голоморфных (гладких вплоть до границы) отображений единичного круга $\Delta \subset \mathbb{C}$ в группу $G^{\mathbb{C}}$.

Поясним, что означает представление (7.2) в случае унитарной группы $G = U(n)$. В этом случае $G^{\mathbb{C}} = \text{GL}(n, \mathbb{C})$, а содержание равенства (7.2) сводится к тому, что любая комплексная невырожденная (т.е. принимающая значения в группе $\text{GL}(n, \mathbb{C})$) матричная функция $T(z)$ на окружности S^1 может быть представлена в виде

$$T(z) = U(z) \cdot H_+(z), \quad z = e^{i\theta}, \quad (7.3)$$

где $U(z)$ – гладкая унитарная (т.е. принимающая значения в группе $U(n)$) матричная функция, а $H_+(z)$ гладко продолжается до голоморфной невырожденной матричной функции в круге Δ . Это утверждение является параметрическим аналогом стандартного представления матрицы $T \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ в виде произведения унитарной и верхне-треугольной матриц. Представление (7.3) будет единственным, если потребовать, чтобы $U \in L_1 U(n)$. Более того, отображение произведения $(U, H_+) \mapsto U \cdot H_+$ задает диффеоморфизм $\Omega U(n) \times L^+ \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow L \text{GL}(n, \mathbb{C})$.

В аналогичном смысле мы будем понимать равенство (7.2) и в случае произвольной компактной группы Ли G . Именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6 (ПРЕССЛИ–СИГАЛ). *Отображение произведения*

$$\Omega G \times L^+ G^{\mathbb{C}} \longrightarrow LG^{\mathbb{C}}$$

задает диффеоморфизм многообразий Фреше.

Доказательство этой теоремы, приведенное в [65], использует грассманову реализацию пространства петель ΩG и будет дано ниже в главе 9 после того, как будет построена грассманова модель ΩG .

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Имеется другой подход к доказательству этой теоремы, основанный на теореме Берлинга–Хелсона, которая дает описание подпространств пространства L^2 на окружности, инвариантных относительно сдвига (этот подход к доказательству теоремы 6 был предложен нам А.Федотовым). Поясним на примере группы $G = S^1$, каким образом можно применить теорему Берлинга–Хелсона к доказательству теоремы 6.

Обозначим через H^2 подпространство Харди в $L^2 = L^2(S^1)$, состоящее из функций f , голоморфно продолжающихся внутрь единичного круга и имеющих граничные значения в L^2 на окружности S^1 . В терминах рядов Фурье $f \in H^2$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 := \|f\|_{H^2}^2 < \infty, \quad z \in \Delta.$$

Рассмотрим оператор сдвига S в L^2 , задаваемый формулой

$$S: f(z) \mapsto zf(z)$$

и отображающий подпространство H^2 в себя.

ТЕОРЕМА 7 (БЕРЛИНГ–ХЕЛСОН; СМ., НАПРИМЕР, [60]). Любое подпространство E в L^2 , инвариантное относительно оператора сдвига S , имеет следующий вид:

1. если $SE = E$, то существует измеримое подмножество d в S^1 такое, что

$$E = \chi_d L^2,$$

где χ_d – характеристическая функция множества d ;

2. если $SE \subset E$, но $SE \neq E$, то существует функция $\theta \in L^2$ такая, что $|\theta| = 1$ почти всюду на S^1 и

$$E = \theta H^2.$$

Вернемся к соотношению (7.2). Рассмотрим для функции $f \in L\mathbb{C}^*$ (здесь $\mathbb{C}^* = (S^1)^{\mathbb{C}}$ обозначает мультипликативную группу ненулевых комплексных чисел) подпространство E в L^2 вида

$$E = fH^2.$$

Оно инвариантно относительно оператора сдвига S и $SE \neq E$, если $f \notin L^+\mathbb{C}^*$. Поэтому по теореме Берлинга–Хелсона

$$fH^2 = \theta H^2$$

для некоторой функции $\theta \in L^2$ такой, что $|\theta| = 1$ почти всюду на S^1 . Отсюда вытекает, что

$$f = f \cdot 1 = \theta \cdot h$$

для некоторой функции $h \in H^2$, что совпадает с доказываемым соотношением. Остается только показать, что функции θ и h могут быть выбраны гладкими (и гладко зависящими от f), так что $\theta \in \Omega S^1$ и $h \in L^+ C^*$. Это может быть сделано также, как в [65], гл. 8 (мы вернемся к обсуждению этого вопроса в главе 9).

§ 7.2. Симплектическая структура

Так как ΩG является однородным пространством группы петель LG , естественно пользоваться при изучении его кэлеровой геометрии структурами, инвариантными относительно действия LG на ΩG . Такие структуры однозначно определяются их значениями в начале $o \in \Omega G$. Поэтому начнем с описания касательного пространства $T_o(\Omega G)$.

Касательное пространство $T_o(\Omega G)$ совпадает с фактором касательного пространства $T_1(LG) = L\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$ в единице группы LG по модулю постоянных отображений, т.е.

$$T_o(\Omega G) = L\mathfrak{g}/\mathfrak{g} =: \Omega\mathfrak{g}.$$

Удобно представлять векторы из комплексифицированного касательного пространства

$$T_o^{\mathbb{C}}(\Omega G) = L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} =: \Omega\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

рядами Фурье

$$\Omega\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \ni \xi(z) = \sum_{k \neq 0} \xi_k z^k, \quad z = e^{i\theta},$$

где $\xi_k \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (член, отвечающий $k = 0$, отсутствует из-за факторизации по $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ в $\Omega\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$). Вектор $\xi \in T_o^{\mathbb{C}}(\Omega G)$ принадлежит вещественному касательному пространству $T_o(\Omega G)$ тогда и только тогда, когда

$$\xi_{-k} = \bar{\xi}_k,$$

где “черта” означает комплексное сопряжение в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, для которого $\bar{\bar{g}} = \mathfrak{g}$.

Построим теперь инвариантную (относительно LG -действия) симплектическую структуру на ΩG . Определим сначала ее значение в начале, другими словами, сужение симплектической формы на касательное пространство $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g}$, а затем разнесем ее в другие точки ΩG , пользуясь левыми сдвигами группы LG .

Для того, чтобы определить значение симплектической формы в начале, необходимо зафиксировать инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Напомним основные определения, относящиеся к этому понятию.

ОТСТУПЛЕНИЕ 2 (инвариантное скалярное произведение). Скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G задается положительно определенной симметричной билинейной формой на $\mathfrak{g}$. Будем называть его *инвариантным*, если оно инвариантно относительно присоединенного действия Ad группы G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, задаваемого следующим образом. Группа G действует на себе внутренними автоморфизмами вида

$$G \ni g: G \ni h \longrightarrow ghg^{-1} \in G.$$

Это действие оставляет единицу $e \in G$ на месте и порождает действие группы G на $T_e G = \mathfrak{g}$, называемое *присоединенным действием* и обозначаемое через $\text{Ad } g: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Дифференциал этого действия называется *присоединенным представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и имеет вид

$$\text{ad } \xi: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad \text{ad } \xi: \eta \longmapsto [\xi, \eta].$$

Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ инвариантно, если

$$\langle (\text{Ad } g)\eta, (\text{Ad } g)\zeta \rangle = \langle \eta, \zeta \rangle \quad \text{для любых } \eta, \zeta \in \mathfrak{g}. \quad (7.4)$$

В случае связной группы G это условие эквивалентно соотношению на уровне алгебры Ли, получаемому из (7.4) дифференцированием:

$$\langle (\text{ad } \xi)\eta, \zeta \rangle + \langle \eta, (\text{ad } \xi)\zeta \rangle = 0,$$

что равносильно

$$\langle [\xi, \eta], \zeta \rangle + \langle \eta, [\xi, \zeta] \rangle = 0.$$

На любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует инвариантная симметричная билинейная форма, называемая *формой Киллинга*, определяемая посредством

$$\langle \xi, \eta \rangle := \text{tr}(\text{ad } \xi \text{ ad } \eta), \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

В частности, для $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ и $\langle \xi, \eta \rangle := \mathrm{tr}(\xi \eta)$. Форма Киллинга невырождена, если группа G полупроста (например, если $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$). Если группа G , кроме того, компактна, то форма Киллинга отрицательно определена. Поэтому эта форма, взятая со знаком “минус”, задает инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ компактной полупростой группы Ли G .

Вернемся к построению LG -инвариантной симплектической формы ω на ΩG . Фиксируем инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G и определим сужение формы ω на касательное пространство $T_o(\Omega G) = \Omega \mathfrak{g} = L\mathfrak{g}/\mathfrak{g}$.

Пользуясь скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, введем прежде всего 2-форму ω_0 на алгебре петель $L\mathfrak{g}$, полагая ее равной

$$\omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\langle \xi(e^{i\theta}), \frac{d\eta(e^{i\theta})}{d\theta} \right\rangle d\theta \quad (7.5)$$

на векторах $\xi = \xi(e^{i\theta})$, $\eta = \eta(e^{i\theta})$ из алгебры $L\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$.

Это кососимметричная билинейная форма на $L\mathfrak{g}$, которая ввиду инвариантности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ инвариантна относительно присоединенного действия группы G постоянных петель на $L\mathfrak{g}$. Очевидно, что $\omega_0(\xi, \eta)$ равно нулю, если по крайней мере одно из отображений ξ, η постоянно. Поэтому форму ω_0 можно спустить на пространство $\Omega \mathfrak{g}$, так что спущенная форма будет уже невырожденной (для доказательства невырожденности достаточно рассмотреть значение спущенной формы $\omega_0(\cdot, \eta)$ на векторе $\xi(e^{i\theta}) = \eta'(e^{i\theta}) := \frac{d\eta(e^{i\theta})}{d\theta}$). Таким образом, мы построили кососимметричную билинейную форму ω_0 на $\Omega \mathfrak{g}$, которая инвариантна относительно присоединенного действия группы G на $\Omega \mathfrak{g}$. Эту форму можно продолжить (с помощью левых сдвигов) до LG -инвариантной невырожденной 2-формы ω на ΩG .

Остается проверить, что полученная форма ω замкнута на ΩG . Условие замкнутости (см. п. 1.2.4) ввиду инвариантности ω принимает вид

$$\omega([\xi, \eta], \zeta) + \omega([\eta, \zeta], \xi) + \omega([\zeta, \xi], \eta) = 0. \quad (7.6)$$

Достаточно проверить его на векторах $\xi, \eta, \zeta \in L\mathfrak{g}$. В этом случае равенство (7.6) означает, что

$$\int_0^{2\pi} \{ \langle [\xi, \eta], \zeta' \rangle + \langle [\eta, \zeta], \xi' \rangle + \langle [\zeta, \xi], \eta' \rangle \} d\theta = 0. \quad (7.7)$$

Интегрируя первый интеграл по частям, получим

$$\int_0^{2\pi} \langle [\xi, \eta], \zeta' \rangle d\theta = - \int_0^{2\pi} \langle [\xi', \eta], \zeta \rangle d\theta - \int_0^{2\pi} \langle [\xi, \eta'], \zeta \rangle d\theta. \quad (7.8)$$

Ввиду инвариантности скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$

$$\langle [\xi', \eta], \zeta \rangle = \langle \xi', [\eta, \zeta] \rangle = \langle [\eta, \zeta], \xi' \rangle,$$

и первый член в правой части равенства (7.8) в сумме с вторым интегралом в формуле (7.7) дает нуль. По той же причине

$$\langle [\xi, \eta'], \zeta \rangle = \langle \eta', [\zeta, \xi] \rangle = \langle [\zeta, \xi], \eta' \rangle$$

и второй член в правой части равенства (7.8) в сумме с третьим интегралом в формуле (7.7) также дает нуль. Этим доказана справедливость равенства (7.6), откуда вытекает, что $d\omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$ для всех $\xi, \eta, \zeta \in L\mathfrak{g}$.

Хотя выбор формулы (7.5) для формы ω_0 на $L\mathfrak{g}$ и кажется несколько произвольным, можно показать, что эта форма однозначно определяется инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$ в случае полупростой группы Ли G . Более точно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14 (ПРЕССЛИ–СИГАЛ, [65])). *Если группа Ли G полупроста, то любая 2-форма ω_0 на $L\mathfrak{g}$, которая удовлетворяет соотношению (7.6) и инвариантна относительно присоединенного действия группы G на $L\mathfrak{g}$, задается формулой (7.5) для некоторой симметричной инвариантной билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что любая инвариантная билинейная форма на комплексной полупростой алгебре Ли обязательно симметрична. Более того, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Если G – полупростая группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, то любая комплексно-билинейная G -инвариантная форма на комплексифицированной алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ обязательно симметрична.*

В случае простой группы Ли G утверждение леммы вытекает из того, что существует единственная (с точностью до пропорциональности) комплексно-билинейная G -инвариантная форма на G

(лемма Шура), а именно, форма Киллинга. Случай полупростой группы Ли G сводится к рассмотренному (подробности см. в [65]).

Вернемся к доказательству предложения. Форму ω_0 на $L\mathfrak{g}$ можно продолжить до комплексно-билинейной формы $\omega_0: L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$. Так как любой элемент $\xi \in L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ представляется рядом Фурье вида

$$\xi = \sum \xi_p z^p,$$

форма ω_0 однозначно определяется своими значениями на мономах вида $\xi_p z^p$, иными словами, она однозначно восстанавливается по формам

$$\omega_{p,q}(\xi, \eta) := \omega_0(\xi z^p, \eta z^q),$$

заданным при $p, q \in \mathbb{Z}$ и $(\xi, \eta) \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Формы $\omega_{p,q}$ являются G -инвариантными и потому по лемме обязательно симметричны. Более того, из кососимметричности ω_0 вытекает, что $\omega_{p,q} = -\omega_{q,p}$. Применяя условие замкнутости формы ω_0 на $L\mathfrak{g}$ к мономам $\tilde{\xi} = \xi z^p$, $\tilde{\eta} = \eta z^q$, $\tilde{\zeta} = \zeta z^r$, получим

$$\omega_0([\tilde{\xi}, \tilde{\eta}], \tilde{\zeta}) + \omega_0([\tilde{\eta}, \tilde{\zeta}], \tilde{\xi}) + \omega_0([\tilde{\zeta}, \tilde{\xi}], \tilde{\eta}) = 0.$$

Это равенство преобразуется в следующее соотношение для форм $\omega_{p,q}$:

$$\omega_{p+q,r}([\xi, \eta], \zeta) + \omega_{q+r,p}([\eta, \zeta], \xi) + \omega_{r+p,q}([\zeta, \xi], \eta) = 0. \quad (7.9)$$

Пользуясь симметричностью и G -инвариантностью форм $\omega_{p,q}$, получим

$$\omega_{q+r,p}([\eta, \zeta], \xi) = \omega_{q+r,p}(\xi, [\eta, \zeta]) = \omega_{q+r,p}([\xi, \eta], \zeta)$$

и, аналогично,

$$\omega_{r+p,q}([\zeta, \xi], \eta) = \omega_{r+p,q}(\eta, [\zeta, \xi]) = \omega_{r+p,q}([\xi, \eta], \zeta).$$

Следовательно, равенство (7.9) можно переписать в виде

$$\omega_{p+q,r}([\xi, \eta], \zeta) + \omega_{q+r,p}([\xi, \eta], \zeta) + \omega_{r+p,q}([\xi, \eta], \zeta) = 0,$$

эквивалентном в случае полупростой алгебры Ли соотношению

$$\omega_{p+q,r} + \omega_{q+r,p} + \omega_{r+p,q} = 0. \quad (7.10)$$

Из последнего соотношения при $q = r = 0$ вытекает, что $\omega_{p,0} = 0$ для всех p . Полагая $r = -p - q$ в (7.10), получим

$$\omega_{p+q,-p-q} = \omega_{p,-p} + \omega_{q,-q},$$

откуда $\omega_{p,-p} = p\omega_{1,-1}$. Полагая $r = n - p - q$ в (7.10), будем иметь

$$\omega_{n-p-q,p+q} = \omega_{n-p,p} + \omega_{n-q,q},$$

откуда вытекает, что $\omega_{n-p,p} = p\omega_{n-1,1}$. Следовательно,

$$\omega_{n-1,1} = \frac{\omega_{0,n}}{n} = 0$$

и потому $\omega_{p,q} = 0$ при $p + q \neq 0$. Таким образом, форма ω_0 на векторах $\xi = \sum \xi_p z^p$, $\eta = \sum \eta_q z^q$ принимает значение

$$\omega_0(\xi, \eta) = \sum \omega_{p,q}(\xi_p, \eta_q) = \sum_p \omega_{p,-p}(\xi_p, \eta_{-p}) = \sum_p p\omega_{1,-1}(\xi_p, \eta_{-p}).$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_{1,-1}(\xi(\theta), \eta'(\theta)) d\theta &= \\ &= - \sum_{p,q} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_{1,-1}(\xi_p e^{ip\theta}, q\eta_q e^{iq\theta}) d\theta = \\ &= \sum_p \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p\omega_{1,-1}(\xi_p, \eta_{-p}) d\theta = \sum_p p\omega_{1,-1}(\xi_p, \eta_{-p}). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Окончательно

$$\omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(\theta), \eta'(\theta) \rangle d\theta$$

с инвариантным скалярным произведением на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, задаваемым формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle := \omega_{1,-1}(\xi, \eta), \quad (7.12)$$

чем завершается доказательство предложения.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Имеется и физическая мотивировка формулы (7.5) для симплектической формы ω , в основе которой лежит связь с теорией струн (см. [14]). С математической точки зрения рассматривается пространство $\Omega\mathbb{R}^d$ центрированных петель $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^d$, принимающих значения в (некомпактной) группе $\mathbb{R}^d$ трансляций d -мерного евклидова векторного пространства. С физической точки зрения пространство петель $\Omega\mathbb{R}^d$ можно интерпретировать как фазовое пространство бозонной теории открытых струн. Более подробно, конфигурационное пространство этой теории состоит из гладких отображений $q: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^d$, все производные которых обращаются в нуль в граничных точках. Ассоциированное фазовое пространство состоит при этом из пар отображений (p, q) того же типа. Симплектическая форма на указанном фазовом пространстве задается струнным аналогом стандартной формулы

$$\omega(\delta p, \delta q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \delta p(\sigma) \wedge \delta q(\sigma) d\sigma, \quad (7.13)$$

где $\delta p, \delta q$ – гладкие отображения $[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^d$ того же типа, что и выше, интерпретируемые как касательные векторы к фазовому пространству. Естественное отображение, сопоставляющее паре (p, q) отображение $x: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^d$, которое задается формулой

$$x(\sigma) = \begin{cases} p(\sigma) + q'(\sigma) & \text{при } 0 \leq \sigma \leq \pi, \\ p(-\sigma) + q'(-\sigma) & \text{при } -\pi \leq \sigma \leq 0, \end{cases}$$

отождествляет введенное фазовое пространство с пространством $\Omega\mathbb{R}^d$. Оно также преобразует стандартную симплектическую форму (7.13) на фазовом пространстве теории струн в симплектическую форму на пространстве $\Omega\mathbb{R}^d$, задаваемую формулой, аналогичной (7.5) (см. [14]).

Мы построили по произвольному инвариантному скалярному произведению на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ инвариантную симплектическую структуру ω на пространстве петель ΩG , задаваемую формулой (7.5). С другой стороны, любая инвариантная симплектическая структура на пространстве петель ΩG однозначно определяет инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, задаваемой формулой (7.12). Как мы отмечали в п. 4.2, инвариантные билинейные формы на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ параметризуются когомологиями $H^3(\mathfrak{g})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Заметим попутно, что условие инвариантности формы ω относительно присоединенного действия группы G на алгебре петель $L\mathfrak{g}$ не является существенным и играет роль нормировки. Действительно, если ω_0 – произвольная 2-форма на $L\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условию (7.6), то форма

$$g \cdot \omega_0(\xi, \eta) := \omega_0((\text{Ad } g)\xi, (\text{Ad } g)\eta) \text{ для } g \in G$$

принадлежит тому же классу когомологий, что и ω_0 (это вытекает из коциклического тождества (7.6)). Поэтому форма

$$\int_G g \cdot \omega_0 dg,$$

полученная из ω_0 усреднением по группе G , принадлежит тому же классу когомологий, что и ω_0 , но уже инвариантна относительно присоединенного действия постоянных петель.

§ 7.3. Комплексная структура

Комплексная структура на пространстве петель ΩG индуцируется из комплексного представления

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}} / L^+G^{\mathbb{C}}, \quad (7.14)$$

в котором $LG^{\mathbb{C}}$ является комплексной группой Ли–Фреше, а $L^+G^{\mathbb{C}}$ – ее замкнутой комплексной подгруппой.

Эта комплексная структура, обозначаемая далее через J^0 , является LG -инвариантной, а ее сужение на касательное пространство $T_o^{\mathbb{C}}(\Omega G) = \Omega\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ в начале задается явной формулой. Именно, если $\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k z^k \in \Omega\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, то

$$J^0 \xi = -i \sum_{k > 0} \xi_k z^k + i \sum_{k < 0} \xi_k z^k. \quad (7.15)$$

Отвечающее этой структуре касательное пространство $T_o^{1,0}(\Omega G)$ векторов типа $(1, 0)$ состоит из векторов вида $\sum_{k < 0} \xi_k z^k$, тогда как пространство $T_o^{0,1}(\Omega G)$ векторов типа $(0, 1)$ содержит векторы вида $\sum_{k > 0} \xi_k z^k$.

Из описания $(1, 0)$ -векторов на ΩG немедленно следует, что комплексная структура J^0 формально интегрируема в смысле определения из п. 1.2.4, т.е. скобка любых двух векторных полей

типа $(1, 0)$ на ΩG является снова векторным полем типа $(1, 0)$. Однако, как уже было указано в п. 1.2.4, формальная интегрируемость комплексной структуры в бесконечномерном случае еще не влечет за собой существование атласа координатных окрестностей и локальных комплексных координат на заданном многообразии. Для того, чтобы построить локальные комплексные координаты на многообразии ΩG , придется воспользоваться комплексным представлением (7.14) и теоремой факторизации Биркгофа. Сформулируем частный случай этой теоремы, достаточный для нашей надобности.

Обозначим через $L^-G^{\mathbb{C}}$ замкнутую подгруппу комплексифицированной группы петель $LG^{\mathbb{C}}$, состоящую из отображений $\gamma \in LG^{\mathbb{C}}$, которые продолжаются до голоморфных и гладких вплоть до окружности S^1 отображений круга Δ_- (совпадающего с дополнением замкнутого единичного круга $\overline{\Delta}$ на римановой сфере $\overline{\mathbb{C}}$). Рассмотрим также замкнутую подгруппу $L_1^-G^{\mathbb{C}}$ группы $L^-G^{\mathbb{C}}$, состоящую из отображений $\gamma \in L^-G^{\mathbb{C}}$, принимающих значение $e \in G^{\mathbb{C}}$ на бесконечности $\infty \in \Delta_-$.

ТЕОРЕМА 8 (ТЕОРЕМА БИРКГОФА, [8], [9]; см. также [65], гл. 8). *Отображение произведения*

$$L^+G^{\mathbb{C}} \times L_1^-G^{\mathbb{C}} \longrightarrow LG^{\mathbb{C}} \quad (7.16)$$

задает диффеоморфизм на открытое плотное подмножество в компоненте связности единицы группы $LG^{\mathbb{C}}$.

Из теоремы Биркгофа вытекает, что для всех $\gamma \in LG^{\mathbb{C}}$ из окрестности единицы $1 \in LG^{\mathbb{C}}$ имеет место представление

$$\gamma = \gamma_+ \cdot \gamma_-,$$

где $\gamma_+ \in L^+G^{\mathbb{C}}$, $\gamma_- \in L_1^-G^{\mathbb{C}}$. Сомножители $\gamma_{\pm}$ однозначно определяются отображением γ и их произведение задает локальный диффеоморфизм (7.16). Отсюда следует, в частности, что пространство петель ΩG локально диффеоморфно комплексной группе Ли–Фреше $L_1^-G^{\mathbb{C}}$.

§ 7.4. Кэлерова структура

Покажем теперь, что пространство петель ΩG является кэлеровым многообразием Фреше. Для этого, согласно определе-

нию 17 из п. 1.2.5, необходимо показать, что введенные комплексная и симплектическая структуры на ΩG совместимы.

Поскольку обе структуры LG -инвариантны, достаточно проверить их совместимость только в начале $o \in \Omega G$. Рассмотрим векторы $\xi, \eta \in T_o(\Omega G)$ с разложениями Фурье

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k z^k, \quad \eta = \sum_{l \neq 0} \eta_l z^l.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_o(\xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(e^{i\theta}), \eta'(e^{i\theta}) \rangle d\theta = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k, l \neq 0} \langle \xi_k e^{ik\theta}, l \eta_l e^{il\theta} \rangle d\theta = \\ &= -\frac{i}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \int_0^{2\pi} \langle \xi_k, k \eta_{-k} \rangle d\theta = \\ &= -i \sum_{k \neq 0} k \langle \xi_k, \eta_{-k} \rangle, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ продолжено до комплексно-билинейной положительно определенной формы на алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. (Напомним, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ называется положительно определенной, если $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$). Из приведенного соотношения вытекает первое свойство из определения 17. Для доказательства второго свойства из этого определения рассмотрим форму

$$g_o^0(\xi, \eta) := \omega_o(\xi, J^0 \eta)$$

на $\Omega \mathfrak{g}$ и покажем, что она положительно определена. Заметим, что при $\eta = \xi$ эта форма принимает вид

$$g_o^0(\xi, \xi) = -i \sum_{k > 0} k \langle \xi_k, i \xi_{-k} \rangle - i \sum_{k < 0} k \langle \xi_k, -i \xi_{-k} \rangle = 2 \sum_{k > 0} k \langle \xi_k, \xi_{-k} \rangle.$$

Так как $\xi_{-k} = \bar{\xi}_k$ и скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ положительно определено на $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, то форма $g_o^0(\xi, \xi)$ также положительно определена. Продолжая ее до LG -инвариантной положительно определенной формы на ΩG , получим инвариантную кэлерову метрику g^0 на ΩG . Таким образом, мы показали, что пространство петель ΩG является кэлеровым многообразием Фреше с симплектической структурой ω и комплексной структурой J^0 .

§ 7.5. Пространство петель ΩG как универсальное флаговое многообразие группы G

В начале п. 7.1 мы отмечали, что одним из характеристических свойств кэлерового многообразия Фреше ΩG является существование двух различных представлений ΩG :

$$\Omega G = LG/G = LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}},$$

в виде однородного пространства вещественной группы Ли–Фреше LG и ее комплексификации $LG^{\mathbb{C}}$.

В п. 3 было указано, что конечномерные кэлеровы многообразия, обладающие аналогичным свойством, т.е. являющиеся однородными пространствами одновременно вещественной компактной и комплексной групп Ли, называются флаговыми многообразиями. Таким образом, можно рассматривать пространство петель ΩG как бесконечномерный аналог флаговых многообразий. Более того, в этом параграфе мы покажем, что это пространство является в некотором смысле универсальным флаговым многообразием группы G , поскольку все конечномерные флаговые многообразия группы G канонически вложены в ΩG в виде комплексных подмногообразий.

Вещественное однородное представление флагового многообразия

$$F = G/L$$

группы G можно интерпретировать также как представление F в виде орбиты присоединенного действия Ad группы G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (или как орбиту коприсоединенного действия Ad^* группы G на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$). Именно, орбита элемента $\xi \in \mathfrak{g}$ относительно присоединенного действия имеет вид

$$G/G(\xi)$$

где подгруппа изотропии $G(\xi)$ в точке ξ совпадает с централизатором ξ , т.е. с

$$G(\xi) = \{g \in G: \text{Ad } g(\xi) = \xi\}.$$

Все такие орбиты являются флаговыми многообразиями и, обратно, любое флаговое многообразие компактной полупростой группы Ли может быть представлено в такой форме.

Рассмотрим теперь естественное действие группы окружности S^1 на пространстве петель ΩG , отождествляемом с подгруппой $L_1 G$ в LG , задаваемое поворотом петель

$$\lambda \cdot \gamma(z) = \gamma(\lambda)^{-1} \gamma(\lambda z), \quad \lambda \in S^1,$$

где $\gamma \in \Omega G$. Петля γ является неподвижной точкой этого S^1 -действия тогда и только тогда, когда

$$\gamma(\lambda z) = \gamma(\lambda) \gamma(z) \quad \text{для всех } \lambda, z \in S^1.$$

Другими словами, γ должно задавать групповой гомоморфизм $S^1 \rightarrow G$. Но если $\gamma: S^1 \rightarrow G$ является групповым гомоморфизмом, то то же самое верно и для всех петель, сопряженных к γ , т.е. петель вида $\gamma_g = g\gamma g^{-1}$ с $g \in G$. Множество всех таких петель (класс сопряженности петли γ) параметризуется точками однородного пространства

$$F_\gamma = G/G(\gamma),$$

где $G(\gamma)$ есть централизатор однопараметрической подгруппы $\gamma(S^1)$ в G . Однородное пространство F_γ можно отождествить, как отмечалось выше, с флаговым многообразием группы G .

Таким образом, *множество неподвижных точек S^1 -действия на пространстве ΩG совпадает с несвязным объединением*

$$\text{Fix}(S^1) = \bigcup_{\gamma} F_\gamma$$

флаговых многообразий F_γ , где γ пробегает множество классов сопряженности гомоморфизмов $S^1 \rightarrow G$. Флаговые многообразия F_γ вложены в ΩG в виде конечномерных кэлеровых подмногообразий.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Мы можем сказать больше о построенном вложении флаговых многообразий группы G в пространство петель ΩG . Именно, обозначим через

$$\pi: \Omega G \longrightarrow G, \quad \gamma \longmapsto \gamma(-1),$$

отображение, сопоставляющее петле γ ее значение в точке $-1 \in S^1$. Это отображение является аналогом канонического расслоения $\pi: F \rightarrow N$, рассмотренного в п. 3.1, замечание 5.

Согласно Уленбек [74], вложение флаговых многообразий F группы G в пространство ΩG “уважает” канонические расслоения. Иными словами, не только пространство петель ΩG можно рассматривать как универсальное флаговое многообразие группы G , но также и построенное выше каноническое расслоение $\pi: \Omega G \rightarrow G$ можно рассматривать как универсальное каноническое флаговое расслоение.

Более точно, имеется следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\Gamma} & \Omega G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ N(F) & \xrightarrow{\gamma} & G \end{array}$$

где $\pi: F \rightarrow N(F)$ есть каноническое расслоение над симметрическим пространством $N(F)$, построенное в п. 3.1, а отображение Γ является вложением флагового многообразия в пространство ΩG , построенным выше.

Горизонтальные отображения в этой диаграмме допускают простое описание в терминах канонического элемента, введенного в п. 3.1, замечание 5. Именно, предположим, что группа G имеет тривиальный центр и рассмотрим флаговое многообразие $F = G/L = G^{\mathbb{C}}/P$ с каноническим элементом ξ . Из тривиальности центра G вытекает, что $\exp(2\pi\xi) = e \in G$. Таким образом, мы можем определить отображение $\Gamma: F \rightarrow \Omega G$, полагая его равным $\Gamma(o) :=$ отображение $\{e^{it} \mapsto \exp(t\xi)\}$ в начале $o \in F$, и распространяя в другие точки G/L с помощью левых сдвигов группы G . С другой стороны, имеется естественное отображение $\gamma: N(F) \rightarrow G$, сопоставляющее точке x внутреннего симметрического пространства $N(F)$, ассоциированного с F , элемент $\gamma(x)$ группы G , порождающий инволюцию в точке x . Оба отображения Γ и γ являются вполне геодезическими вложениями.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Неподвижные точки S^1 -действия на пространстве ΩG можно интерпретировать также как критические точки некоторой морсовской функции на ΩG (см. [65]). Именно, определим *энергию* $E: \Omega G \rightarrow \mathbb{R}_+$ *петли* γ по формуле

$$E(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \langle \gamma(e^{i\theta})^{-1} \gamma'(e^{i\theta}), \gamma(e^{i\theta})^{-1} \gamma'(e^{i\theta}) \rangle d\theta.$$

Можно показать, что гамильтоново векторное поле на ΩG , ассоциированное с функцией E , порождает введенное выше S^1 -действие на ΩG , задаваемое поворотом петлей. Поэтому *критические точки E отвечают неподвижным точкам S^1 -действия на ΩG , т.е. гомоморфизмам $\gamma: S^1 \rightarrow G$.*

§ 7.6. Пространство петель $\Omega_T G$

Согласно теореме Бореля–Вейля (см. п. 3.2.2), многообразие полных флагов $F = G/T$ группы G , где T – максимальный тор в G , играет особую роль в теории неприводимых представлений группы G . Естественным аналогом многообразия полных флагов в случае группы петель LG является однородное пространство

$$\Omega_T G = LG/T.$$

Укажем некоторые свойства этого кэлерова многообразия Фреше.

Для того, чтобы определить *симплектическую структуру* на $\Omega_T G$, заметим, что группа петель LG диффеоморфна (как многообразию Фреше) прямому произведению $G \times \Omega G$. Если отождествить ΩG с подгруппой $L_1 G$ в LG , то этот диффеоморфизм будет сопоставлять петле $\gamma \in LG$ элемент $(\gamma(1), \gamma(1)^{-1}\gamma) \in G \times \Omega G$. С теоретико-групповой точки зрения, группа петель LG является полупрямым произведением группы G и $L_1 G$. Отсюда вытекает, что, как многообразие Фреше, пространство $\Omega_T G$ диффеоморфно пространству

$$\Omega_T G = LG/T = G/T \times \Omega G.$$

Симплектическая структура на $\Omega_T G$ порождается симплектической структурой на ΩG , введенной в п. 7.2, и канонической симплектической структурой на многообразии полных флагов G/T . Напомним, что, как было отмечено в предыдущем п. 7.5, флаговые многообразия группы G можно отождествить с орбитами коприсоединенного представления G на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Такие орбиты обладают канонической симплектической структурой, задаваемой формой Кирилова (см. п. 3.2.3).

Комплексная структура на $\Omega_T G$ индуцируется, как и в случае пространства петель ΩG , “комплексным” представлением $\Omega_T G$ в виде однородного пространства комплексифицированной

группы петель $LG^{\mathbb{C}}$, которое имеет вид

$$\Omega_T G = LG^{\mathbb{C}}/B_+ G^{\mathbb{C}}, \quad (7.18)$$

где $B_+ G^{\mathbb{C}}$ есть подгруппа в $L^+ G^{\mathbb{C}} = \text{Hol}(\Delta, G^{\mathbb{C}})$, состоящая из отображений $\gamma \in \text{Map}(S^1, G^{\mathbb{C}})$, которые продолжаются до голоморфных и гладких вплоть до S^1 отображений $\gamma: \Delta \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ единичного круга и удовлетворяют дополнительному условию: $\gamma(0) \in B_+$, где B_+ – стандартная борелевская подгруппа в G . Доказательство этого утверждения аналогично доказательству комплексного представления для пространства петель ΩG (см. [65], гл. 8).

Введенная комплексная структура на $\Omega_T G$ совместима с симплектической структурой и потому задает на $\Omega_T G$ структуру кэлерова многообразия Фреше.

Библиографические указания

Основной ссылкой для этой главы служит книга Прессли–Сигала [65]. В частности, доказательство теоремы факторизации 6 дано в гл. 8 этой книги. Другой метод доказательства этой теоремы, основанный на характеристизации Берлинга–Хелсона подпространств в L^2 , инвариантных относительно сдвига, предложен А. Федотовым (неопубликовано). Мы приводим идею этого метода в скалярном случае, но сам метод распространяется и на общий матричный случай. Утверждения, приведенные в пп. 7.2, 7.3, 7.4, 7.6, содержатся в [65]. Интерпретация пространства петель ΩG как универсального флагового многообразия дана в [5].

Глава 8. Центральные расширения алгебр и групп петель

Глава начинается с напоминания одного общего метода построения центральных расширений групп Ли, действующих на гладком многообразии. Затем этот метод применяется для построения центральных расширений групп петель. В последнем параграфе описывается присоединенное действие группы петель.

§ 8.1. Центральные расширения и S^1 -расслоения

Предположим, что группа Ли $\mathcal{G}$ действует гладкими преобразованиями на гладком односвязном многообразии X . Допустим, что существует замкнутая 2-форма ω на X , которая инвариантна относительно действия $\mathcal{G}$ и такая, что форма $\omega/2\pi$ является *целочисленной*. Иными словами, класс когомологий формы $\omega/2\pi$ в $H^2(X, \mathbb{R})$ является целочисленным, т.е. содержится в $H^2(X, \mathbb{Z})$ (иначе говоря, интеграл от формы $\omega/2\pi$ по любому 2-мерному циклу в $H_2(X, \mathbb{Z})$ является целым числом). По этим данным мы построим естественное S^1 -расслоение над X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Предположим, что группа Ли $\mathcal{G}$ действует гладкими преобразованиями на гладком односвязном многообразии X . Допустим, что ω есть замкнутая $\mathcal{G}$ -инвариантная 2-форма на X такая, что форма $\omega/2\pi$ является целочисленной. Тогда существует главное S^1 -расслоение $L \rightarrow X$ со связностью ∇ , кривизна которой равна ω .

Заметим, что S^1 -расслоение, существование которого утверждается в предложении, играет важную роль в алгебраической геометрии и геометрическом квантовании. В геометрическом квантовании линейное расслоение, ассоциированное с S^1 -расслоением $L \rightarrow X$, известно под именем *расслоения предквантования*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В терминах когомологий Чеха любой класс когомологий из $H^2(X, \mathbb{Z})$ может быть задан 2-коциклом

$\{\nu_{abc}\}$ с целочисленными значениями относительно адиклического открытого покрытия $\{U_a\}$ многообразия X :

$$U_{abc} := U_a \cap U_b \cap U_c \mapsto \nu_{abc} \in \mathbb{Z}.$$

(С этого момента мы будем предполагать, что все открытые множества U_a из этого покрытия стягиваемы, а их пересечения связны, для того, чтобы гарантировать адикличность покрытия $\{U_a\}$. Выполнения этих условий всегда можно добиться с помощью измельчения исходного покрытия.)

В терминах когомологий де Рама условие целочисленности класса когомологий, представленного формой $\omega/2\pi$, означает, что найдется замкнутая 2-форма ν на X с целочисленными значениями, такая что

$$\omega = 2\pi\nu + d\beta,$$

где β – произвольная 1-форма на X . Целочисленная форма ν в терминах когомологий Чеха задается коциклом $\{\nu_{abc}\}$ с целочисленными значениями. По такому коциклу можно восстановить форму ν , выбирая гладкое разбиение единицы $\{\lambda_a\}$, подчиненное покрытию $\{U_a\}$, и полагая

$$\nu := \sum_{a,b,c} \nu_{abc} \lambda_a d\lambda_b \wedge d\lambda_c.$$

Определим искомое S^1 -расслоение $L \rightarrow X$ явными функциями перехода

$$\varphi_{ab} = \exp\{2\pi i \sum_c \nu_{abc} \lambda_c\}$$

относительно покрытия $\{U_a\}$. Легко проверить, что $\{\varphi_{ab}\}$ есть коцикл, т.е. следующее соотношение выполняется на каждом тройном пересечении U_{abc} : $\varphi_{ab}\varphi_{bc}\varphi_{ca} = 1$.

Рассмотрим связность на L , задаваемую набором локальных 1-форм

$$\alpha_a := 2\pi \sum_{b,c} \nu_{abc} \lambda_b d\lambda_c,$$

удовлетворяющих на двойных пересечениях $U_{ab} := U_a \cap U_b$ соотношению

$$\alpha_b = \alpha_a + i\varphi_{ab}^{-1} d\varphi_{ab}.$$

Кривизна этой связности равна

$$\sum_a \lambda_a d\alpha_a = 2\pi\nu.$$

Поэтому, прибавляя β ко всем формам α_a , получим связность ∇ на L , задаваемую локальными 1-формами $\alpha_a + d\beta$ и имеющую кривизну, равную $2\pi\nu + d\beta = \omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. На языке когомологий пучков приведенное доказательство можно изложить следующим образом. Обозначим через $\mathcal{E}$ пучок C^∞ -гладких функций на X и через $\mathcal{E}^*$ (мультипликативный) пучок не обращающихся в нуль C^∞ -гладких функций на X . Имеется следующая точная последовательность пучков на X

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\exp} \mathcal{E}^* \longrightarrow 0,$$

где $\exp$ – отображение $f \mapsto e^{2\pi i f}$. Отвечающая ей длинная точная последовательность когомологий пучков имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{E}^*) & \xrightarrow{c_1} & \\ & & \xrightarrow{c_1} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(X, \mathcal{E}) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Когомологии $H^1(X, \mathcal{E}^*)$ можно отождествить с множеством классов изоморфизма комплексных линейных расслоений над X , а отображение $c_1: H^1(X, \mathcal{E}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ сопоставляет комплексному линейному расслоению E его 1-й класс Черна $c_1(E)$. Так как пучок $\mathcal{E}$ является тонким, то когомологии, стоящие в этой последовательности на левом и правом краю, равны нулю, т.е.

$$H^1(X, \mathcal{E}) = H^2(X, \mathcal{E}) = 0,$$

откуда следует, что отображение $c_1: H^1(X, \mathcal{E}^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ есть изоморфизм. Напомним, что класс когомологий $[\omega/2\pi]$ является целочисленным, т.е. $[\omega/2\pi] \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Следовательно, существует комплексное линейное расслоение $L \rightarrow X$ с $c_1(L) = [\omega/2\pi]$.

Покажем далее, что S^1 -расслоение $L \rightarrow X$, построенное в приведенном предложении, определяется единственным образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Если L и L' – два S^1 -расслоения над X со связностями ∇ и ∇' , имеющими одну и ту же кривизну ω , то существует послойный изоморфизм $\psi: L \rightarrow L'$ такой, что

$$\psi^* \nabla' = \nabla.$$

Этот изоморфизм ψ определен однозначно с точностью до умножения на элемент из S^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что расслоение L задается функциями перехода $\{\varphi_{ab}\}$ относительно покрытия $\{U_a\}$ многообразия X , а расслоение L' задается функциями перехода $\{\varphi'_{ab}\}$ относительно того же покрытия. Если $\psi: L \rightarrow L'$ есть искомый изоморфизм, то он должен задаваться локально функциями $\psi_a: U_a \rightarrow S^1$ такими, что

$$\psi_b \varphi_{ab} = \varphi'_{ab} \psi_a \quad (8.1)$$

на двойных пересечениях $U_{ab} = U_a \cap U_b$. Условие $\psi^* \nabla' = \nabla$ в терминах локальных представителей ∇_a, ∇'_a связностей ∇, ∇' означает, что

$$\nabla'_a = \nabla_a + i\psi_a^{-1} d\psi_a. \quad (8.2)$$

Перейдем теперь к построению изоморфизма ψ , обладающего требуемыми свойствами. Поскольку $d(\nabla'_a - \nabla_a) \equiv 0$ на U_a , то существуют функции $\phi_a: U_a \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$d\phi_a = \nabla'_a - \nabla_a.$$

Локальные представители связностей ∇, ∇' удовлетворяют на двойных пересечениях U_{ab} соотношениям

$$\nabla_b - \nabla_a = i\varphi_{ab}^{-1} d\varphi_{ab}, \quad \nabla'_b - \nabla'_a = i\varphi'_{ab}{}^{-1} d\varphi'_{ab}, \quad (8.3)$$

из которых вытекает, что

$$d\varphi_b - d\varphi_a = id \ln \varphi'_{ab} - id \ln \varphi_{ab} \iff -id(\varphi_b - \varphi_a) = d \ln \frac{\varphi'_{ab}}{\varphi_{ab}}.$$

Следовательно,

$$d(e^{-i\varphi_b} \varphi_{ab}) = d(\varphi'_{ab} e^{-i\varphi_a}),$$

откуда

$$e^{-i\varphi_b} \varphi_{ab} = \varphi'_{ab} e^{-i\varphi_a} e^{i\mu_{ab}} \text{ на } U_{ab},$$

где μ_{ab} — вещественное число.

Числа $\{\mu_{ab}\}$ задают 1-коцикл Чеха на X , поэтому, ввиду одностойности X , найдутся вещественные числа $\{m_a\}$ такие, что $\mu_{ab} = m_b - m_a$. Тогда функции

$$\psi_a = e^{-i(\varphi_a + m_a)}$$

удовлетворяют свойствам (8.1), (8.2), и определяют, тем самым, искомым изоморфизм $\psi: L \rightarrow L'$.

Рассмотрим теперь вопрос о единственности построенного изоморфизма. Допустим, что существует другой изоморфизм ψ' того же типа, задаваемый локальными представителями $\{\psi'_a\}$ относительно покрытия $\{U_a\}$. Из соотношений (8.1) вытекает, что

$$\psi_b \varphi_{ab} = \varphi'_{ab} \psi_a, \quad \psi'_b \varphi_{ab} = \varphi'_{ab} \psi'_a,$$

откуда

$$\psi_b (\psi'_b)^{-1} = \psi_a (\psi'_a)^{-1} =: h$$

для всех a, b , т.е. локальные представители $\{\psi_a\}$ и $\{\psi'_a\}$ отличаются на глобальную функцию $h: X \rightarrow S^1$. Из соотношений (8.2) следует, что

$$d\varphi_a = \nabla'_a - \nabla_a = i\psi_a^{-1} d\psi_a, \quad (8.4)$$

$$d\varphi_a = i\psi_a^{-1} h^{-1} \cdot h d\psi_a + i\psi_a^{-1} h^{-1} dh \psi_a, \quad (8.5)$$

откуда $dh = 0$, т.е. $h = \text{const}$.

Пользуясь доказанными предложениями, мы можем построить для группы $\mathcal{G}$, действующей на X гладкими преобразованиями, ее центральное расширение $\tilde{\mathcal{G}}$, действующее на расслоении $L \rightarrow X$. Предположим опять, что задана замкнутая $\mathcal{G}$ -инвариантная 2-форма ω на X такая, что класс формы $\omega/2\pi$ является целочисленным. Тогда по предложению 15 мы можем построить S^1 -расслоение $L \rightarrow X$ со связностью ∇ , имеющей кривизну, равную ω .

Рассмотрим для заданного $g \in \mathcal{G}$ обратный образ g^*L расслоения L , индуцированный действием g , и снабдим его связностью $\nabla_g = g^*\nabla$, имеющей кривизну $g^*\omega = \omega$ (напомним, что форма ω инвариантна относительно действия $\mathcal{G}$). Согласно предложению 16, существует изоморфизм $\psi: L \rightarrow g^*L$ такой, что

$$\psi^* \nabla_g = \psi^* g^* \nabla = \nabla.$$

Определим теперь $\tilde{\mathcal{G}}$ как группу, состоящую из всех пар (g, ψ) , где $g \in \mathcal{G}$, а ψ – изоморфизм $L \rightarrow g^*L$, для которого $\psi^* \nabla_g = \psi^* g^* \nabla = \nabla$. Или, эквивалентно, можно определить $\tilde{\mathcal{G}}$ как группу, состоящую из пар (g, φ) , где $g \in \mathcal{G}$, а $\varphi: L \rightarrow L$ есть послойный изоморфизм, накрывающий действие g на X и обладающий свойством: $\varphi^* \nabla = \nabla$. Заметим, что послойное отображение $\varphi: L \rightarrow L$

указанного вида, накрывающее действие g на X , однозначно определяется элементом g и образом $\varphi(\lambda_0)$ произвольной фиксированной точки $\lambda_0 \in L_{x_0}$, $x_0 \in X$.

§ 8.2. Центральные расширения алгебр и групп петель

Рассмотрим сначала *центральные расширения алгебры петель* $L\mathfrak{g}$. Как было указано в п. 4.1, любое такое расширение определяется коциклом $\omega \in H^2(L\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, или, другими словами, замкнутой билинейной кососимметричной формой $\omega: L\mathfrak{g} \times L\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. Согласно замечанию 11 в конце п. 7.2, мы можем предполагать, что форма ω инвариантна относительно присоединенного действия группы G . Любая такая форма на $L\mathfrak{g}$, согласно предложению 14 из п. 7.2, в случае полупростой группы Ли G задается формулой

$$\omega(\xi, \eta) = \omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(e^{i\theta}), \eta'(e^{i\theta}) \rangle d\theta, \quad \xi, \eta \in L\mathfrak{g},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Это дает нам описание всех центральных расширений $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ (в случае полупростой группы Ли G) в терминах когомологий $H^3(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ (см. пример 28 в п. 4.2).

Однако, не любое центральное расширение алгебры петель $L\mathfrak{g}$ порождает центральное расширение группы петель LG даже в случае односвязной группы G . Для этого форма ω должна быть целочисленной в смысле определения, данного в начале п. 8.1. Более точно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9 (ПРЕССЛИ–СИГАЛ [65], ТЕОРЕМА 4.4.1). *Если группа Ли G односвязна, то центральное расширение $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ алгебры петель $L\mathfrak{g}$ порождает некоторое центральное расширение $\widetilde{LG}$ группы петель LG тогда и только тогда, когда класс когомологий формы $\omega/2\pi$ на LG (где ω — коцикл центрального расширения $\widetilde{L\mathfrak{g}}$) является целочисленным. В этом случае центральное расширение $\widetilde{LG}$ однозначно определяется коциклом ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия целочисленности класса $[\omega/2\pi]$ вытекает из рассуждения, приведенного в предыдущем параграфе (см. предложение 15). Именно, применим кон-

струкцию из предложения 15 к случаю, в котором роль группы $\mathcal{G}$ играет группа петель LG , а многообразие X совпадает с той же группой LG . Согласно п. 8.1, по целочисленной форме $\omega/2\pi$ можно построить комплексное линейное расслоение L над LG со связностью ∇ , имеющей кривизну, равную ω . Определим тогда центральное расширение $\tilde{LG}$ как группу послойных автоморфизмов L , накрывающих действие левых сдвигов на LG , задаваемых элементами LG .

Докажем необходимость условия целочисленности в общей постановке п. 8.1. Если центральное расширение

$$1 \rightarrow S^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 1$$

группы Ли $\mathcal{G}$ порождается коциклом ω на алгебре Ли $\mathfrak{G}$, то форма $\omega/2\pi$ представляет 1-й класс Черна комплексного линейного расслоения над X , ассоциированного с S^1 -расслоением $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$. Поэтому она обязана быть целочисленной.

Остается доказать единственность центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ группы $\mathcal{G}$, отвечающего коциклу ω . Заметим сначала, что центральное расширение $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ тривиально, если отвечающий ему коцикл ω тривиален. Действительно, в этом случае главное S^1 -расслоение $\tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ обладает плоской связностью. Поэтому можно определить расщепляющий гомоморфизм $\sigma: \mathcal{G} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$, сопоставляя элементу $g \in \mathcal{G}$ концевую точку горизонтального поднятия произвольного пути в $\mathcal{G}$, связывающего $e \in \mathcal{G}$ с g (напомним, что группа $\mathcal{G}$ односвязна). Для доказательства единственности в общем случае, допустим, что имеются два центральных расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ и $\tilde{\mathcal{G}}'$ группы $\mathcal{G}$, отвечающих одному и тому же коциклу ω . Тогда из двух главных S^1 -расслоений $p: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ и $p': \tilde{\mathcal{G}}' \rightarrow \mathcal{G}$ мы можем образовать расслоение “разности” $p'': \tilde{\mathcal{G}}'' \rightarrow \mathcal{G}$, которое является центральным расширением $\mathcal{G}$, отвечающим тривиальному коциклу. Чтобы определить $\tilde{\mathcal{G}}''$, мы сначала поднимем $\tilde{\mathcal{G}}'$ на $\tilde{\mathcal{G}}$ с помощью p , получив подрасслоение $p^*(\tilde{\mathcal{G}}')$ в расслоенном произведении $\tilde{\mathcal{G}} \times_{\mathcal{G}} \tilde{\mathcal{G}}'$. Группа окрестности S^1 вкладывается в $\tilde{\mathcal{G}} \times_{\mathcal{G}} \tilde{\mathcal{G}}'$ с помощью гомоморфизма $u \mapsto (u, u^{-1})$. Определим $\tilde{\mathcal{G}}''$ как фактор $p^*(\tilde{\mathcal{G}}')$ по образу этого гомоморфизма. Теперь, по доказанному, расширение $\tilde{\mathcal{G}}''$ должно быть тривиальным, откуда следует, что оба центральных расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ и $\tilde{\mathcal{G}}'$ эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Обсудим более подробно условие целочисленности формы $\omega/2\pi$, фигурирующее в доказанной теореме. Как

было указано ранее в п. 7.2, форма ω однозначно определяется выбором инвариантного скалярного произведения на полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если алгебра $\mathfrak{g}$ проста, то все инвариантные скалярные произведения на ней пропорциональны друг другу, а среди тех, которые удовлетворяют условию целочисленности, имеется минимальное скалярное произведение. Оно называется *базисным скалярным произведением*, а соответствующее ему центральное расширение группы петель LG называется *базисным центральным расширением*. Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию целочисленности и потому является целым кратным базисного скалярного произведения. (Соответствующий целочисленный коэффициент пропорциональности в случае группы G с простыми связями совпадает с числом Кокстера группы G .)

Условие целочисленности можно также переформулировать в терминах кокорней $\alpha^\vee$ алгебры $\mathfrak{g}$. Именно, *форма $\omega/2\pi$ является целочисленной тогда и только тогда, когда скалярное произведение $(\alpha^\vee, \alpha^\vee)$ четно для всех кокорней $\alpha^\vee$ алгебры $\mathfrak{g}$* (см. [65], п. 4.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 18 ([65], п. 4.11). В конце п. 4.2 мы отметили, что в случае алгебры петель $L\mathfrak{g}$ имеется изоморфизм

$$H^q(L\mathfrak{g}) = H^q(L\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \longrightarrow H_{\text{top}}^q(LG, \mathbb{R}).$$

Этот изоморфизм можно использовать для вычисления *когомологий алгебры петель $L\mathfrak{g}$* . Именно, так как группа LG диффеоморфна $\Omega G \times G$, когомологии $H_{\text{top}}^*(LG, \mathbb{R})$ совпадают с тензорным произведением когомологий $H_{\text{top}}^*(\Omega G, \mathbb{R}) \otimes H_{\text{top}}^*(G, \mathbb{R})$.

Но в случае компактной группы Ли G , как было указано в п. 4.2, имеется изоморфизм

$$H_{\text{top}}^*(G, \mathbb{R}) \cong H^*(\mathfrak{g}).$$

Когомологии $H^*(\mathfrak{g})$ образуют внешнюю алгебру с r образующими нечетных степеней, где r – ранг G , а генераторы отвечают генераторам алгебры инвариантных полиномов на алгебре $\mathfrak{g}$. Пользуясь указанным изоморфизмом, мы сопоставляем инвариантному полиному степени k симметричную k -линейную функцию

$P: \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$. С ее помощью мы определяем кососимметричную форму S степени $2k-1$, задаваемую посредством

$$\begin{aligned} S(\xi_1, \dots, \xi_{2k-1}) &= \\ &= \sum_{\sigma} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} P([\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}], [\xi_{\sigma(3)}, \xi_{\sigma(4)}], \dots \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\dots, [\xi_{\sigma(2k-3)}, \xi_{\sigma(2k-2)}], \xi_{\sigma(2k-1)}), \quad (8.7)$$

где суммирование в формуле (8.6) ведется по всевозможным перестановкам σ множества $\{1, 2, \dots, 2k-1\}$. Если, в частности, $G = U(n)$, то в качестве генераторов алгебры инвариантных полиномов можно взять функции $P_1, \dots, P_n$ с $P_j(A) = \text{tr}(A^j)$.

Когомологии де Рама $H_{\text{top}}^*(\Omega G, \mathbb{R})$ (в случае односвязной группы Ли G) можно вычислить в терминах когомологий $H_{\text{top}}^*(G, \mathbb{R})$. Именно, когомологии $H_{\text{top}}^*(\Omega G, \mathbb{R})$ образуют алгебру, порождаемую полиномами четных степеней, получаемыми из генераторов алгебры $H_{\text{top}}^*(G, \mathbb{R})$ с помощью отображения трансгрессии. Более точно, рассмотрим отображение взятия значения в точке

$$S^1 \times \Omega G \longrightarrow G, \quad (\theta, \gamma) \longmapsto \gamma(\theta) \in G.$$

Дифференциальные формы на G , являющиеся генераторами алгебры $H_{\text{top}}^*(G, \mathbb{R})$, можно сначала поднять на $S^1 \times \Omega G$ с помощью этого отображения, а затем проинтегрировать по S^1 . Полученные четномерные классы порождают алгебру $H_{\text{top}}^*(\Omega G, \mathbb{R})$. Более точно, образ $(2k-1)$ -формы S из формулы (8.6) под действием описанного отображения трансгрессии совпадает с $(2k-2)$ -формой Σ на ΩG , значение которой в точке $\gamma \in \Omega G$ на векторах $\xi_1, \dots, \xi_{2k-2} \in \Omega \mathfrak{g}$ равно

$$\Sigma_{\gamma}(\xi_1, \dots, \xi_{2k-2}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\xi_1(\theta), \dots, \xi_{2k-2}(\theta), \gamma(\theta)^{-1} \gamma'(\theta)) d\theta.$$

§ 8.3. Коприсоединенное представление группы петель

Для описания *коприсоединенного представления группы петель* LG компактной группы Ли G фиксируем инвариантное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Оно порождает скалярное произведение на алгебре петель $L\mathfrak{g}$ по формуле

$$\langle \xi, \eta \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(\theta), \eta(\theta) \rangle d\theta, \quad \xi, \eta \in L\mathfrak{g}.$$

Присоединенное действие алгебры петель $L\mathfrak{g}$ на центральном расширении $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ алгебры $L\mathfrak{g}$, определяемом коциклом $\omega(\xi, \eta)$, задается формулой

$$\eta \cdot (\xi, s) := ([\eta, \xi], \omega(\eta, \xi)),$$

где $\eta \in L\mathfrak{g}$, $(\xi, s) \in \widetilde{L\mathfrak{g}} = L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$. Оно порождается присоединенным действием группы петель LG на $\widetilde{L\mathfrak{g}}$, которое определяется формулой

$$\gamma \cdot (\xi, s) = (\gamma \cdot \xi, s - \langle \gamma^{-1} \gamma', \xi \rangle),$$

где $\gamma \in LG$, $(\xi, s) \in \widetilde{L\mathfrak{g}}$ и $\gamma \cdot \xi$ обозначает (поточечное) присоединенное действие группы петель LG на своей алгебре Ли $L\mathfrak{g}$.

Рассмотрим коприсоединенное действие группы петель LG на двойственном пространстве $(\widetilde{L\mathfrak{g}})^*$. Заметим, прежде всего, что пространство, двойственное к пространству Фреше $L\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$, совпадает с пространством

$$(L\mathfrak{g})^* = \mathcal{D}'(S^1, \mathfrak{g}^*) = \mathcal{D}'(S^1) \otimes \mathfrak{g}^*,$$

т.е. с пространством обобщенных функций на S^1 со значениями в $\mathfrak{g}^*$. Пользуясь инвариантным скалярным произведением на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, мы можем отождествить это пространство с пространством обобщенных функций на S^1 со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. При таком отождествлении “гладкая” часть пространства $(L\mathfrak{g})^*$, состоящая из регулярных обобщенных функций в $(L\mathfrak{g})^*$, будет отвечать пространству $L\mathfrak{g}^* = C^\infty(S^1, \mathfrak{g}^*)$ или пространству $L\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$.

Опишем сначала коприсоединенное действие группы петель LG на гладкой части пространства $(\widetilde{L\mathfrak{g}})^* = (L\mathfrak{g})^* \oplus \mathbb{R}$, совпадающей с $L\mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R} \cong L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$. Оно задается формулой

$$\gamma \cdot (\varphi, s) = (\gamma \cdot \varphi + s\gamma'\gamma^{-1}, s),$$

где $\gamma \in LG$, $(\varphi, s) \in L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ и $\gamma \cdot \varphi$ обозначает, как и выше, присоединенное действие группы петель LG на своей алгебре Ли $L\mathfrak{g}$. Легко видеть, что отображение $S(\gamma) := \gamma'\gamma^{-1} \in L\mathfrak{g}$ определяет 1-коцикл в пространстве $C^1(LG, L\mathfrak{g})$ 1-коцепей на LG со значениями в $L\mathfrak{g}$, т.е. оно удовлетворяет соотношению

$$S(\gamma_1\gamma_2) = \gamma_1 \cdot S(\gamma_2) + S(\gamma_1).$$

Опишем теперь орбиты регулярных элементов (φ, s) из $(L\mathfrak{g})^* \oplus \mathbb{R}$ под действием группы петель LG . Для этого заметим, что любой элемент $(\varphi, s) \in L\mathfrak{g} \times \{s\}$, $s \neq 0$, однозначно определяется

кривой $\psi: \mathbb{R} \rightarrow G$, задающей решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} \psi^{-1} = -\frac{\varphi}{s} \iff \frac{d \ln \psi}{dt} = -\frac{\varphi}{s}$$

с начальным условием $\psi(0) = e$. Из периодичности φ по θ вытекает, что сдвинутое $\psi(\theta + 2\pi)$ также является решением этого уравнения наряду с $\psi(\theta)$. Из теоремы единственности получаем, что

$$\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)M_\varphi,$$

где монодромия M_φ определяется посредством $M_\varphi := \psi(2\pi)$.

Коприсоединенное действие $\gamma \in LG$ на регулярном элементе $(\varphi, s) \in L\mathfrak{g} \times \{s\}$ в терминах ψ отвечает

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{\varphi} = \gamma \cdot \varphi + s\gamma'\gamma^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{\psi}(\theta) = \gamma(\theta)\psi(\theta)\gamma(0)^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_\varphi & \longrightarrow & M_{\tilde{\varphi}} = \gamma(0)M_\varphi\gamma(0)^{-1} \end{array}$$

т.е. коприсоединенное действие γ на $(\widetilde{L\mathfrak{g}})^*$ порождает (в терминах монодромии M_φ) внутренний автоморфизм группы G . Следовательно, мы получаем взаимнооднозначное соответствие между орбитами регулярных элементов $(L\mathfrak{g})^* \times \{s\}$ относительно коприсоединенного действия группы петель LG и классами сопряженности элементов M_φ в группе G . При этом соответствии подгруппа изотропии элемента (φ, s) в группе петель LG будет отвечать централизатору монодромии M_φ в группе G .

Заметим, что орбита элемента (φ, s) является целочисленной, если число s целое, а соответствующий класс сопряженности монодромии $M \in G$ обладает следующим свойством. Централизатор M есть максимальный тор T в G (с алгеброй Ли $\mathfrak{t}$), в терминах которого монодромия M записывается в виде: $M = \exp \frac{\xi}{s}$ для некоторого элемента $\xi \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}^*$, принадлежащего решетке характеров $\hat{T}$ (см. подробности в [65], п. 4.3).

Библиографические указания

Ключевой ссылкой для этой главы является книга Прессли–Сигала [65]. В частности, предложения 15 и 16 доказаны в главе 4 (предложение 4.5.3) этой книги. Теорема 9 о центральных расширениях групп петель содержится в теореме 4.4.1 из [65]. Коприсоединенное действие группы петель описано в п. 4.3 книги [65].

Глава 9. Грассмановы реализации

В этой главе вводится наиболее “широкое” пространство петель, к которому применима большая часть теории, развиваемой в этой книге, а именно, соболевское пространство “полудифференцируемых” петель на S^1 . Это пространство содержит пространство петель ΩG , рассмотренное в предыдущих параграфах, в качестве “гладкой” части. В п. 9.2 строится грассманова реализация этого расширенного пространства петель и затем та же идея применяется к построению грассмановой реализации “гладкой” части ΩG . В заключение дается отложенное доказательство теоремы факторизации из п. 7.1, использующее грассманову реализацию ΩG .

§ 9.1. Соболевское пространство полудифференцируемых петель

Рассмотрим сначала *соболевское пространство* вещественнозначных *полудифференцируемых функций* на S^1 . Это гильбертово пространство

$$V := H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R}),$$

которое состоит из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$ с нулевым средним по окружности, имеющих обобщенную производную порядка $1/2$ из $L^2(S^1, \mathbb{R})$.

Можно показать (см. [82]), что ряд Фурье функции $f \in H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$:

$$f(z) \equiv f(\theta) = \sum_{k \neq 0} f_k z^k, \quad f_k = \bar{f}_{-k}, \quad z = e^{i\theta},$$

сходится вне множества нулевой (логарифмической) емкости и имеет конечную *соболевскую норму порядка $1/2$* :

$$\|f\|_{1/2}^2 = \sum_{k \neq 0} |k| |f_k|^2 = 2 \sum_{k > 0} k |f_k|^2.$$

Более того, сопоставляя функции $f \in V$ последовательность $\{f_k\}$ ее коэффициентов Фурье, мы устанавливаем изометрический изоморфизм между соболевским пространством V и гильбертовым пространством $\ell_2^{1/2}$ последовательностей $\{f_k\} \in \ell_2$, удовлетворяющих соотношениям: $f_k = \bar{f}_{-k}$, $f_0 = 0$, и имеющих конечную соболевскую норму: $\sum_{k \neq 0} |k| |f_k|^2 < \infty$.

Мы можем рассматривать V как естественное гильбертово расширение пространства $\Omega_0 := C_0^\infty(S^1, \mathbb{R})$ гладких вещественнозначных функций f на S^1 , имеющих нулевое среднее по окружности. В терминах рядов Фурье коэффициенты f_k функций $f \in \Omega_0$ убывают быстрее любой степени k^n , $n \in \mathbb{N}$. Пространство V совпадает с пополнением Ω_0 относительно соболевской нормы.

Гладкая часть Ω_0 пространства V является кэлеровым пространством Фреше, на котором комплексная и симплектическая структуры вводятся таким же образом, как на пространстве петель ΩG с компактной группой Ли G .

Именно, *симплектическая структура* на Ω_0 задается 2-формой $\omega: \Omega_0 \times \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\theta) d\eta(\theta).$$

В терминах разложений Фурье элементов $\xi, \eta \in \Omega_0$:

$$\xi(z) \equiv \xi(\theta) = \sum_{k \neq 0} \xi_k z^k, \quad \eta(z) \equiv \eta(\theta) = \sum_{k \neq 0} \eta_k z^k, \quad z = e^{i\theta},$$

эта форма записывается в виде

$$\omega(\xi, \eta) = -i \sum_{k \neq 0} k \xi_k \eta_{-k} = 2 \operatorname{Im} \sum_{k > 0} k \xi_k \bar{\eta}_k.$$

Оператор *комплексной структуры* J^0 на Ω_0 совпадает с *преобразованием Гильберта* $J^0 \in \operatorname{End}(\Omega_0, \Omega_0)$, задаваемым формулой

$$(J^0 \xi)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{P.V.} \int_0^{2\pi} k(\theta, \varphi) \xi(\varphi) d\varphi \quad (9.1)$$

с ядром

$$k(\theta, \varphi) = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\theta - \varphi)$$

(интеграл берется в смысле главного значения). В терминах разложений Фурье оператор J^0 задается формулой

$$\xi(z) = \sum_{k \neq 0} \xi_k z^k \mapsto (J^0 \xi)(z) = -i \sum_{k > 0} \xi_k z^k + i \sum_{k < 0} \xi_k z^k.$$

Введенная комплексная структура J^0 совместима с симплектической структурой ω и, в частности, определяет *кэлерову метрику* на Ω_0 по формуле

$$g^0(\xi, \eta) := \omega(\xi, J^0 \eta)$$

или, в терминах разложений Фурье,

$$g^0(\xi, \eta) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k > 0} k \xi_k \bar{\eta}_k = \sum_{k \neq 0} |k| \xi_k \bar{\eta}_k.$$

Таким образом, пространство $\Omega_0 = C_0^\infty(S^1, \mathbb{R})$ наделено структурой кэлерова пространства Фреше.

Приведенные выше определения комплексной структуры J^0 и симплектической структуры ω на пространстве Ω_0 сохраняют свой смысл и для его пополнения V . (Для комплексной структуры J^0 это очевидно, а для симплектической структуры ω вытекает немедленно из неравенства Коши–Шварца.) Таким образом, V имеет структуру *кэлерова гильбертова пространства*, наделенного кэлеровой метрикой

$$g^0(\xi, \eta) = \omega(\xi, J^0 \eta) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k > 0} k \xi_k \bar{\eta}_k = \sum_{k \neq 0} |k| \xi_k \bar{\eta}_k.$$

Комплексификация

$$V^{\mathbb{C}} = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{C})$$

пространства V является комплексным гильбертовым пространством и кэлерова метрика g^0 на V порождает *эрмитово скалярное произведение* на $V^{\mathbb{C}}$, задаваемое формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k \neq 0} |k| \xi_k \bar{\eta}_k.$$

Симплектическая форма ω и оператор комплексной структуры J^0 продолжают на $V^{\mathbb{C}}$ комплексно линейным образом.

Пространство $V^{\mathbb{C}}$ может быть разложено в прямую сумму подпространств

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-,$$

где $W_{\pm}$ есть собственное $(\mp i)$ -подпространство оператора $J^0 \in \text{End } V^{\mathbb{C}}$. Иными словами,

$$W_+ = \left\{ f \in V^{\mathbb{C}} : f(z) = \sum_{k>0} f_k z^k \right\},$$

$$W_- = \overline{W}_+ = \left\{ f \in V^{\mathbb{C}} : f(z) = \sum_{k<0} f_k z^k \right\}.$$

Подпространства $W_{\pm}$ изотропны относительно симплектической формы ω (т.е. $\omega(\xi, \eta) = 0$, если $\xi, \eta \in W_+$ или $\xi, \eta \in W_-$), и разложение $V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ является ортогональной прямой суммой относительно эрмитова скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеет простое выражение в терминах разложения $V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$:

$$\langle \xi, \eta \rangle = i\omega(\xi_+, \bar{\eta}_+) - i\omega(\xi_-, \bar{\eta}_-),$$

где $\xi_{\pm}$ обозначает проекцию $\xi \in V^{\mathbb{C}}$ на подпространство $W_{\pm}$.

Оператор J^0 в терминах разложения $V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ допускает следующее блочное представление

$$J^0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Существует другая полезная реализация пространства V в терминах гармонических функций (см. [58]). Именно, пространство V можно отождествить с пространством $\mathcal{D}$ (вещественнозначных) гармонических функций F в единичном круге Δ таких, что $F(0) = 0$ и интеграл Дирихле от них

$$E(F) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \left(\left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy$$

сходится. Иными словами, $\mathcal{D}$ есть гильбертово пространство гармонических функций в круге Δ , первые производные которых принадлежат $L^2(\Delta)$, а сами функции удовлетворяют условию нормировки $F(0) = 0$. Норма функции $F \in \mathcal{D}$ равна, по определению, квадратному корню из $E(F)$. Отображение $V \rightarrow \mathcal{D}$,

задаваемое интегралом Пуассона, устанавливает изометрический изоморфизм гильбертовых пространств V и $\mathcal{D}$. Обратное отображение $\mathcal{D} \rightarrow V$ сопоставляет гармонической функции $F \in \mathcal{D}$ ее граничное значение на $\partial\Delta = S^1$ в соболевском смысле.

Определим далее *соболевское пространство* $H^{1/2}(S^1, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ *полудифференцируемых матричных функций* на S^1 . Оно состоит из измеримых матричнозначных функций $\gamma: S^1 \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ вида

$$\gamma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k, \quad z = e^{i\theta},$$

с конечной соболевской нормой порядка $1/2$:

$$\|\gamma\|_{1/2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \|\gamma_k\|^2 < \infty.$$

Соответственно, пространство $H\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) := H_0^{1/2}(S^1, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ будет обозначать подпространство $H^{1/2}(S^1, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$, состоящее из функций γ с разложениями Фурье вида

$$\gamma = \sum_{k \neq 0} \gamma_k z^k.$$

Введем также группу $L_{1/2}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ полудифференцируемых матричных функций. Для этого рассмотрим банахову алгебру существенно ограниченных функций $\gamma \in H^{1/2}(S^1, \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$, снабженную нормой $\|\gamma\|_{\infty} + \|\gamma\|_{1/2}$. Группа обратимых элементов этой алгебры, являющаяся банаховой группой Ли, называется *группой* $L_{1/2}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ *полудифференцируемых матричных функций* на S^1 .

Таким же образом можно ввести *соболевское пространство* $H\mathrm{G}$ *полудифференцируемых петель* в компактной группе Ли G , реализованной в виде матричной группы (т.е. подгруппы $\mathrm{U}(n)$).

§ 9.2. Грассманова реализация

Рассмотрим сначала грассманову реализацию $L_{1/2}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}))$ – группы полудифференцируемых матричных функций на S^1 .

Выберем в качестве модели комплексного гильбертова пространства H пространство $H^{(n)} := L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ с естественной поляризацией, задаваемой подпространствами

$$H_+^{(n)} = \{f \in H : f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k \text{ с } f_k \in \mathbb{C}^n, z = e^{i\theta}\}$$

и

$$H_-^{(n)} = \left\{ f \in H : f(z) = \sum_{k < 0} f_k z^k \text{ с } f_k \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

Сопоставим петле $\gamma \in L_{1/2}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ оператор умножения

$$M_\gamma \in \mathrm{End} H^{(n)},$$

действующий на вектор $f \in L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$ поточечным умножением матрицы $\gamma(z) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ на вектор $f(z) \in \mathbb{C}^n$:

$$(M_\gamma f)(z) := \gamma(z)f(z).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Для любой петли $\gamma \in L_{1/2}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ оператор умножения M_γ принадлежит $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$ (определение группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}$ дано в п. 5.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\gamma(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k z^k$$

с $\gamma_k \in \mathrm{L}(n, \mathbb{C})$. Выберем в $H^{(n)}$ базис, задаваемый функциями вида $\epsilon_i z^p$, где $\{\epsilon_i\}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$, $p \in \mathbb{Z}$. Оператор M_γ в этом базисе имеет матричное представление вида

$$M_\gamma \longleftrightarrow (M_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}, \text{ где } M_{p,q} = \gamma_{q-p} \in \mathrm{L}(n, \mathbb{C}).$$

Для того, чтобы оператор $M_\gamma \in \mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$, необходимо и достаточно, чтобы его матричные компоненты, задаваемые отображениями

$$M_\gamma^{+-} : H_+^{(n)} \rightarrow H_-^{(n)} \text{ и } M_\gamma^{-+} : H_-^{(n)} \rightarrow H_+^{(n)},$$

являлись операторами Гильберта–Шмидта. В терминах матричных элементов $(M_{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}$ это означает, что должны выполняться следующие неравенства

$$\sum_{p \geq 0, q < 0} \|M_{p,q}\|^2 < \infty \text{ и } \sum_{p < 0, q \geq 0} \|M_{p,q}\|^2 < \infty.$$

Эти соотношения эквивалентны неравенству

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k \|\gamma_k\|^2 < \infty,$$

которое выполняется при $\gamma \in L_{1/2}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Грассманова реализация группы $L_{1/2}G$ строится таким же образом в случае, когда G реализована в виде матричной группы, т.е. подгруппы $U(n)$. Например, в случае, когда G есть компактная полупростая группа Ли с тривиальным центром, ее можно отождествить с связной компонентой единицы в группе автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Тогда в качестве H нужно выбрать гильбертово пространство $L^2(S^1, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$, на котором группа петель $L_{1/2}G$ действует с помощью присоединенного представления. Отождествляя $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ с $\mathbb{C}^n$ (где n – размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$) и выбирая инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, мы реализуем $L_{1/2}G$ в виде подгруппы группы петель $L_{1/2}U(n)$. Тогда описанное выше вложение $L_{1/2}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ в $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$ будет отображать $L_{1/2}U(n)$ в $U_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$.

Опишем теперь образ вложения $L_{1/2}U(n)$ в $U_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$, следуя [65], п. 8.3. Указанное вложение определяет действие $L_{1/2}U(n)$ на $H^{(n)}$ и, тем самым, на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$. В частности, образ этого действия содержит подпространства $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$ вида $M_{\gamma}(H_+^{(n)}) := \gamma H_+^{(n)}$, где $\gamma \in L_{1/2}U(n)$. Они обладают тем свойством, что $M_z(W) := zW \subset W$, поскольку действие γ коммутирует с умножением на z . Оказывается, множество подпространств $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$ указанного вида совпадает с образом действия группы $L_{1/2}U(n)$ на пространстве $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H^{(n)})$.

Перед тем, как мы докажем этот факт, необходимо ввести некоторые обозначения. Положим

$$\mathrm{Gr}_+(H^{(n)}) = \{W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H^{(n)}): zW \subset W\}.$$

Кроме того, обозначим, как и в шп. 7.1, 7.3, через $L_{1/2}^{\pm}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ подгруппы группы $L_{1/2}\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, состоящие из петель γ , которые являются граничными значениями в смысле Соболева голоморфных отображений $\gamma: \Delta_{\pm} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18 [65]. *Группа $L_{1/2}U(n)$ действует транзитивно на $\mathrm{Gr}_+(H^{(n)})$ и подгруппа изотропии в точке $H_+^{(n)}$ совпадает с группой $U(n)$ постоянных петель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о подгруппе изотропии вытекает из хорошо известного факта: $\gamma H_+^{(n)} = H_+^{(n)}$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in L_{1/2}^+ \text{GL}(n, \mathbb{C})$. Достаточность этого условия очевидна. Для доказательства его необходимости разложим γ в сумму $\gamma = \gamma_+ + \gamma_-$ с $\gamma_{\pm} \in L_{1/2}^{\pm} \text{gl}(n, \mathbb{C})$ (см., например, [58], теорема 2.1). Тогда из соотношения $\gamma H_+^{(n)} = H_+^{(n)}$ будет следовать, что $\gamma_- H_+^{(n)} \subset H_+^{(n)}$, откуда $\gamma_- \in H_+^{(n)}$, т.е. $\gamma_- = 0$. Если нам известно, что $\gamma \in L_{1/2} \text{U}(n)$ принадлежит $L_{1/2}^+ \text{GL}(n, \mathbb{C})$, то, по принципу симметрии, γ голоморфно продолжится на всю риманову сферу, откуда вытекает, что $\gamma = \text{const}$.

Переходя к доказательству транзитивности действия $L_{1/2} \text{U}(n)$ на $\text{Gr}_+(H^{(n)})$, заметим, прежде всего, что из принадлежности $W \in \text{Gr}_+(H^{(n)})$ следует, что zW имеет коразмерность n в W . Действительно, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} zW & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ zH_+^{(n)} & \longrightarrow & H_+^{(n)}, \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки являются вложениями, а вертикальные стрелки – ортогональными проекциями. Эти проекции являются операторами Фредгольма с индексом, равным виртуальной размерности подпространства W . Поскольку вложение $zH_+^{(n)} \hookrightarrow H_+^{(n)}$ является, очевидно, фредгольмовым с индексом $-n$, то то же самое верно и для вложения $zW \hookrightarrow W$.

Выберем теперь ортонормированный базис $\{w_1, \dots, w_n\}$ в ортогональном дополнении к подпространству zW в W и составим из вектор-столбцов $w_1, \dots, w_n$ матричнозначную $(n \times n)$ -функцию γ на S^1 . Утверждается, что матрица $\gamma(\theta)$ является унитарной для почти всех $\theta \in S^1$. Действительно, запишем $w_k(\theta)$ в виде

$$w_k(\theta) = \sum_p w_{kp} e^{ip\theta}, \quad w_{kp} \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда

$$\langle w_k(\theta), w_l(\theta) \rangle = \sum_{p,q} \langle w_{kp}, w_{lq} \rangle e^{i(q-p)\theta} = \sum_r \langle w_k, z^r w_l \rangle_H e^{ir\theta} = \delta_{kl},$$

где мы обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ скалярное произведение в $H^{(n)}$ с тем, чтобы отличать его от скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $\mathbb{C}^n$.

Из приведенной формулы следует, что *оператор умножения* M_γ унитарен в $H^{(n)}$ и

$$M_\gamma(H_+^{(n)} \ominus z^k H_+^{(n)}) = W \ominus z^k W \text{ для любого } k.$$

Кроме того, $M_\gamma(H_+^{(n)}) = W$, поскольку $\bigcap_k z^k W = 0$ (что доказывается итерированием утверждения о коразмерности).

Остается показать, что $M_\gamma \in U_{\text{HS}}(H^{(n)})$. Но компонента M_γ^{+-} этого оператора (мы пользуемся теми же обозначениями, что и в доказательстве предложения 17) представляется в виде композиции $H_+^{(n)} \rightarrow W \rightarrow H_-^{(n)}$, где второе отображение, задаваемое ортогональной проекцией, является оператором Гильберта–Шмидта. То же самое верно и для компоненты M_γ^{-+} оператора M_γ .

Из доказанного предложения вытекает, что пространство петель $HU(n) = L_{1/2}U(n)/U(n)$ можно отождествить с грассманианом $\text{Gr}_+(H^{(n)})$. С помощью того же самого рассуждения устанавливается, что пространство $\Omega U(n)$ гладких петель в $U(n)$ реализуется в виде “гладкой” части $\text{Gr}_+^\infty(H^{(n)})$ грассманиана $\text{Gr}_+(H^{(n)})$. Здесь

$$\text{Gr}_+^\infty(H^{(n)}) = \text{Gr}^\infty(H^{(n)}) \cap \text{Gr}_+(H^{(n)}),$$

а “гладкая” часть $\text{Gr}^\infty(H^{(n)})$ была введена в конце п. 5.2. Можно также показать, что группа $LU(n)$ гладких петель действует гладко и транзитивно на грассманиане $\text{Gr}^\infty(H^{(n)})$ и то же самое верно для действия $LGL(n, \mathbb{C})$ на $\text{Gr}^\infty(H^{(n)})$.

Вложение группы петель LG , где G – односвязная компактная группа Ли, в $\text{Gr}_+^\infty(H^{(n)})$ может быть построено аналогичным образом, если выбрать в качестве H гильбертово пространство $L^2(S^1, \mathfrak{g}^\mathbb{C})$, на котором группа LG действует с помощью присоединенного представления. Отождествляя $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ с $\mathbb{C}^n$ (где n – размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$) и выбирая инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, мы можем реализовать LG в виде подгруппы $LU(n)$. Описанное выше действие $LU(n)$ на $\text{Gr}^\infty(H^{(n)})$ реализует $LU(n)$ в виде подгруппы $U_{\text{HS}}(H^{(n)})$. Указанное вложение порождает вложение пространства петель ΩG в грассманово многообразие $\text{Gr}^\infty(H^{(n)})$.

§ 9.3. Доказательство теоремы факторизации

Построив в предыдущем параграфе грассманову реализацию пространства петель $\Omega U(n)$ мы можем вернуться к отложенному доказательству теоремы факторизации 6 из п. 7.1. Напомним ее формулировку.

ТЕОРЕМА 10 [65]. *Отображение произведения*

$$\Omega G \times L^+ G^{\mathbb{C}} \longrightarrow L G^{\mathbb{C}}$$

задает диффеоморфизм многообразий Фреше.

При доказательстве предложения 18 отмечалось, что комплексная группа $L_{1/2} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ действует на грассманиане $\mathrm{Gr}_+(H^{(n)})$ и имеет в качестве подгруппы изотропии в точке $H_+^{(n)}$ подгруппу $L_{1/2}^+ \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Так как группа петель $L_{1/2} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ действует транзитивно на $\mathrm{Gr}_+(H^{(n)})$, мы доказали, тем самым, что *группа петель $L_{1/2} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ совпадает с произведением*

$$L_{1/2} \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = L_{1/2} U(n) \cdot L_{1/2}^+ \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Аналогичная факторизация имеет место для группы $L \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ гладких петель. Мы должны показать теперь, что отображение произведения

$$\Omega U(n) \times L^+ \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow L \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

является диффеоморфизмом. Для этого достаточно показать, что отображение

$$u: L \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \Omega U(n),$$

сопоставляющее петле γ ее унитарную компоненту, является гладким. Это отображение раскладывается в композицию двух отображений: $\gamma \rightarrow \tilde{\gamma} \rightarrow u(\gamma)$. Первое из них сопоставляет γ петлю $\tilde{\gamma}$, которая получается из γ проектированием столбцов $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ матрицы $\gamma \in L \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ на ортогональное дополнение $W \ominus zW$ подпространства zW в W , где $W := \gamma H_+^{(n)}$. Второе отображение $\tilde{\gamma} \rightarrow u(\gamma)$ задается ортонормированием базиса $\{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n\}$ подпространства $W \ominus zW$. Второе отображение очевидно является гладким. Гладкость первого отображения является следствием гладкости отображения проекции

$$C^\infty(S^1, \mathbb{C}^n) \times \mathrm{Gr}^\infty(H^{(n)}) \longrightarrow C^\infty(S^1, \mathbb{C}^n),$$

сопоставляющего гладкой вектор-функции f на S^1 ее ортогональную проекцию $\text{pr}_W f$ на заданное подпространство $W \in \text{Gr}_\infty(H^{(n)})$.

Библиографические указания

Ключевой ссылкой для этой главы является книга [65]. В п. 9.1 изучается соболевское пространство полудифференцируемых функций на S^1 . Это пространство в скалярном случае хорошо известно и широко используется в теории функций (см., например, [82]). С другой стороны, его роль в геометрическом квантовании выяснилась сравнительно недавно, особенно после работы Нага и Сулливана [58]. Грассманова реализация группы $L_{1/2}\text{GL}(n, \mathbb{C})$ полудифференцируемых матричных функций на S^1 (предложение 17) содержится в [65], п. 6.3. Предложение 18 доказано в [65], теорема 8.3.2. Доказательство теоремы факторизации в п. 9.3 дано в [65], теорема 8.1.1.

Часть III

Пространства
комплексных структур

Глава 10. Группа Вирасоро и ее коприсоединенные орбиты

В этой главе вводится группа Вирасоро Vir , являющаяся центральным расширением группы диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}_+(S^1)$, и изучаются орбиты ее коприсоединенного представления. Нас особо интересуют кэлеровы коприсоединенные орбиты, которые обладают, помимо естественной симплектической формы, еще и совместимой комплексной структурой. Такие коприсоединенные орбиты группы Vir изучаются в п. 10.3 данной главы.

§ 10.1. Группа и алгебра Вирасоро

Группа Вирасоро является центральным расширением группы диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}_+(S^1)$. Для того чтобы описать ее явным образом, найдем сначала центральные расширения алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ группы $\text{Diff}_+(S^1)$, совпадающей с алгеброй касательных векторных полей на S^1 .

Как было указано в п. 4.1, любое центральное расширение алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ определяется некоторым 2-коциклом w на алгебре $\text{Vect}(S^1)$. Продолжим этот коцикл комплексно линейно на комплексификацию $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ алгебры $\text{Vect}(S^1)$. Продолженный коцикл, обозначаемый той же буквой w , однозначно определяется своими значениями $w_{m,n} := w(e_m, e_n)$ на базисных векторных полях

$$e_m = ie^{im\theta} \frac{d}{d\theta}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

алгебры $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ (см. п. 2.2). Из условия коцикличности для w , выписанного для тройки векторных полей (e_0, e_m, e_n) :

$$w([e_0, e_m], e_n) + w(e_m, [e_0, e_n]) = w(e_0, [e_m, e_n]),$$

вытекает, что класс когомологий $[w]$ не изменяется под действием поворотов (порождаемых векторным полем e_0). Поэтому коцикл, получаемый из w усреднением по S^1 , принадлежит тому

же классу когомологий, что и w . Следовательно, можно предполагать с самого начала, что коцикл w инвариантен относительно поворотов, т.е.

$$w([e_0, e_m], e_n) + w(e_m, [e_0, e_n]) = 0$$

на базисных векторных полях e_m, e_n . С учетом коммутационных соотношений для базисных векторных полей

$$[e_m, e_n] = (m - n)e_{m+n},$$

это означает, что

$$mw_{m,n} + nw_{m,n} = 0. \quad (10.1)$$

Из последнего соотношения вытекает, что $w_{m,n} = 0$ при $m+n \neq 0$. Поэтому положим $w_m := w_{m,-m}$ и заметим, что $w_{-m} = -w_m$ ввиду кососимметричности w . Остается найти значения w_m при натуральных m .

Условие коцикличности w на тройке базисных векторных полей (e_m, e_n, e_{m+n}) означает, что

$$(m - n)w_{m+n} = (m + 2n)w_m - (2m + n)w_n, \quad (10.2)$$

тем самым, мы получаем конечно-разностное уравнение 2-го порядка для определения значений w_m . Для нахождения его общего решения достаточно найти два частных решения (10.2). Легко видеть, что $w_m = m$ и $w_m = m^3$ задают два независимых решения уравнения (10.2). Поэтому общее решение уравнения (10.2) имеет вид

$$w_m = \alpha m^3 + \beta m \quad (10.3)$$

с произвольными комплексными коэффициентами α, β .

Заметим, что коцикл w с $w_m = m$ является кограницей, поскольку в этом случае

$$w(e_m, e_n) = d\theta(e_m, e_n) = \theta([e_n, e_m]),$$

где θ есть 1-кограница на $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$, задаваемая посредством: $\theta(e_0) = -\frac{1}{2}$ и $\theta(e_m) = 0$ при $m \neq 0$. Поэтому значение β в формуле (10.3) не является существенным. Следовательно, все коциклы w , задающие нетривиальные центральные расширения алгебры $\text{Vect}(S^1)$, с точностью до кограниц, пропорциональны друг другу. Иными словами, мы доказали следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Группа когомологий $H^2(\text{Vect}(S^1), \mathbb{R})$ имеет размерность 1. Общее центральное расширение алгебры $\text{Vect}(S^1)$ задается коциклом w вида*

$$w(e_m, e_n) = \begin{cases} \alpha m(m^2 - 1) & \text{при } m + n = 0, \alpha \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{при } m + n \neq 0. \end{cases}$$

Мы выбрали параметр $\beta = -\alpha$ для того, чтобы занулить ограничение коцикла w на подалгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ в $\text{Vect}(S^1)$, порождаемую векторами e_0, e_1, e_{-1} (эта подалгебра совпадает с алгеброй Ли группы Мебиуса $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ отображений окружности S^1 , продолжающихся до дробно-линейных автоморфизмов единичного круга Δ).

Заметим, что коцикл Гельфанда–Фукса

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi'(\theta) d\eta'(\theta), \quad \xi = \xi(\theta) \frac{d}{d\theta}, \quad \eta = \eta(\theta) \frac{d}{d\theta} \in \text{Vect}(S^1),$$

найденный в [25], имеет базисные значения, равные $w_m = im^3$, $m \in \mathbb{Z}$.

Можно также изменить значение α , умножая центральный элемент на константу. Обычным выбором для α (основанным на физических аналогиях) является $\alpha = \frac{1}{12}$. Соответствующее центральное расширение алгебры $\text{Vect}(S^1)$ называется *алгеброй Вирасоро* и обозначается через vir . Алгебра Вирасоро порождается (как векторное пространство) базисными векторными полями $\{e_m\}$ алгебры $\text{Vect}(S^1)$ и центральным элементом κ , удовлетворяющими коммутационным соотношениям вида

$$[e_m, \kappa] = 0, \quad [e_m, e_n] = (m - n)e_{m+n} + \delta_{m, -n} \frac{m^3 - m}{12} \kappa.$$

Это центральное расширение алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ порождает центральное расширение группы Ли $\text{Diff}_+(S^1)$, к описанию которого мы переходим.

Так как многообразие Фреше $\text{Diff}_+(S^1)$ гомотопически эквивалентно окружности S^1 (см. п. 1.2.1), все S^1 -расслоения над $\text{Diff}_+(S^1)$ топологически тривиальны и любое центральное расширение группы $\text{Diff}_+(S^1)$ задается некоторым 2-коциклом s на $\text{Diff}_+(S^1)$ (см. п. 4.1). Другими словами, такое центральное расширение состоит из элементов вида

$$(f, \lambda), \quad f \in \text{Diff}_+(S^1), \quad \lambda \in S^1,$$

а произведение задается формулой

$$(f, \lambda) \cdot (g, \mu) = (f \circ g, \lambda \mu e^{ib(f,g)}),$$

где $c(f, g) = e^{ib(f,g)}$ есть 2-коцикл на $\text{Diff}_+(S^1)$, определяющий центральное расширение. Условие коцикличности в терминах b принимает вид

$$b(f, g) + b(f \circ g, h) = b(f, g \circ h) + b(g, h). \quad (10.4)$$

Явное решение этого функционального уравнения, найденное Боттом [11], имеет вид

$$b_0(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(f \circ g)' d \ln g'.$$

Заметим, что групповой коцикл Ботта отвечает на уровне алгебр Ли коциклу Гельфанда–Фукса алгебры $\text{Vect}(S^1)$.

Общее решение уравнения (10.4) совпадает с b_0 с точностью до кограницы, более точно, оно имеет вид

$$b(f, g) = \alpha b_0(f, g) + a(f \circ g) - a(f) - a(g),$$

где $\alpha = \text{const} \in \mathbb{R}$, а a – произвольный гладкий вещественный функционал на $\text{Diff}_+(S^1)$.

Центральное расширение группы $\text{Diff}_+(S^1)$, задаваемое коциклом Ботта, называется *группой Вирасоро* (или *группой Вирасоро–Ботта*) и обозначается Vir .

§ 10.2. Коприсоединенное действие группы Вирасоро

Рассмотрим коприсоединенное действие группы диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}_+(S^1)$ и ее центрального расширения, группы Вирасоро Vir на пространствах, двойственных к их алгебрам Ли.

Изучим сначала коприсоединенное действие группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$ на пространстве $\text{Vect}^*(S^1)$, двойственном к алгебре Ли $\text{Vect}(S^1)$ группы $\text{Diff}_+(S^1)$. Пространство $\text{Vect}^*(S^1)$, двойственное к пространству Фреше $\text{Vect}(S^1)$, можно отождествить с тензорным произведением

$$\Omega^1(S^1) \otimes_{\mathcal{D}(S^1)} \mathcal{D}'(S^1)$$

над кольцом $\mathcal{D}(S^1)$, состоящим из всех C^∞ -гладких (вещественнозначных) функций на S^1 . Здесь, $\Omega^1(S^1)$ есть пространство Фреше C^∞ -гладких 1-форм на S^1 , а $\mathcal{D}'(S^1)$ – пространство обобщенных функций на S^1 , т.е. линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(S^1)$ (заметим, что $\mathcal{D}'(S^1)$ не является пространством Фреше!). Тензорное произведение в приведенной выше формуле берется в категории топологических векторных пространств, напомним для полноты его определение.

ОТСТУПЛЕНИЕ 3 (тензорное произведение топологических векторных пространств.) Тензорное произведение $E \otimes F$ топологических векторных пространств E и F наделяется проективной топологией, порождающейся полунормами $p \otimes q$, где $\{p\}$ и $\{q\}$ – семейства полунорм на E и F соответственно. Полунорма $p \otimes q$ определяется как

$$(p \otimes q)(z) = \inf \left\{ \sum_i p(x_i)q(y_i) : z = \sum x_i \otimes y_i \right\},$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям вектора $z \in E \otimes F$ в виде конечной суммы вида $\sum x_i \otimes y_i$ с $x_i \in E$, $y_i \in F$.

Элементы пополнения $\widetilde{E \otimes F}$ пространства $E \otimes F$ относительно введенной топологии в случае метризуемых пространств E и F могут быть заданы в виде рядов вида

$$\widetilde{E \otimes F} \ni z = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i,$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$ и последовательности $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ стремятся к нулю в E и F соответственно.

Для ядерных пространств E и F топология, введенная на $\widetilde{E \otimes F}$, совпадает с топологией равностепенной непрерывной сходимости (т.е. топологией равномерной сходимости на множествах вида $S \otimes T$, где S и T равностепенно непрерывные подмножества в E' и F' соответственно).

Вернемся к двойственному пространству $\text{Vect}^*(S^1)$, которое отождествляется с тензорным произведением $\Omega^1(S^1) \otimes_{\mathcal{D}(S^1)} \mathcal{D}'(S^1)$ с помощью отображения, сопоставляющего элементу $(\alpha, \varphi) \in \Omega^1(S^1) \otimes_{\mathcal{D}(S^1)} \mathcal{D}'(S^1)$ линейный непрерывный функционал на

$\text{Vect}(S^1)$ вида

$$T_{(\alpha, \varphi)}(\xi) = \varphi[\alpha(\xi)], \quad \xi \in \text{Vect}(S^1).$$

Как и в п. 8.3, мы ограничимся изучением коприсоединенного действия группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на “гладкой” части пространства $\text{Vect}^*(S^1)$, отождествляемой с тензорным произведением пространств Фреше

$$\Omega^1(S^1) \otimes_{\mathcal{D}(S^1)} \Omega^1(S^1).$$

Элемент (α, β) этого пространства определяет линейный непрерывный функционал на $\text{Vect}(S^1)$ по формуле

$$\text{Vect}(S^1) \ni \xi \longmapsto T_{(\alpha, \beta)}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta(\xi(\theta)) \alpha(\theta).$$

Иными словами, гладкую часть пространства $\text{Vect}^*(S^1)$ можно отождествить с пространством $Q(S^1)$ квадратичных дифференциалов на S^1 вида

$$q = q(\theta)(d\theta)^2,$$

где q – гладкая 2π -периодическая функция от θ .

С другой точки зрения, можно рассматривать $Q(S^1)$ как множество псевдометрик на S^1 (приставка “псевдо” указывает на то, что функция $q(\theta)$ может иметь нули на S^1).

Коприсоединенное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на $Q(S^1)$ совпадает с естественным действием группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на квадратичных функционалах

$$\text{Diff}_+(S^1) \ni f \longmapsto K(f)q = q \circ f^{-1} := q(g(\theta))g'(\theta)^2 d\theta^2,$$

где $g(\theta) = f^{-1}(\theta)$.

Рассмотрим далее коприсоединенное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на двойственном пространстве vir^* к алгебре Вирасоро vir . Так как алгебра Вирасоро совпадает с $\text{vir} = \text{Vect}(S^1) \oplus \mathbb{R}$ (как векторное пространство), то $\text{vir}^* = \text{Vect}^*(S^1) \oplus \mathbb{R}$. Поэтому гладкую часть vir^* можно отождествить с пространством

$$Q(S^1) \oplus \mathbb{R} = \{(q, s) : q \text{ – квадратичный дифференциал, } s \in \mathbb{R}\}.$$

Коприсоединенное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на $Q(S^1) \oplus \mathbb{R}$ сопоставляет элементу $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ линейное преобразование $\tilde{K}(f)$ пространства $Q(S^1) \oplus \mathbb{R}$, действующее по формуле

$$\tilde{K}(f)(q, s) = (K(f)q + sS(f) \circ f^{-1}, s) = ((q + sS(f)) \circ f^{-1}, s), \quad (10.5)$$

где S есть 1-коцикл на группе $\text{Diff}_+(S^1)$, удовлетворяющий соотношению

$$S(f \circ h) = (S(f) \circ h) + S(h). \quad (10.6)$$

Нетривиальное частное решение этого уравнения дается *шварцианом*

$$S[f] = \left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right) d\theta^2 = d^2 \ln f' - \frac{1}{2} (d \ln f')^2, \quad (10.7)$$

в то время как общее решение имеет вид

$$S[f] + q \circ f - q,$$

где $q \in Q(S^1)$ – квадратичный дифференциал.

ОТСТУПЛЕНИЕ 4 (шварциан). Характеристическим свойством шварциана является его конформная инвариантность:

$$S \left[\frac{af + b}{cf + d} \right] = S[f]$$

для любого дробно-линейного преобразования $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ из группы Мебиуса $\text{Möb}(S^1) := \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Это свойство немедленно вытекает из формулы преобразования шварциана

$$S[f \circ h] = (S[f] \circ h) (h')^2 + S[h], \quad (10.8)$$

что является просто расшифровкой соотношения (10.6).

Шварциан $S[f]$ диффеоморфизма $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ является мерой его отклонения от конформных автоморфизмов единичного круга в том смысле, что

$$S[f] = 0 \iff f - \text{дробно-линейно.}$$

Кроме того, можно определить производную Шварца $S[f]$ любого конформного отображения $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ той же формулой (10.7). Тогда $S[f]$ будет снова измерять отклонение конформного отображения f в круге Δ от дробно-линейного автоморфизма Δ , при этом можно вычислить явно максимальное отклонение. Введем естественную норму на производных Шварца $S[f]$, совпадающую с гиперболической нормой на квадратичных дифференциалах в Δ :

$$\|S[f]\|_2 := \sup_{z \in \Delta} |S[f](z)| (1 - |z|^2)^2.$$

Имеется следующая замечательная теорема, известная под именем *теоремы Нехари*.

ТЕОРЕМА 11 (см. [49], теорема II.1.3). *Для любого конформно-го отображения f единичного круга Δ выполняется следующая точная оценка*

$$\|S[f]\|_2 \leq 6.$$

Верхняя граница достигается на функции Кебе $z \mapsto z/(1+z)$.

Инфинитезимальная версия коприсоединенного представления (10.5) дается представлением алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ на пространстве $Q(S^1) \oplus \mathbb{R}$, определяемым формулой

$$\tilde{k}(\xi)(q, s) = (-D_{q,s}\xi, s), \quad (10.9)$$

где $\xi = \xi(\theta) \frac{d}{d\theta} \in \text{Vect}(S^1)$, $q = q(\theta)(d\theta)^2 \in Q(S^1)$, а оператор $D_{q,s}$ имеет вид

$$D_{q,s} = s \frac{d^3}{d\theta^3} + q \frac{d}{d\theta} + \frac{d}{d\theta} q.$$

Что можно сказать об орбитах коприсоединенного представления группы $\text{Diff}_+(S^1)$? Орбита регулярного элемента $(q, s) \in Q(S^1) \oplus \mathbb{R}$ под действием группы $\text{Diff}_+(S^1)$ полностью определяется подгруппой изотропии $G_{q,s}$ относительно коприсоединенного действия. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_{q,s}$ этой подгруппы состоит из векторных полей $\xi = \xi(\theta) \frac{d}{d\theta} \in \text{Vect}(S^1)$, удовлетворяющих условию: $D_{q,s}\xi = 0$. Другими словами, для того, чтобы описать подалгебру $\mathfrak{g}_{q,s}$, нужно найти периодические решения $\xi(\theta)$ линейного дифференциального уравнения

$$s\xi''' + 2q\xi' + q'u = 0. \quad (10.10)$$

Отсылая за общим решением поставленной задачи к работам [40], [30], ограничимся здесь ее частным случаем, когда регулярный элемент (q, s) имеет вид $(q(d\theta)^2, s)$ с $q \equiv \text{const} =: c$, $s \neq 0$. В этом случае уравнение (10.10) принимает вид

$$s\xi''' + 2c\xi' = 0. \quad (10.11)$$

Это уравнение, после замены переменной $\eta := \xi'$, сводится к уравнению

$$s\eta'' + 2c\eta = 0.$$

Последнее уравнение имеет нетривиальные периодические решения только при $2c = n^2$, где n – натуральное число, при этом все решения указанного типа являются линейными комбинациями функций $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$. Иными словами, единственными периодическими решениями уравнения (10.11) при $\frac{2c}{s} \neq n^2$ являются константы, в то время как при $\frac{2c}{s} = n^2$ они даются линейными комбинациями функций 1 , $\frac{1}{n} \cos n\theta$ и $\frac{1}{n} \sin n\theta$.

Подалгебра изотропии $\mathfrak{g}_{q,s}$ в первом случае совпадает с $\mathbb{R}$, а во втором – с алгеброй $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Соответственно, подгруппа изотропии $G_{q,s}$ в первом случае совпадает с группой поворотов $S^1 \subset \text{Diff}_+(S^1)$, а во втором – с группой $\text{PSL}^{(n)}(2, \mathbb{R})$, являющейся n -кратным накрытием группы Мебиуса $\text{Möb}(S^1) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Мы уже встречались с этой группой в п. 2.2. Напомним, что диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ принадлежит группе $\text{PSL}^{(n)}(2, \mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существует преобразование $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ такое, что

$$\lambda_n \circ f = \varphi \circ \lambda_n$$

где $\lambda_n: z \mapsto z^n$ есть отображение, задающее n -кратное накрытие окружности S^1 .

Из описания подгрупп изотропии следует, что коприсоединенная орбита постоянного элемента $(q, s) = (c(d\theta)^2, s)$ совпадает с однородным пространством $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$, если $2c/s$ не является квадратом натурального числа, и с однородным пространством $\text{Diff}_+(S^1)/\text{PSL}^{(n)}(2, \mathbb{R})$, если $2c/s = n^2$.

Как мы объяснили в п. 3.2.3, все коприсоединенные орбиты обладают естественной симплектической структурой, задаваемой формой Кириллова. В рассматриваемом случае значение этой формы в точке $(q, s) \in Q(S^1) \oplus \mathbb{R}$ орбиты O группы $\text{Diff}_+(S^1)$ можно вычислить следующим образом. Пусть $\delta\xi$ и $\delta\eta$ есть два вектора из $T_{q,s}O$, совпадающих с образами касательных векторов $\xi, \eta \in \text{Vect}(S^1)$ при отображении $\tilde{k}$ из (10.9):

$$\delta\xi = \tilde{k}(\xi)(q, s), \quad \delta\eta = \tilde{k}(\eta)(q, s).$$

Тогда значение формы ω_O на этих векторах равно

$$\omega_O(\delta\xi, \delta\eta) = - \int_{S^1} (D_{q,s}\xi)(\theta)\eta(\theta) d\theta.$$

Таким образом, любая коприсоединенная орбита группы Vir имеет симплектическую структуру. Однако не все из них можно наделить совместимой комплексной структурой. На самом деле среди коприсоединенных орбит группы Vir, описанных выше, только орбиты

$$\text{Diff}_+(S^1)/S^1, \quad \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1) = \text{Diff}_+(S^1)/\text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

являются кэлеровыми (см. [79]). Иными словами, только эти орбиты допускают $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантные комплексные структуры, совместимые с симплектической структурой ω_O . В дальнейшем мы сосредоточим свое внимание именно на указанных кэлеровых орбитах.

ПРИМЕР 29. Приведем интересную интерпретацию коприсоединенного действия группы Вирасоро в терминах операторов Хилла, принадлежащую Лазуткину и Панкратовой [48].

Напомним, что *оператор Хилла* есть дифференциальный оператор 2-го порядка, имеющий вид

$$L = \frac{d^2}{d\theta^2} + u(\theta),$$

где $u = u(\theta)$ – потенциал, задаваемый C^∞ -гладкой 2π -периодической функцией на $\mathbb{R}$. Определяемое им обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + uy = 0$$

называется *уравнением Хилла*. Его решения образуют двумерное векторное пространство V , наделяемое естественной симплектической 2-формой, задаваемой вронскианом двух решений. Сдвиг решения y уравнения Хилла $Ly = 0$ на период 2π преобразует его в другое решение, получаемое из y действием оператора $M \in \text{SL}(V)$, называемого *матрицей монодромии* оператора L .

Если $\{y_1, y_2\}$ образуют фундаментальную систему решений, т.е. базис в пространстве V решений уравнения Хилла, то можно восстановить потенциал u из этой системы по формуле Шварца:

$$u(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}S[y_1/y_2](\theta), & \text{если } y_2(\theta) \neq 0, \\ \frac{1}{2}S[y_2/y_1](\theta), & \text{если } y_1(\theta) \neq 0, \end{cases}$$

где $S[y]$ – шварциан y .

Группа диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$ действует естественным образом на пространстве операторов Хилла. Именно, мы можем сопоставить любому диффеоморфизму $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, который поднимается до диффеоморфизма $\tilde{f}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, преобразование, которое переводит заданный оператор Хилла $L = \frac{d^2}{d\theta^2} + u(\theta)$ в другой оператор Хилла $f^*L = \frac{d^2}{d\theta^2} + f^*u(\theta)$ с

$$f^*u(\theta) := u(\tilde{f}(\theta)) \cdot (\tilde{f}'(\theta))^2 + \frac{1}{2}S[\tilde{f}](\theta).$$

При таком преобразовании решение y уравнения Хилла $Ly = 0$ переходит в решение z уравнения Хилла $(f^*L)z = 0$ с

$$z(\theta) := y(\tilde{f}(\theta)) \cdot (\tilde{f}'(\theta))^{-\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что ввиду периодичности потенциала u , действие f на потенциал не зависит от выбора поднятия $\tilde{f}$ диффеоморфизма $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ и потому определяет действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на операторах Хилла. Это действие совпадает с коприсоединенным действием группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на элементах $(u, \frac{1}{2})$ пространства $Q(S^1) \oplus \mathbb{R}$, задаваемым формулой (10.5).

Однако действие f на решениях уравнения Хилла из-за монодромии зависит от выбора поднятия $\tilde{f}$. В соответствии с приведенной выше формулой, решения уравнения Хилла преобразуются под действием диффеоморфизма $\tilde{f}$ как плотности порядка $-1/2$ на прямой $\mathbb{R}$.

Построенное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на операторах Хилла изучалось в работе Лазуткина–Панкратовой [48]. Ее авторы сформулировали, в частности, гипотезу, утверждающую, что любой оператор Хилла с помощью указанного действия может быть приведен к *нормальной форме Матъе* вида:

$$L = \frac{d^2}{d\theta^2} + a \cos(2\pi n\theta) + b.$$

§ 10.3. Кэлерова структура на пространствах $\text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ и $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$

Как указано в предыдущем параграфе, среди всех коприсоединенных орбит группы Вирасоро Vir только два типа являются кэлеровыми, именно:

$$\mathcal{R} := \text{Diff}_+(S^1)/S^1 \text{ и } \mathcal{S} := \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1).$$

В этом параграфе мы изучим более подробно их кэлерову структуру.

Как коприсоединенные орбиты группы Vir, эти пространства обладают естественной симплектической структурой, задаваемой формой Кириллова ω .

Введем комплексную структуру J на пространстве $\mathcal{S} = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$, инвариантную относительно действия группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$ левыми сдвигами. Ввиду инвариантности, достаточно определить указанную комплексную структуру в начале $o \in \mathcal{S}$.

Касательное пространство $T_o\mathcal{S}$ можно отождествить с фактором алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ касательных векторных полей на S^1 по модулю подалгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. В терминах разложений Фурье векторные поля $v = v(\theta) \frac{d}{d\theta} \in T_o\mathcal{S}$ задаются рядами вида

$$v(\theta) = \sum_{n \neq -1, 0, 1} v_n e^{in\theta}, \quad v_n \in \mathbb{C},$$

удовлетворяющими условию: $v_{-n} = \bar{v}_n$. В этих терминах сужение $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантной комплексной структуры J на $T_o\mathcal{S}$ задается формулой

$$Jv(\theta) = -i \sum_{n > 1} v_n e^{in\theta} + i \sum_{n < -1} v_n e^{in\theta}$$

для $v = v(\theta) \frac{d}{d\theta} \in T_o\mathcal{S}$. Легко видеть, что построенная комплексная структура на $\mathcal{S}$ формально интегрируема (т.е. скобка двух касательных векторных полей типа $(1, 0)$ относительно этой комплексной структуры является снова векторным полем типа $(1, 0)$). Более того, указанная комплексная структура совместима с симплектической структурой ω на $\mathcal{S}$, упомянутой выше.

Симплектическая форма ω на $\mathcal{S}$ вместе с комплексной структурой J определяют кэлерову метрику g на $\mathcal{S}$. В терминах разложений Фурье эта метрика задается следующим образом. Предположим, что касательные векторы $u, v \in T_o\mathcal{S}$ имеют разложения Фурье вида

$$u = \sum_{n \neq -1, 0, 1} u_n e_n \quad \text{и} \quad v = \sum_{n \neq -1, 0, 1} v_n e_n. \quad (10.12)$$

Тогда значение метрики g на этих векторах будет равно

$$g(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=2}^{\infty} u_n \bar{v}_n (n^3 - n) \right). \quad (10.13)$$

Бесконечный ряд в правой части равенства (10.13) абсолютно сходится, если ряды Фурье (10.12) отвечают векторным полям u, v класса $C^{3/2+\epsilon}$ на S^1 .

Обратимся теперь к орбите $\mathcal{R} := \text{Diff}_+(S^1)/S^1$. Она отождествляется (как однородное пространство) с подгруппой группы $\text{Diff}_+(S^1)$, состоящей из диффеоморфизмов $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, оставляющих точку $1 \in S^1$ на месте: $f(1) = 1$.

Вложение группы поворотов окружности S^1 в группу Мебиуса $\text{Möb}(S^1)$ определяет однородное расслоение

$$\mathcal{R} = \text{Diff}_+(S^1)/S^1 \longrightarrow S,$$

слой которого совпадает с единичным кругом Δ .

Опишем явным образом симплектическую структуру на $\mathcal{R}$, задаваемую формой Кириллова. Эта форма, будучи инвариантной относительно левых сдвигов группы $\text{Diff}_+(S^1)$, полностью определяется своим сужением на касательное пространство в начале $T_o\mathcal{R}$.

Касательное пространство $T_o\mathcal{R}$ отождествляется с пространством $\text{Vect}_0(S^1)$, состоящим из векторных полей $v = v(\theta)\frac{d}{d\theta}$, коэффициенты $v(\theta)$ которых являются 2π -периодическими функциями с нулевым средним:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) d\theta = 0.$$

В терминах разложений Фурье касательные векторы $v \in T_o\mathcal{R}$ задаются рядами вида $v = \sum_{n \neq 0} v_n e_n$, удовлетворяющими условию: $v_{-n} = \bar{v}_n$.

Инвариантная симплектическая структура на $\mathcal{R}$ задается 2-коциклом w на алгебре Ли $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$, инвариантным относительно поворотов. Такой коцикл определяется своими значениями $w(e_m, e_n)$ на базисных векторах $\{e_m\}$. Указанные базисные значения обязательно имеют вид (см. предложение 19 в п. 10.1):

$$w(e_m, e_n) = (\alpha m^3 + \beta m) \delta_{m, -n}$$

для некоторых вещественных α, β . Обозначим форму, отвечающую параметрам α, β , через $w_{\alpha, \beta}$. Легко видеть, что она невырождена на $\text{Vect}_0(S^1)$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha m^3 + \beta m \neq 0 \text{ для всех натуральных } m.$$

Последнее условие выполняется, если либо $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, либо $-\beta/\alpha$ не является квадратом натурального числа. В первом случае форма $w_{\alpha,\beta}$ точна (см. п. 10.1), поэтому мы выбираем вторую возможность.

Форма $w_{\alpha,\beta}$ задает симплектическую структуру на $\text{Vect}_0(S^1)$, которая может быть записана более инвариантным образом в виде

$$w_{\alpha,\beta}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) (\beta v'(\theta) - \alpha v'''(\theta)) d\theta,$$

где $u, v \in \text{Vect}_0(S^1)$. В терминах разложений Фурье

$$u = \sum_{n \neq 0} u_n e^{in\theta}, \quad v = \sum_{n \neq 0} v_n e^{in\theta},$$

получаем

$$w_{\alpha,\beta}(u, v) = 2 \text{Im} \left(\sum_{n \geq 1} (\alpha n^3 + \beta n) \xi_n \bar{\eta}_n \right).$$

Построенное 2-параметрическое семейство симплектических структур на $\mathcal{R}$ имеет естественную интерпретацию в терминах коприсоединенного действия группы $\text{Diff}_+(S^1)$. Напомним, что орбита элемента $(c(d\theta)^2, s)$ совпадает с $\mathcal{R}$, если $2c/s$ не является квадратом натурального числа. Отождествляя однородное пространство $\mathcal{R}$ с орбитой элемента $(c(d\theta)^2, s)$ и наделяя его канонической симплектической структурой, даваемой формой Кириллова, получим, при различном выборе элемента (c, s) с $2c/s \neq n^2$, двухпараметрическое семейство симплектических структур на $\mathcal{R}$, описанное выше.

Введем $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантную комплексную структуру J на пространстве $\mathcal{R}$. Ее сужение на $T_o\mathcal{R} = \text{Vect}_0(S^1)$ совпадает с преобразованием Гильберта, которое сопоставляет касательному вектору $v \in \text{Vect}_0(S^1)$ вектор

$$(Jv)(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{ctg} \frac{\theta - \psi}{2} v(\psi) d\psi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

В терминах разложения Фурье $v = \sum_{n \neq 0} v_n e_n \in \text{Vect}_0(S^1)$ получаем

$$Jv = -i \sum_{n > 0} v_n e_n + i \sum_{n < 0} v_n e_n.$$

Комплексная структура J формально интегрируема, т.е. скобка двух касательных векторных полей типа $(1, 0)$ относительно этой комплексной структуры является снова векторным полем типа $(1, 0)$. Более того, можно показать, что эта комплексная структура является единственной формально интегрируемой $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантной комплексной структурой на $\mathcal{R}$.

Построенная комплексная структура J совместима со всеми симплектическими структурами $w_{\alpha, \beta}$, поэтому она порождает 2-параметрическое семейство кэлеровых метрик $g_{\alpha, \beta}(u, v) := w_{\alpha, \beta}(u, Jv)$ на $\mathcal{R}$, задаваемых в начале формулой:

$$g_{\alpha, \beta}(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n \geq 1} (\alpha n^3 + \beta n) u_n \bar{v}_n \right),$$

где $u = \sum_{n \neq 0} u_n e_n$, $v = \sum_{n \neq 0} v_n e_n \in T_o \mathcal{R}$. Следовательно, $\mathcal{R}$ является кэлеровым многообразием Фреше с 2-параметрическим семейством кэлеровых метрик $g_{\alpha, \beta}$.

Как известно, существование формально интегрируемой комплексной структуры на бесконечномерном многообразии еще не гарантирует существование на нем атласа локальных комплексных координат. Мы построим такие локальные комплексные координаты на $\mathcal{R}$, следуя идее, предложенной Кирилловым и Юрьевым [44]. Именно, мы реализуем $\mathcal{R}$ в виде пространства голоморфных однолистных функций в единичном круге Δ .

Обозначим через $\mathcal{A}$ комплексное пространство Фреше всех C^∞ -гладких комплекснозначных функций в замыкании $\bar{\Delta}$ единичного круга Δ , которые голоморфны внутри Δ и обращаются в нуль в начале. Пусть $\mathcal{A}_0$ есть подмножество $\mathcal{A}$, состоящее из всех функций $f \in \mathcal{A}$, которые задают C^∞ -гладкое вложение замкнутого круга $\bar{\Delta}$ в $\mathbb{C}$. Это открытое подмножество $\mathcal{A}$, наследующее из него структуру комплексного многообразия Фреше. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество функций $f \in \mathcal{A}_0$ таких, что $f'(0) = 1$, являющееся гладкой гиперповерхностью в $\mathcal{A}_0$. Любая функция $f \in \mathfrak{S}$ является голоморфной и однолистной в Δ , задает C^∞ -гладкое вложение $\bar{\Delta} \rightarrow f(\bar{\Delta})$ и удовлетворяет условиям нормировки: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Она задается степенным рядом вида

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots,$$

коэффициенты которого удовлетворяют, согласно теореме де Бранжа, оценке: $|c_k| < k$. Коэффициенты $\{c_k\}$ можно выбрать

в качестве локальных координат в окрестности функции $f(z) \equiv z$ на многообразии $\mathfrak{S}$.

Построим теперь отображение из $\mathfrak{S}$ в $\mathcal{R}$. Для этого сопоставим функции $f \in \mathfrak{S}$ контур $K := f(S^1)$. Функция $f := f_K$ конформно отображает единичный круг $\Delta := \Delta_+$ на область D_K , ограниченную контуром K . Обозначим через

$$g_K: \Delta_- \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_K$$

конформное отображение дополнения $\Delta_- := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}_+$ замкнутого единичного круга $\overline{\Delta}_+$ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ на область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_K$, нормированное условиями:

$$g_K(\infty) = \infty, \quad g'_K(\infty) > 0.$$

Отображение g_K продолжается до диффеоморфизма $\partial\Delta_- = S^1$ на ∂D_K . Сопоставим функции $f \in \mathfrak{S}$ диффеоморфизм

$$\gamma_K := f_K^{-1} \circ g_K|_{S^1}.$$

Для того чтобы построить обратное отображение из $\mathcal{R}$ в $\mathfrak{S}$, заметим, что по произвольному заданному диффеоморфизму $\gamma \in \mathcal{R}$ можно построить новую комплексную структуру на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Действительно, обозначим через $\overline{\mathbb{C}}_\gamma$ гладкое многообразие, полученное склейкой Δ_+ с Δ_- с помощью диффеоморфизма γ . Иными словами, $\overline{\mathbb{C}}_\gamma$ получается из несвязного объединения $\overline{\Delta}_+ \sqcup \overline{\Delta}_-$ отождествлением точек из $S^1 = \partial\Delta_+ = \partial\Delta_-$ по следующему правилу:

$$z \in S^1 = \partial\Delta_+ \longleftrightarrow \gamma^{-1}(z) \in S^1 = \partial\Delta_-.$$

Комплексное многообразие $\overline{\mathbb{C}}_\gamma$ диффеоморфно сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Но, согласно теореме Альфорса, на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ существует единственная комплексная структура. Поэтому два многообразия биголоморфны друг другу, т.е. существует биголоморфное отображение

$$F: \overline{\mathbb{C}}_\gamma \longrightarrow \overline{\mathbb{C}},$$

которое однозначно определяется условиями нормировки:

$$F(0) = 0, \quad F(\infty) = \infty, \quad F'(0) = 1.$$

Биголоморфизм F задается парой функций (f, g) , где функция f является голоморфной в Δ_+ и C^∞ -гладкой вплоть до $S^1 = \partial\Delta_+$,

а функция g является голоморфной в Δ_- и C^∞ -гладкой вплоть до $S^1 = \partial\Delta_-$. При этом

$$f = g \circ \gamma^{-1} \text{ на } S^1.$$

Полагая $K := f(S^1)$, получим, что $\gamma = \gamma_K \bmod S^1$ (поскольку нормировка F не фиксирует $\arg g(\infty)$).

Как было отмечено Лемпертом [50], можно построить обратное отображение, пользуясь вместо теоремы Альфорса теоремой факторизации Пфлюгера [62], которая утверждает, что любой диффеоморфизм $\gamma \in \mathcal{R}$ можно представить в виде

$$\gamma = f^{-1} \circ g,$$

где f и g удовлетворяют указанным выше условиям.

Построенное взаимнооднозначное отображение из $\mathfrak{S}$ в $\mathcal{R}$ является гладким и задает диффеоморфизм

$$\kappa: \mathcal{R} \longrightarrow \mathfrak{S}.$$

Легко описать касательное к нему отображение

$$d_0\kappa: T_0\mathcal{R} \longrightarrow T_1\mathfrak{S}.$$

Касательное пространство $T_1\mathfrak{S}$ отождествляется с пространством Φ , состоящим из функций φ , которые являются голоморфными в Δ , C^∞ -гладкими вплоть до $\partial\Delta$ и удовлетворяют условиям нормировки: $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$. (Действительно, любой такой вектор φ является касательным к кривой $f_t(z) = z + t\varphi(z)$, которая принадлежит $\mathfrak{S}$ при достаточно малом $0 \leq t \leq \epsilon$.) Отображение $d_0\kappa$ сопоставляет вектору $v \in T_0\mathcal{R}$ функцию $\varphi \in T_1\mathfrak{S}$ по формуле

$$2 \operatorname{Re} \varphi(e^{i\theta}) = (Jv)(\theta),$$

где J есть преобразование Гильберта на $T_0\mathcal{R}$. Преобразование Гильберта J на $T_0\mathcal{R}$ отвечает умножению на i в пространстве $T_1\mathfrak{S}$, поэтому отображение, обратное к $d_0\kappa$, задается формулой: $v(\theta) = -2 \operatorname{Im} \varphi(e^{i\theta})$.

Из определения комплексных структур на пространствах $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ вытекает, что однородное круговое расслоение $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ является, на самом деле, голоморфным.

Заметим также, что на самой группе Вирасоро Vir можно задать комплексную структуру, индуцированную комплексной структурой на $\mathcal{R}$, относительно которой естественная проекция

$$\pi: \text{Vir} \longrightarrow \mathcal{R}$$

будет голоморфным $\mathbb{C}^*$ -расслоением (см. [50]).

Библиографические указания

Группа и алгебра Вирасоро рассматриваются во многих книгах, посвященных бесконечномерным группам и алгебрам Ли. Помимо книги Прессли–Сигала [65], см. также [38], [22]. Коприсоединенное представление группы Вирасоро и его орбиты изучались в [40], [30]. Исследование кэлеровой структуры на пространстве $\mathcal{R}$ было начато Бовиком–Радживом [14] и Кирилловым [41]. Связь между указанным пространством и пространством однолистных голоморфных функций в единичном круге установлена в статье Кириллова–Юрьева [44].

Глава 11. Универсальное пространство Тейхмюллера

Эта глава посвящена кэлеровой геометрии универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$, которое определяется как пространство нормализованных гомеоморфизмов окружности S^1 , продолжающихся до квазиконформных отображений единичного круга Δ . Указанное пространство может быть реализовано в виде открытого подмножества комплексного банахова пространства голоморфных квадратичных дифференциалов в круге. Все классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где G – фуксова группа, содержатся в $\mathcal{T}$ в виде комплексных кэлеровых подмногообразий. Однородное пространство $\mathcal{S} = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$, введенное в предыдущей главе 10, можно рассматривать как “регулярную” часть пространства $\mathcal{T}$.

§ 11.1. Определение универсального пространства Тейхмюллера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37. Гомеоморфизм $f: S^1 \rightarrow S^1$ называется *квазисимметричным*, если его можно продолжить до квазиконформного гомеоморфизма единичного круга Δ .

Это определение согласуется с определением квазисимметричного гомеоморфизма как сохраняющего ориентацию гомеоморфизма S^1 , удовлетворяющего условию Берлинга–Альфorsa (6.5), приведенным в п. 6.1. Эквивалентность двух определений устанавливается теоремой Берлинга–Альфorsa из п. 6.1.

Обозначим через $\text{QS}(S^1)$ множество всех сохраняющих ориентацию квазисимметричных гомеоморфизмов S^1 . Оно является группой по отношению к операции композиции гомеоморфизмов.

Любой диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ продолжается до диффеоморфизма замкнутого единичного круга $\bar{\Delta}$, а потому и до квазиконформного гомеоморфизма $\tilde{f}$ (заметим, что якобиан диффеоморфизма f равен $|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$). Следовательно, $\text{Diff}_+(S^1) \subset$

$QS(S^1)$. Так как группа Мебиуса $Möb(S^1)$ дробно-линейных автоморфизмов круга содержится в $Diff_+(S^1)$, получаем следующую цепочку вложений

$$Möb(S^1) \subset Diff_+(S^1) \subset QS(S^1) \subset Homeo(S^1).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38. Факторпространство

$$\mathcal{T} := QS(S^1)/Möb(S^1)$$

называется *универсальным пространством Тейхмюллера*. Его можно отождествить с пространством *нормализованных* квазисимметричных гомеоморфизмов S^1 , оставляющих на месте точки $\pm i$ и $-i$.

Причины, по которым введенное множество названо “универсальным пространством Тейхмюллера”, станут ясны позже.

Как было указано, справедливо включение

$$\mathcal{S} = Diff_+(S^1)/Möb(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T} = QS(S^1)/Möb(S^1).$$

Пользуясь теоремой существования для квазиконформных отображений (теорема 5 из п. 6.2), мы можем описать универсальное пространство Тейхмюллера в терминах дифференциалов Бельтрами. Обозначим через $B(\Delta)$ множество дифференциалов Бельтрами в единичном круге Δ . Его можно отождествить, как было указано в п. 6.1, с единичным шаром в комплексном банаховом пространстве $L^\infty(\Delta)$.

Продолжим заданный дифференциал Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ по симметрии (см. п. 6.2) до дифференциала Бельтрами $\hat{\mu}$ на расширенной комплексной плоскости. Из теоремы 5 из п. 6.2 вытекает существование единственного нормализованного квазиконформного гомеоморфизма w_μ на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с комплексной дилатацией $\hat{\mu}$. Кроме того, указанный гомеоморфизм сохраняет единичный круг Δ , поэтому мы можем сопоставить дифференциалу Бельтрами μ квазисимметричный гомеоморфизм $w_\mu|_{S^1}$ единичной окружности S^1 . Введем отношение эквивалентности между дифференциалами Бельтрами в Δ : $\mu \sim \nu$ тогда и только тогда, когда

$$w_\mu = w_\nu \text{ на } S^1.$$

Тогда универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ будет отождествляться с фактором пространства $B(\Delta)$ дифференциалов Бельтрами по модулю указанного отношения эквивалентности:

$$\mathcal{T} = B(\Delta) / \sim.$$

Или, иными словами, $\mathcal{T}$ совпадает с пространством нормализованных квазиконформных гомеоморфизмов единичного круга Δ на себя.

Мы можем дать еще одно определение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$, пользуясь продолжением заданного дифференциала Бельтрами μ нулем вне единичного круга Δ (см. п. 6.2). Более подробно, обозначим через $\tilde{\mu}$ дифференциал Бельтрами на расширенной комплексной плоскости, полученный продолжением μ нулем вне Δ . Тогда по теореме 5 из п. 6.2 получим нормализованный квазиконформный гомеоморфизм w^μ расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, который является конформным во внешности Δ_- замкнутого единичного круга $\bar{\Delta} \subset \mathbb{C}$ и оставляет на месте точки $\pm 1, -i$. Напомним, что образ $\Delta^\mu := w^\mu(\Delta)$ единичного круга Δ под действием квазиконформного отображения w^μ называется квазикругом. Мы сопоставляем дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta)$ нормализованный квазикруг Δ^μ .

Введем теперь другое отношение эквивалентности между дифференциалами Бельтрами в Δ , называя два дифференциала Бельтрами μ и ν эквивалентными, если $w^\mu|_{\Delta_-} = w^\nu|_{\Delta_-}$. Утверждается, что это новое отношение эквивалентности, на самом деле, совпадает с введенным ранее. Точнее, справедлива следующая

ЛЕММА 4. *Два дифференциала Бельтрами $\mu, \nu \in B(\Delta)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$w_\mu|_{S^1} = w_\nu|_{S^1} \iff w^\mu|_{\Delta_-} = w^\nu|_{\Delta_-}.$$

Доказательство леммы будет дано ниже. Заметим, что из нее вытекает, что универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ можно отождествить с пространством нормализованных квазикругов в $\mathbb{C}$.

Это последнее определение $\mathcal{T}$ позволяет рассматривать элементы $\mathcal{T}$ как однолистные голоморфные функции в Δ_- (которые продолжаются до квазиконформных гомеоморфизмов расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и оставляют неподвижными точки

± 1 и $-i$). Для таких функций естественно пользоваться альтернативной нормализацией, фиксируя их лорановские разложения на бесконечности в виде

$$f(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

Комплексные числа $b_1, b_2, \dots$ играют роль комплексных координат на $\mathcal{T}$. Согласно классической *теореме о площадях*, они удовлетворяют неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1.$$

Связь между двумя различными интерпретациями универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$, а именно, как пространства нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов S^1 и как пространства нормализованных квазикругов в $\mathbb{C}$, устанавливается следующим образом.

Если f – заданный квазисимметричный гомеоморфизм S^1 , то его можно продолжить до квазиконформного гомеоморфизма единичного круга Δ , ассоциированного с некоторым дифференциалом Бельтрами μ . Тогда соответствующий ему квазикруг

$$\Delta^\mu = w^\mu(\Delta)$$

не будет зависеть от выбора квазиконформного продолжения f на Δ .

Обратно, пусть Δ^μ есть квазикруг, соответствующий некоторому квазиконформному отображению с комплексной дилатацией μ . Поскольку оба отображения $w^\mu: \Delta \rightarrow \Delta^\mu$ и $w_\mu: \Delta \rightarrow \Delta^\mu$ квазиконформны и отвечают одному и тому же дифференциалу Бельтрами μ в круге Δ , то отображение $\rho := w^\mu \circ w_\mu^{-1}$ задает конформное отображение единичного круга Δ на квазикруг Δ^μ . Обозначим это отображение через ρ_+ , а через $\rho_-: \Delta_- \rightarrow \Delta_-^\mu$ конформное отображение круга Δ_- на внешность Δ_-^μ замкнутого квазикруга $\bar{\Delta}^\mu$, существование которого обеспечивается теоремой Римана. Сопоставим квазикругу Δ^μ квазисимметричный гомеоморфизм S^1 , задаваемый формулой

$$f := \rho_+^{-1} \circ \rho_-|_{S^1}.$$

Построенное соответствие сохраняет нормализации и, тем самым, устанавливает связь между двумя различными интерпретациями универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$.

Дадим теперь доказательство сформулированной выше леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Предположим сначала, что $w^\mu|_{\Delta_-} = w^\nu|_{\Delta_-}$. Тогда оба отображения $w^\mu \circ w_\mu^{-1}$ и $w^\nu \circ w_\nu^{-1}$ будут конформны в круге Δ_+ , который они отображают на один и тот же квазикруг. Будучи нормализованными, они должны совпадать на S^1 . Но $w^\mu|_{S^1} = w^\nu|_{S^1}$, поэтому мы должны также иметь $w_\mu|_{S^1} = w_\nu|_{S^1}$.

Обратно, предположим, что $w_\mu|_{S^1} = w_\nu|_{S^1}$. Рассмотрим отображение w расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, задаваемое посредством

$$w = \begin{cases} w^\mu \circ (w^\nu)^{-1} & \text{на } w^\nu(\overline{\Delta_-}), \\ [w^\mu \circ (w_\mu)^{-1}] \circ [w_\nu \circ (w^\nu)^{-1}] & \text{на } w^\nu(\Delta_+). \end{cases}$$

Из предположения, что $w_\mu|_{S^1} = w_\nu|_{S^1}$, вытекает, что w есть гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$. Более того, w конформен на $w^\nu(\Delta_-)$ по построению и w конформен на $w^\nu(\Delta_+)$, поскольку оба отображения $w^\mu \circ (w_\mu)^{-1}$ и $w_\nu \circ (w^\nu)^{-1}$ являются там конформными. Из теоремы о квазиконформном продолжении (см. [49], лемма I.6.1) вытекает, что w продолжается до конформного отображения $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. до дробно-линейного автоморфизма $\overline{\mathbb{C}}$. Поскольку оно нормализовано, то является тождественным, откуда $w^\mu|_{\Delta_-} = w^\nu|_{\Delta_-}$.

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ можно наделить естественной метрикой, называемой *расстоянием Тейхмюллера*, которое можно определить следующим образом. Представляя точки $\mathcal{T}$ как нормализованные квазиконформные гомеоморфизмы единичного круга Δ на себя, оставляющие точки ± 1 и $-i$ неподвижными, мы можем определить расстояние между двумя точками $[w_1], [w_2]$ пространства $\mathcal{T}$ посредством

$$\tau([w_1], [w_2]) := \frac{1}{2} \inf \{ \log K_{w_2 \circ w_1^{-1}} : w_1 \in [w_1], w_2 \in [w_2] \},$$

где K_w есть максимальная дилатация квазиконформного отображения w (см. п. 6.1). Эта метрика превращает $\mathcal{T}$ в полное метрическое пространство (см. [49], п. III.3.2). Более того, можно показать, что $\mathcal{T}$ стягиваемо (см. [49], теорема III.3.2).

§ 11.2. Кэлерова структура универсального пространства Тейхмюллера

Для изучения кэлеровой геометрии универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ мы воспользуемся его вложением в пространство квадратичных дифференциалов, построенным Берсом. Указанное вложение позволит нам ввести комплексные координаты на $\mathcal{T}$. Удобно воспользоваться для его построения представлением $\mathcal{T}$ в виде пространства нормализованных квазикругов $\Delta^\mu = w^\mu(\Delta_+)$ или, что то же самое, в виде пространства нормализованных конформных отображений w^μ круга Δ_- . С помощью подходящего преобразования Мебиуса, мы можем заменить здесь круг Δ_+ на верхнюю полуплоскость H_+ и представить $\mathcal{T}$ в виде пространства нормализованных квазикругов $w^\mu(H_+)$, т.е. образов верхней полуплоскости H_+ относительно квазиконформных гомеоморфизмов w^μ расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, являющихся конформными на H_- и оставляющих точки $0, 1, \infty$ неподвижными.

Пусть $[\mu]$ есть произвольная точка $\mathcal{T}$, представленная нормализованным квазикругом $w^\mu(H_+)$. Определим отображение

$$\Psi: [\mu] \longmapsto \psi[\mu] := S[w^\mu|_{H_-}], \quad (11.1)$$

где S обозначает шварциан (см. п. 10.2). Ввиду инвариантности шварциана относительно преобразований Мебиуса, образ этого отображения $\psi[\mu]$ зависит только от класса $[\mu]$ дифференциала Бельтрами μ в $\mathcal{T}$ и является голоморфной функцией в H_- . Обратное также верно: *если* $\psi[\mu] = \psi[\nu]$, *то* $[\mu] = [\nu]$ *в* $\mathcal{T}$. Действительно, рассмотрим конформное отображение $h := w^\mu \circ (w^\nu)^{-1}$ из $w^\nu(H_-)$ в $w^\mu(H_-)$. Тогда, из правила преобразования (10.8) для шварциана в H_- , получим

$$S[w^\mu] = S[h \circ w^\nu] = (S[h] \circ w^\nu) (w^\nu)^{\prime 2} + S[w^\nu].$$

Так как $S[w^\mu] = S[w^\nu]$ в H_- , то $S[h] = 0$ в H_- . Следовательно, h есть дробно-линейное преобразование (см. п. 10.2), которое нормализовано (т.е. оставляет на месте точки $0, 1, \infty$). Поэтому h есть тождественное преобразование, откуда следует, что $[\mu] = [\nu]$ в $\mathcal{T}$.

Правило преобразования шварциана (10.8) показывает, что образ $\psi[\mu]$ дифференциала Бельтрами $\mu \in B(H_-)$ является

голоморфным квадратичным дифференциалом в H_- . Поэтому отображение (11.1) задает вложение универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ в пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в H_- , называемое *вложением Берса*.

Мы уже пользовались в п. 10.2 естественной гиперболической нормой на пространстве квадратичных дифференциалов. В случае H_- она равна

$$\|\psi\|_2 := \sup_{z \in H_-} 4y^2 |\psi(z)|$$

для квадратичного дифференциала ψ . Из теоремы 11 в п. 10.2 следует, что

$$\|\psi[\mu]\|_2 \leq 6$$

для любого дифференциала Бельтрами $\mu \in B(H_-)$. Обозначим через $B_2(H_-)$ пространство голоморфных квадратичных дифференциалов в H_- , имеющих конечную норму:

$$B_2(H_-) = \left\{ \begin{array}{l} \text{голоморфные квадратичные дифференциалы } \psi \\ \text{в } H_- : \|\psi\|_2 < \infty \end{array} \right\}.$$

Итак, у нас имеется вложение

$$\Psi: \mathcal{T} \longrightarrow B_2(H_-)$$

пространства $\mathcal{T}$ в ограниченное подмножество пространства $B_2(H_-)$. Можно показать, что это вложение является гомеоморфизмом (относительно топологии на $\mathcal{T}$, определяемой расстоянием Тейхмюллера) на образ Ψ (см. [49], теорема III.4.1). Образ $\Psi(\mathcal{T})$ есть открытое подмножество в $B_2(H_-)$, которое содержит шар радиуса $1/2$ с центром в нуле (см. [1]). Более того, известно (см. [20]), что это подмножество связно и стягиваемо.

Пользуясь вложением Берса, мы можем ввести комплексную структуру и комплексные координаты на универсальном пространстве Тейхмюллера $\mathcal{T}$, индуцированные из комплексного банахового пространства $B_2(H_-)$. Это наделяет $\mathcal{T}$ структурой комплексного банахова многообразия. Рассмотрим теперь естественную проекцию пространства дифференциалов Бельтрами на универсальное пространство Тейхмюллера, определенную в начале п. 11.1. В используемой реализации пространства $\mathcal{T}$ это отображение задается как

$$\Phi: B(H_+) \longrightarrow \mathcal{T} = B(H_+)/\sim.$$

Это отображение голоморфно относительно введенной на $\mathcal{T}$ комплексной структуры (см. [56], глава 3.4). Поэтому отображение композиции

$$F := \Psi \circ \Phi: B(H_+) \longrightarrow B_2(H_-)$$

также голоморфно.

Изучим далее касательную структуру указанного отображения, т.е. дифференциал F . Опишем касательное расслоение $T\mathcal{T}$, пользуясь определением $\mathcal{T}$ в терминах дифференциалов Бельтрами

$$\mathcal{T} = B(H_+)/\sim.$$

Ввиду однородности $\mathcal{T}$ относительно правого действия квазисимметричных гомеоморфизмов, достаточно определить касательное пространство $T_0\mathcal{T}$ в начале, отвечающем тождественному гомеоморфизму, ассоциированному с $\mu = 0$.

Пусть $\mu \in L^\infty(H_+)$ представляет произвольный касательный вектор из $T_0B(H_+)$. Тогда для соответствующего квазиконформного отображения $w^{t\mu}$ будем иметь разложение

$$w^{t\mu}(z) = z + tw_1(z) + o(t)$$

при $t \rightarrow 0$, где $o(t) := t\delta(z, t)$ и $\delta(z, t) \rightarrow 0$ равномерно по z , когда z принадлежит компактному подмножеству в $\mathbb{C}$. Член

$$w_1(z) \equiv \dot{w}[\mu](z)$$

представляет собой первую вариацию квазиконформного отображения $w^{t\mu}$ по μ . Подставим $w^{t\mu}$ в уравнение Бельтрами и продифференцируем его по t при $t = 0$. Так как $\partial/\partial t$ коммутирует с $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$ для почти всех z , то после применения к $w^{t\mu}(z)$ (см. [2]), получим

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\dot{w}[\mu](z)) = \mu(z)$$

для почти всех z , иначе говоря, $\dot{w}[\mu](z)$ удовлетворяет $\bar{\partial}$ -уравнению. Поэтому оно может быть представлено интегралом Коши–Грина: если μ имеет компактный носитель в $\mathbb{C}$, то решение указанного уравнения имеет вид

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad \text{для } \zeta = \xi + i\eta$$

плюс произвольная целая функция, которая в нашем случае может быть только линейной функцией вида (см. [1])

$$A + Bz = (z - 1) \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta} d\xi d\eta - z \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - 1} d\xi d\eta.$$

Все вместе дает следующую формулу для $\dot{w}[\mu](z)$

$$w_1(z) = \dot{w}[\mu](z) = -\frac{z(z-1)}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-z)} d\xi d\eta, \quad (11.2)$$

которая справедлива для всех $\mu \in L^\infty(H_+)$ (условие компактности носителя μ снимается с помощью стандартного рассуждения, основанного на аппроксимации, см. [1]).

Теперь мы в состоянии доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20 ([1], [56]). *Дифференциал отображения*

$$F = \Psi \circ \Phi: B(H_+) \longrightarrow B_2(H_-)$$

в нуле задается формулой

$$d_0(\Psi \circ \Phi)[\mu](z) = -\frac{6}{\pi} \int_{H_+} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\xi d\eta, \quad z \in H_-, \quad (11.3)$$

для $\mu \in B(H_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $z_0 \in H_-$. Мы хотим найти производную функции

$$\varphi(t, z) := S[w^{t\mu}](z) = F[t\mu](z)$$

при $t = 0$. Обозначая $w := w^{t\mu}$, производную по t “точкой”, а производную по z “штрихом”, получим

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \left(\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''}{w'} \right)^2 \right) \\ &= \frac{(w')^3 \dot{w}''' - \dot{w}' (w')^2 w''' - 3\dot{w}'' (w')^2 w'' + 3\dot{w}' w' (w'')^2}{(w')^4}. \end{aligned}$$

При $t = 0$ имеем $w(z) \equiv z$, поэтому $w' \equiv 1$, $w'' = w''' \equiv 0$. Следовательно, выписанная выше формула сводится к

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{(w')^3 \dot{w}'''}{(w')^4} = \dot{w}'''.$$

Но из формулы (11.2) вытекает, что

$$\dot{w}(z) = -\frac{z(z-1)}{\pi} \int_{H_+} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-z)} d\xi d\eta$$

(заметим, что $\mu \equiv 0$ на H_-). Дифференцируя эту формулу трижды по z , получим искомое выражение (11.3).

В дополнение к формуле (11.3) можно доказать (см. [56], теорема 3.4.5), что оператор d_0F является ограниченным линейным оператором с нормой, оцениваемой абсолютной константой.

Опишем ядро дифференциала d_0F . Заметим, что имеется естественное спаривание между пространством $A_2(H_+)$, состоящим из L^1 -интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов в H_+ , и пространством $B(H_+)$, состоящим из $(-1, 1)$ -дифференциалов Бельтрами в H_+ , которое обозначается через

$$\langle \mu, \psi \rangle := \int_{H_+} \mu \psi. \quad (11.4)$$

В терминах этого спаривания, ядро d_0F можно описать следующим образом.

ТЕОРЕМА 12 (ЛЕММА ТЕЙХМЮЛЛЕРА). *Ядро d_0F совпадает с подпространством*

$$N \equiv A_2(H_+)^{\perp} = \{ \mu \in L^{\infty}(H_+) : \langle \mu, \psi \rangle = 0 \text{ для всех } \psi \in A_2(H_+) \}.$$

Доказательство леммы можно найти в ([1], глава IV(D); [56], п. 3.7).

Полезно привести сводку приведенных результатов для случая единичного круга $\Delta = \Delta_+$. Вложение Берса в этом случае совпадает с отображением

$$F: B(\Delta_+) \longrightarrow B_2(\Delta_-),$$

сопоставляющим дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta_+)$ в единичном круге Δ_+ сужение $S[w^{\mu}]|_{\Delta_-}$ шварциана $S[w^{\mu}]$ на внешность $\Delta_- = \{|z| > 1\} \cup \infty$ замкнутого единичного круга $\overline{\Delta}_+$ на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$. Образ этого отображения содержится в пространстве голоморфных квадратичных дифференциалов в Δ_- , имеющих конечную норму

$$\|\psi\|_2 := \sup_{z \in \Delta_-} (1 - |z|^2) |\psi(z)| < \infty.$$

Формула для дифференциала d_0F принимает вид

$$d_0F[\mu](z) = -\frac{6}{\pi} \int_{\Delta_+} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\xi d\eta, \quad z \in \Delta_-, \quad (11.5)$$

для $\mu \in L^\infty(\Delta_+)$. Ядро d_0F совпадает с подпространством

$$N \equiv A_2(\Delta_+)^\perp = \{\mu \in L^\infty(\Delta_+): \langle \mu, \psi \rangle = 0 \text{ для всех } \psi \in A_2(\Delta_+)\}.$$

Это определение эквивалентно следующему (см. [56], п. 3.7.2)

$$N = \left\{ \mu \in L^\infty(\Delta): \int_{\Delta} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\xi d\eta = 0 \text{ для всех } z \in \Delta_- \right\}.$$

Формулы (11.3), (11.5) подсказывают, каким образом можно попытаться ввести кэлерову метрику на пространстве $\mathcal{T}$. Именно, воспользуемся отображением Альфорса (см. [3]): $L^\infty(\Delta) \longrightarrow B_2(\Delta)$, задаваемым формулой

$$L^\infty(\Delta) \ni \mu \longmapsto \varphi[\mu](z) = \int_{\Delta} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} d\xi d\eta.$$

Оно сопоставляет каждому $\mu \in L^\infty(\Delta)$ голоморфный квадратичный дифференциал $\varphi[\mu]$ с конечной нормой $\|\varphi\|_2 = \sup_{z \in \Delta} (1 - |z|^2)^2 |\varphi(z)| < \infty$. Ядро этого отображения совпадает с $N = A_2(\Delta_+)^\perp$. Определим теперь формально эрмитову метрику на $\mathcal{T}$, полагая для двух касательных векторов μ, ν из $T_0\mathcal{T} = L^\infty(\Delta)/N$:

$$(\mu, \nu) := \langle \mu, \varphi[\nu] \rangle = \int_{\Delta} \int_{\Delta} \frac{\mu(z) \overline{\nu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} d\xi d\eta dx dy. \quad (11.6)$$

Однако, введенная таким образом метрика только плотно определена. Более точно (см. [59]), для $\mu \in L^\infty(\Delta)$ его образ $\varphi[\mu]$ в $B_2(\Delta)$ может оказаться не интегрируемым, т.е. не принадлежащим $A_2(\Delta)$. В этом случае интеграл в формуле (11.6) будет расходиться. На самом деле формула (11.6) корректно определена, если касательные векторы μ, ν из $T_0\mathcal{T}$ являются достаточно гладкими. Для формулировки указанного условия гладкости реализуем $\mathcal{T}$ в виде пространства нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов окружности S^1 . Тогда касательный вектор $\mu \in L^\infty(\Delta) = T_0B(\Delta)$ будет переходить под действием дифференциала $d_0\Phi$ в векторное поле $v = v(\theta)\partial/\partial\theta$ на S^1 вида

$$v(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} = \dot{w}[\mu](z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad z = e^{i\theta},$$

где $\dot{w}[\mu]$ есть производная по t однопараметрического потока $w_{t\mu}$ квазисимметричных гомеоморфизмов:

$$w_{t\mu}(z) = z + t\dot{w}[\mu](z) + o(t) \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Тогда можно показать (см. [59]), что интеграл в формуле (11.6) сходится, если касательные векторы μ, ν из $T_0\mathcal{T}$ отвечают $C^{3/2+\epsilon}$ -гладким векторным полям на S^1 . В том случае, когда метрика (11.6) корректно определена, она задает кэлерову метрику, в частности, таким образом можно определить кэлерову метрику на “регулярной” части пространства $\mathcal{T}$.

§ 11.3. Пространства Тейхмюллера $T(G)$ и $\text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$

Универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ содержит в качестве комплексных подмногообразий все классические пространства Тейхмюллера $T(G)$, где G – *фуксова группа* (см. [49], [56]). В частности, это верно для всех пространств Тейхмюллера компактных римановых поверхностей конечного рода. Указанное свойство $\mathcal{T}$ мотивирует использование термина “универсальное” в его названии.

С произвольной фуксовой группой G связана риманова поверхность $X := \Delta/G$, униформизируемая единичным кругом Δ . По определению, $T(G)$ состоит из квазисимметричных гомеоморфизмов $f \in \text{QS}(S^1)$, которые *G -инвариантны* в следующем смысле:

$$f \circ g \circ f^{-1} \text{ принадлежит } \text{Möb}(S^1) \text{ для всех } g \in G,$$

рассматриваемых по модулю дробно-линейных автоморфизмов круга Δ . Если обозначить через $\text{QS}(S^1)^G$ подмножество G -инвариантных квазисимметричных гомеоморфизмов в $\text{QS}(S^1)$, то

$$T(G) = \text{QS}(S^1)^G / \text{Möb}(S^1).$$

Само универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ отвечает фуксовой группе $G = \{1\}$.

Различные интерпретации универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$, приведенные в п. 11.1, совместимы с понятием G -инвариантности. В частности, пространства Тейхмюллера $T(G)$ допускают описание в терминах G -инвариантных дифференциалов Бельтрами. Более подробно, обозначим через $B(\Delta)^G$ подпространство $B(\Delta)$, состоящее из дифференциалов Бельтрами μ ,

удовлетворяющих соотношению

$$\mu(gz) \frac{\overline{g'(z)}}{g'(z)} = \mu(z) \text{ почти всюду на } \Delta \text{ для всех } g \in G.$$

Тогда, как и в п. 11.1, будем иметь

$$T(G) = B(\Delta)^G / \sim,$$

где $\mu \sim \nu$, если $w_\mu = w_\nu$ на S^1 или, эквивалентно, $w^\mu|_{\Delta_-} = w^\nu|_{\Delta_-}$.

Сопоставим G -инвариантному дифференциалу Бельтрами μ фуксову группу G_μ , сопряженную к G :

$$G_\mu := w_\mu G w_\mu^{-1},$$

где w_μ – квазиконформный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$, оставляющий круги $\Delta_\pm$ инвариантными (см. п. 11.1).

Имеется естественное квазиконформное отображение римановой поверхности $X := \Delta/G$ на другую риманову поверхность $X_\mu := \Delta/G_\mu$. Это отображение является гомеоморфизмом, причем оно биголоморфно тогда и только тогда, когда $\mu \in \text{Möb}(S^1)$. Тем самым, можно сказать, что пространство $T(G)$ параметризует, с помощью отображения $\mu \mapsto G_\mu$, различные комплексные структуры на римановой поверхности $X := \Delta/G$, которые могут быть получены квазиконформной деформацией исходной структуры.

С другой стороны, по G -инвариантному дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta)^G$ можно построить другую группу

$$G^\mu := w^\mu G (w^\mu)^{-1},$$

сопряженную к G , которая действует вполне разрывно на квазикруге $\Delta^\mu := w^\mu(\Delta)$. Здесь, w^μ – квазиконформный гомеоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$, конформный на Δ_- (см. п. 11.1). Группа G^μ является клейновой и называется иначе *квазифуксовой группой* (см. [49], [56]). Риманова поверхность X_μ биголоморфна Δ^μ/G^μ (см. [56], теорема 1.3.5). Заметим также, что риманова поверхность Δ_-^μ/G^μ биголоморфна римановой поверхности Δ_-/G ввиду конформности отображения w^μ на Δ_- .

Определение и основные свойства вложения Берса, данные в п. 11.2, распространяются на пространства Тейхмюллера $T(G)$.

В случае единичного круга $\Delta \equiv \Delta_+$ вложение Берса есть отображение

$$F: B(\Delta_+)^G \longrightarrow B_2(\Delta_-)^G,$$

сопоставляющее дифференциалу Бельтрами $\mu \in B(\Delta_+)^G$ квадратичный дифференциал $S[w^\mu|_{\Delta_-}]$ на Δ_- . Образ этого отображения содержится в пространстве $B_2(\Delta_-)^G$, состоящем из G -инвариантных голоморфных квадратичных дифференциалов в круге Δ_- , имеющих конечную норму

$$\|\psi\|_2 := \sup_{z \in \Delta_-} (1 - |z|^2)^2 |\psi(z)| < \infty.$$

Формула для дифференциала $d_0 F$ имеет вид

$$d_0 F[\mu](z) = -\frac{6}{\pi} \int_{\Delta_+} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\xi d\eta, \quad z \in \Delta_-,$$

для $\mu \in L^\infty(\Delta_+)^G$. Ядро $d_0 F$ совпадает с подпространством

$$\begin{aligned} N^G &\equiv (A_2(\Delta_+)^G)^\perp \\ &= \{\mu \in L^\infty(\Delta_+)^G : \langle \mu, \psi \rangle = 0 \text{ для всех } \psi \in A_2(\Delta_+)\}. \end{aligned}$$

Это определение эквивалентно следующему

$$N^G = \left\{ \mu \in L^\infty(\Delta)^G : \int_{\Delta} \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\xi d\eta = 0 \text{ для всех } z \in \Delta_- \right\}.$$

Поэтому касательное пространство к $T(G)$ в начале совпадает с пространством $L^\infty(\Delta)^G/N^G$.

Как и в п. 11.2, имеется отображение Альфорса

$$L^\infty(\Delta)^G/N^G \longrightarrow B_2(\Delta)^G,$$

задаваемое формулой

$$L^\infty(\Delta)^G \ni \mu \longmapsto \varphi[\mu](z) = \int_{\Delta} \frac{\overline{\mu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} d\xi d\eta.$$

С помощью этого отображения мы можем определить метрику Вейля–Петерсона на $T(G)$, как и в п. 11.2, полагая для двух касательных векторов μ, ν из $T_0 T(G) = L^\infty(\Delta)^G/N^G$:

$$g_G(\mu, \nu) := \int_{\Delta/G} \int_{\Delta} \frac{\mu(z)\overline{\nu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} d\xi d\eta dx dy. \quad (11.7)$$

Как было указано в п. 11.2, образ $\varphi[\mu] \in B_2(\Delta)^G$ отображения Альфорса для общей фуксовой группы G может не принадлежать пространству $A_2(\Delta)^G$ интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов, поэтому формула (11.7) для метрики $g_G(\mu, \nu)$ плохо определена для общих фуксовых групп. Но в случае конечномерных пространств Тейхмюллера $T(G)$ эта трудность не проявляется, поскольку в указанном случае $B_2(\Delta)^G = A_2(\Delta)^G$ (см. [56]), и введенная метрика совпадает со стандартной метрикой Вейля–Петерсона на конечномерном пространстве Тейхмюллера $T(G)$. Более того, как показано Нагом (см. [59]), метрика $g_G(\mu, \nu)$ на $T(G)$ может быть получена из метрики (μ, ν) на $\mathcal{T}$ с помощью некоторой процедуры регуляризации интеграла

$$\begin{aligned} (\mu, \nu) &= \int_{\Delta} \int_{\Delta} \frac{\mu(z) \overline{\nu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} d\xi d\eta dx dy = \\ &= \int_{\Delta} \mu \cdot \varphi[\nu]. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Для определения этой регуляризации перепишем интеграл (11.8) в виде

$$(\mu, \nu) = \lim_{r \rightarrow 1-0} g_r(\mu, \nu),$$

где

$$g_r(\mu, \nu) = \int_{\Delta_r} \mu \cdot \varphi[\nu], \quad (11.9)$$

и $\Delta_r := \{z \in \Delta : |z| < r\}$, $0 < r < 1$.

В случае, когда μ, ν являются G -инвариантными, т.е. принадлежат пространству $L^\infty(\Delta)^G/N^G$, интеграл (11.8) совпадает с

$$n \int_{\Delta/G} \mu \cdot \varphi[\nu] = n g_G(\mu, \nu),$$

где n – число экземпляров фундаментальной области Δ/G , содержащихся в Δ . Тем самым, этот интеграл обязан расходиться, если группа G состоит из бесконечного числа элементов. Интеграл (11.9) по тем же соображениям пропорционален $n_r g_G(\mu, \nu)$, где n_r – число экземпляров фундаментальной области Δ/G , содержащихся в Δ_r . Отсюда следует, что интеграл (11.9) можно регуляризовать, поделив его на величину, пропорциональную n_r . Более точно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21 ([59]). Для любого конечномерного пространства Тейхмюллера $T(G)$ его метрику Вейля–Петерсона $g_G(\mu, \nu)$ можно вычислить по формуле

$$\frac{g_G(\mu, \nu)}{g_G(\mu_0, \mu_0)} = \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{g_r(\mu, \nu)}{g_r(\mu_0, \mu_0)},$$

где $\mu, \nu \in L^\infty(\Delta)^G$, и $\mu_0 \in L^\infty(\Delta)^G/N^G$ – произвольный ненулевой касательный вектор из $T_0T(G)$.

Как было отмечено в начале п. 11.1, универсальное пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}$ содержит однородное пространство $\mathcal{S} = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ в качестве своей “регулярной” части:

$$\mathcal{S} = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1) \hookrightarrow \mathcal{T} = \text{QS}(S^1)/\text{Möb}(S^1).$$

В п. 10.3 на пространстве $\mathcal{S}$ была введена структура кэлерова многообразия Фреше. Напомним определение кэлеровой метрики g на этом пространстве в терминах разложений Фурье. Для заданных касательных векторов $u, v \in T_0\mathcal{S}$ с разложениями Фурье

$$u = \sum_{n \neq -1, 0, 1} u_n e_n \text{ и } v = \sum_{n \neq -1, 0, 1} v_n e_n,$$

значение g на этих векторах равно

$$g(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=2}^{\infty} u_n \bar{v}_n (n^3 - n) \right). \quad (11.10)$$

Как было отмечено выше, ряд в правой части абсолютно сходится, если векторные поля u, v принадлежат классу $C^{3/2+\epsilon}$ на S^1 .

В работе [59] показано, что кэлерова метрика g на $\mathcal{S}$ совпадает (с точностью до постоянного множителя) с метрикой Вейля–Петерсона (11.6) на $\mathcal{S}$, индуцированной вложением $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T}$. (Заметим, что метрика (11.6) на гладкой части $\mathcal{S}$ пространства $\mathcal{T}$ корректно определена, как было отмечено в п. 11.2.) Пользуясь интерпретацией касательных векторов из $T_0\mathcal{T}$, приведенной в конце п. 11.2, мы можем выразить равенство этих метрик на $\mathcal{S}$ следующим образом. Для заданных касательных векторов $u, v \in T_0\mathcal{S}$, записанных в виде $u = \dot{w}[\mu]\partial/\partial z$, $v = \dot{w}[\nu]\partial/\partial z$, справедлива формула

$$g(\mu, \nu) = \lambda \int_{\Delta} \int_{\Delta} \frac{\mu(z) \overline{\nu(\zeta)}}{(1 - z\bar{\zeta})^4} d\xi d\eta dx dy$$

при подходящем выборе константы λ . Вводя указанную константу в определение кэлеровой метрики на $\mathcal{S}$, мы можем добиться того, чтобы вложение $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T}$ стало изометрией.

Интересно понять, каким образом размещается гладкая часть $\mathcal{S}$ внутри универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ по отношению к классическим пространствам Тейхмюллера $T(G)$. Можно показать (см. [12]), что квазикруги, отвечающие всем точкам $T(G)$, кроме начала, имеют фрактальные границы (т.е. границы хаусдорфовой размерности > 1) в отличие от квазикругов, отвечающих точкам $\mathcal{S}$, которые имеют C^∞ -гладкие границы.

§ 11.4. Грассманова реализация универсального пространства Тейхмюллера

В основе грассмановой реализации универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ лежит тот факт, что группа $\text{QS}(S^1)$ квазисимметричных диффеоморфизмов окружности действует на соболевском пространстве V полудифференцируемых функций на S^1 (см. п. 9.2).

Предположим, что $f: S^1 \rightarrow S^1$ есть гомеоморфизм S^1 , сохраняющий ориентацию. Определим оператор T_f по формуле

$$T_f(\xi) := \xi \circ f - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(f(\theta)) d\theta$$

при $\xi \in V$. Этот оператор обладает следующим замечательным свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22 (НАГ–СУЛЛИВАН [58]). *Оператор T_f действует на V (т.е. $T_f(\xi)$ принадлежит V для любого $\xi \in V$) тогда и только тогда, когда $f \in \text{QS}(S^1)$. Более того, если f продолжается до K -квазиконформного гомеоморфизма круга Δ , то операторная норма T_f не превосходит $\sqrt{K + K^{-1}}$.*

Доказательство этого утверждения, приведенное в [58], использует интерпретацию пространства V в терминах гармонических функций в круге, данную в конце п. 9.1.

Преобразования вида T_f с $f \in \text{QS}(S^1)$ сохраняют симплектическую форму ω , т.е. являются симплектическими преобразованиями пространства V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23 (НАГ–СУЛЛИВАН [58]). Если $f \in \text{QS}(S^1)$, то

$$\omega(f^*(\xi), f^*(\eta)) = \omega(\xi, \eta)$$

для любых $\xi, \eta \in V$. Более того, комплексно линейное продолжение $\text{QS}(S^1)$ -действия на V на комплексифицированное пространство $V^{\mathbb{C}}$ сохраняет подпространство W_+ (см. п. 9.1) тогда и только тогда, когда f есть преобразование Мебиуса, т.е. $f \in \text{Möb}(S^1)$. В последнем случае, T_f действует на $W_{\pm}$ как унитарный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для гомеоморфизмов f класса C^1 первое утверждение вытекает из формулы замены переменной в интеграле. Для общего квазисимметричного гомеоморфизма $f \in \text{QS}(S^1)$ утверждение следует из того факта (см. [49]), что f можно равномерно приблизить вещественно аналитическими гомеоморфизмами S^1 , имеющими ту же константу квазиконформности K , что и f .

Если действие f на $V^{\mathbb{C}}$ сохраняет подпространство W_+ , то оно продолжается до отображения $\Delta \rightarrow \Delta$, которое является биголоморфизмом и, следовательно, преобразованием Мебиуса. Из определения скалярного произведения на пространстве $V^{\mathbb{C}}$ (см. п. 9.1) следует, что такое преобразование действует на $W_{\pm}$ унитарно.

Симплектическая форма ω на V однозначно определяется свойством инвариантности, как это вытекает из нижеследующего предложения. На самом деле верно более сильное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24 (НАГ–СУЛЛИВАН [58]). Предположим, что ω_1 есть вещественнозначная непрерывная билинейная ко-симметричная форма на V такая, что

$$\omega_1(f^*(\xi), f^*(\eta)) = \omega_1(\xi, \eta)$$

для любого $f \in \text{Möb}(S^1)$ и произвольных $\xi, \eta \in V$. Тогда ω_1 пропорциональна ω , в частности, любая форма ω_1 , удовлетворяющая условиям предложения, обязательно является симплектической формой, инвариантной относительно квазисимметричных гомеоморфизмов S^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что обе формы ω и ω_1 определяют отображения двойственности

$$\Sigma: V \longrightarrow V^* \text{ и } \Sigma_1: V \longrightarrow V^*,$$

задаваемые посредством

$$\Sigma(\xi) := \omega(\cdot, \xi), \quad \Sigma_1(\xi) := \omega_1(\cdot, \xi)$$

для $\xi \in V$. В случае формы ω оператор двойственности Σ совпадает, в действительности, с оператором $-J^0$. В частности, Σ является ограниченным обратимым оператором, задающим изоморфизм между пространством V и двойственным пространством.

Рассмотрим сплетающий оператор

$$M := \Sigma^{-1} \circ \Sigma_1 : V \longrightarrow V.$$

Он является ограниченным линейным оператором на V , определяемым равенством

$$\omega(\xi, M\eta) = \omega_1(\xi, \eta).$$

Заметим, что M коммутирует с любым обратимым линейным оператором на V , сохраняющим формы ω и ω_1 . Действительно, если T – такой оператор, то

$$\omega(T\xi, TM\eta) = \omega(\xi, M\eta) = \omega_1(\xi, \eta) = \omega_1(T\xi, T\eta) = \omega(T\xi, MT\eta).$$

Так как T обратим, то отсюда следует, что

$$\omega(\xi, TM\eta) = \omega(\xi, MT\eta)$$

для любых $\xi, \eta \in V$. Поскольку оператор двойственности Σ , определяемый ω , является изоморфизмом, из последнего равенства вытекает, что $TM = MT$, как и утверждалось.

Остается показать, что сплетающий оператор M совпадает со скалярным кратным $\text{const} \cdot I$ тождественного оператора I . Мы докажем это, рассматривая комплексно линейное продолжение M на комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$.

Рассмотрим комплексифицированное действие $f \mapsto T_f$ группы Мебиуса $\text{Möb}(S^1)$ на $V^{\mathbb{C}}$. Его сужение на подпространство W_+ можно отождествить со стандартным унитарным представлением группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ на пространстве голоморфных L^2 -функций в круге Δ (см. [58], лемма 4.6), следовательно, оно неприводимо. То же самое верно и для сужения $f \mapsto T_f$ на подпространство W_- . Кроме того, $W_{\pm}$ являются единственными неприводимыми инвариантными подпространствами представления $f \mapsto T_f$ группы $\text{Möb}(S^1)$ на $V^{\mathbb{C}}$.

Как мы только что показали, сплетающий оператор M коммутирует со всеми операторами $T_f: V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ с $f \in \text{Möb}(S^1)$. Поскольку $W_{\pm}$ являются единственными инвариантными подпространствами для всех таких операторов T_f , оператор M должен отображать W_+ либо в W_+ , либо в W_- . Если M отображает W_+ в W_+ , то по лемме Шура он должен быть скаляром, причем вещественным, поскольку оператор M вещественный.

Если реализуется другая возможность (т.е. M отображает W_+ в W_-), то мы можем заменить оператор M на оператор $\tilde{M}$, задаваемый композицией M с комплексным сопряжением. Полученный оператор $\tilde{M}$ будет отображать W_+ в W_+ и коммутировать со всеми операторами T_f . По доказанному, $\tilde{M}$ должен быть вещественным скаляром и, тем самым, совпадать с M . В этом случае M не может отображать W_+ в W_- , т.е. вторая возможность не реализуется.

Из предложений 22 и 23 вытекает, что квазисимметричные гомеоморфизмы из $\text{QS}(S^1)$ действуют на гильбертовом пространстве V как ограниченные симплектические операторы. Поэтому, имеется отображение

$$\mathcal{T} = \text{QS}(S^1)/\text{Möb}(S^1) \longrightarrow \text{Sp}(V)/\text{U}(W_+). \quad (11.11)$$

Здесь, через $\text{Sp}(V)$ обозначается симплектическая группа пространства V , состоящая из линейных ограниченных симплектических операторов на V , а через $\text{U}(W_+)$ ее подгруппа, состоящая из унитарных операторов, т.е. операторов, комплексно линейные продолжения которых на $V^{\mathbb{C}}$ сохраняют подпространство W_+ . Опишем эти группы более подробно.

Напомним, что комплексифицированное гильбертово пространство $V^{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$$

подпространств

$$W_+ = \left\{ f \in V^{\mathbb{C}} : f(z) = \sum_{k \geq 0} x_k z^k \right\},$$

$$W_- = \overline{W}_+ = \left\{ f \in V^{\mathbb{C}} : f(z) = \sum_{k < 0} x_k z^k \right\}.$$

В терминах этого разложения любой линейный оператор $A: V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$ представляется в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где

$$a: W_+ \rightarrow W_+, \quad b: W_- \rightarrow W_+, \quad c: W_- \rightarrow W_-, \quad d: W_+ \rightarrow W_-.$$

В частности, линейные операторы на $V^{\mathbb{C}}$, полученные комплексно-линейным продолжением операторов $A: V \rightarrow V$, допускают блочное представление вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где мы отождествляем W_- с комплексно сопряженным пространством $\bar{W}_+$.

Оператор $A: V \rightarrow V$ принадлежит симплектической группе $\mathrm{Sp}(V)$, если он сохраняет симплектическую форму ω . Это условие эквивалентно следующему соотношению:

$$A^t J^0 A = J^0,$$

где

$$J^0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Другими словами, условие $A \in \mathrm{Sp}(V)$ может быть записано в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V) \iff \bar{a}^t a - b^t \bar{b} = 1, \quad \bar{a}^t b = b^t \bar{a}. \quad (11.12)$$

Здесь, a^t, b^t обозначают транспонированные операторы

$$\begin{aligned} a^t: W'_+ &\rightarrow W'_+ \iff a^t: W_- \rightarrow W_-, \\ b^t: W'_+ &\rightarrow W'_- \iff b^t: W_- \rightarrow W_+, \end{aligned}$$

где пространство W'_+ , двойственное к W_+ , отождествляется с W_- с помощью скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (см. п. 9.1).

Унитарная группа $U(W_+)$ вкладывается в $Sp(V)$ в виде подгруппы, состоящей из блочных матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Вернемся к отображению (11.11). Пространство

$$Sp(V)/U(W_+),$$

стоящее в правой части формулы (11.11), можно рассматривать как бесконечномерный диск Зигеля. Для обоснования этого утверждения, нам придется изучить действие группы $QS(S^1)$ на пространстве совместимых комплексных структур на V .

Как мы показали ранее, преобразования Мебиуса $f \in \text{Möb}(S^1)$ определяют, посредством представления $f \mapsto T_f$, унитарные операторы из группы $U(W_+)$, в частности, такие преобразования сохраняют комплексную структуру J_0 на V . Если квазисимметричный гомеоморфизм f не принадлежит $\text{Möb}(S^1)$, то он не сохраняет исходную комплексную структуру J^0 , преобразуя ее в другую комплексную структуру J_f , которая также совместима с симплектической формой ω . Остановимся на этом утверждении более подробно.

Любая комплексная структура J на V , совместимая с ω , определяет разложение

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \bar{W} \quad (11.13)$$

в прямую сумму подпространств, изотропных относительно ω . Это разложение является ортогональным по отношению к кэлеровой метрике g_J на $V^{\mathbb{C}}$, порождаемой J и ω . Подпространства W и $\bar{W}$ отождествляются, соответственно, с собственными $(-i)$ - и $(+i)$ -подпространствами оператора J на $V^{\mathbb{C}}$. Обратно, любое разложение (11.13) пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму изотропных подпространств определяет комплексную структуру J на $V^{\mathbb{C}}$, которая равна $-i \cdot I$ на W и $+i \cdot I$ на $\bar{W}$ и совместима с ω .

Это рассуждение показывает, что симплектическая группа $Sp(V)$ действует транзитивно на пространстве $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур J , совместимых с ω . Отсюда вытекает, что пространство $Sp(V)/U(W_+)$ можно отождествить с пространством $\mathcal{J}(V)$. По-другому, его можно рассматривать как пространство так называемых *положительных поляризаций* пространства V , т.е. разложений (11.13) комплексифицированного пространства

$V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму $V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$ изотропных подпространств пространства $V^{\mathbb{C}}$, ортогональную относительно кэлеровой метрики g_J на $V^{\mathbb{C}}$.

Теперь мы готовы дать интерпретацию пространства $\mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ в виде диска Зигеля. По определению, *диск Зигеля* есть множество ограниченных линейных операторов Z вида

$$\mathcal{D} = \{Z: W_+ \rightarrow W_- \text{ — ограниченный линейный симметричный оператор с } \overline{Z}Z < I\}. \quad (11.14)$$

Симметричность Z означает, как и выше, что $Z^t = Z$, а условие $\overline{Z}Z < I$ означает, что симметричный оператор $I - \overline{Z}Z$ положительно определен. Для того, чтобы отождествить пространство $\mathcal{J}(V)$ с $\mathcal{D}$, рассмотрим действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathcal{D}$, задаваемое дробно-линейными преобразованиями $A: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ вида

$$Z \longmapsto (\bar{a}Z + \bar{b})(bZ + a)^{-1},$$

где $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V)$. Обратимость оператора $bZ + a$ вытекает из обратимости оператора a (см. (11.12)) и неравенства (см. (11.12))

$$bZ\overline{b}^t < \bar{b}\bar{b}^t < a\bar{a}^t.$$

Ясно, что $A: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Подгруппа изотропии в точке $Z = 0$ состоит из операторов $A \in \mathrm{Sp}(V)$, для которых $\bar{b}a^{-1} = 0$, т.е. $b = 0$. Эта подгруппа совпадает с $\mathrm{U}(W_+)$. Остается проверить, что действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathbb{D}$ транзитивно, т.е. построить для заданной точки $Z \in \mathbb{D}$ оператор A , переводящий $Z = 0$ в эту точку. Такой оператор может быть выбран в виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad (11.15)$$

где $b = \bar{a}\overline{Z}$ и

$$\bar{a}^t(1 - \overline{Z}Z)a = 1 \Rightarrow (\bar{a}^t)^{-1}a^{-1} = 1 - \overline{Z}Z \Rightarrow a = (1 - \overline{Z}Z)^{-1/2}.$$

Тем самым доказано, что пространство

$$\mathcal{J}(V) = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

можно отождествить с диском Зигеля $\mathcal{D}$.

§ 11.5. Грассманова реализация пространств $\text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ и $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$

В п. 5.1 был введен грассманиан $\text{Gr}_b(V^\mathbb{C})$, состоящий из образов ограниченных линейных операторов $W_+ \rightarrow W$. Из приведенного описания диска $\mathcal{D}$ вытекает, что он вкладывается в $\text{Gr}_b(V^\mathbb{C})$ в виде комплексного подмногообразия.

Суммируя сказанное выше, мы можем сформулировать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25 ([58]). *Отображение*

$$\mathcal{T} = \text{QS}(S^1)/\text{Möb}(S^1) \hookrightarrow \text{Sp}(V)/\text{U}(W_+) = \mathcal{D} \hookrightarrow \text{Gr}_b(V^\mathbb{C})$$

является эквивариантным голоморфным вложением банаховых многообразий.

§ 11.5. Грассманова реализация пространств $\text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ и $\text{Diff}_+(S^1)/S^1$

В предыдущем параграфе п. 11.4 было построено естественное вложение

$$\mathcal{T} = \text{QS}(S^1)/\text{Möb}(S^1) \hookrightarrow \text{Sp}(V)/\text{U}(W_+) = \mathcal{D} \hookrightarrow \text{Gr}_b(V^\mathbb{C}).$$

Напомним, что в п. 10.3 пространство $\mathcal{S}$ было отождествлено с “регулярной” частью универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Взяв композицию построенного выше вложения

$$\mathcal{T} \hookrightarrow \text{Sp}(V)/\text{U}(W_+)$$

с вложением $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{T}$, получим отображение

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \text{Sp}(V)/\text{U}(W_+),$$

задающее вложение пространства $\mathcal{S}$ в грассманиан $\text{Gr}_b(V^\mathbb{C})$.

Однако, этот результат можно значительно усилить, заменив в нем грассманово многообразие $\text{Gr}_b(V^\mathbb{C})$ его “регулярной” частью, совпадающей с грассманианом Гильберта–Шмидта $\text{Gr}_{\text{HS}}(V)$, введенным в п. 5.2.

Напомним, что грассманиан $\text{Gr}_{\text{HS}}(V)$ состоит из замкнутых подпространств $W \subset V$ таких, что ортогональная проекция

$\mathrm{rg}_+ : W \rightarrow W_+$ является фредгольмовым оператором, в то время как ортогональная проекция $\mathrm{rg}_- : W \rightarrow W_-$ является оператором Гильберта–Шмидта. В п. 5.2 было показано, что грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ является кэлеровым гильбертовым многообразием, имеющим в качестве локальной модели гильбертово пространство $\mathrm{HS}(W_+, W_-)$ операторов Гильберта–Шмидта. Напомним (см. п. 5.2), что грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V)$ является однородным пространством унитарной группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(V)$, более точно,

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(V) / \mathrm{U}(W_+) \times \mathrm{U}(W_-).$$

Введем теперь, по аналогии с группой $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(V)$, *симплектическую группу Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Напомним, что симплектическая группа $\mathrm{Sp}(V)$ состоит из ограниченных линейных операторов $A : V^{\mathbb{C}} \rightarrow V^{\mathbb{C}}$, имеющих блочные представления вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{a}^t a - b^t \bar{b} = 1, \quad \bar{a}^t b = b^t \bar{a}.$$

По определению, группа $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V) \subset \mathrm{Sp}(V)$ состоит из преобразований $A \in \mathrm{Sp}(V)$, для которых оператор b является оператором Гильберта–Шмидта. Унитарная группа $\mathrm{U}(W_+)$ содержится в $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в виде подгруппы

$$\mathrm{U}(W_+) \ni a \longmapsto A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Группа диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ действует на пространстве V симплектическими преобразованиями, задаваемыми той же формулой, что и в п. 11.4:

$$T_f(\xi) := \xi \circ f - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(f(\theta)) \, d\theta.$$

Как и ранее, преобразование T_f сохраняет подпространство $W_+ \subset V$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{Möb}(S^1)$, и в этом случае $T_f \in \mathrm{U}(W_+)$. Соответствие $f \mapsto T_f$ определяет вложение

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V) / \mathrm{U}(W_+).$$

Более того, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26 ([57]). *Отображение*

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \text{Sp}_{\text{HS}}(V)/\text{U}(W_+) = \text{Gr}_{\text{HS}}(V)$$

является эквивариантным голоморфным вложением.

По аналогии с п. 11.4, можно отождествить пространство $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)/\text{U}(W_+)$ с пространством $\mathcal{J}_{\text{HS}}(V)$ допустимых комплексных структур на V , совместимых с симплектической формой ω . Как и в предыдущем параграфе, последнее пространство имеет естественную реализацию в виде *зигелева диска Гильберта–Шмидта*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{HS}} = \{Z: W_+ \rightarrow W_- \text{ — симметричный оператор} \\ \text{Гильберта–Шмидта с } \bar{Z}Z < I\}. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Поэтому приведенное выше предложение дает голоморфное вложение

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \text{Sp}_{\text{HS}}(V)/\text{U}(W_+) = \mathcal{D}_{\text{HS}}.$$

Приведем еще одну интерпретацию пространства $\mathcal{S}$ в виде пространства комплексных структур, а именно, $\mathcal{S}$ можно также рассматривать как пространство допустимых комплексных структур на пространстве петель ΩG .

Заметим, что имеется естественное действие группы диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}_+(S^1)$ на группе петель LG , задаваемое репараметризацией петель. Оно задается формулой

$$f_*\gamma(\theta) := \gamma(f(\theta)) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(f(\theta)) \, d\theta$$

для $\gamma \in LG$, $f \in \text{Diff}_+(S^1)$. Отождествляя ΩG с подгруппой $L_1(G)$, мы можем спустить указанное действие до действия группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на пространстве петель ΩG .

Из определения симплектической структуры ω на ΩG , порождаемой формой

$$\omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(e^{i\theta}), \eta'(e^{i\theta}) \rangle \, d\theta,$$

на $L\mathfrak{g}$, ясно (формула замены переменной в интеграле), что диффеоморфизмы из $\text{Diff}_+(S^1)$ сохраняют ω , т.е. порождают симплектоморфизмы многообразия ΩG .

Комплексная структура J^0 на ΩG дается в начале $o \in \Omega G$ формулой

$$\xi = \sum_{k \neq 0} \xi_k z^k \in \Omega \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \implies J_o^0 \xi = -i \sum_{k > 0} \xi_k z^k + i \sum_{k < 0} \xi_k z^k,$$

поэтому касательные подпространства, состоящие из векторов типа $(1, 0)$ и $(0, 1)$, имеют вид

$$\begin{aligned} T_o^{1,0}(\Omega G) &= \{\xi = \sum_{k < 0} \xi_k z^k \in \Omega \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\}, \\ T_o^{0,1}(\Omega G) &= \{\xi = \sum_{k > 0} \xi_k z^k \in \Omega \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}\}. \end{aligned}$$

Диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ преобразует комплексную структуру J^0 в комплексную структуру

$$J_f := f_*^{-1} \circ J^0 \circ f_*,$$

где f_* – касательное отображение к f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 27. *Комплексная структура J_f с $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ совпадает с исходной комплексной структурой J_0 тогда и только тогда, когда $f \in \text{Möb}(S^1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ не меняет исходную комплексную структуру, то он определяет биголоморфизм многообразия ΩG , наделенного комплексной структурой J_0 . В частности, он сохраняет касательное пространство $T_o^{0,1}(\Omega G)$. Следовательно, такой диффеоморфизм сохраняет $L^+G^{\mathbb{C}}$, откуда следует, что он продолжается до биголоморфизма единичного круга Δ . Таким образом, $f \in \text{Möb}(S^1)$. Обратное утверждение очевидно.

Будем называть комплексные структуры J_f на ΩG :

$$J_f := f_*^{-1} \circ J^0 \circ f_*,$$

полученные из J^0 под действием группы диффеоморфизмов, *допустимыми* комплексными структурами на ΩG . Из предложения 27 следует, что пространство допустимых комплексных структур на ΩG можно отождествить с многообразием $\mathcal{S}$.

Напомним, что комплексная структура J^0 на ΩG инвариантна относительно левых LG -сдвигов на пространстве ΩG и совместима с симплектической структурой ω (в смысле определения 17 из

п. 1.2.5). Ввиду инвариантности ω относительно действия группы $\text{Diff}_+(S^1)$, комплексные структуры J_f также инвариантны относительно левых LG -сдвигов и совместимы с ω . В частности, любая такая комплексная структура J_f определяет *кэлерову метрику* g_f на ΩG по формуле

$$g_f(\xi, \eta) := \omega(\xi, J_f \eta)$$

для любого $\xi, \eta \in T_\gamma(\Omega G)$, $\gamma \in \Omega G$.

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{R} = \text{Diff}_+(S^1)/S^1$. Взяв композицию построенного выше вложения

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \text{Sp}_{\text{HS}}(V)/\text{U}(W_+) = \mathcal{D}_{\text{HS}}$$

с голоморфным отображением

$$\mathcal{R} = \text{Diff}_+(S^1)/S^1 \longrightarrow \mathcal{S},$$

получим грассманову реализацию пространства $\mathcal{R} = \text{Diff}_+(S^1)/S^1$:

$$\mathcal{R} \longrightarrow \text{Sp}_{\text{HS}}(V)/\text{U}(W_+) = \mathcal{D}_{\text{HS}}.$$

Как и в случае $\mathcal{S}$, пространство $\mathcal{R}$ можно также рассматривать как некоторое пространство комплексных структур на пространстве петель ΩG . Напомним, что пространство петель ΩG , наделенное комплексной структурой J_0 , допускает следующее однородное представление

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}}.$$

Согласно теореме Биркгофа (см. п. 7.3), мы можем отождествить окрестность начала в ΩG с окрестностью единицы в подгруппе петель $L_1^-G^{\mathbb{C}}$. Если диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ оставляет на месте начало в ΩG и порождает биголоморфизм пространства

$$(\Omega G, J_0) = LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}},$$

то он порождает также биголоморфизм подгруппы $L_1^-G^{\mathbb{C}}$. В этом случае будем говорить, что комплексная структура J_f , ассоциированная с $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, *эквивалентна* исходной комплексной структуре J_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 28. *Комплексная структура J_f с $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ эквивалентна исходной комплексной структуре J_0 в указанном выше смысле тогда и только тогда, когда f есть поворот, т.е. $f \in S^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если диффеоморфизм $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ порождает биголоморфизм пространства

$$(\Omega G, J_0) = LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}},$$

оставляющий на месте начало, то он оставляет инвариантным подпространство $L^+G^{\mathbb{C}}$ и порождает биголоморфизм $L_1^-G^{\mathbb{C}}$. Из первого свойства следует, что f продолжается до биголоморфизма единичного круга Δ , в то время как из второго вытекает, что f продолжается до биголоморфизма его внешности Δ_- , оставляющего на месте бесконечность. Тогда по теореме Лиувилля $f \in S^1$.

Библиографические указания

Ключевой ссылкой для этой главы может служить книга Нага [56]. Большинство утверждений из пп. 11.1, 11.2, 11.3 взяты из этой книги. Предложение 21 доказано в работе [59]. Грассманов подход к изучению универсального пространства Тейхмюллера инициирован статьей Нага–Сулливана [58]. Все утверждения из п. 11.4 заимствованы из этой статьи. Предложение 26 доказано в статье [57].

Часть IV

Квантование конечномерных кэлеровых многообразий

Глава 12. Квантование по Дираку

В этой главе дается определение геометрического квантования классических механических систем, предложенное Дираком. В п. 12.1 мы напоминаем понятие классической системы, заимствованное из гамильтоновой механики. Геометрическое квантование таких систем определяется в п. 12.2.

§ 12.1. Классические системы

Мы начинаем с определения классической (механической) системы – объекта, который будет подвергаться квантованию. *Классическая (механическая) система* задается парой $(M, \mathcal{A})$, состоящей из *фазового пространства* M системы и *алгебры наблюдаемых (гамильтонианов)* $\mathcal{A}$.

12.1.1. Фазовые пространства. Математически, *фазовое пространство* M есть гладкое симплектическое многообразие четной размерности $2n$, наделенное симплектической 2-формой ω . Локально, оно диффеоморфно (более точно, симплектоморфно) *стандартной модели* $M_0 := (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, где ω_0 – стандартная симплектическая форма на $\mathbb{R}^{2n}$. В координатах (p_i, q_i) , $i = 1, \dots, n$, на $\mathbb{R}^{2n}$ эта форма задается выражением вида

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Соответствующие локальные координаты (p_i, q_i) , $i = 1, \dots, n$, на M , в которых симплектическая форма ω принимает указанный стандартный вид, называются *каноническими*. Координаты q_i интерпретируются как физические “координаты”, тогда как p_i отвечают физическим “импульсам”.

Примерами фазовых пространств, помимо стандартной модели $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, могут служить кокасательные расслоения и коприсоединенные орбиты групп Ли.

ПРИМЕР 30 (кокасательные расслоения). Обозначим через M кокасательное расслоение T^*N гладкого n -мерного многообразия N , называемого *конфигурационным пространством*. Локальные канонические координаты (p_i, q_i) на M имеют в рассматриваемом случае следующий смысл: $q := (q_1, \dots, q_n)$ – локальные координаты на N , а $p := (p_1, \dots, p_n)$ – координаты в слое $T_q N$. Симплектическая 2-форма ω , задаваемая во введенных локальных координатах стандартной формулой

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i,$$

является корректно определенной (глобальной) 2-формой на M , также как и 1-форма θ , задаваемая в локальных координатах выражением

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq_i.$$

Отсюда следует, что $\omega = d\theta$, то есть форма ω в этом случае точна. Для того, чтобы показать, что θ является корректно определенной (глобальной) 1-формой, заметим, что она может быть также определена инвариантным образом. Именно, для любого $p \in T_q^* N$ и любого касательного вектора $\xi \in T_{(p,q)}(T^*N)$ ее можно задать посредством

$$\theta(\xi) = p(\pi_* \xi),$$

где $\pi_*: T(T^*N) \rightarrow TN$ – отображение, касательное к проекции $\pi: T^*N \rightarrow N$.

ПРИМЕР 31 (коприсоединенные орбиты). Рассмотрим коприсоединенное представление группы Ли G на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . Оно задается формулой

$$K: G \longrightarrow \text{End } \mathfrak{g}^*, \quad g \longmapsto (\text{Ad } g^{-1})^*.$$

Орбиты этого действия (в случае, если они гладкие) являются симплектическими многообразиями с симплектической структурой, задаваемой *формой Кириллова*, которая определяется следующим образом. Обозначим через ξ_* векторное поле на $\mathfrak{g}^*$, порождаемое $\xi \in \mathfrak{g}$ посредством коприсоединенного действия K . Более точно,

$$\xi_*(x) = K_*(\xi)x \text{ для } x \in \mathfrak{g}^*,$$

где $K_*: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}^*$ обозначает дифференциал отображения $K: G \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}^*$. Тогда форма Кириллова определяется из равенства

$$\omega(\xi_*(x), \eta_*(x)) := x([\xi, \eta]) \quad \text{для } \xi, \eta \in \mathfrak{g}, x \in \mathfrak{g}^*.$$

Сужение этой 2-формы на гладкую K -орбиту задает симплектическую структуру на этой орбите.

12.1.2. Алгебры наблюдаемых. *Алгебра наблюдаемых* $\mathcal{A}$, математически, есть произвольная подалгебра Ли в пуассоновой алгебре Ли $C^\infty(M, \mathbb{R})$ гладких вещественнозначных функций на фазовом пространстве M относительно скобки Пуассона, определяемой симплектической 2-формой ω .

Напомним определение указанной скобки. Для заданной гладкой функции $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ обозначим через X_h гамильтоново векторное поле на M , ассоциированное с h . Оно определяется следующим соотношением

$$dh(\xi) = \omega(X_h, \xi),$$

которое должно выполняться для любого касательного векторного поля ξ на M . Тогда скобка Пуассона $\{f, g\}$ двух функций $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ однозначно определяется соотношением

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g].$$

ПРИМЕР 32 (алгебра Гейзенберга). В случае стандартной модели $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ в качестве алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ можно взять *алгебру Гейзенберга* $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$. Это алгебра Ли, порождаемая координатными функциями p_i, q_i , $i = 1, \dots, n$, и 1, удовлетворяющими следующим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= \{q_i, q_j\} = 0, \\ \{p_i, q_j\} &= \delta_{ij} \quad \text{для } i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Мы рассматриваем $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$ как “минимальную” алгебру наблюдаемых на M_0 . В качестве “максимальной” алгебры наблюдаемых выступает пуассонова алгебра $C^\infty(M_0, \mathbb{R})$. Гамильтоново векторное поле X_f , отвечающее наблюдаемой $f \in C^\infty(M_0, \mathbb{R})$, задается в стандартных координатах (p_i, q_i) на M_0 формулой

$$X_f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

В частности, $X_{p_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}$, $X_{q_i} = -\frac{\partial}{\partial p_i}$. Скобка Пуассона на M_0 дается выражением

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

для $f, g \in C^\infty(M_0, \mathbb{R})$.

ПРИМЕР 33 (гамильтонова алгебра). Пусть Γ есть группа Ли симплектоморфизмов, действующая на фазовом пространстве M , так что ее алгебру Ли $\text{Lie}(\Gamma)$ можно рассматривать как подалгебру алгебры Ли гамильтоновых векторных полей на M . Если M односвязно, то $\text{Lie}(\Gamma)$ можно также отождествить, двойственным образом, с подалгеброй пуассоновой алгебры $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Точнее, с подалгеброй $\text{Ham}(\Gamma)$, состоящей из гамильтонианов (гладких вещественнозначных функций) на M , порождающих симплектоморфизмы из Γ .

Если группа Ли Γ действует на M транзитивно, то такое многообразие M называется *однородным симплектическим Γ -многообразием*. В работе [46] показано, что любое однородное симплектическое Γ -многообразие M локально эквивариантно симплектоморфно коприсоединенной орбите группы Γ или ее центрального расширения $\tilde{\Gamma}$.

§ 12.2. Квантование классических систем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39. Пусть $(M, \mathcal{A})$ есть классическая система. *Квантование Дирака* системы $(M, \mathcal{A})$ задается неприводимым представлением

$$r: \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}^* H$$

алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ в алгебре $\text{End}^* H$ линейных самосопряженных операторов, действующих в комплексном (сепарабельном) гильбертовом пространстве H , называемом *пространством квантования*. Алгебра $\text{End}^* H$ наделяется скобкой Ли, задаваемой коммутатором линейных операторов вида

$$\frac{\hbar}{i}[A, B] = \frac{\hbar}{i}(AB - BA).$$

Иными словами, требуется, чтобы

$$r(\{f, g\}) = \frac{\hbar}{i}(r(f)r(g) - r(g)r(f))$$

для любых $f, g \in \mathcal{A}$. Мы также предполагаем, что выполняется следующее условие нормировки:

$$r(1) = \text{id}.$$

Если представление r удовлетворяет всем этим условиям, за исключением неприводимости, оно называется *предквантованием* системы $(M, \mathcal{A})$.

В дальнейшем мы полагаем для удобства $\hbar = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Иногда бывает полезно иметь дело с *комплексифицированной алгеброй наблюдаемых* $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ вместо $\mathcal{A}$. Ее квантование Дирака задается неприводимым представлением алгебры Ли

$$r: \mathcal{A}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \text{End } H,$$

удовлетворяющим условию нормировки и *правилу сопряжения*

$$r(\bar{f}) = r(f)^* \text{ для любого } f \in \mathcal{A}.$$

Другими словами, комплексное сопряжение в $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ должно переходить в эрмитово сопряжение в $\text{End } H$.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Операторы квантования $r(f)$ в определении Дирака обычно неограничены. В этом случае нужно требовать, чтобы все операторы $r(f)$ при $f \in \mathcal{A}$ (или $f \in \mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ в комплексифицированной версии) были плотно определены и, кроме того, имели общую плотную область определения в H .

Библиографические указания

Определение Дирака геометрического квантования классических систем представлено (с небольшими модификациями) во всех книгах по геометрическому квантованию. Читатель может ознакомиться с ним более детально по книгам [29], [37], [42], [71], [80].

Глава 13. Предквантование Костанта–Сурьо

Построение квантования по Дираку реалистических классических систем, определенное в предыдущей главе, является трудной (а, зачастую, и неразрешимой) задачей. Однако существует достаточно общая конструкция предквантования, предложенная Костантом и Сурьо, применимая к большому классу фазовых пространств и “максимальной” алгебре наблюдаемых $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbb{R})$. Мы опишем эту процедуру в данной главе, начав с рассмотрения ее частного случая для кокасательных расслоений.

§ 13.1. Предквантование кокасательного расслоения

Пусть N – гладкое n -мерное многообразие и $M = T^*N$ – его кокасательное расслоение. Напомним (см. пример 30), что симплектическая форма ω на T^*N задается формулой $\omega = d\theta$, где θ – канонически определенная 1-форма на M , задающаяся в локальных канонических координатах формулой $\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$. Возьмем в качестве алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ нашей системы пуассонову алгебру $C^\infty(M, \mathbb{R})$, а в качестве гильбертова пространства предквантования H выберем пространство

$$H = L^2(M, \omega^n)$$

квадратично интегрируемых функций на M относительно меры Лиувилля, совпадающей с ω^n . Представление алгебры $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbb{R})$ в H задается следующей формулой

$$r: f \mapsto r(f) = f - iX_f - \theta(X_f), \quad (13.1)$$

где $f - \theta(X_f)$ рассматривается как оператор умножения на H . Заметим, что этот оператор, также как и гамильтоново векторное поле X_f , корректно определены на подпространстве $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ пространства $C^\infty(M, \mathbb{R})$, состоящем из гладких функций на M с компактными носителями.

В частности, для стандартной модели $N = \mathbb{R}^n$, $M = T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ представление (13.1) действует на координатные функции следующим образом:

$$r(p_j) = p_j - iX_{p_j} - \theta(X_{p_j}) = p_j - i\frac{\partial}{\partial q_j} - p_j = -i\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad (13.2)$$

$$r(q_j) = q_j - iX_{q_j} - \theta(X_{q_j}) = q_j - i\left(-\frac{\partial}{\partial p_j}\right) = q_j + i\frac{\partial}{\partial p_j}, \quad (13.3)$$

поскольку $X_{p_j} = \partial/\partial q_j$, $X_{q_j} = -\partial/\partial p_j$. Заметим, что это представление является приводимым, даже если сузить его на “минимальную” алгебру Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$. Действительно, операторы $i\frac{\partial}{\partial p_j}$ и $p_j + i\frac{\partial}{\partial q_j}$ коммутируют со всеми операторами $r(p_j)$, $r(q_j)$, но не являются скалярными. Однако, мы можем добиться неприводимости представления алгебры $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, задаваемого приведенными формулами (13.2), (13.3), если предварительно сузим его на подпространство H , состоящее из функций, зависящих только от (q_j) . Тогда представление (13.2), (13.3) сведется к хорошо известному *представлению Гейзенберга* алгебры $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$ в пространстве $H_{(q)} := L^2(\mathbb{R}_{(q)}^n, d^n q)$, задаваемому посредством

$$r(p_j) = -i\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad r(q_j) = q_j.$$

Мы также можем построить *двойственное представление Гейзенберга* алгебры $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$ в пространстве $H_{(p)} := L^2(\mathbb{R}_{(p)}^n, d^n p)$, задаваемое посредством

$$r(p_j) = p_j, \quad r(q_j) = i\frac{\partial}{\partial p_j}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 21. “Физическое” объяснение приводимости представления

$$r: \text{heis}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \text{End}^* H,$$

задаваемого формулой (13.1), состоит в том, что, согласно принципу неопределенности Гейзенберга, “физическое” пространство квантования не должно содержать функций, зависящих от какой-либо пары локальных канонических переменных (p_j, q_j) одновременно, как это имеет место в пространстве $H = L^2(M, \omega^n)$.

§ 13.2. Предквантование Костанта–Сурьо (KS-предквантование)

13.2.1. Отображение предквантования. Предположим теперь, что M есть общее гладкое симплектическое многообразие размерности $2n$ с симплектической формой ω . Выберем в качестве алгебры наблюдаемых пуассонову алгебру $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Мы хотим проквантовать классическую систему, представляемую парой $(M, C^\infty(M, \mathbb{R}))$.

Начнем с эвристических соображений. Заметим, что симплектическая 2-форма ω , будучи замкнутой, локально точна, поэтому мы можем построить открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия M такое, что

$$\omega = d\theta_\alpha \text{ на } U_\alpha$$

для некоторых гладких 1-форм θ_α , заданных на U_α . Пользуясь указанными локальными формами θ_α , мы можем, следуя идее, изложенной в предыдущем параграфе 13.1, построить локальные операторы представлений r_α в пространствах $L^2(U_\alpha, \omega^n)$ по формуле (13.1) с $\theta = \theta_\alpha$. Оказывается, что (при некоторых топологических ограничениях) указанные локальные операторы r_α можно объединить в единый оператор r , который, правда, действует не на функциях, а на сечениях специального комплексного линейного расслоения L над M . Структура этого линейного расслоения $L \rightarrow M$, на самом деле, предписывается локальными формулами (13.1) с $\theta = \theta_\alpha$. Именно, локальные выражения $X^\alpha - i\theta_\alpha(X^\alpha)$ (в которых X^α есть векторное поле на U_α) в правых частях локальных формул (13.1) выглядят как локальные выражения для ковариантной производной некоторой связности в линейном расслоении над M . Если указанные выражения действительно происходят из некоторой связности ∇ на линейном расслоении $L \rightarrow M$ (т.е. если они совпадают на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ с точностью до калибровочных преобразований, определяемых функциями перехода расслоения L), то локальные операторы представлений $r_\alpha(f)$ в пространствах $L^2(U_\alpha, \omega^n)$ можно объединить в единый глобальный оператор представления вида

$$r: f \longmapsto f - i\nabla_{X_f}, \quad f \in C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

действующий на сечениях $L \rightarrow M$. В этом случае кривизна указанной связности будет совпадать с ω . В частности, 2-форма $\frac{1}{2\pi}\omega$,

представляющая первый класс Черна $c_1(L)$, должна быть целочисленной, т.е.

$$\left[\frac{1}{2\pi} \omega \right] \in H^2(M, \mathbb{Z}) \subset H^2(M, \mathbb{R}).$$

Из п. 8.1 мы знаем, что целочисленность класса $\left[\frac{1}{2\pi} \omega \right]$ является не только необходимым, но также и достаточным условием существования линейного расслоения $L \rightarrow M$ со связностью ∇ . Именно, перефразируя предложение 15, получим следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 29. *Предположим, что многообразие M удовлетворяет условию квантования: класс когомологий*

$$\left[\frac{1}{2\pi} \omega \right] \text{ является целочисленным в } H^2(M, \mathbb{R}). \quad (13.4)$$

Тогда существует эрмитово линейное расслоение $L \rightarrow M$, называемое расслоением предквантования, обладающее эрмитовой связностью ∇ , кривизна которой равна ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственным новым утверждением в этом предложении, по сравнению с предложением 15, является эрмитовость связности ∇ . Напомним (см. замечание 16), что при выполнении условия целочисленности (13.4) существует комплексное линейное расслоение $L \rightarrow M$ такое, что $c_1(L) = [\omega/2\pi]$. Наделим это расслоение произвольной эрмитовой метрикой и эрмитовой связностью ∇' . Заметим, что кривизна ω' связности ∇' также представляет класс $c_1(L)$. Поэтому

$$\omega = 2\pi\omega' + d\beta$$

для некоторой 1-формы $\beta \in \Omega^1(M, \mathbb{R})$. Если связность ∇' задается 1-формой α' , то мы можем ввести новую связность ∇ на L , задаваемую 1-формой

$$\alpha = 2\pi\alpha' - i\beta.$$

Эта связность будет по-прежнему эрмитовой, а ее кривизна будет равна ω .

Предложение 29 позволяет нам реализовать схему, изложенную в начале этого параграфа. Именно, предположим, что наше фазовое пространство M удовлетворяет условию квантования, так что выполняется утверждение предложения 29. Иными

словами, существует эрмитово линейное расслоение $L \rightarrow M$ вместе с эрмитовой связностью ∇ , имеющей кривизну, равную ω . Возьмем в качестве алгебры наблюдаемых пуассонову алгебру $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbb{R})$ и определим пространство предквантования как

$$H = L^2(M, L; \omega^n),$$

т.е. как гильбертово пространство квадратично интегрируемых сечений расслоения $L \rightarrow M$ со скалярным произведением, задаваемым равенством

$$(s_1, s_2)_H := \int_M \langle s_1(x), s_2(x) \rangle \omega^n,$$

где $\langle s_1(x), s_2(x) \rangle$ – эрмитово произведение сечений s_1, s_2 расслоения L в точке $x \in M$. Тогда *предквантование Костанта–Сурьо* (*KS-предквантование*) алгебры $\mathcal{A}$ в пространстве H будет задаваться формулой

$$r_{\text{KS}}: \mathcal{A} \ni f \longmapsto r(f) = f - i\nabla_{X_f}. \quad (13.5)$$

Легко проверить непосредственно (см. также [29], [37], [42], [71], [73], [80]), что формула (13.5) задает представление алгебры $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbb{R})$ в пространстве предквантования H .

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Существует другая интерпретация оператора Костанта–Сурьо r_{KS} в терминах группы автоморфизмов $\mathcal{G}$ расслоения предквантования (L, ∇) . *Автоморфизмом* расслоения со связностью (L, ∇) называется пара (φ, g) , где $\varphi: L \rightarrow L$ – слойный изоморфизм, сохраняющий эрмитову метрику на L и связность ∇ (т.е. $\varphi^* \nabla = \nabla$). Проекция изоморфизма φ на M задает отображение $g: M \rightarrow M$, принадлежащее группе $\mathcal{G}$ всех симплектоморфизмов многообразия M . Иными словами, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\varphi} & L \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{g} & M. \end{array}$$

Согласно предложению 16, группу автоморфизмов $\tilde{\mathcal{G}}$ расслоения предквантования (L, ∇) можно отождествить с центральным

расширением группы симплектоморфизмов $\mathcal{G}$ посредством S^1 , т.е. существует точная последовательность

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 1.$$

Заметим, что (в предположении односвязности M) алгебру Ли $\text{Lie } \mathcal{G}$ группы $\mathcal{G}$ можно отождествить с алгеброй Ли гамильтоновых векторных полей на M , порожденных гамильтонианами $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, тем самым алгебра Ли $\text{Lie } \tilde{\mathcal{G}}$ группы $\tilde{\mathcal{G}}$ совпадает с центральным расширением алгебры $\text{Lie } \mathcal{G}$ посредством $\mathbb{R}$.

Действие группы симплектоморфизмов $\mathcal{G}$ на M порождает действие ее центрального расширения $\tilde{\mathcal{G}}$ на L . Именно, если действие элемента g на M порождается гамильтоновым векторным полем X_f с $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) = \text{Lie } \mathcal{G}$, то отвечающее ему действие $\varphi: C^\infty(M, L) \rightarrow C^\infty(M, L)$ на пространстве сечений расслоения L будет порождаться векторным полем

$$\tilde{X}_f(s) := fs - i\nabla_{X_f}s. \quad (13.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23. В заключение этого параграфа дадим описание $\mathbb{C}^*$ -расслоения $\dot{L} \rightarrow M$, ассоциированного с расслоением предквантования $L \rightarrow M$. Иногда будет удобнее пользоваться этим расслоением, нежели исходным расслоением $L \rightarrow M$. Обозначим через $\pi: \dot{L} \rightarrow M$ расслоение, полученное из расслоения предквантования $\pi: L \rightarrow M$ удалением из него нулевого сечения. Это главное $\mathbb{C}^*$ -расслоение, ассоциированное с линейным расслоением $\pi: L \rightarrow M$. Пространство $\Gamma(L) := C^\infty(M, L)$ сечений s расслоения $L \rightarrow M$ можно отождествить с пространством $\dot{\Gamma}(L)$ комплекснозначных функций $\dot{s}$ на $\dot{L}$, удовлетворяющих условию

$$\dot{s}(zp) = \frac{1}{z}\dot{s}(p)$$

для любого $p \in \dot{L}$ и любого $z \in \mathbb{C}^*$. Соответствие между сечениями s расслоения $L \rightarrow M$ и функциями $\dot{s}$ на $\dot{L} \rightarrow M$ устанавливается с помощью соотношения

$$s(\pi(p)) = \dot{s}(p)p \text{ для любого } p \in \dot{L}.$$

Заметим, что если сечение s расслоения $L \rightarrow M$ не обращается в нуль в некоторой точке $x \in M$: $s(x) \neq 0$, то $s(x) \in \dot{L}$ и, применяя приведенное выше соотношение для $p = s(x)$, получим, что $s(x) = \dot{s}(s(x))s(x)$, т.е. $\dot{s} \circ s = 1$ в любой точке $x \in M$, в которой $s(x) \neq 0$.

Мы можем ввести связность $\dot{\nabla}$ на $\dot{L} \rightarrow M$, ассоциированную со связностью ∇ на $L \rightarrow M$. В терминах локальных представителей θ_α связности ∇ , локальные представители $\dot{\theta}_\alpha$ связности $\dot{\nabla}$ задаются посредством

$$\dot{\theta}_\alpha = \theta_\alpha + i \frac{dz}{z}$$

на $U_\alpha \times \mathbb{C}^*$. Легко проверить, что эти локальные формы определяют глобальную 1-форму, которая является формой связности для $\dot{\nabla}$. Указанная связность порождает горизонтальный подъем векторных полей на M . Пусть ξ – такое векторное поле, тогда его горизонтальное поднятие есть векторное поле $\dot{\xi}$ на $\dot{L}$, для которого $\pi_*(\dot{\xi}) = \xi$ и $\dot{\nabla}(\dot{\xi}) = 0$. Соответствие $\xi \leftrightarrow \dot{\xi}$ между векторными полями ξ на M и их горизонтальными поднятиями $\dot{\xi}$ на $\dot{L}$ обладает следующими свойствами

$$(\nabla_\xi s)^\cdot = \dot{\xi}, \quad (fs)^\cdot = f\dot{s}$$

для любого векторного поля ξ на M , произвольного сечения s расслоения L и функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Можно также дать интерпретацию генератора (13.6) в терминах расслоения $\dot{L}$ (см. [73]). По заданному гамильтониану $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ построим векторное поле η_f на $\dot{L}$ с локальными представителями

$$\eta_{f,\alpha} := X_f + (\theta_\alpha(X_f) - f) \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

на $U_\alpha \times \mathbb{C}^*$. Здесь, векторное поле $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ задается дифференцированием по угловой координате ϑ в полярном представлении координаты $z = re^{i\vartheta}$ на $\mathbb{C}^*$. Из этого определения вытекает, что генератор (13.6) может быть задан в терминах расслоения $\dot{L}$ формулой

$$\tilde{X}_f(s) = -i\eta_f \dot{s}. \quad (13.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 24 (см. [73]). Пользуясь векторным полем η_f , введенным в замечании 23, можно доказать, что KS-оператор $r_{KS}(f)$, задаваемый формулой (13.5), является самосопряженным в предположении полноты гамильтонова векторного поля X_f (в этом случае векторное поле η_f также является полным). Обозначим через $\dot{\varphi}_f^t$ однопараметрическую группу преобразований расслоения $\dot{L}$, порождаемую векторным полем η_f . Рассмотрим однопараметрическую унитарную группу преобразований $\dot{\Gamma}(L)$ (относительно скалярного произведения, индуцированного из $\Gamma(L)$),

порождаемую полем $\dot{\varphi}_f^t$. Она действует по формуле: $\dot{s} \mapsto \dot{s} \circ \dot{\varphi}_f^t$ для $\dot{s} \in \dot{\Gamma}(L)$. Оператор $r_{KS}(f)$, задаваемый (13.5), совпадает с генератором этой унитарной группы, согласно (13.7). Поэтому он самосопряжен по теореме Стоуна.

13.2.2. Поляризации. Представление алгебры $\mathcal{A} = C^\infty(M, \mathbb{R})$ в пространстве предквантования H , задаваемое (13.5), приводимо по тем же причинам, что и в п. 13.1. Согласно принципу неопределенности Гейзенберга, мы можем сделать это представление неприводимым, сужая его на “половину” пространства предквантования H , т.е. на подпространство H , содержащее функции из H , которые зависят, в терминах локальных канонических координат $(p_i, q_i)_{i=1}^n$, только от одной переменной из каждой пары (p_j, q_j) . Эта наивная идея может быть формализована с помощью понятия поляризации.

Пусть (M, ω) есть симплектическое многообразие размерности $2n$. Продолжим его симплектическую форму ω комплексно на линейно на комплексифицированное касательное расслоение $T^\mathbb{C}M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40. *Поляризацией* на M называется интегрируемое инволютивное лагранжево распределение P на M . Иными словами, P есть комплексное распределение $P: x \mapsto P_x \subset T^\mathbb{C}M$ ранга n , удовлетворяющее следующим условиям: (а) P инволютивно, т.е. $[P, P] \subset P$; (б) сужение ω на P тождественно равно нулю.

Для поляризованного фазового пространства (M, P) , удовлетворяющего условию квантования (13.4), естественно выбрать в качестве пространства квантования H пространство *поляризованных* сечений. Оно определяется как

$$H = L_P^2(M, L; \omega^n) \\ := \{s \in L^2(M, L; \omega^n) : \nabla_\xi s = 0 \text{ для любого } \xi \in P\}.$$

Среди поляризаций имеются два выделенных класса.

ПРИМЕР 34. Поляризация P на фазовом пространстве M называется *вещественной*, если $P = \bar{P}$, где “черта” означает комплексное сопряжение в $T^\mathbb{C}M$. Стандартным примером такой поляризации может служить кокасательное расслоение $M = T^*N$

конфигурационного многообразия N с локальными каноническими координатами (p_i, q_i) и поляризацией P , задаваемой подрасслоением TM , порождаемым векторными полями $\{\partial/\partial p_i\}$, $i = 1, \dots, n$. (Можно взять за P и подрасслоение TM , порождаемое векторными полями $\{\partial/\partial q_i\}$, $i = 1, \dots, n$.) Пространство $L^2_P(M, L; \omega^n)$ поляризованных сечений в этом случае будет состоять из сечений, принадлежащих $L^2(M, L; \omega^n)$, которые не зависят от импульсов $\{p_i\}$.

Поляризация P называется *кэлеровой*, если $P \cap \bar{P} = 0$. Для того, чтобы привести пример такой поляризации, предположим, что наше фазовое пространство (M, ω) является кэлеровым, т.е. обладает комплексной структурой J , совместимой с ω . Тогда в качестве P мы можем взять подрасслоение $T^{0,1}M$ векторных полей типа $(0, 1)$ из $T^{\mathbb{C}}M$. В этом случае расслоение предквантования L может быть сделано голоморфным с голоморфной структурой, определяемой $\bar{\partial}$ -оператором, задаваемым $(0, 1)$ -компонентой $\nabla^{0,1}$ связности ∇ . Пространство $L^2_P(M, L; \omega^n)$ поляризованных сечений для $P = T^{0,1}M$ будет совпадать с пространством $L^2_{\mathcal{O}}(M, L; \omega^n)$ голоморфных сечений расслоения $L \rightarrow M$.

Для поляризованного фазового пространства (M, P) , удовлетворяющего условию квантования (13.4), мы можем надеяться получить неприводимое представление алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, сужая отображение предквантования Костанта–Сурьо на пространство $L^2_P(M, L; \omega^n)$ поляризованных сечений. К сожалению, эта прямолинейная идея срывается только для весьма специальных фазовых пространств и алгебр наблюдаемых, поскольку в большинстве случаев пространство $L^2_P(M, L; \omega^n)$ поляризованных сечений не инвариантно относительно действия операторов представления Костанта–Сурьо. В следующей главе мы покажем, каким образом указанная идея сужения на пространство поляризованных сечений может быть реализована в случае векторного пространства $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ и алгебры наблюдаемых Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n}) =: \text{heis}(\mathbb{C}^n)$. В этом случае сужение представления Костанта–Сурьо на пространство $L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n; \omega^n)$ голоморфных сечений дает неприводимое представление Баргмана–Фока алгебры Гейзенберга в пространстве $L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n; \omega^n)$.

Библиографические указания

Предквантование кокасательного расслоения было давно известно физикам (см., например, [35]). Его обобщение на общие многообразия, удовлетворяющие условию квантования, получено Костантом и Сурьо и представлено во всех книгах по геометрическому квантованию (см. [29], [37], [42], [71], [70], [80]). В этих книгах можно найти также более подробное обсуждение понятия поляризации.

Глава 14. Квантование Блатнера–Костанта–Стернберга

В этой главе представлена схема квантования Блатнера–Костанта–Стернберга (BKS-квантование) для кэлеровых многообразий, наделенных кэлеровыми поляризациями. Мы начинаем с простого примера такого квантования, а именно, с квантования Баргмана–Фока стандартной модели $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, наделенной алгеброй наблюдаемых Гейзенберга. В пп. 14.2–14.5 предлагается конструкция BKS-квантования кэлеровых многообразий, удовлетворяющих условию квантования. В п. 14.2 вводятся фоковские пространства полуформ, а в п. 14.4 определяется BKS-спаривание между этими пространствами, использующее метаплектическую структуру, которая вводится в п. 14.3. В п. 14.5 объясняется, как можно квантовать кэлеровы фазовые пространства на основе BKS-спаривания.

§ 14.1. Квантование Баргмана–Фока

Пусть $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ есть стандартная модель со стандартными координатами (p_j, q_j) , $j = 1, \dots, n$. В этих координатах

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j,$$

так что $\omega_0 = d\theta_0$ с $\theta_0 = \sum_{j=1}^n p_j dq_j$. Отождествим $\mathbb{R}^{2n}$ с $\mathbb{C}^n$, вводя комплексные координаты

$$z_j = \frac{p_j + iq_j}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z}_j = \frac{p_j - iq_j}{\sqrt{2}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

(следуя [71], мы заменили обычный множитель $1/2$ в этих формулах на $1/\sqrt{2}$ для того, чтобы сделать выражение для KS-представления более симметричным). В указанных координатах

$$\omega_0 = -i \sum_{j=1}^n d\bar{z}_j \wedge dz_j.$$

Гамильтоновы векторные поля, отвечающие координатам $z_j, \bar{z}_j$, имеют вид

$$\begin{aligned} X_{z_j} &= -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{\sqrt{2}i} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} + i \frac{\partial}{\partial q_j} \right), \\ X_{\bar{z}_j} &= i \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} - i \frac{\partial}{\partial q_j} \right). \end{aligned}$$

В частности, $i\omega(X_{z_j}, X_{\bar{z}_k}) = \delta_{jk}$. Очевидно, векторные поля $\{X_{z_1}, \dots, X_{z_n}\}$ порождают все антиголоморфное касательное пространство $T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$ (которое совпадает с кэлеровым распределением поляризации в смысле примера 34).

Расслоение предквантования $L \rightarrow \mathbb{C}^n$ совпадает с тривиальным расслоением $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$. Фиксируем тривиализующее сечение $\lambda_0: \mathbb{C}^n \rightarrow L$ с $\langle \lambda_0, \lambda_0 \rangle = 1$. Связность ∇ на L определяется свойством

$$\nabla \lambda_0 = -i \sum_{j=1}^n p_j dq_j \otimes \lambda_0.$$

Следуя [71], заменим тривиализующее сечение λ_0 на другое тривиализующее сечение λ_1 , задаваемое формулой

$$\lambda_1 := \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (q_j^2 + p_j^2 - 2ip_j q_j) \right) \lambda_0.$$

Тогда

$$\nabla \lambda_1 = \theta_1 \otimes \lambda_1 \text{ с } \theta_1 = -i \sum_{j=1}^n \bar{z}_j dz_j.$$

В частности, сечение λ_1 ковариантно постоянно вдоль векторных полей из $T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$. Следовательно, любое сечение расслоения L , ковариантно постоянное вдоль $T^{0,1}(\mathbb{C}^n)$, имеет вид

$$\varphi(z) \lambda_1,$$

где $\varphi(z)$ – голоморфная функция от $z \in \mathbb{C}^n$. Кроме того,

$$\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (q_j^2 + p_j^2) \right) = \exp(-|z|^2)$$

с $|z|^2 = \sum_j \bar{z}_j z_j$. Скалярное произведение в пространстве предквантования $H = L^2(\mathbb{C}^n, L; \omega_0^n)$ принимает следующий вид

$$(\varphi \lambda_1, \psi \lambda_1) = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi(z) \bar{\psi}(z) e^{-|z|^2} \omega_0^n.$$

Следуя идее, изложенной в конце п. 13.2, определим пространство квантования как пространство поляризованных сечений $L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, L; \omega_0^n)$. В нашем случае оно совпадает с *пространством Баргмана–Фока*

$$F(\mathbb{C}^n) = L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2})$$

голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$, квадратично интегрируемых с гауссовым весом $e^{-|z|^2/2}$.

Операторы Костанта–Сурьо (KS-операторы), построенные по наблюдаемым из алгебры Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n}) = \text{heis}(\mathbb{C}^n)$ по формуле (13.5), оставляют пространство Баргмана–Фока $F(\mathbb{C}^n)$ инвариантным и потому допускают сужение на это пространство. Чтобы убедиться в этом, найдем выражение для KS-операторов, отвечающих координатам $z_j, \bar{z}_j$:

$$r_{\text{KS}}(z_j)(\varphi \lambda_1) = z_j \varphi \lambda_1, \quad r_{\text{KS}}(\bar{z}_j)(\varphi \lambda_1) = \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \lambda_1$$

при $j = 1, \dots, n$. Пользуясь формулами для базисных гамильтоновых векторных полей, отвечающих координатам и импульсам:

$$X_{p_j} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right), \quad X_{q_j} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right),$$

получим выражение для KS-операторов, отвечающих генераторам алгебры Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$:

$$\begin{aligned} r_{\text{KS}}(p_j)(\varphi \lambda_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(z_j + \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \varphi \right] \lambda_1, \\ r_{\text{KS}}(q_j)(\varphi \lambda_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}i} \left[\left(z_j - \frac{\partial}{\partial z_j} \right) \varphi \right] \lambda_1. \end{aligned}$$

Из этого выражения очевидно, что указанные операторы оставляют пространство Баргмана–Фока инвариантным. Поэтому мы можем ограничить наше KS-представление на это пространство, получив представление r_0 алгебры Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n}) = \text{heis}(\mathbb{C}^n)$ в пространстве Баргмана–Фока $F(\mathbb{C}^n) = L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2})$.

Построенное представление, называемое *представлением Баргмана–Фока*, уже неприводимо. Проще всего убедиться в этом с помощью так называемых *операторов рождения и уничтожения*, задаваемых в рассматриваемом случае формулами

$$a_j^* = r_{KS}(z_j) = \text{умножение на } z_j, \quad a_j = r_{KS}(\bar{z}_j) = \partial/\partial z_j,$$

действующих в пространстве Баргмана–Фока $F(\mathbb{C}^n)$. Обозначим через $\varphi_0 \equiv 1$ *вектор вакуума* в $F(\mathbb{C}^n)$. Заметим, что пространство Баргмана–Фока $F(\mathbb{C}^n) = L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2})$ порождается векторами, получаемыми из φ_0 действием операторов рождения a_j^* , т.е. векторами вида

$$a_{j_1}^* \dots a_{j_k}^* \varphi_0.$$

Для того, чтобы показать, что представление Баргмана–Фока r_0 неприводимо, допустим, что нашелся оператор A в $F(\mathbb{C}^n)$, коммутирующий со всеми операторами рождения и уничтожения a_j^*, a_j нашего представления. Тогда $A\varphi_0$ должно быть равно $c\varphi_0$ с некоторой константой c , поскольку $A\varphi_0$ зануляется всеми операторами уничтожения $a_j = \partial/\partial z_j$. С другой стороны,

$$A(a_{j_1}^* \dots a_{j_k}^* \varphi_0) = a_{j_1}^* \dots a_{j_k}^* (A\varphi_0) = c(a_{j_1}^* \dots a_{j_k}^* \varphi_0).$$

Из этих двух свойств вытекает, что $A = c \cdot \text{id}$, что влечет, по лемме Шура, неприводимость представления r_0 .

К сожалению, описанный метод квантования стандартной модели $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) = (\mathbb{C}^n, \omega_0)$, наделенной алгеброй Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n}) = \text{heis}(\mathbb{C}^n)$, неприменим к другим кэлеровым фазовым пространствам и алгебрам наблюдаемых, поскольку операторы KS-предквантования не сохраняют в общем случае фоковские пространства голоморфных сечений. В следующем п. 14.2.1 мы опишем эту ситуацию более подробно.

§ 14.2. Фоковские пространства полуформ

14.2.1. KS-действие на фоковских пространствах.

Предположим, что фазовое пространство (M, ω) является кэлеровым многообразием, наделенным совместимой комплексной структурой J . Допустим, что (M, ω) удовлетворяет условию квантования (13.4) и $L \rightarrow M$ есть расслоение предквантования, снабженное эрмитовой связностью ∇ . Введем голоморфную структуру на L , определяемую $\bar{\partial}$ -оператором, задаваемым $(0, 1)$ -компонентой $\nabla^{0,1}$ связности ∇ относительно комплексной структуры J .

Фоковское пространство

$$F(M, J) := L^2_{\mathcal{O}}(M, L; \omega^n)$$

есть пространство квадратично интегрируемых сечений расслоения $L \rightarrow M$, голоморфных относительно введенной голоморфной структуры на L . Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру Ли гамильтонианов, которую можно отождествить (в предположении, что M односвязно) с алгеброй Ли гамильтоновых векторных полей на M . Любая наблюдаемая $f \in \mathcal{A}$ порождает (локальную) однопараметрическую группу Γ симплектоморфизмов M , задаваемую посредством

$$\varphi_f^t := \exp(2\pi i t X_f),$$

где X_f – гамильтоново векторное поле, порождаемое f . Как было указано в п. 13.2 (см. замечание 22), действие Γ можно поднять до действия ее центрального расширения $\tilde{\Gamma}$ на L , которое порождается KS-оператором $r(f) \equiv r_{\text{KS}}(f)$. Более точно, поднятое действие задается посредством

$$\Phi_f^t := \exp(2\pi i \text{tr}(f)) : L^2(M, L; \omega^n) \longrightarrow L^2(M, L; \omega^n).$$

Однако, указанные операторы не сохраняют, вообще говоря, фоковские пространства $F(M, J)$, поскольку Φ_f^t отображает фоковское пространство $F(M, J)$ в фоковское пространство $F(M, J_f^t)$, ассоциированное с преобразованной комплексной структурой $J_f^t := \varphi_{f,*}^t \circ J \circ \varphi_{f,*}^{-t}$, которая, в общем случае, не эквивалентна J . Когда такое происходит, соответствующий KS-оператор $r_{\text{KS}}(f)$ не допускает сужения на пространство $F(M, J)$. Если мы, тем не менее, хотим и в этом случае строить квантование пространства $(M, \mathcal{A})$ с помощью KS-операторов, нам придется найти метод, позволяющий канонически отождествлять фоковские пространства $F(M, J)$ с различными J . Другими словами, мы постараемся найти каноническое унитарное спаривание между различными фоковскими пространствами $F(M, J)$.

Наивная идея состоит в том, чтобы найти какое-либо интегральное спаривание, задаваемое формулой типа

$$\int_M \langle s_1, s_2 \rangle \omega^n$$

для $s_1 \in F(M, J_1)$, $s_2 \in F(M, J_2)$. Но эта идея не срабатывает уже в случае квантования Баргмана–Фока. В этом случае сечения s_1 и

s_2 принадлежат $L^2_{\mathcal{O}}$ -пространствам с разными весами, более точно, s_1 принадлежит пространству $F(\mathbb{C}^n, J_1) = L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, e^{-K_1(z)/2})$, а s_2 – пространству $F(\mathbb{C}^n, J_1) = L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, e^{-K_2(z)/2})$, где $K_1(z)$ и $K_2(z)$ обозначают кэлеровы потенциалы кэлеровых метрик, определяемых комплексными структурами J_1 и J_2 . Ясно, что скалярное произведение двух таких сомножителей может оказаться не интегрируемым. Более правильная идея состоит в том, чтобы заменить квадратично интегрируемые сечения s расслоения $L \rightarrow M$ квадратично интегрируемыми “полуформами” $s \otimes \sqrt{\omega^n}$. Тогда интеграл от их произведения будет сходиться по неравенству Коши. В следующем параграфе мы реализуем указанный подход, формализовав понятие полуформ.

14.2.2. Полуформы. Расслоение J -реперов. Пусть (M, ω, J) есть кэлерово многообразие размерности $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Его комплексифицированное касательное расслоение $T^{\mathbb{C}}M$ расщепляется в прямую сумму

$$T^{\mathbb{C}}M = T_J^{1,0} \oplus T_J^{0,1}$$

подрасслоений, образованных собственными $(\pm i)$ -подпространствами оператора J . *Расслоением J -реперов*

$$\text{Fr}_J \longrightarrow M$$

называется расслоение реперов в $T_J^{0,1}$, иначе говоря, слой этого расслоения в точке $x \in M$ состоит из всех реперов в $T_{J,x}^{0,1}$. Замена реперов в слое порождает правое $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ -действие на Fr_J , превращающее Fr_J в главное $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ -расслоение.

Обозначим через

$$\text{Fr}_J^n = K_J^{-1} \longrightarrow M$$

антиканоническое расслоение, ассоциированное с Fr_J , которое совпадает с максимальной внешней степенью расслоения Fr_J : $\text{Fr}_J^n = \bigwedge^n(\text{Fr}_J)$. Это комплексное линейное расслоение на M , ассоциированное с Fr_J посредством гомоморфизма $\det: \text{GL}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$. Его сечения μ можно отождествить с функциями $\dot{\mu}$ на Fr_J , удовлетворяющими соотношению

$$\dot{\mu}(X \cdot C) = \det(C^{-1})\dot{\mu}(X) \quad (14.1)$$

для $X = (X_1, \dots, X_n) \in C^\infty(M, \text{Fr}_J)$, $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$.

Мы можем ввести частичную связность, действующую на сечениях расслоения Gr_J^n , следуя [71, 73]. Предположим, что μ есть сечение расслоения Gr_J^n , отождествляемое с функцией $\dot{\mu}$ на Gr_J , а ξ есть $(0, 1)$ -векторное поле на M , т.е. сечение расслоения $T_J^{0,1}$. Для того, чтобы определить значение $\nabla_\xi \dot{\mu}$ в точке $x^0 \in M$ на репере $X^0 \in \text{Gr}_{J, x^0}$, продолжим X^0 до локального J -репера $X = (X_1, \dots, X_n)$ в окрестности U точки x^0 , образованного гамильтоновыми векторными полями $X_1, \dots, X_n$. После этого положим

$$(\nabla_\xi \dot{\mu})(X^0) := \xi \dot{\mu}(X)|_{x^0},$$

т.е. значение $\nabla_\xi \dot{\mu}$ на базисе X^0 в точке x^0 равно значению векторного поля ξ на функции $\dot{\mu}(X)$ в точке x^0 . Можно проверить, что это определение корректно, т.е. $\nabla_\xi \dot{\mu}$ снова является функцией на Gr_J , удовлетворяющей соотношению (14.1), и не зависит от выбора локального продолжения X J -базиса X^0 . Поэтому можно определить $\nabla_\xi \mu$ как сечение расслоения Gr_J^n , отождествляемое с функцией $\nabla_\xi \dot{\mu}$ на Gr_J .

Введенная производная ∇ обладает свойствами *частичной связности* (см. [18]). Именно, для любых $(0, 1)$ -векторных полей ξ, η , произвольных функций $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ и любых сечений μ, ν расслоения Gr_J^n справедливы соотношения:

1. $\nabla_{f\xi + g\eta} \mu = f\nabla_\xi \mu + g\nabla_\eta \mu$;
2. $\nabla_\xi (\mu + \nu) = \nabla_\xi \mu + \nabla_\xi \nu$;
3. $\nabla_\xi (f\mu) = f\nabla_\xi \mu + (\xi f)\mu$.

Более того, построенная частичная связность удовлетворяет равенству

$$\nabla_\xi \nabla_\eta \mu - \nabla_\eta \nabla_\xi \mu = \nabla_{[\xi, \eta]} \mu,$$

означающему, что указанная связность является плоской.

Расслоение полуформ. Обозначим через $\text{ML}(n, \mathbb{C})$ *металлическую группу*, которая является двукратным накрытием группы $\text{GL}(n, \mathbb{C})$:

$$\rho: \text{ML}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow{2:1} \text{GL}(n, \mathbb{C}).$$

Ее элементы можно рассматривать как квадратные корни из $(n \times n)$ -матриц, принадлежащих $GL(n, \mathbb{C})$, точный смысл этой интерпретации придается следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} ML(n, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{C}^* , \\ & \searrow \rho \quad \nearrow \det & \\ & GL(n, \mathbb{C}) & \end{array}$$

где χ обозначает ветвь комплексного квадратного корня из $\det$, для которой $\chi(I) = 1$.

Предположим, что главное $GL(n, \mathbb{C})$ -расслоение $Fr_J \rightarrow M$ J -реперов может быть продолжено до главного $ML(n, \mathbb{C})$ -расслоения над M . Заметим, что такое продолжение, вообще говоря, может и не найтись, поскольку для его существования имеется топологическое препятствие (см. [80], [29], [71]). Указанное препятствие является элементом группы когомологий $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$, кроме того, различные выборы указанных металинейных продолжений (если они существуют) параметризуются элементами группы $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$. Тем самым, мы предполагаем, что упомянутое топологическое препятствие для рассматриваемого расслоения J -реперов $Fr_J \rightarrow M$ равно нулю и расслоение может быть продолжено до главного $ML(n, \mathbb{C})$ -расслоения

$$\widetilde{Fr}_J \longrightarrow M.$$

Мы называем $\widetilde{Fr}_J$ *расслоением металинейных J -реперов*. Оно является главным $ML(n, \mathbb{C})$ -расслоением над M , наделенным двукратно накрывающим послойным эпиморфизмом τ таким, что

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Fr}_J & \xrightarrow{\tau} & Fr_J . \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ ML(n, \mathbb{C}) & & GL(n, \mathbb{C}) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & M & \end{array}$$

Обозначим через

$$\widetilde{Fr}_J^n = K_J^{-1/2} \longrightarrow M$$

комплексное линейное расслоение над M , ассоциированное с $\widetilde{Fr}_J \rightarrow M$ посредством гомоморфизма $\chi: ML(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$. Его

сечения ν отождествляются с функциями $\tilde{\nu}$ на $\widetilde{\text{Fr}}_J$, удовлетворяющими соотношению

$$\tilde{\nu}(\tilde{X} \cdot \tilde{C}) = \chi(\tilde{C}^{-1})\tilde{\nu}(\tilde{X}) \quad (14.2)$$

для $\tilde{X} \in C^\infty(M, \widetilde{\text{Fr}}_J)$, $\tilde{C} \in \text{ML}(n, \mathbb{C})$.

Мы можем определить *частичную связность*, действующую на сечениях расслоения $\widetilde{\text{Fr}}_J^n$, подобно тому, как это было сделано в случае расслоения Fr_J^n . Предположим, что ν есть сечение расслоения $\widetilde{\text{Fr}}_J^n$, отождествляемое с функцией $\tilde{\nu}$ на $\widetilde{\text{Fr}}_J$, а ξ – векторное поле типа $(0, 1)$ на M . Для того, чтобы задать значение $\nabla_\xi \tilde{\nu}$ в точке $x^0 \in M$ на металинейном репере $\tilde{X}^0 \in \widetilde{\text{Fr}}_{J, x^0}$, продолжим соответствующий J -репер $X^0 = \tau(\tilde{X}^0)$ до локального J -репера $X = (X_1, \dots, X_n)$ в окрестности точки x^0 , образованного гамильтоновыми векторными полями $X_1, \dots, X_n$. Так как τ является двукратным накрытием, то найдется локальный металинейный J -репер $\tilde{X}$, заданный (возможно, на меньшей) окрестности U точки x^0 , продолжающий репер $\tilde{X}^0$ и накрывающий репер X , т.е. $\tau(\tilde{X}) = X$. После этого положим

$$(\nabla_\xi \tilde{\nu})(\tilde{X}^0) := \xi \tilde{\nu}(\tilde{X})|_{x^0},$$

т.е. значение $\nabla_\xi \tilde{\nu}$ на металинейном репере $\tilde{X}^0$ в точке x^0 равно значению векторного поля ξ на функции $\tilde{\nu}(\tilde{X})$ в точке x^0 . Это определение корректно, т.е. $\nabla_\xi \tilde{\nu}$ снова является функцией на $\widetilde{\text{Fr}}_J^n$, удовлетворяющей соотношению (14.2), и не зависит от выбора продолжения X и его металинейного подъема $\tilde{X}$. Поэтому мы можем определить $\nabla_\xi \nu$ как сечение расслоения $\widetilde{\text{Fr}}_J^n$, отождествляемое с функцией $\nabla_\xi \tilde{\nu}$ на $\widetilde{\text{Fr}}_J$. Введенная частичная связность ∇ на $\widetilde{\text{Fr}}_J^n$ снова является плоской.

Фоковское пространство полуформ. Рассмотрим линейное расслоение $L \otimes K_J^{-1/2} \rightarrow M$. Его можно наделить частичной связностью ∇ , индуцированной эрмитовой связностью на расслоении предквантования L и частичной связностью на антиканоническом расслоении $K_J^{-1/2}$, введенной выше. Более точно, для заданного векторного поля ξ типа $(0, 1)$ и сечения $\sigma = \lambda \otimes \nu$ расслоения $L \otimes K_J^{-1/2}$ положим

$$\nabla_\xi \sigma = (\nabla_\xi \lambda) \otimes \nu + \lambda \otimes (\nabla_\xi \nu).$$

Обозначим через $\mathcal{O}_{1/2}(M, J)$ пространство голоморфных сечений σ расслоения $L \otimes K_J^{-1/2} \rightarrow M$. Мы хотим определить скалярное произведение двух сечений σ_1, σ_2 из пространства $\mathcal{O}_{1/2}(M, J)$. Локально (в окрестности U произвольной точки $x \in M$) эти сечения можно записать в виде

$$\sigma_1 = \lambda_1 \otimes \nu_1, \quad \sigma_2 = \lambda_2 \otimes \nu_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{O}(U, L)$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{O}(U, K_J^{-1/2})$. Выберем локальный J -репер $X = (X_1, \dots, X_n)$ на U так, что $\{X_1, \dots, X_n, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n\}$ образуют базис расслоения $T^{\mathbb{C}}M|_U$ и

$$i\omega(X_j, \bar{X}_k) = \delta_{jk}, \quad \omega(X_j, X_k) = \omega(\bar{X}_j, \bar{X}_k) = 0.$$

Обозначим через $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ плотность на U , задаваемую посредством

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle := \langle \lambda_1(x), \lambda_2(x) \rangle \tilde{\nu}_1(\tilde{X}) \overline{\tilde{\nu}_2(\tilde{X})}$$

при $x \in U$ для любого металинейного поднятия $\tilde{X}$ репера X (такое поднятие локально всегда существует). Можно проверить (см. [71], [73]), что данное определение не зависит от выбора поднятия и корректно определяет плотность, линейную по σ_1 , антилинейную по σ_2 и положительно определенную в том смысле, что $\langle \sigma, \sigma \rangle > 0$ для сечений σ , не обращающихся в нуль.

Введем предгильбертово пространство

$$PF_{1/2}(M, J) := \left\{ \sigma \in \mathcal{O}_{1/2}(M, J) : \int_M \langle \sigma, \sigma \rangle < \infty \right\}$$

со скалярным произведением, задаваемым посредством

$$(\sigma_1, \sigma_2) := \int_M \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle.$$

Фоковское пространство полуформ $F_{1/2}(M, J)$, по определению, является пополнением пространства $PF_{1/2}(M, J)$ относительно указанного скалярного произведения.

Локально (в окрестности U точки $x \in M$) мы можем записать подынтегральное выражение $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ в явном виде, выбрав локальные тривиализующие голоморфные сечения λ_0 расслоения L и ν_0 расслоения $K_J^{-1/2}$, удовлетворяющие условиям

$$\langle \lambda_0, \lambda_0 \rangle \equiv 1, \quad \tilde{\nu}_0(\tilde{X}) \equiv 1$$

на U . В терминах этих тривиализаций, голоморфные сечения σ_1, σ_2 расслоения $L \otimes K_J^{-1/2}$ над U будут записываться в виде

$$\sigma_1 = f_1 \cdot \lambda_0 \otimes \tilde{\nu}_0, \quad \sigma_2 = f_2 \cdot \lambda_0 \otimes \tilde{\nu}_0$$

для некоторых голоморфных функций f_1, f_2 на U . Тогда в терминах J -голоморфных локальных координат $(z_1, \dots, z_n)$ в U будем иметь

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \left(\frac{i}{2} \right)^n f_1(z) \overline{f_2(z)} d^n z \wedge d^n \bar{z}.$$

§ 14.3. Метаплектическая структура

14.3.1. Расслоение метаплектических реперов. Метаплектическая группа. *Метаплектическая группа* $\text{Mp}(2n, \mathbb{R})$ является связной двукратно накрывающей группой симплектической группы $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$, иначе говоря, задан двукратно накрывающий групповой гомоморфизм

$$\rho: \text{Mp}(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Sp}(2n, \mathbb{R}).$$

Указанное накрытие существует, поскольку фундаментальная группа π_1 группы $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ равна $\mathbb{Z}$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что группа $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ гомеоморфна

$$\text{U}(n) \times \frac{\text{Sp}(2n, \mathbb{R})}{\text{U}(n)} \cong S^1 \times \text{SU}(n) \times \{\text{диск Зигеля}\},$$

где второй и третий сомножители односвязны.

Метаплектическая структура. Пусть (M, ω) есть симплектическое многообразие размерности $2n$. Обозначим через $\text{Fr}_\omega \rightarrow M$ главное $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$ -расслоение симплектических реперов на M . *Метаплектическая структура* на M задается продолжением расслоения $\text{Fr}_\omega \rightarrow M$ до главного $\text{Mp}(2n, \mathbb{R})$ -расслоения $\widetilde{\text{Fr}}_\omega \rightarrow M$, называемого *расслоением метаплектических реперов* на M . Иными словами, имеется двукратно накрывающий эпиморфизм расслоений $\tau: \widetilde{\text{Fr}}_\omega \rightarrow \text{Fr}_\omega$, который можно включить в следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{Fr}}_\omega & \xrightarrow{\tau} & \text{Fr}_\omega \\ \text{Mp}(n, \mathbb{R}) \searrow & & \swarrow \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \\ & M & \end{array}$$

Имеется топологическое препятствие к существованию метаплектической структуры на M , найденное Костантом [46]. Именно, обозначим через J почти комплексную структуру на M , совместимую с ω , так что $c_1(M)$ есть 1-й класс Черна расслоения TM относительно J . Тогда для существования метаплектической структуры на M необходимо и достаточно, чтобы класс $c_1(M) \bmod 2 \equiv 0 \iff c_1(M)$ был четным в $H^2(M, \mathbb{Z})$. Если это условие выполняется, то множество всех метаплектических структур на M (с точностью до естественной эквивалентности) параметризуется элементами группы $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

14.3.2. Расслоение кэлеровых реперов. Удобно также ввести расслоение $\text{Fr}_K \rightarrow M$ J -реперов для всех ω -совместимых почти комплексных структур J на M . Это расслоение над M , слой которого в точке $x \in M$ состоит из J_x -реперов на $T_x M$ для всех ω_x -совместимых комплексных структур J_x на $T_x M$. Указанный слой можно отождествить с

$$\frac{\text{Sp}(2n, \mathbb{R})}{\text{U}(n)} \times \text{GL}(n, \mathbb{C}) \cong \{\text{диск Зигеля}\} \times \text{GL}(n, \mathbb{C})$$

следующим образом. Для заданного симплектического репера $(\xi, \eta) := (\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n)$ в точке $x \in M$, мы можем записать любой J -репер $X = (X_1, \dots, X_n)$ в точке x единственным образом как (см. [71])

$$X = \xi U + \eta V,$$

где U, V – комплексные $n \times n$ -матрицы такие, что ранг $(2n \times n)$ -матрицы ${}^t(U, V)$ равен n , ${}^tUV = {}^tVU$, и матрица $i(V^*U - U^*V)$ положительно определена. Множество таких матриц ${}^t(U, V)$ можно отождествить с множеством: $\{\text{диск Зигеля}\} \times \text{GL}(n, \mathbb{C})$, сопоставляя матрице ${}^t(U, V)$ пару матриц

$$W := (U + iV)(U - iV)^{-1}, \quad C := U - iV. \quad (14.3)$$

Тогда C принадлежит $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, а W принадлежит диску Зигеля

$$D := \{W \in \text{L}(n, \mathbb{C}) : {}^tW = W, I - W^*W \text{ есть положительно определенная матрица}\}. \quad (14.4)$$

Структурная группа расслоения $\text{Fr}_K \rightarrow M$, действующая слева, совпадает с группой $\text{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Имеется также естественное

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ -действие на $\mathrm{Fr}_K \rightarrow M$ справа, задаваемое заменой реперов. Расслоение $\mathrm{Fr}_K \rightarrow M$ ассоциировано с расслоением $\mathrm{Fr}_\omega \rightarrow M$ симплектических реперов посредством естественного $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ -действия на слое.

Аналогичным образом, мы можем ввести расслоение $\widetilde{\mathrm{Fr}}_K \rightarrow M$ всех металинейных J -реперов на M для всех ω -совместимых почти комплексных структур J . Это расслоение со слоем в точке $x \in M$, совпадающим с

$$\frac{\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})}{\mathrm{U}(n)} \times \mathrm{ML}(n, \mathbb{C}), \quad (14.5)$$

и структурной группой $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$, действующей на первом сомножителе посредством гомоморфизма $\rho: \mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. Расслоение $\widetilde{\mathrm{Fr}}_K \rightarrow M$ ассоциировано с расслоением $\widetilde{\mathrm{Fr}}_\omega \rightarrow M$ метаплектических реперов посредством $\mathrm{Mp}(2n, \mathbb{R})$ -действия. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Fr}}_K & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Fr}_K \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

где τ – двукратное накрытие.

Заметим, что для фиксированной ω -совместимой почти комплексной структуры J на M расслоение $\mathrm{Fr}_J \rightarrow M$ является подрасслоением в $\mathrm{Fr}_K \rightarrow M$, инвариантным относительно правого $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ -действия. Расслоение $\widetilde{\mathrm{Fr}}_J \rightarrow M$ является $\mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$ -инвариантным подрасслоением в $\widetilde{\mathrm{Fr}}_K \rightarrow M$, которое совпадает с обратным образом расслоения $\mathrm{Fr}_J \rightarrow M$ относительно двукратного накрытия $\tau: \widetilde{\mathrm{Fr}}_K \rightarrow \mathrm{Fr}_K$. Другими словами, мы можем сказать, что метаплектическая структура на M , задаваемая расслоением метаплектических реперов вместе с двукратным накрытием $\tau: \widetilde{\mathrm{Fr}}_\omega \rightarrow \mathrm{Fr}_\omega$, индуцирует металинейные структуры на всех расслоениях J -реперов одновременно.

§ 14.4. Спаривание Блатнера–Костанта–Стернберга (BKS-спаривание)

ЛЕММА 5. *Предположим, что J_1, J_2 есть две ω -совместимые почти комплексные структуры на симплектическом многообразии (M, ω) . Тогда они трансверсальны друг другу в том смысле, что*

$$T_{J_1}^{1,0} \oplus T_{J_2}^{0,1} = T^{\mathbb{C}} M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, напротив, что нашелся вектор $\xi \neq 0$ такой, что

$$\xi \in T_{J_1, x}^{1,0} \oplus T_{J_2, x}^{0,1} \text{ для некоторого } x \in M.$$

Тогда

$$0 < \omega(\xi, J_1 \xi) = \omega(\xi, i\xi) = i\omega(\xi, \xi),$$

где неравенство слева вытекает из ω -совместимости J_1 , а первое равенство следует из $\xi \in T_{J_1, x}^{1,0}$. Аналогично,

$$0 < \omega(\xi, J_2 \xi) = \omega(\xi, -i\xi) = -i\omega(\xi, \xi).$$

Тем самым выполняются одновременно соотношения

$$i\omega(\xi, \xi) > 0 \text{ и } -i\omega(\xi, \xi) > 0,$$

противоречащие друг другу. Следовательно, $T_{J_1, x}^{1,0} \cap T_{J_2, x}^{0,1} = \{0\}$ для любого $x \in M$. Из подсчета размерностей вытекает, что

$$T_{J_1, x}^{1,0} \oplus T_{J_2, x}^{0,1} = T_x^{\mathbb{C}} M \text{ для любого } x \in M.$$

Благодаря доказанной лемме 5 мы всегда можем выбрать локально, в окрестности U произвольной точки $x \in M$, J_1 -репер X_1 и J_2 -репер X_2 так, что

$$i\omega(X_1^j, \overline{X_2^k}) = \delta_{jk}. \quad (14.6)$$

Если заданы сечения σ_1 расслоения $L \otimes K_{J_1}^{-1/2}$ и σ_2 расслоения $L \otimes K_{J_2}^{-1/2}$ на U , то мы можем записать их в виде

$$\sigma_1 = \lambda_1 \otimes \nu_1, \quad \sigma_2 = \lambda_2 \otimes \nu_2.$$

По аналогии с п. 14.2.2, введем плотность

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle := \langle \lambda_1(x), \lambda_2(x) \rangle \tilde{\nu}_1(\tilde{X}_1) \overline{\tilde{\nu}_2(\tilde{X}_2)}, \quad (14.7)$$

где $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ – металинейные поднятия реперов X_1, X_2 , удовлетворяющие металинейному аналогу соотношения (14.6). Мы выпишем этот аналог позже (формула (14.10) в замечании 25). Здесь же заметим, что определение (14.7) не зависит от выбора реперов X_1, X_2 , удовлетворяющих условию нормировки (14.6), и их металинейных поднятий $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$, удовлетворяющих метаплектическому условию нормировки (14.10), приведенному ниже (этот факт установлен в [71], п. 5.1; см. также [29], гл. V, п. 5).

Определим *BKS-спаривание* между двумя фоковскими пространствами полуформ $F_{1/2}(M, J_1)$ и $F_{1/2}(M, J_2)$ по формуле

$$(\sigma_1, \sigma_2)_{12} := \int_M \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle. \quad (14.8)$$

Предположим теперь, что наши почти комплексные структуры J_1 и J_2 интегрируемы. Тогда локально, в окрестности U произвольной точки $x \in M$, мы можем выписать явную формулу для подынтегрального выражения в формуле (14.8). Для этого фиксируем J_1 -репер X_1 и J_2 -репер X_2 в U , удовлетворяющие условию нормировки (14.6), и их метаплектические поднятия $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$, удовлетворяющие метаплектическому условию нормировки (14.10), а также выберем локальные тривиализующие голоморфные сечения λ_0 расслоения L , ν_1 расслоения $K_{J_1}^{-1/2}$ и ν_2 расслоения $K_{J_2}^{-1/2}$, удовлетворяющие условиям

$$\langle \lambda_0, \lambda_0 \rangle \equiv 1, \quad \tilde{\nu}_1(\tilde{X}_1) \equiv 1, \quad \tilde{\nu}_2(\tilde{X}_2) \equiv 1$$

в U . Тогда голоморфные сечения σ_1 расслоения $L \otimes K_{J_1}^{-1/2}$ и σ_2 расслоения $L \otimes K_{J_2}^{-1/2}$ над U будут записываться в виде

$$\sigma_1 = f_1 \cdot \lambda_0 \otimes \nu_1, \quad \sigma_2 = f_2 \cdot \lambda_0 \otimes \nu_2,$$

где f_1 – J_1 -голоморфная функция на U , а f_2 – J_2 -голоморфная функция на U . Так как J_1 и J_2 трансверсальны друг другу, мы можем найти локальные J_1 -голоморфные координаты $(z_1, \dots, z_n)$

и J_2 -голоморфные координаты $(w_1, \dots, w_n)$ в U такие, что векторные поля $(\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n; \partial/\partial \bar{w}_1, \dots, \partial/\partial \bar{w}_n)$ образуют локальный базис сечений расслоения $T^{\mathbb{C}}M$ над M . Тогда

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \left(\frac{i}{2} \right)^n f_1(z) \overline{f_2(w)} d^n z \wedge d^n \bar{w}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 25 [71]. Для того, чтобы описать метаплектический аналог соотношения (14.6), выразим наши реперы X_1 и X_2 в терминах единого симплектического репера $(\xi, \eta) := (\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_n)$ также, как в п. 14.3.1:

$$X_1 = \xi U_1 + \eta V_1, \quad X_2 = \xi U_2 + \eta V_2.$$

Тогда уравнение (14.6) может быть записано в виде

$$V_2^* U_1 - U_2^* V_1 = -iI.$$

В терминах матриц

$$W_j = (U_j + iV_j)(U_j - iV_j)^{-1}, \quad C_j := U_j - iV_j, \quad j = 1, 2,$$

это условие означает, что

$$I - W_2^* W_1 = 2(C_2^*)^{-1} C_1^{-1}. \quad (14.9)$$

Заметим, что $Z := W_2^* W_1$ принадлежит матричному диску

$$\begin{aligned} \tilde{D} := \{Z \in \mathrm{L}(n, \mathbb{C}) : I - Z^* Z \text{ есть} \\ \text{положительно определенная матрица}\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отображение $\tilde{D} \rightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, задаваемое формулой: $Z \mapsto I - Z$. Так как диск $\tilde{D}$ стягиваем (более того, $\tilde{D}$ является выпуклым), это отображение однозначно продолжается до отображения $Z \mapsto \widetilde{I - Z}$, переводящего $\tilde{D}$ в $\mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$ и принимающего значение $\tilde{I}$ в точке $Z = 0$ (мы обозначаем через $\tilde{I}$ единицу в $\mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$). Предположим, что металинейные поднятия $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ наших реперов X_1, X_2 задаются, в соответствии с формулой (14.5), парами $(W_1, \tilde{C}_1)$, $(W_2, \tilde{C}_2)$, где $W_j \in D$, $\tilde{C}_j \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$ при $j = 1, 2$. Тогда металинейный аналог формулы (14.6) примет вид

$$I - \widetilde{W_2^* W_1} = 2(\tilde{C}_2^*)^{-1} \tilde{C}_1^{-1}. \quad (14.10)$$

§ 14.5. Квантование Блатнера–Костанта–Стернберга (BKS-квантование)

14.5.1. Подъем φ_f^t -действия. Пусть (M, ω, J) есть кэлери-во многообразие, а $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ – наблюдаемая на M , для которой гамильтоново векторное поле X_f полно, т.е. однопараметрический поток $\varphi_f^t = \exp(2\pi i t X_f)$, порожденный X_f , определен при всех значениях $t \in \mathbb{R}$. Тем самым $\{\varphi_f^t\}$ есть однопараметрическая группа симплектоморфизмов многообразия M . Поток φ_f^t порождает естественный поток на пространстве ω -совместимых комплексных структур на M , задаваемый посредством

$$J \longmapsto J_f^t := \varphi_{f,*}^t \circ J \circ \varphi_{f,*}^{-t},$$

и естественный поток, обозначаемый той же буквой φ_f^t , на расслоении $\text{Fr}_K \rightarrow M$ всех J -реперов на M .

По свойству накрывающей гомотопии, этот поток можно поднять до однопараметрического потока $\tilde{\varphi}_f^t$ на расслоении $\widetilde{\text{Fr}}_K \rightarrow M$ всех металинейных J -реперов на M , порождающего однопараметрический поток послойных изоморфизмов

$$\tilde{\varphi}_f^t: \widetilde{\text{Fr}}_J \longrightarrow \widetilde{\text{Fr}}_{J_f^t}.$$

Мы построим продолжение φ_f^t -потока до потока на фоковских пространствах полуформ, обозначаемых через

$$\mathcal{H}_t \equiv \mathcal{H}_f^t := F_{1/2}(M, J_f^t).$$

φ_f^t -действие на $K_J^{-1/2}$. Определим сначала φ_f^t -действие на расслоении $K^{-1/2}$ над пространством ω -совместимых комплексных структур на M . Пусть ν есть сечение расслоения $K_J^{-1/2}$, отождествляемое с функцией $\tilde{\nu}$ на расслоении $\widetilde{\text{Fr}}_J$. Обозначим через $\varphi_f^t \nu$ сечение расслоения $K_t^{-1/2} \equiv K_{J_f^t}^{-1/2}$, отождествляемое с функцией $\widetilde{\varphi_f^t \nu}$, задаваемой формулой

$$\widetilde{\varphi_f^t \nu}(\tilde{X}) = \tilde{\nu}(\tilde{\varphi}_f^{-t} \tilde{X})$$

для любого металинейного репера $\tilde{X} \in \widetilde{\text{Fr}}_t \equiv \widetilde{\text{Fr}}_{J_f^t}$.

φ_f^t -действие на сечениях расслоения L . Согласно замечанию 22, φ_f^t -поток на M допускает поднятие до φ_f^t -потока на сечениях L . Более подробно, генератор φ_f^t -действия на L

$$\mathcal{P}_f(\lambda) := i \frac{d}{dt} (\varphi_f^t \lambda) \Big|_{t=0}$$

совпадает с

$$\mathcal{P}_f(\lambda) = r_{\text{KS}}(f)(\lambda) = f\lambda - i\nabla_{X_f}\lambda.$$

φ_f^t -действие на фоковском пространстве полуформ. Напомним (см. п. 14.2.2), что фоковское пространство полуформ $\mathcal{H}$ определяется как

$$\mathcal{H} = F_{1/2}(M, J).$$

Предположим, что элемент σ из пространства $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\sigma = \lambda \otimes \nu,$$

где $\lambda \in \mathcal{O}(M, L)$, $\nu \in \mathcal{O}(M, K_J^{-1/2})$. Тогда по определению

$$\varphi_f^t \sigma := \varphi_f^t \lambda \otimes \varphi_f^t \nu.$$

По линейности и непрерывности это определение распространяется на произвольные сечения из $\mathcal{H}$, поэтому мы получаем изоморфизм гильбертовых пространств

$$\varphi_f^t: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_t,$$

обратное отображение к которому совпадает с φ_f^{-t} . Можно показать (см. [71]), что оператор $\varphi_f^t: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_t$ унитарен.

14.5.2. Квантование квантуемых наблюдаемых. Пусть f – наблюдаемая на M , обладающая полным гамильтоновым векторным полем X_f . Предположим сначала, что f *квантуема*, т.е. поток $\varphi_{f,*}^t$, ассоциированный с этой наблюдаемой, сохраняет комплексную структуру J , иными словами, отображение φ_f^t J -голоморфно. Можно также сказать, что f квантуема, если $[X_f, T_J^{0,1}M] \subset T_J^{0,1}M$. Квантуемые наблюдаемые образуют подалгебру в алгебре Ли $\mathcal{A}$ всех наблюдаемых. Если f квантуема, то φ_f^t -поток сохраняет пространство $\mathcal{H}$, т.е. мы имеем однопараметрическую группу унитарных операторов $\varphi_f^t: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ и можем определить *квантованную наблюдаемую* $\mathcal{Q}_f$ посредством

$$\mathcal{Q}_f(\sigma) := i \frac{d}{dt} (\varphi_f^t \sigma) \Big|_{t=0} \quad (14.11)$$

для любого $\sigma \in \mathcal{H}$.

Можно описать оператор $\mathcal{Q}_f$ и более явным образом. Введем *частичную производную Ли* L_ξ на полуформах вдоль векторных полей ξ на M , сохраняющих J , т.е. обладающих свойством $[\xi, T_J^{0,1}M] \subset T_J^{0,1}M$. Именно, для любой полуформы ν , ассоциированной с функцией $\tilde{\nu}$ на расслоении $\widetilde{\text{Gr}}_J$, отождествим $L_\xi \nu$ с функцией $\widetilde{L_\xi \nu}$, задаваемой формулой

$$\widetilde{L_\xi \nu}(\tilde{X})|_x \equiv (L_\xi \tilde{\nu})(\tilde{X})|_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\tilde{\nu}(\tilde{\varphi}_f^t \tilde{X})|_{\varphi_f^t x})$$

для любого металинейного J -репера $\tilde{X}$. Иными словами, L_ξ -производная функции $\tilde{\nu}$, вычисленная на металинейном J -репере $\tilde{X}$ в точке x , равна $\frac{d}{dt}$ -производной при $t = 0$ функции $\tilde{\nu}$, вычисленной на металинейном J -репере $\tilde{\varphi}_f^t \tilde{X}$ в точке $\varphi_f^t x$.

Производная L_ξ обладает всеми свойствами обычной производной Ли с той разницей, что ее можно брать только вдоль векторных полей ξ , сохраняющих J . В терминах частичной производной Ли оператор $\mathcal{Q}_f$ записывается в следующем виде:

$$\mathcal{Q}_f(\lambda \otimes \nu) = (-i\nabla_{X_f} \lambda + f\lambda) \otimes \nu - i\lambda \otimes L_{X_f} \nu.$$

Второе слагаемое в правой части можно вычислить локально следующим образом. Обозначим через $X = (X^1, \dots, X^n)$ локальный J -репер на открытом множестве U , составленный из гамильтоновых $(0, 1)$ -векторных полей X^j . Тогда

$$[X_f, X^j](x) = \sum_{k=1}^n a_k^j(x) X^k$$

для некоторой матричной функции $A := (a_k^j)$ на U . Обозначим через $\tilde{X}$ металинейный подъем репера X над U и выберем локальное сечение $\tilde{\nu}_0$ расслоения $K_J^{-1/2}$ так, что $\tilde{\nu}_0(\tilde{X}) \equiv 1$. Любой элемент $\sigma \in F_{1/2}(U, J)$ можно записать в виде

$$\sigma = \lambda \otimes \tilde{\nu}_0$$

для некоторого голоморфного сечения $\lambda \in \mathcal{O}(U, L)$. Тогда (см. [71], п. 6.2)

$$L_{X_f} \tilde{\nu}_0 = -\frac{1}{2} \text{tr } A \cdot \tilde{\nu}_0,$$

так что

$$\mathcal{Q}_f(\lambda \otimes \tilde{\nu}_0) = \left(-i\nabla_{X_f}\lambda + f\lambda - i\frac{1}{2}\operatorname{tr} A \cdot \lambda \right) \otimes \tilde{\nu}_0.$$

Можно показать, что (см. [71], [73]) отображение $f \mapsto \mathcal{Q}_f$ является представлением

$$\{\text{алгебра Ли квантуемых наблюдаемых}\} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \operatorname{End}^* \mathcal{H}$$

в фоксовском пространстве полуформ $\mathcal{H} = F_{1/2}(M, J)$.

14.5.3. Квантование общих наблюдаемых. Предположим, что для наблюдаемой f интегралы, задающие BKS-спаривание $\mathcal{H} \times \mathcal{H}_t \rightarrow \mathbb{C}$, являются конечными, так что определен унитарный оператор

$$U_t: \mathcal{H}_t \longrightarrow \mathcal{H}.$$

В его терминах BKS-спаривание, задаваемое формулой (14.8), записывается в виде

$$(\sigma, \sigma_t)_{0t} = (\sigma, U_t \sigma_t)$$

для $\sigma \in \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0$, $\sigma_t \in \mathcal{H}_t$.

Рассмотрим унитарный оператор

$$\Phi_f^t := U_t \circ \varphi_f^t: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

и определим самосопряженную квантованную наблюдаемую $\mathcal{Q}_f$ посредством

$$\mathcal{Q}_f := i \frac{d}{dt} \Phi_f^t \Big|_{t=0}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

Тогда отображение $f \mapsto \mathcal{Q}_f$ задает неприводимое представление алгебры Ли наблюдаемых $\mathcal{A}$

$$\mathcal{Q}: \mathcal{A} \longrightarrow \operatorname{End}^* \mathcal{H}$$

в фоксовском пространстве полуформ $\mathcal{H}$ (в предположении, что интегралы, определяющие BKS-спаривание являются конечными для всех наблюдаемых $f \in \mathcal{A}$).

Библиографические указания

BKS-квантование рассматривается в нескольких книгах по геометрическому квантованию. Мы следуем в основном книге Снятыцки [71], в которой обсуждается (помимо рассмотренной выше кэлеровой поляризации) несколько типов поляризаций. Можно рекомендовать также книгу Гийемина–Стернберга [29], посвященную в основном вещественным поляризациям, и лекции Тайнмана [73]. Нашей целью в этой главе было изложение схемы BKS-квантования без углубления в технические детали (которые обсуждаются в книгах [71], [29], [73]).

Часть V

Квантование
пространств петель

Глава 15. Квантование пространства петель векторного пространства

В этой главе решается задача геометрического квантования для классической системы $(\Omega\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_d)$, фазовое пространство которой есть пространство $\Omega\mathbb{R}^d$, состоящее из гладких петель в d -мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^d$, а алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}_d$ есть алгебра Ли группы Ли–Фреше $\mathcal{G}_d$, являющейся полупрямым произведением группы петель $\widetilde{L\mathbb{R}^d}$ и группы $\text{Diff}_+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности.

Мы начинаем с квантования “расширенной” системы, получаемой из $(\Omega\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_d)$ расширением как фазового пространства, так и алгебры наблюдаемых. Более подробно, фазовое пространство $\Omega\mathbb{R}^d$ расширяется до соболевского пространства V^d полудифференцируемых вектор-функций (векторный аналог соболевского пространства V , введенного в п. 9.1), а алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}_d$ расширяется до алгебры Ли $\mathcal{A}$ гильбертовой группы Ли $\mathcal{G}$, являющейся полупрямым произведением группы Гейзенберга $\text{Heis}(V^d)$ и симплектической группы Гильберта–Шмидта $\text{Sp}_{\text{HS}}(V^d)$. Группу $\mathcal{G}$ можно рассматривать как гильбертов (симплектический) аналог стандартной группы движений d -мерного векторного пространства $\mathbb{R}^d$. Последняя группа совпадает с полупрямым произведением группы трансляций пространства $\mathbb{R}^d$ и группы вращений пространства $\mathbb{R}^d$. В случае гильбертова пространства V роль группы трансляций играет группа Гейзенберга, а группа вращений заменяется на симплектическую группу $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$.

Для упрощения формул мы полагаем $d = 1$ в большей части этой главы, рассматривая случай общего d только в п. 15.6, в котором завершается квантование пространства $\Omega\mathbb{R}^d$. Последний п. 15.7 посвящен квантованию универсального пространства Тейхмюллера.

§ 15.1. Представление Гейзенберга

15.1.1. Фоковское пространство. Рассмотрим *соболевское пространство*

$$V := H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$$

полу дифференцируемых функций на окружности S^1 (см п. 9.1) и его комплексификацию

$$V^{\mathbb{C}} = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{C}).$$

Оператор комплексной структуры J_0 на $V^{\mathbb{C}}$, введенный в п. 9.1, порождает разложение $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму подпространств

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_- =: W_0 \oplus \overline{W_0}, \quad (15.1)$$

где $W_{\pm}$ есть собственное $(\mp i)$ -подпространство оператора $J^0 \in \text{End } V^{\mathbb{C}}$. Подпространства $W_{\pm}$ изотропны относительно симплектической формы ω на $V^{\mathbb{C}}$. Кроме того, разложение (15.1) является ортогональной прямой суммой относительно эрмитова скалярного произведения на $V^{\mathbb{C}}$, задаваемого формулой

$$\langle z, w \rangle = i\omega(z_+, \bar{w}_+) - i\omega(z_-, \bar{w}_-),$$

где $z_{\pm}$ (соотв. $w_{\pm}$) обозначает проекцию $z \in V^{\mathbb{C}}$ (соотв. $w \in V^{\mathbb{C}}$) на подпространство $W_{\pm}$.

Определим *фоковское пространство* $F_0 \equiv F(V^{\mathbb{C}}, J_0)$ как пополнение алгебры симметричных полиномов на W_0 относительно естественной нормы, определяемой ниже.

Более подробно, обозначим через $S(W_0)$ алгебру симметричных полиномов по переменным $z \in W_0 \equiv W_+$ и введем скалярное произведение на $S(W_0)$, порождаемое эрмитовым произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $V^{\mathbb{C}}$. Указанное скалярное произведение на мономах одинаковой степени задается формулой

$$\langle z_1 \cdot \dots \cdot z_n, z'_1 \cdot \dots \cdot z'_n \rangle = \sum_{\{i_1, \dots, i_n\}} \langle z_1, z'_{i_1} \rangle \cdot \dots \cdot \langle z_n, z'_{i_n} \rangle,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\{i_1, \dots, i_n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$ (скалярное произведение мономов разной степени полагается равным 0 по определению). Данное скалярное произведение продолжается по линейности на всю алгебру $S(W_0)$.

Полношение $\widehat{S(W_0)}$ алгебры $S(W_0)$ относительно введенной нормы называется *фоковским пространством* $F_0 \equiv F(V^{\mathbb{C}}, J_0)$ над $V^{\mathbb{C}}$ относительно комплексной структуры J^0 :

$$F_0 = F(V^{\mathbb{C}}, J^0) := \widehat{S(W_0)}.$$

Если $\{w_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, есть ортонормированный базис пространства W_0 , то в качестве ортонормированного базиса пространства F_0 можно взять семейство полиномов вида

$$P_K(z) = \frac{1}{\sqrt{K!}} \langle z, w_1 \rangle^{k_1} \cdot \dots \cdot \langle z, w_n \rangle^{k_n}, \quad z \in W_0, \quad (15.2)$$

где $K = (k_1, \dots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{N}$, и $K! = k_1! \cdot \dots \cdot k_n!$.

Напомним, что, согласно п. 11.4, любая комплексная структура J на V , совместимая с ω , задает разложение

$$V^{\mathbb{C}} = W_J \oplus \overline{W}_J =: W \oplus \overline{W} \quad (15.3)$$

в прямую сумму подпространств W и $\overline{W}$, изотропных относительно ω . Подпространства W и $\overline{W}$ отождествляются, соответственно, с собственными $(-i)$ - и $(+i)$ -подпространствами оператора J на $V^{\mathbb{C}}$. Комплексная структура J и симплектическая форма ω вместе определяют кэлерову метрику g_J и ассоциированное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ на $V^{\mathbb{C}}$. Разложение (15.3) ортогонально относительно указанной метрики g_J на $V^{\mathbb{C}}$.

Пользуясь разложением (15.3), мы можем определить *фоковское пространство* $F_J \equiv F(V^{\mathbb{C}}, J)$ как пополнение алгебры симметричных полиномов на W по норме, порождаемой скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$:

$$F_J = F(V^{\mathbb{C}}, J) := \text{пополнение алгебры } S(W) \text{ по норме } \langle \cdot, \cdot \rangle_J.$$

15.1.2. Алгебра и группа Гейзенберга. Алгебра Гейзенберга $\text{heis}(V)$ гильбертова пространства V есть центральное расширение абелевой алгебры Ли V , порождаемой координатными функциями. Иными словами, она совпадает, как векторное пространство, с

$$\text{heis}(V) = V \oplus \mathbb{R}$$

и наделяется скобкой Ли вида

$$[(x, s), (y, t)] := (0, \omega(x, y)), \quad x, y \in V, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Алгебра Гейзенберга $\text{heis}(V)$ является алгеброй Ли *группы Гейзенберга* $\text{Heis}(V)$, которая совпадает с центральным расширением абелевой группы V . Другими словами, $\text{Heis}(V)$ есть прямое произведение

$$\text{Heis}(V) = V \times S^1,$$

наделенное групповой операцией, задаваемой формулой

$$(x, \lambda) \cdot (y, \mu) := \left(x + y, \lambda\mu e^{i\omega(x,y)} \right).$$

15.1.3. Представление Гейзенберга. Представление алгебры Гейзенберга. Построим неприводимое представление алгебры Гейзенберга $\text{heis}(V)$ в фоковском пространстве $F_J = F(V^\mathbb{C}, J)$, где $V^\mathbb{C} = W \oplus \overline{W}$, а F_J совпадает с пополнением алгебры $S(W)$ симметричных полиномов по норме, порождаемой скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$. Элементы $S(W)$ можно рассматривать как голоморфные функции на пространстве $\overline{W}$, отождествляя $z \in W$ с голоморфной функцией $\overline{w} \mapsto \langle w, z \rangle$ на $\overline{W}$. Соответственно, F_J можно рассматривать как подпространство $\mathcal{O}(\overline{W})$ функций, голоморфных на пространстве $\overline{W}$ (наделенном топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах).

С учетом этого соглашения *представление Гейзенберга*

$$r_J: \text{heis}(V) \longrightarrow \text{End } F_J$$

алгебры Гейзенберга $\text{heis}(V)$ в фоковском пространстве $F_J = F(V^\mathbb{C}, J)$ задается формулой

$$v \longmapsto r_J(v)f(\overline{w}) := -\partial_v f(\overline{w}) + \langle w, v \rangle_J f(\overline{w}), \quad (15.4)$$

где ∂_v – оператор дифференцирования в направлении $v \in V^\mathbb{C}$. Продолжая r_J на комплексифицированную алгебру $\text{heis}^\mathbb{C}(V)$ той же формулой (15.4), получим при $v = \bar{z} \in \overline{W}$

$$r_J(\bar{z})f(\overline{w}) := -\partial_{\bar{z}} f(\overline{w}),$$

а при $z \in W$

$$r_J(z)f(\overline{w}) := \langle w, z \rangle_J f(\overline{w}).$$

На центральном элементе $c \in \text{heis}(V)$ положим

$$c \longmapsto r_J(c) := \lambda \cdot I,$$

где λ – произвольная фиксированная ненулевая константа.

Введем операторы рождения и уничтожения на пространстве F_J , определяемые при $v \in V^{\mathbb{C}}$ формулой

$$a_J^*(v) := \frac{r_J(v) - ir_J(Jv)}{2}, \quad a_J(v) := \frac{r_J(v) + ir_J(Jv)}{2}. \quad (15.5)$$

В частности, при $z \in W$

$$a_J^*(z)f(\bar{w}) = \langle w, z \rangle_J f(\bar{w}), \quad (15.6)$$

а при $\bar{z} \in \bar{W}$

$$a_J(\bar{z})f(\bar{w}) = -\partial_{\bar{z}}f(\bar{w}). \quad (15.7)$$

Выбирая ортонормированный базис $\{w_n\}$ в пространстве W , введем операторы

$$a_n^* := a^*(w_n), \quad a_n := a(\bar{w}_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

и $a_0 := \lambda \cdot I$.

Вектор $f_J \in F_J \setminus \{0\}$ называется *вакуумом*, если $a_n f_J = 0$ при $n = 1, 2, \dots$. Другими словами, вакуум есть ненулевой вектор, зануляемый всеми операторами уничтожения a_n . Он однозначно определяется r_J (с точностью до мультипликативной константы) и в случае исходного фоковского пространства $F_0 = F(V, J_0)$ мы полагаем $f_0 \equiv 1$. Действуя на вакуум f_J операторами рождения a_n^* , мы можем определить действие представления r_J на любом полиноме, откуда вытекает неприводимость r_J .

Более того, любое неприводимое представление $r: \text{heis}^{\mathbb{C}}(V) \rightarrow \text{End } F$ алгебры $\text{heis}^{\mathbb{C}}(V)$, обладающей вакуумом f , эквивалентно представлению Гейзенберга r_0 . Действительно, векторы вида $(a_1^*)^{k_1} \dots (a_n^*)^{k_n} f$, получаемые из вакуума действием операторов рождения, линейно независимы и порождают все пространство представления F . Сопоставляя полиному $P(z) = P(z_1, \dots, z_n)$ в фоковском пространстве F_0 вектор вида $P(a_1^*, \dots, a_n^*)f$ в пространстве F , получим сплетающее отображение из F_0 в F . Это отображение может быть сделано унитарным, если ввести на F эрмитово скалярное произведение, для которого векторы $(a_1^*)^{k_1} \dots (a_n^*)^{k_n} f$ образуют ортонормированный базис.

Представление группы Гейзенберга. Представление Гейзенберга r_J алгебры Гейзенберга $\text{heis}^{\mathbb{C}}(V)$ может быть проинтегрировано до неприводимого унитарного представления R_J

группы Гейзенберга $\text{Heis}^{\mathbb{C}}(V)$ в фоковском пространстве F_J . Проинтегрированное представление задается формулой

$$R_J(\bar{z})f(\bar{w}) = f(\bar{w} - \bar{z})$$

при $\bar{z} \in \overline{W}$ и

$$R_J(z)f(\bar{w}) = e^{\langle w, z \rangle_J} f(\bar{w})$$

при $z \in W$. В частности, оператору рождения $a^*(z)$ отвечает оператор умножения $f(\bar{w}) \mapsto e^{\langle w, z \rangle_J} f(\bar{w})$, а оператору уничтожения $a(\bar{z})$ – оператор сдвига $f(\bar{w}) \mapsto f(\bar{w} - \bar{z})$.

Построенное представление группы $\text{Heis}^{\mathbb{C}}(V)$ в пространстве F_J удобно записывается в терминах так называемых *когерентных состояний*, задаваемых функциями из F_J вида

$$\epsilon_z(\bar{w}) := e^{\langle z, w \rangle_J},$$

параметризуемыми векторами $z \in W$. Действие представления $\text{Heis}^{\mathbb{C}}(V)$ на когерентных состояниях дается формулой

$$v \in V \mapsto R_J(v)\epsilon_z = e^{-\langle w, z \rangle_J - \frac{1}{2}\langle w, w \rangle_J} \epsilon_{z+w}$$

при $v = w + \bar{w}$. Имеем

$$\langle \epsilon_z, \epsilon_{z'} \rangle_{F_J} = e^{\langle z, z' \rangle_J} \quad (15.8)$$

и

$$\langle R_J(v)\epsilon_z, R_J(v)\epsilon_{z'} \rangle_{F_J} = \langle \epsilon_z, \epsilon_{z'} \rangle_{F_J}.$$

Фоковское пространство F_J можно определить в терминах когерентных состояний как пополнение комплексного векторного пространства, порождаемого векторами $\{\epsilon_z\}$, $z \in W$, по норме, порождаемой скалярным произведением (15.8).

Пользуясь указанными свойствами когерентных состояний, можно показать (см. [65], п. 9.5), что построенное представление группы Гейзенберга в фоковском пространстве F_J унитарно и неприводимо.

§ 15.2. Действие симплектической группы Гильберта–Шмидта на фоковских пространствах

Напомним определение симплектической группы Гильберта–Шмидта $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ из п. 11.5. В терминах блочного представления,

отвечающего разложению

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_- = W_0 \oplus \overline{W_0},$$

операторы A из группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ записываются в виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{a}^t a - b^t \bar{b} = 1, \quad \bar{a}^t b = b^t \bar{a},$$

а b есть оператор Гильберта–Шмидта. Унитарная группа $U(W_+)$ вкладывается в $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в виде подгруппы операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

В п. 15.1.3 были построены представления Гейзенберга r_J алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}^{\mathbb{C}}(V)$ в фоковских пространствах F_J . Теорема Шейла (см. [69]) утверждает, что представление r_0 в пространстве F_0 унитарно эквивалентно представлению r_J в пространстве F_J тогда и только тогда, когда $J \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Другими словами, при $J \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ существует унитарный сплетающий оператор $U_J: F_0 \rightarrow F_J$ такой, что

$$r_J = U_J \circ r_0 \circ U_J^{-1}.$$

$\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ -действие, задаваемое отображением

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V) \ni A \longmapsto U_J: F_0 \rightarrow F_J \text{ с } J = A \cdot J^0,$$

определяет проективное (унитарное) действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на фоковском расслоении

$$\mathcal{F} := \bigcup_{J \in \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}} F_J \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{HS}} = \frac{\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)}{U(W_0)},$$

накрывающее $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ -действие на диске Зигеля D_{HS} (см. п. 11.5). Явное описание этого проективного действия дано в [66].

§ 15.3. Представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта

Алгебра $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ есть алгебра Ли симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Из определения этой группы (см. п. 15.2) вытекает, что алгебра $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ состоит из линейных операторов A в пространстве $V^{\mathbb{C}}$, которые имеют следующие блочные представления (относительно разложения $V^{\mathbb{C}} = W_0 \oplus \overline{W}_0$)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный косоэрмитов оператор, а β – симметрический оператор Гильберта–Шмидта. Комплексифицированная алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ состоит из операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный оператор, а β и $\bar{\gamma}$ – симметрические операторы Гильберта–Шмидта.

Инфинитезимальная версия проективного $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ -действия на фоксовском расслоении $\mathcal{F}$, описанного в предыдущем п. 15.2, определяет проективное представление алгебры $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в фоксовском пространстве $F_0 \equiv F_{J_0}$. Его комплексификация дается формулой (см. [66])

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V^{\mathbb{C}}) \ni A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix} \mapsto \rho(A) = D_{\alpha} + \frac{1}{2}M_{\beta} + \frac{1}{2}M_{\gamma}^*.$$

Здесь, D_{α} с $\alpha: W_0 \rightarrow W_0$ есть оператор дифференцирования на F_0 в направлении α , действующий по формуле

$$D_{\alpha}f(\bar{w}) = \langle \alpha w, \partial_{\bar{w}} \rangle f(\bar{w}).$$

Оператор M_{β} с $\beta: \overline{W}_0 \rightarrow W_0$ есть оператор умножения на F_0 , задаваемый посредством

$$M_{\beta}f(\bar{w}) = \langle \bar{\beta}w, \bar{w} \rangle f(\bar{w}),$$

а оператор M_{γ}^* сопряжен к M_{γ} и действует по формуле

$$M_{\gamma}^*f(\bar{w}) = \langle \gamma \partial_w, \partial_{\bar{w}} \rangle f(\bar{w}).$$

Указанное представление является проективным с коциклом

$$[\rho(A_1), \rho(A_2)] - \rho([A_1, A_2]) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\bar{\gamma}_2 \beta_1 - \bar{\gamma}_1 \beta_2). \quad (15.9)$$

Заметим, что построенное представление алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ сплетается с представлением Гейзенберга r_0 алгебры Гейзенберга $\mathfrak{heis}(V)$ на пространстве F_0 (см. [66]).

§ 15.4. Твисторная интерпретация

15.4.1. Твисторное расслоение. Назовем комплексную структуру J на пространстве V *допустимой*, если она может быть получена из исходной комплексной структуры J_0 действием группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Такие структуры параметризуются точками диска Зигеля

$$\mathcal{D}_{\mathrm{HS}} = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_0).$$

Твисторное расслоение $\pi: \mathcal{Z} \rightarrow V$ есть, по определению, векторное расслоение допустимых комплексных структур на пространстве V . Его слой $Z_x \cong \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$ в точке $x \in V$ образован сужениями J_x допустимых комплексных структур J на касательное пространство $T_x V \cong V$. Твисторное расслоение на V тривиально, а допустимые комплексные структуры на V можно рассматривать как его трансляционно-инвариантные сечения. В частности, имеется естественная проекция $p: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, сопоставляющая точке $z = (x, J_x)$ трансляционно-инвариантную комплексную структуру $J = J_x$ на V . Слой $p^{-1}(J)$ указанной проекции отождествляется с пространством (V, J) , т.е. с пространством V , наделенным комплексной структурой J . Введенные отображения можно включить в следующую *твисторную диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{p} & \mathcal{D}_{\mathrm{HS}} \\ \pi \downarrow & & \\ & & V \end{array}$$

Твисторное пространство $\mathcal{Z}$ обладает естественной комплексной структурой. Чтобы определить ее, рассмотрим разложение касательного расслоения $T\mathcal{Z}$ в прямую сумму

$$T\mathcal{Z} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} \quad (15.10)$$

вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$, отождествляемого с касательным расслоением к слоям проекции π , и горизонтального подрасслоения $\mathcal{H}$, отождествляемого с касательным расслоением к слоям проекции p . Комплексная структура $\mathcal{J}$ в точке $z \in \mathcal{Z}$ является прямой суммой

$$\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_z^v \oplus \mathcal{J}_z^h$$

естественной комплексной структуры $\mathcal{J}_z^v$ на вертикальном пространстве $\mathcal{V}_z$, отождествляемом (посредством p_*) с касательным пространством $T_{p(z)}\mathcal{D}_{\text{HS}}$ к диску Зигеля $\mathcal{D}_{\text{HS}}$, и комплексной структуры $\mathcal{J}_z^h = J_{\pi(z)}$ на горизонтальном пространстве $\mathcal{H}_z$, отождествляемом (посредством π_*) с касательным пространством $T_{\pi(z)}V$. Отображение p голоморфно по отношению к введенной комплексной структуре (в то время как π нет!).

Заметим, что относительно разложения (15.10) группа Гейзенберга $\text{Heis}(V)$ действует на твисторном пространстве $\mathcal{Z}$ горизонтально, сохраняя слои p , в то время как симплектическая группа $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ действует на $\mathcal{Z}$ вертикально (это действие индуцировано действием группы $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ на диске Зигеля $\mathcal{D}_{\text{HS}}$).

15.4.2. Фоковское расслоение. Фоковское пространство $F_J = F(V, J)$ можно интерпретировать в терминах твисторной диаграммы как фоковское пространство $F(p^{-1}(J))$ функций, голоморфных на слое $p^{-1}(J)$ (по переменным $\bar{w} \in \bar{W}_J$) относительно комплексной структуры на $\mathcal{Z}$, введенной выше. *Фоковское расслоение*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{D}_{\text{HS}}} F_J \longrightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$$

является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над $\mathcal{D}_{\text{HS}}$. Так как множество $\mathcal{D}_{\text{HS}}$ является стягиваемым (даже выпуклым), указанное расслоение тривиально на $\mathcal{D}_{\text{HS}}$. Более того, голоморфное отображение $U_J: F_0 \rightarrow F_J$, введенное в п. 15.2, задает явную голоморфную тривиализацию расслоения $\mathcal{F}$. Заметим, что отображение тривиализации $U_J: F_0 \rightarrow F_J$ эквивариантно по отношению к действию группы $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$.

В п. 15.3 было построено проективное представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{\text{HS}}(V)$ в фоковском пространстве F_0 . С помощью этого представления мы можем построить на фоковском расслоении $\mathcal{F}$ линейную связность, кривизна которой совпадает с коциклом представления ρ .

Пользуясь описанием алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{\text{HS}}(V)$, данным в п. 15.3, можно разложить ее в прямую сумму

$$\mathfrak{sp}_{\text{HS}}(V) = \mathfrak{u}(W_0) \oplus \mathfrak{m}. \quad (15.11)$$

Здесь, $\mathfrak{u}(W_0)$ есть алгебра Ли унитарной группы $U(W_0)$, отождествляемая с множеством матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha^t \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный косоэрмитов оператор. Линейное подпространство $\mathfrak{m} \cong T_0\mathcal{D}_{\text{HS}}$ отождествляется с множеством матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix},$$

где β – ограниченный оператор Гильберта–Шмидта. Заметим, что присоединенное действие группы $U(W_0)$ на $\mathfrak{sp}_{\text{HS}}(V)$ сохраняет подпространство $\mathfrak{m}$.

В соответствии с общей теорией инвариантных связностей (см. [45], глава II.11), разложение (15.11) вместе с проективным представлением ρ определяют $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ -инвариантную связность $\mathbf{A}$ на фоксовском расслоении $\mathcal{F}$ с кривизной, задаваемой коциклом ρ .

Исходную задачу квантования из п. 12.2 можно переформулировать в твисторных терминах следующим образом: *построить гильбертово расслоение квантования $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$ вместе с плоской унитарной связностью на нем.* Связность в этом определении можно рассматривать как инфинитезимальный аналог BKS-оператора из п. 14.4. В следующем п. 15.5 мы остановимся более подробно на соотношении между твисторным и дираковским квантованием системы $(V, \mathcal{A})$, в которой $\mathcal{A}$ есть полупрямое произведением алгебры Гейзенберга $\text{heis}(V)$ и симплектической алгебры Гильберта–Шмидта $\mathfrak{sp}_{\text{HS}}(V)$.

§ 15.5. Расслоение квантования

В этом параграфе мы построим расслоение квантования $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$ над $\mathcal{D}_{\text{HS}}$. Основываясь на конечномерных рассмотрениях из главы 14, можно ожидать, что роль $\mathcal{H}$ должно играть фоксовское расслоение полуформ, определяемое ниже.

15.5.1. Расслоение полуформ. Введем сначала *расслоение полуформ*

$$K^{-1/2} \longrightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$$

на диске Зигеля $\mathcal{D}_{\text{HS}}$.

Именно, рассмотрим на $\mathcal{D}_{\text{HS}}$ следующий аналог метрики Пуанкаре:

$$g_Z(\xi, \eta) = \text{tr} \{ (1 - \bar{Z}Z)^{-2} \xi \bar{\eta} \}$$

при $Z \in \mathcal{D}_{\text{HS}}$, $\xi, \eta \in T_Z^{1,0} \mathcal{D}_{\text{HS}} \cong E_{\text{HS}}$. Это корректно определенная кэлерова метрика на $\mathcal{D}_{\text{HS}}$ с кэлеровым потенциалом $K(Z, \bar{Z}) := -\text{tr} \log(1 - \bar{Z}Z)$. Кроме того, она инвариантна относительно действия группы $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ на диске Зигеля (см. п. 11.4).

Каноническое расслоение $K \rightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$ совпадает с сужением детерминантного расслоения $\text{Det} \rightarrow \text{Gr}_{\text{HS}}(V)$, определенного в п. 5.3, на диск Зигеля $\mathcal{D}_{\text{HS}}$. Метрика g на $\mathcal{D}_{\text{HS}}$ порождает эрмитову метрику $\tilde{g}$ на K , задаваемую формулой

$$\|(\lambda, Z)\|^2 = |\lambda|^2 \det(1 - \bar{Z}Z)^2 \quad (15.12)$$

при $\lambda \in \mathbb{C}$, $Z \in \mathcal{D}_{\text{HS}}$.

Имеется естественное действие центрального расширения $\widetilde{\text{Sp}_{\text{HS}}(V)}$ симплектической группы $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ на каноническом расслоении K , покрывающее действие группы $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ на диске Зигеля $\mathcal{D}_{\text{HS}}$. Если $\tilde{A} \in \widetilde{\text{Sp}_{\text{HS}}(V)}$ проектируется в

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \text{Sp}_{\text{HS}}(V),$$

то $\tilde{A}$ действует на K по формуле

$$\tilde{A} \cdot (\lambda, Z) = (\lambda \det(1 + \bar{a}^{-1} \bar{b} Z)^2, A \cdot Z),$$

где $A \cdot Z = (aZ + b)(\bar{b}Z + \bar{a})^{-1}$. Каноническая связность на K , порождаемая метрикой (15.12), инвариантна относительно этого $\widetilde{\text{Sp}_{\text{HS}}(V)}$ -действия на K .

Антиканоническое расслоение $K^{-1} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$ над $\mathcal{D}_{\text{HS}}$ совпадает с сужением на $\mathcal{D}_{\text{HS}}$ двойственного детерминантного расслоения $\text{Det}^* \rightarrow \text{Gr}_{\text{HS}}(V)$, определенного в п. 5.3. Поскольку диск Зигеля $\mathcal{D}_{\text{HS}}$ стягиваем, антиканоническое расслоение K^{-1} имеет квадратный корень $K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$. Метрика $\tilde{g}$ на K индуцирует эрмитову метрику на $K^{-1/2}$, задаваемую формулой

$$\|(\lambda, Z)\|^2 = |\lambda|^2 \det(1 - \bar{Z}Z)^{-1}. \quad (15.13)$$

Группа $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\mathrm{HS}}(V)$ действует на $K^{-1/2}$ по формуле

$$\tilde{A} \cdot (\lambda, Z) = (\lambda \det(1 + \bar{a}^{-1} \bar{b} Z)^{-1}, A \cdot Z).$$

Каноническая связность $\mathbf{B}$ на $K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, порождаемая эрмитовой метрикой (15.13), инвариантна относительно действия группы $\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\mathrm{HS}}(V)$ на $K^{-1/2}$.

15.5.2. Расслоение квантования. По определению, *расслоение квантования* $\mathcal{H}$ совпадает с *фоковским расслоением полуформ* на $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$, задаваемым тензорным произведением фоковского расслоения $\mathcal{F}$ и расслоения полуформ $K^{-1/2}$:

$$\mathcal{H} := \mathcal{F} \otimes K^{-1/2} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}.$$

Оно наделяется связностью тензорного произведения

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{B}.$$

§ 15.6. Твисторное квантование пространства петель $\Omega\mathbb{R}^d$

В этом параграфе мы применим конструкцию расслоения квантования, приведенную в п. 15.5, к исходной системе $(\Omega\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_d)$. Как в п. 9.2, мы можем вложить фазовое пространство $\Omega\mathbb{R}^d$ в соболевское пространство V^d полудифференцируемых петель в $\mathbb{R}^d$. Пространство V^d совпадает с соболевским пространством полудифференцируемых вектор-функций $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^d$, определяемым таким же образом, как и его скалярный аналог V (см. также [17], п. VI.5.1). Вложение пространства $\Omega\mathbb{R}^d$ в соболевское пространство V^d реализует алгебру петель $\widetilde{L\mathbb{R}^d}$ в виде подалгебры алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V^d)$ и алгебру Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в виде подалгебры симплектической алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V^d)$. Кроме того, под действием указанного вложения группа диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ реализуется в виде подгруппы группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V^d)$. Согласно п. 11.5, мы также имеем голоморфное вложение

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Möb}(S^1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V^d)/\mathrm{U}(W_+^d) = \mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$$

пространства $\mathcal{S}$ в диск Зигеля $\mathcal{D}_{\mathrm{HS}}$.

Обозначим через

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}$$

фоковское расслоение над $\mathcal{S}$, получаемое из фоковского расслоения $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$ сужением на $\mathcal{S}$. У нас имеются представления Гейзенберга

$$r_J: \widetilde{L\mathbb{R}^d} \longrightarrow \text{End}^* F_J$$

при $J \in \mathcal{S}$, задаваемые теми же формулами, что и в п. 15.1. Проективное $\text{Sp}_{\text{HS}}(V^d)$ -действие на фоковском расслоении порождает проективное $\text{Diff}_+(S^1)$ -действие на расслоении $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$. Указанное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$ было построено в [27]. Его инфинитезимальной версией является проективное представление

$$\rho: \text{Vect}(S^1) \longrightarrow \text{End}^* F_0.$$

Указанное представление можно описать явно в терминах базиса $\{e_n\}$ комплексифицированной алгебры Ли $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ (см. п. 2.2).

Обозначим через

$$L_n := \rho(e_n)$$

операторы в пространстве F_0 , отвечающие базисным элементам алгебры $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$. Они называются иначе *операторами Вирасоро* и могут быть вычислены явно, пользуясь формулами, приведенными в п. 15.3. Коцикл представления ρ в базисе $\{e_n\}$ равен (см. [14])

$$[\rho(e_m), \rho(e_n)] - \rho([e_m, e_n]) = \frac{d}{12}(m^3 - m)\delta_{m, -n}. \quad (15.14)$$

Указанный коцикл совпадает с кривизной связности $\mathbf{A}$ на фоковском расслоении $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$, определенной в п. 15.4.2.

Рассмотрим антиканоническое расслоение $K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{S}$, полученное сужением расслоения $K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$ (см. п. 15.5.1) на $\mathcal{S}$. Кривизна канонической связности $\mathbf{B}$ на $K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{S}$ в базисе $\{e_n\}$ была вычислена в [13]. Она равна

$$R_{\mathbf{B}}(e_m, e_n) = -\frac{26}{12}(m^3 - m)\delta_{m, -n}. \quad (15.15)$$

Определим расслоение квантования, следуя п. 15.5.2, как фоковское расслоение полуформ

$$\mathcal{H} := \mathcal{F} \otimes K^{-1/2} \longrightarrow \mathcal{S}$$

и наделим его связностью тензорного произведения

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{B}.$$

Кривизна $\mathbf{C}$ равна сумме кривизн связностей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, т.е.

$$R_{\mathbf{C}}(e_m, e_n) = \frac{d-26}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n}. \quad (15.16)$$

Она зануляется в точности при $d = 26$. В этой размерности наша система $(\Omega\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_d)$, где алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}_d$ есть полупрямое произведение алгебры петель $\widehat{L\mathbb{R}^d}$ и $\text{Vect}(S^1)$, допускает твисторное квантование.

Для того, чтобы получить из найденного решения задачи твисторного квантования решение исходной задачи квантования, т.е. представление алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}_d$ в фоксовском пространстве полуформ $\mathcal{H}_0 = F_0 \otimes K_0^{-1/2}$, отождествляемом со слоем расслоения квантования в начале $o \in \mathcal{S}$, нужно поступать также, как в методе BKS-квантования из п. 14.5. Именно, представления алгебры Гейзенберга в слоях фокковского расслоения $\mathcal{F}$ продолжаются до представлений в слоях расслоения квантования $\mathcal{H}$. Группа $\text{Diff}_+(S^1)$ действует проективно на расслоении $\mathcal{H}$ и это действие сплетается с представлениями алгебры Гейзенберга в слоях. Операторы Костанта–Сурьо L_n , отвечающие базисным элементам алгебры $\text{Vect}(S^1)$, вообще говоря, не сохраняют пространства F_0 и $\mathcal{H}_0$, поскольку симплектические диффеоморфизмы φ^t , отвечающие L_n , переводят пространства F_0 и $\mathcal{H}_0$ в пространства F_t и $\mathcal{H}_t$, построенные по комплексной структуре $J^t = \varphi_*^t \circ J^0 \circ (\varphi_*^t)^{-1}$. Однако, интегрируя плоскую эрмитову связность на расслоении квантования $\mathcal{H}$, можно построить унитарный оператор U_t , отождествляющий $\mathcal{H}_t$ с $\mathcal{H}_0$. Композиция $U_t \circ L_n$ действует теперь в пространстве $\mathcal{H}_0$ и, после дифференцирования, дает искомое представление алгебры $\text{Vect}(S^1)$ в пространстве $\mathcal{H}_0$.

§ 15.7. Квантование универсального пространства Тейхмюллера

В предыдущем параграфе мы ввели фоксовское расслоение

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{S}$$

над регулярной частью $\mathcal{S} = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Möb}(S^1)$ универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T} = \text{QS}(S^1)/\text{Möb}(S^1)$. Это расслоение наделяется проективным действием группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$, накрывающим естественное действие группы

$\text{Diff}_+(S^1)$ на базе $\mathcal{S}$. Инфинитезимальная версия указанного действия дает нам проективное представление алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ в фокковском пространстве $\mathcal{H}_0$. Мы можем рассматривать приведенную конструкцию как геометрическое квантование фазового пространства $\mathcal{S}$ с алгеброй наблюдаемых, совпадающей с алгеброй Вирасоро vir , при этом квантование задается проективным представлением алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ в пространстве $\mathcal{H}_0$. Как указано в п. 15.6, построенное квантование может быть также получено сужением на $\mathcal{S}$ аналогичной конструкции над зигелевым диском Гильберта–Шмидта $\mathcal{D}_{\text{HS}} = \text{Sp}_{\text{HS}}(V)/U(W_+)$. Напомним, что в п. 15.4.2 было построено фокковское расслоение

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{D}_{\text{HS}}$$

над $\mathcal{D}_{\text{HS}}$, которое наделено проективным действием симплектической группы $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$, накрывающим естественное действие группы $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ на $\mathcal{D}_{\text{HS}}$. Инфинитезимальная версия этого действия дает проективное представление симплектической алгебры Ли $\text{sp}_{\text{HS}}(V)$ в фокковском пространстве $\mathcal{H}_0$, описанное в п. 15.3. Указанная конструкция может рассматриваться как геометрическое квантование фазового пространства $\mathcal{D}_{\text{HS}} = \text{Sp}_{\text{HS}}(V)/U(W_+)$ с алгеброй наблюдаемых, совпадающей с центральным расширением алгебры Ли $\text{sp}_{\text{HS}}(V)$, при этом квантование задается проективным представлением алгебры Ли $\text{sp}_{\text{HS}}(V)$ в пространстве $\mathcal{H}_0$.

К сожалению, приведенная процедура квантования не применима ко всему универсальному пространству Тейхмюллера $\mathcal{T} = \text{QS}(S^1)/\text{Möb}(S^1)$. Согласно предложению 25 из п. 11.4, мы можем вложить это пространство в бесконечномерный диск Зигеля $\mathcal{D} = \text{Sp}(V)/U(W_+)$ и построить фокковское расслоение над диском $\mathcal{D} = \text{Sp}(V)/U(W_+)$, но мы не можем наделить это расслоение проективным действием всей симплектической группы $\text{Sp}(V)$. Причина в том, что, согласно теореме Шейла (см. п. 15.2), это возможно только для симплектической подгруппы Гильберта–Шмидта $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ в группе $\text{Sp}(V)$. Поэтому приходится искать другой способ квантования универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T} = \text{QS}(S^1)/\text{Möb}(S^1)$. А именно, предлагается использовать подход, основанный на квантовом анализе Конна–Сулливана. Изложим коротко его идею в приложении к нашей задаче (более подробно о квантовом анализе см. в главе IV книги Конна [16]).

Напомним, что в дираковском подходе (см. п. 12.2) квантуется классическая система $(M, \mathcal{A})$, состоящая из фазового про-

пространства M , являющегося симплектическим многообразием, и алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, которая является пуассоновой алгеброй Ли, состоящей из гладких функций на M . Квантование такой системы задается представлением π алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве H , переводящим скобку Пуассона $\{f, g\}$ двух функций $f, g \in \mathcal{A}$ в коммутатор $[\pi(f), \pi(g)]$ (умноженный на $1/i$) соответствующих операторов. В подходе Конна алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ является ассоциативной инволютивной алгеброй, наделенной внешним дифференциалом d . Ее квантование задается, по определению, представлением алгебры $\mathcal{A}$ в H , переводящим дифференциал df функции $f \in \mathcal{A}$ в коммутатор $[S, \pi(f)]$ оператора $\pi(f)$ с оператором симметрии S , являющимся самосопряженным оператором с квадратом I . Можно переформулировать понятие конновского квантования и в терминах алгебр Ли. Для этого напомним, что *дифференцированием* алгебры $\mathfrak{A}$ называется линейное отображение алгебры $\mathfrak{A}$ в себя, удовлетворяющее правилу Лейбница. Дифференцирования алгебры $\mathfrak{A}$ образуют алгебру Ли $\text{Der}(\mathfrak{A})$ и конновское квантование алгебры наблюдаемых $\mathfrak{A}$ задается в этих терминах представлением алгебры Ли $\text{Der}(\mathfrak{A})$ в алгебре Ли $\text{End } H$.

Если алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ состоит из гладких функций на фазовом многообразии M , то эта новая формулировка по существу эквивалентна дираковской. Действительно, дифференциал df наблюдаемой $f \in \mathcal{A}$ является симплектически двойственным к гамильтонову векторному полю X_f , поэтому мы можем восстановить пуассонову алгебру Ли наблюдаемых по ассоциативной алгебре наблюдаемых с внешним дифференциалом. С другой стороны, оператор симметрии S на поляризованном пространстве квантования $H = H_+ \oplus H_-$ определяется формулой: $S = \pm I$ на $H_{\pm}$. Очевидно, $S = iJ$, где J – оператор комплексной структуры, определяемый поляризацией $H = H_+ \oplus H_-$. (По этой причине мы не делаем далее различия между операторами симметрии и комплексной структуры.) Однако в случае, когда $\mathcal{A}$ содержит негладкие функции, дираковское определение теряет смысл, в то время как квантование Конна допускает обобщение и на этот случай, как показывают приводимые ниже примеры.

Рассмотрим пример, в котором $\mathcal{A}$ совпадает с алгеброй $L^\infty(S^1)$ ограниченных функций на окружности S^1 . Любая функция $f \in \mathcal{A}$ определяет ограниченный оператор умножения в гильбертовом

пространстве $H = L^2(S^1)$:

$$M_f: v \in H \mapsto fv \in H.$$

Оператор симметрии S задается в этом случае преобразованием Гильберта $S: L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$. Дифференциал общей функции $f \in \mathcal{A}$ не определен в классическом смысле, однако мы можем определить его квантовый аналог, полагая

$$d^q f := [S, M_f].$$

Соответствие между функциями $f \in \mathcal{A}$ и операторами M_f на H обладает следующими замечательными свойствами (см. [64]):

1. Дифференциал $d^q f$ является оператором конечного ранга тогда и только тогда, когда f есть рациональная функция.
2. Дифференциал $d^q f$ является компактным оператором тогда и только тогда, когда функция f принадлежит пространству $\text{VMO}(S^1)$ (т.е. обладает исчезающей средней осцилляцией).
3. Дифференциал $d^q f$ является ограниченным оператором тогда и только тогда, когда функция f принадлежит пространству $\text{BMO}(S^1)$ (т.е. обладает ограниченной средней осцилляцией).

Этот список можно дополнить и другими функциональными свойствами элементов $\mathcal{A}$, имеющими интересные операторные интерпретации (см. [16], гл. IV).

Каким образом можно применить конновский подход к квантованию универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T} = \text{QS}(S^1)/\text{Möb}(S^1)$? Перейдем для удобства от окружности S^1 к вещественной прямой $\mathbb{R}$, так что $\mathcal{T}$ будет отождествляться с пространством $\text{QS}(\mathbb{R})/\text{Möb}(\mathbb{R})$ нормализованных квазисимметричных гомеоморфизмов прямой $\mathbb{R}$. Наше главное соболевское пространство $H_R := H^{1/2}(\mathbb{R}) = H^{1/2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ полудифференцируемых функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$ допускает простое описание в терминах квантового дифференциала. Именно, оператор симметрии S задается снова преобразованием Гильберта

$$(Sf)(s) = \frac{1}{\pi i} \text{P.V.} \int \frac{f(t)}{s-t} dt, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (15.17)$$

где интеграл берется в смысле главного значения.

Квантовый дифференциал $d^q f = [S, M_f]$ функции $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ является интегральным оператором в $L^2(\mathbb{R})$ вида

$$(d^q f)v(s) = \frac{1}{\pi i} \int k(s, t)v(t) dt \quad (15.18)$$

с ядром

$$k(s, t) = \frac{f(s) - f(t)}{s - t}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что квазиклассический предел этого оператора, получаемый сужением ядра на диагональ при $s \rightarrow t$, совпадает с оператором умножения $h \mapsto f'h$ на производную, а квантование означает в этом случае замену производной ее конечно-разностным аналогом.

Функция $f \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда ее квантовый дифференциал $d^q f$ является оператором Гильберта–Шмидта на $L^2(\mathbb{R})$; более того, норма Гильберта–Шмидта оператора $d^q f$ совпадает с $H^{1/2}(\mathbb{R})$ -нормой функции f (см. [58], предложение 6.1).

Также, как в п. 11.4, мы можем определить естественное действие группы квазисимметричных гомеоморфизмов $QS(\mathbb{R})$ на соболевском пространстве $H_R = H^{1/2}(\mathbb{R})$ с помощью замены переменной. Однако указанное действие не допускает дифференцирования, поэтому не существует классической алгебры Ли, ассоциированной с группой $QS(\mathbb{R})$, или, другими словами, не существует классической алгебры наблюдаемых, ассоциированной с $\mathcal{T}$. (Ситуация похожа на ту, которая была рассмотрена в приведенном выше примере.) Мы построим, тем не менее, квантовую алгебру наблюдаемых, ассоциированную с $\mathcal{T}$.

Квантованная инфинитезимальная версия $QS(\mathbb{R})$ -действия на пространстве H_R задается интегральным оператором $d^q f$, определяемым формулой (15.18). Продолжим далее оператор $d^q f$ на фоковское пространство F_0 , определяя его сначала на элементах базиса (15.2) пространства F_0 с помощью правила Лейбница, а затем продолжая по линейности на всю симметричную алгебру $S(W_0)$. Замыкание полученного оператора дает нам оператор $d^q f$ на пространстве F_0 . Построенные таким образом операторы $d^q f$ с $f \in QS(\mathbb{R})$ порождают квантовую алгебру Ли $\text{Der}^q(QS)$, ассоциированную с $\mathcal{T}$. Ее и следует рассматривать в качестве квантовой алгебры Ли наблюдаемых, ассоциированной с $\mathcal{T}$. Мы можем также рассматривать построенную алгебру Ли $\text{Der}^q(QS)$ как замену (несуществующей) классической алгебры Ли группы $QS(\mathbb{R})$.

Сравним теперь основные шаги конновского квантования пространства $\mathcal{T}$ с аналогичными этапами дираковского квантования пространства $\mathcal{D}_{\text{HS}}$ (возвращаясь к случаю окружности S^1).

В случае пространства $\mathcal{D}_{\text{HS}}$:

- 1) мы начали с $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ -действия на пространстве $\mathcal{D}_{\text{HS}}$;
- 2) пользуясь теоремой Шейла, продолжили это действие до проективного унитарного действия группы $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$ на фоковских пространствах $F(V, J)$;
- 3) инфинитезимальная версия этого действия дает проективное унитарное представление симплектической алгебры Ли $\text{sp}_{\text{HS}}(V)$ в фоковском пространстве F_0 .

В случае пространства $\mathcal{T}$:

- 1) мы имеем действие группы $\text{QS}(S^1)$ на пространстве V ; однако, в отличие от дираковского квантования $\mathcal{D}_{\text{HS}}$, шаг (2) в случае пространства $\mathcal{T}$ невозможен, поскольку по теореме Шейла мы не можем продолжить действие $\text{QS}(S^1)$ на фоковские пространства $F(V, S)$;
- 2) вместо этого мы определяем квантованное инфинитезимальное действие группы $\text{QS}(S^1)$ на пространстве V , определяемое квантовым дифференциалом $d^q f$;
- 3) продолжая операторы $d^q f$ на фоковское пространство F_0 , мы получаем квантовую алгебру Ли $\text{Der}^q(\text{QS})$, порождаемую продолженными операторами $d^q f$ на F_0 .

Таким образом, конновское квантование универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$ состоит из двух шагов:

1. Первый шаг (“первичное квантование”) состоит в построении квантованного инфинитезимального $\text{QS}(S^1)$ -действия на V , задаваемого квантовыми дифференциалами $d^q f$ с $f \in \text{QS}(S^1)$.
2. Второй шаг (“вторичное квантование”) заключается в продолжении квантовых дифференциалов $d^q f$ на фоковское пространство F_0 . Продолженные операторы $d^q f$ с $f \in \text{QS}(S^1)$ порождают квантовую алгебру наблюдаемых $\text{Der}^q(\text{QS})$, ассоциированную с $\mathcal{T}$.

Заметим также, что принцип соответствия для построенного конновского квантования пространства $\mathcal{T}$ состоит в том, что это квантование, будучи ограниченным на $\mathcal{S}$, совпадает с дираковским квантованием $\mathcal{S}$.

Библиографические указания

В п. 15.1 собраны хорошо известные факты о фоковских пространствах и представлении Гейзенберга. Их можно найти в целом ряде книг и статей, начиная с книги Березина [7]. В п. 15.2 исследуется проективное действие симплектической группы Гильберта–Шмидта на фоковских пространствах. Это исследование берет свое начало со статьи Шейла [69] и уже упомянутой книги Березина (см. также [66], [65], [75]). Проективное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта в фоковском пространстве было вычислено Сигалом [66]. Параграф 15.4, посвященный твисторной интерпретации используемой нами конструкции, базируется на статьях [63], [17]. Твисторное квантование пространства петель $\Omega\mathbb{R}^d$ инициировано Бовиком и Радживом [14]. В частности, они обнаружили в работе [14], что задача твисторного квантования пространства $\Omega\mathbb{R}^d$ разрешима в критической размерности $d = 26$. Последний параграф 15.7 следует в основном работе [67].

Глава 16. Квантование пространства петель $\Omega_T G$

В этой главе решается задача геометрического квантования фазового пространства, совпадающего с кэлеровым многообразием Фреше $\Omega_T G$. Роль алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ играет алгебра Ли $\widetilde{L\mathfrak{g}} \rtimes \text{vir}$, являющаяся расширением алгебры Ли $L\mathfrak{g} \rtimes \text{Vect}(S^1)$. Последняя есть алгебра Ли группы Ли–Фреше $LG \rtimes \text{Diff}_+(S^1)$, являющейся полупрямым произведением группы петель LG и группы диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}_+(S^1)$.

В большей части главы предполагается, что G есть компактная односвязная простая группа Ли.

§ 16.1. Представления алгебр петель

В случае пространства петель ΩG роль алгебры Гейзенберга и ее представления Гейзенберга (см. гл. 15) играют соответственно центральное расширение $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ алгебры петель $L\mathfrak{g}$ и ее представление младшего веса.

16.1.1. Аффинные алгебры. Действие окружности S^1 играет центральную роль в теории представлений алгебр и групп петель. Чтобы учесть это действие, удобно заменить алгебру петель $L\mathfrak{g}$ на *расширенную алгебру петель* $\mathbb{C} \oplus L\mathfrak{g}$, при этом генератор $U(1)$ -действия будет обозначаться через e_0 в соответствии с п. 10.1. Аналогичным образом группа петель LG заменяется на *расширенную группу петель* $U(1) \ltimes LG$, задаваемую полупрямым произведением группы петель LG и группу окружности $S^1 \equiv U(1)$.

Предположим, что $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ есть комплексная простая алгебра Ли и фиксируем картановскую подалгебру $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Соответствующее *корневое разложение* расширенной алгебры Ли $\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ относительно картановской подалгебры $\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ имеет вид

$$\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}e_0 \oplus \left[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} z^n \right] \oplus \left[\bigoplus_{(n, \alpha)} \mathfrak{g}_{\alpha} z^n \right], \quad (16.1)$$

где $\mathfrak{g}_\alpha$ – корневые подпространства алгебры Ли $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Пары $a = (n, \alpha)$, где $n \in \mathbb{Z}$ и α есть корень алгебры $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ относительно $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$, называются *корнями* алгебры $L\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Их можно рассматривать как линейные функционалы на алгебре Ли $\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{C}$. Если ввести, в частности, функционал $\delta \in (\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{C})^*$, полагая

$$\delta(e_0) = 1, \quad \delta(\mathfrak{h}_\mathbb{C}) = 0,$$

то вся совокупность корней алгебры $\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ относительно $\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ будет задаваться элементами

$$\hat{\Delta} = \{\alpha + n\delta : \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{n\delta : n \in \mathbb{Z}\},$$

где Δ – множество корней алгебры $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ относительно $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$. Соответственно, множество положительных корней алгебры $\mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ относительно $\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ будет отождествляться с

$$\hat{\Delta}^+ = \{\alpha + n\delta : \alpha \in \Delta, n > 0\} \cup \{n\delta : n > 0\} \cup \Delta^+,$$

где Δ^+ – множество положительных корней алгебры $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ относительно $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$. Если $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ есть система простых корней алгебры $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ относительно $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$, и A – старший корень в Δ^+ , то любой корень в $\hat{\Delta}^+$ запишется в виде

$$n_0\alpha_0 + n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$$

с неотрицательными целыми коэффициентами $n_0, n_1, \dots, n_l$, где $\alpha_0 := \delta - A$. Назовем $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ системой *аффинных простых корней* в $\hat{\Delta}$.

Сопоставим произвольному корню $a = (n, \alpha)$ *корневое подпространство* $\mathfrak{g}_{(n, \alpha)}$ в $L\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, задаваемое посредством

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{(n, \alpha)} &= \mathfrak{g}_\alpha z^n \quad \text{при } \alpha \neq 0, \\ \mathfrak{g}_{(n, 0)} &= \mathfrak{h}_\mathbb{C} z^n \quad \text{при } \alpha = 0. \end{aligned}$$

Петлевой аналог разложения алгебры Ли $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-,$$

где $\mathfrak{n}^\pm$ – нильпотентные подалгебры алгебры $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ вида

$$\mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha,$$

имеет вид

$$L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},$$

где

$$N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^+ \oplus \left[\bigoplus_{n>0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot z^n \right], \quad N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^- \oplus \left[\bigoplus_{n<0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cdot z^n \right].$$

Петлевые аналоги борелевских подалгебр принимают вид

$$B^{\pm} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus N^{\pm} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

Рассмотрим теперь центральное расширение $\widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ алгебры петель $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Напомним (см. п. 8.2), что такое расширение определяется 2-коциклом на алгебре $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, задаваемым формулой

$$\omega(\xi, \eta) = \omega_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \xi(e^{i\theta}), \eta'(e^{i\theta}) \rangle d\theta, \quad \xi, \eta \in L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Как векторное пространство,

$$\widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}c,$$

а коммутационные соотношения имеют вид

$$[\xi + s c, \eta + t c] = [\xi, \eta] + \omega(\xi, \eta) c$$

с $\xi, \eta \in L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $s, t \in \mathbb{C}$. Обозначим соответствующее центральное расширение группы петель $LG_{\mathbb{C}}$ (см. п. 8.2) через $\widetilde{LG_{\mathbb{C}}}$.

Представления алгебры петель $L\mathfrak{g}$ и группы петель LG , рассматриваемые в этой главе, являются проективными и сплетаются с S^1 -действием. Это означает, что они возникают, на самом деле, из представлений *аффинной алгебры*

$$\widehat{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}e_0 \oplus \widetilde{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{C}e_0 \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}c$$

и *аффинной группы*

$$\widehat{LG_{\mathbb{C}}} := \mathbb{C}^* \ltimes \widetilde{LG_{\mathbb{C}}}.$$

Корневое разложение аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ имеет вид

$$\widehat{L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = \widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \oplus N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},$$

где

$$\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}e_0 \oplus \widetilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}c.$$

Соответственно,

$$\widehat{B^{\pm}\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} = \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}} \oplus N^{\pm}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

Имея корень $\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$, мы можем продолжить его на $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}$, полагая $\alpha(c) = \alpha(e_0) = 0$. Продолжим также функционал $\delta \in (\mathbb{C}e_0 \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^*$ на $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}$, полагая $\delta(c) = 0$. Удобно также ввести функционал $\beta \in (\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}})^*$, определяемый равенством

$$\beta(c) = 1, \quad \beta(e_0) = 0, \quad \beta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = 0.$$

Любой системе $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ аффинных простых корней можно сопоставить отвечающую ей систему ко-корней $\alpha_0^{\vee}, \alpha_1^{\vee}, \dots, \alpha_l^{\vee}$, где $\alpha_j^{\vee}$, $j = 1, \dots, l$ – ко-корни, отвечающие простым корням α_j алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, а

$$\alpha_0^{\vee} = -A^{\vee} + \frac{2c}{\langle A, A \rangle}$$

– аффинный ко-корень, отвечающий старшему корню $A \in \Delta^+$.

Обозначим через $\{\omega_1, \dots, \omega_l\}$ систему фундаментальных весов алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, двойственную к системе простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_l$. Можно ввести соответствующую ей систему $\{\hat{\omega}_0, \hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_l\}$ фундаментальных весов алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, двойственную к системе $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ аффинных простых корней, задав ее посредством

$$\hat{\omega}_i(\alpha_k^{\vee}) = \delta_{ik} \text{ при } 0 \leq i, k \leq l, \quad \hat{\omega}_i(e_0) = 0.$$

Тогда

$$\hat{\omega}_0 = \frac{1}{2}\langle A, A \rangle \beta, \quad \hat{\omega}_j = \omega_j + \langle \omega_j, A \rangle \beta, \quad 1 \leq j \leq l.$$

16.1.2. Представления старшего веса аффинных алгебр. Предположим, что $\rho: \widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} \rightarrow V$ есть представление алгебры петель $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, т.е. $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ -модуль. Сопоставим произвольной линейной форме на $\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}$, т.е. элементу пространства $\lambda \in (\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}})^*$, подпространство

$$V_{\lambda} = \{v \in V: \rho(h)v = \lambda(h)v \text{ при } h \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}\}.$$

Если $V_\lambda \neq 0$, то λ называется *весом* представления ρ , а подпространство V_λ – *весовым подпространством* представления ρ , отвечающим λ . Любой вектор $v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ называется *весовым вектором* представления ρ .

Вес $\lambda \in (\widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}})^*$ называется *доминантным целочисленным весом*, если значение $\lambda(\alpha_i^\vee)$ является неотрицательным целым числом для любого аффинного ко-корня $\alpha_i^\vee$, $0 \leq i \leq l$. Любой такой вес может быть записан в виде

$$\lambda = n_0 \hat{\omega}_0 + \dots + n_l \hat{\omega}_l + s \delta, \quad (16.2)$$

где $n_i = \lambda(\alpha_i^\vee)$, $0 \leq i \leq l$, и $s = \lambda(e_0) \in \mathbb{C}$. Соответственно, *антидоминантный целочисленный вес* $\lambda \in (\widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}})^*$ принимает неположительные целочисленные значения на аффинных ко-корнях $\alpha_i^\vee$, $0 \leq i \leq l$, и может быть записан в том же виде (16.2) с неположительными целочисленными коэффициентами n_i , $0 \leq i \leq l$.

Заданный вес $\lambda \in (\widehat{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}})^*$ можно продолжить на борелевскую подалгебру $\widehat{B^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$, полагая его равным нулю на $N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Рассмотрим $\widehat{L \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ -модуль вида

$$\widehat{V} \equiv \widehat{V}_\lambda = \mathcal{U}(\widehat{L \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{B^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}})} \mathbb{C}_\lambda,$$

где символ “ $\mathcal{U}$ ” обозначает универсальную обертывающую алгебру, а $\mathbb{C}_\lambda$ обозначает 1-мерный $\widehat{B^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ -модуль, т.е. комплексную прямую $\mathbb{C}$, наделенную действием борелевской подалгебры $\widehat{B^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$, задаваемым посредством: $z \mapsto \lambda(b)z$ для $b \in \widehat{B^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$, $z \in \mathbb{C}$. Так как

$$\widehat{L \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}} = N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \oplus \widehat{B^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}},$$

то из теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта вытекает, что

$$\mathcal{U}(\widehat{L \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}) \cong \mathcal{U}(N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathcal{U}(\widehat{B^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}).$$

Поэтому имеется естественный изоморфизм

$$\widehat{V}_\lambda \cong \mathcal{U}(N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}_\lambda.$$

Обозначим через $V \equiv V_\lambda$ фактор модуля $\widehat{V}$ по максимальному подмодулю в $\widehat{V}$, строго содержащемуся в $\widehat{V}$ (иными словами, по максимальному подмодулю, не содержащему $1 \otimes 1$). Построенный модуль V , наделенный естественным действием алгебры

$\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, называется *стандартным представлением алгебры Ли* $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ со старшим весом λ и весовым вектором $1 \otimes 1$.

Более общим образом, скажем, что представление $\rho: \widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{End } V_{\lambda}$ аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ является *представлением старшего веса* с весом $\lambda \in (\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}})^*$, если существует вектор старшего веса $v_{\lambda} \in V_{\lambda}$ такой, что

1. $\rho(h)v_{\lambda} = \lambda(h)v_{\lambda}$ для любого $h \in \widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}}$;
2. $\rho(n)v_{\lambda} = 0$ для любого $n \in N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$;
3. V_{λ} порождается векторами $\rho(b)v_{\lambda}$ с $b \in \widehat{B^-} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Вектор старшего веса v_{λ} играет для представления старшего веса роль, аналогичную роли вакуума для представления Гейзенберга.

Аналогичным образом можно определить *представления младшего веса* аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$. Для этого нужно заменить в приведенном выше определении нильпотентную подалгебру $N^+ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ на нильпотентную подалгебру $N^- \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ и борелевскую подалгебру $\widehat{B^-} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ на борелевскую подалгебру $\widehat{B^+} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Стандартный $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$ -модуль V_{λ} , определенный выше, является неприводимым представлением старшего веса алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}}_{\mathbb{C}}$, если вес $\lambda \in (\widehat{\mathfrak{h}}_{\mathbb{C}})^*$ является целочисленным доминантным весом. Более того, в статье [23] доказано, что если значение $\lambda(e_0)$ вещественно, то V_{λ} допускает положительно определенное (контравариантное) эрмитово скалярное произведение. Обозначим через $H \equiv H_{\lambda}$ пополнение пространства $V \equiv V_{\lambda}$ относительно этого скалярного произведения. Пространство H_{λ} будет играть роль фоковского пространства, ассоциированного с весом λ .

§ 16.2. Представления групп петель

В этом параграфе приводятся некоторые общие свойства неприводимых представлений аффинных групп $\widehat{LG}^{\mathbb{C}}$, а также конструкция Бореля–Вейля для группы $\widehat{LG}^{\mathbb{C}}$.

16.2.1. Неприводимые представления аффинных групп. Рассмотрим аффинную группу

$$\widehat{LG} := U(1) \ltimes \widehat{LG}$$

и фиксируем максимальный *тор* $\widehat{T}$ в $\widehat{LG}$, равный по определению

$$\widehat{T} := U(1) \times T \times S.$$

Здесь, первый сомножитель $U(1) = S^1$ совпадает с группой поворотов, второй сомножитель T является максимальным тором в G , а третий сомножитель $S = S^1$ есть центральная подгруппа в $\widehat{LG}$.

Любое неприводимое представление аффинной группы $\widehat{LG}$ обладает единственным старшим весом λ , являющимся характером максимального тора $\widehat{T}$. Этот характер имеет вид

$$\lambda = (n, \lambda_0, h),$$

где $n \in \mathbb{Z}$ есть собственное значение оператора S^1 -поворотов e_0 , называемое *энергией* представления, λ_0 – характер тора T , а $h \in \mathbb{Z}$ – собственное значение оператора центрального действия, называемое *уровнем* представления. Старшие веса группы $\widehat{LG}$ являются целочисленными и доминантными и классы эквивалентности неприводимых представлений этой группы находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством целочисленных доминантных весов.

Аналогичное описание неприводимых представлений аффинной группы петель $\widehat{LG}$ можно дать и в терминах младших весов.

16.2.2. Конструкция Бореля–Вейля. Рассмотрим пространство петель вида (см. п. 7.6)

$$\Omega_T G = LG/T = LG^{\mathbb{C}}/B^+G^{\mathbb{C}}.$$

В терминах центральных расширений $\Omega_T G$ может быть записано в виде

$$\Omega_T G = \widetilde{LG^{\mathbb{C}}} / \widetilde{B^+G^{\mathbb{C}}}.$$

Предположим, что λ является младшим весом максимального тора $\widetilde{T} = T \times S$. Продолжим его на $\widetilde{B^+G^{\mathbb{C}}}$, полагая $\lambda = 1$ на нильпотентной подгруппе $N^+G^{\mathbb{C}}$ в

$$\widetilde{B^+G^{\mathbb{C}}} = \widetilde{T^{\mathbb{C}}} \times N^+G^{\mathbb{C}}.$$

Определим голоморфное линейное расслоение $L = L_\lambda$ над $\Omega_T G$ посредством

$$L = \widetilde{LG^{\mathbb{C}}} \times_{\widetilde{B^+G^{\mathbb{C}}}} \mathbb{C} \longrightarrow \Omega_T G = \widetilde{LG^{\mathbb{C}}} / \widetilde{B^+G^{\mathbb{C}}},$$

где $\widetilde{B^+G^{\mathbb{C}}}$ действует на комплексной прямой $\mathbb{C}$ с помощью характера λ :

$$\widetilde{B^+G^{\mathbb{C}}} \ni b: z \longmapsto \lambda(b)z.$$

Обозначим через $\Gamma = \Gamma_\lambda$ векторное пространство голоморфных сечений расслоения $L = L_\lambda$. Сечения $s \in \Gamma$ можно отождествить с голоморфными функциями $\dot{s}: \widetilde{LG}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющими условию

$$\dot{s}(\gamma b^{-1}) = \lambda(b)\dot{s}(\gamma)$$

для любых $b \in \widetilde{B^+G}^{\mathbb{C}}$, $\gamma \in \widetilde{LG}^{\mathbb{C}}$. Группа $\widetilde{LG}^{\mathbb{C}}$ действует естественным образом на L и Γ и это действие задает голоморфное представление группы $\widetilde{LG}^{\mathbb{C}}$ на Γ . Заметим, что пространство Γ является *нетривиальным* (т.е. содержит ненулевые голоморфные сечения расслоения L) *тогда и только тогда, когда вес λ антидоминантен* (см. [65], предложение 11.3.1). При этом условии можно показать (см. [65], предложение 11.1.1), что соответствующее представление группы петель $\widetilde{LG}$ является неприводимым представлением группы $\widetilde{LG}$ с младшим весом λ . Более того, доказывается (см. [65], предложение 11.2.3), что любое неприводимое представление группы $\widetilde{LG}$ существенно эквивалентно некоторому представлению вида Γ_λ .

Заметим, что Γ содержит одномерное подпространство сечений, инвариантных относительно действия нильпотентной подгруппы $N^-G^{\mathbb{C}}$. Действительно, из представления (7.18) в п. 7.6 следует, что пространство $\Omega_T G$ содержит плотную открытую орбиту, проходящую через начало $o \in \Omega_T G$, которую можно отождествить с подгруппой $N^-G^{\mathbb{C}}$. Следовательно, любое $N^-G^{\mathbb{C}}$ -инвариантное сечение из Γ однозначно определяется своим значением в o . Выберем в качестве вакуума вектор младшего веса $v = v_\lambda$, который задается $N^-G^{\mathbb{C}}$ -инвариантным сечением из Γ , равным 1 в начале o .

Имеется эрмитово скалярное произведение, определенное на плотном подпространстве в Γ . Именно, рассмотрим анти-двойственное подпространство $\bar{\Gamma}^*$ и рассмотрим на нем комплексно-линейное отображение $\beta: \bar{\Gamma}^* \rightarrow \Gamma$, значение которого на элементе $\xi \in \bar{\Gamma}^*$ есть сечение $\beta(\xi) \in \Gamma$, которое отождествляется с функцией $\dot{\beta}(\xi)$ на $\widetilde{LG}^{\mathbb{C}}$, равной

$$\dot{\beta}(\xi)(\gamma) := \xi(\gamma \cdot v) \quad \text{при } \gamma \in \widetilde{LG}^{\mathbb{C}}.$$

Пользуясь этим отображением, определим эрмитово скалярное произведение двух элементов $\xi, \eta \in \bar{\Gamma}^*$ равенством

$$\langle \xi, \eta \rangle := \eta \left(\overline{\dot{\beta}(\xi)} \right).$$

Построенное скалярное произведение на $\bar{\Gamma}^*$ положительно определено и мы обозначим через $H = H_\lambda$ пополнение пространства $\bar{\Gamma}^*$ относительно этого скалярного произведения, так что $\bar{\Gamma}^* \subset H \subset \Gamma$. Пространство H играет роль фоковского пространства, ассоциированного с младшим весом λ .

Элементы ϵ_γ пространства $\bar{\Gamma}^*$ с $\gamma \in \widetilde{LG}$, определяемые равенством

$$\epsilon_\gamma(s) := \overline{\dot{s}(\bar{\gamma}^{-1})}, \quad s \in \Gamma,$$

играют роль когерентных состояний. Их скалярное произведение равно

$$\langle \epsilon_{\gamma_1}, \epsilon_{\gamma_2} \rangle = v(\gamma_2 \bar{\gamma}_1^{-1}),$$

а сами они порождают плотное подмножество в $\bar{\Gamma}^*$.

§ 16.3. Твисторная интерпретация $\Omega_T G$

Имеются два различных подхода к геометрическому квантованию пространства петель $\Omega_T G$. Один из методов состоит в том, чтобы заменить исходную классическую систему $(\Omega_T G, \widehat{L\mathfrak{g}} \rtimes \text{vir})$ расширенной системой. Этого можно добиться сначала расширяя фазовое пространство $\Omega_T G$ до соболевского пространства HG полудифференцируемых петель в G (см. п. 9.1), а затем вкладывая HG в пространство $VG := H^{1/2}(S^1, \text{GL}(V))$, пользуясь точным представлением группы G в пространстве V . Соответственно, алгебру наблюдаемых $\widehat{L\mathfrak{g}} \rtimes \text{vir}$ нужно расширить до алгебры $\mathcal{A}$, которая является расширением полупрямого произведения алгебры $H\mathfrak{g}$, вложенной в $V\mathfrak{g} := H^{1/2}(S^1, \text{End}(V))$, и алгебры Ли симплектической группы Гильберта–Шмидта $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$, естественно действующей на VG и $V\mathfrak{g}$. Квантование исходной системы получается посредством квантования расширенной системы с последующим сужением до исходной системы. Указанный метод был использован в главе 15 при квантовании пространства петель $\Omega\mathbb{R}^d$. В этой главе мы используем более прямой подход, основанный на конструкции Гудмана–Уоллаха, задающей проективное действие группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$ на представлениях аффинной алгебры $\widehat{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ и аффинной группы $\widehat{LG^{\mathbb{C}}}$.

16.3.1. Проективное представление группы $\text{Vect}(S^1)$. Проективное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$, упомянутое во введении

к этому параграфу, получается экспоненцированием проективного представления алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$, которое строится в этом пункте.

Выберем ортонормированный базис $\{e_\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, N$, алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно инвариантного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}$. Тогда элементы

$$e_\alpha(n) := e_\alpha z^n, \quad z = e^{i\theta}, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad n \in \mathbb{Z},$$

будут образовывать базис в векторном пространстве $L\mathfrak{g}^\mathbb{C}$.

Введем при $k \in \mathbb{Z}$ операторы, задаваемые формальными рядами

$$\Delta_k := \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\alpha=1}^N :e_\alpha(n) e_\alpha(k-n):,$$

где *нормально упорядоченное произведение* $: \cdot : \cdot :$ определяется по правилу

$$:e(m)e(n): = \begin{cases} e(m)e(n) & \text{при } m \leq n, \\ e(n)e(m) & \text{при } m > n. \end{cases}$$

Действие операторов Δ_k на элементы $v \in V$ корректно определено, поскольку в этом случае ряды сводятся к конечным суммам (см. [23]). Другими словами, операторы Δ_k задают эндоморфизмы пространства V . Оператор Δ_k является однородным порядком k относительно действия оператора e_0 в том смысле, что

$$e_0 \Delta_k v = \Delta_k (e_0 + k) v \quad \text{для любого } v \in V.$$

Более того, для любого $\xi \in \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ выполняется следующее соотношение между операторами на V

$$[\xi(n), \Delta_k] = n \left(c + \frac{1}{2} \right) \xi(n+k).$$

Для заданного $\lambda \in (\widehat{L\mathfrak{h}^\mathbb{C}})^*$ обозначим через λ_0 его сужение на картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$ и положим $\rho = \sum_{j=1}^l \omega_j$. Тогда будем иметь следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 30 ([26]). Операторы $\Delta_0 + (c + \frac{1}{2})e_0$ и

$$[\Delta_m, \Delta_n] + \left(c + \frac{1}{2} \right) (n-m) \Delta_{m+n}$$

коммутируют с действием алгебры $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ на V . Более того,

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= -\mu e_0 + \left(\frac{1}{2} \langle \lambda_0, \lambda_0 + 2\rho \rangle + \mu \lambda(e_0) \right) I, \\ [\Delta_m, \Delta_n] &= \mu(m-n)\Delta_{m+n} + \delta_{m,-n} \nu m(m^2-1),\end{aligned}$$

где $\mu := \lambda(c) + \frac{1}{2}$, $\nu := \frac{\dim \mathfrak{g}}{12} \lambda(c) \mu$.

Пользуясь введенными операторами Δ_k , построим проективное действие алгебры $\text{Vect}(S^1)$ на V . Более точно, напомним (см. п. 10.1), что алгебра Вирасоро vir является центральным расширением алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$. Как векторное пространство, $\text{vir} = \text{Vect}(S^1) \oplus \mathbb{R}\kappa$, а скобка Ли задается посредством

$$[\xi + s\kappa, \eta + t\kappa] = [\xi, \eta] + \omega(\xi, \eta)\kappa,$$

где $\xi, \eta \in \text{Vect}(S^1)$, $s, t \in \mathbb{R}$, и ω есть коцикл Гельфанда–Фукса, определяемый на базисных элементах $\{e_n\}$ равенством

$$\omega(e_m, e_n) = \delta_{m,-n} \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 13 ([26]). Пусть $(V, \pi) \equiv (V_\lambda, \pi_\lambda)$ есть представление старшего веса алгебры $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ с доминантным целочисленным весом λ . Введем операторы

$$D_k := -\frac{1}{\mu} \Delta_k \text{ при } k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда представление π алгебры $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ на V может быть продолжено до представления $\hat{\pi}$ алгебры $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} \rtimes \text{vir}$ на V следующим образом

$$\hat{\pi}(e_k) = D_k, \quad \hat{\pi}(\kappa) = \frac{\dim \mathfrak{g}}{12\mu} \lambda(c) I.$$

Более того, на V имеется положительно определенная эрмитова форма, контравариантная относительно $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} \rtimes \text{vir}$.

Оператор $D_0 = \hat{\pi}(e_0)$ из теоремы 13, задаваемый формулой

$$D_0 = \pi(e_0) - \lambda(e_0) - \frac{\langle \lambda_0, \lambda_0 + 2\rho \rangle}{2\lambda(c) + 1},$$

диагонализуем на V и имеет собственные значения

$$\mu_i = -i - \frac{\langle \lambda_0, \lambda_0 + 2\rho \rangle}{2\lambda(c) + 1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Собственные подпространства оператора D_0 конечномерны и попарно ортогональны. Обозначим через T замыкание оператора $I - D_0$. Тогда T будет самосопряженным оператором, ограниченным снизу I и имеющим компактный обратный оператор T^{-1} . Поэтому по спектральной теореме все его степени T^t с $t \in \mathbb{R}$ корректно определены и мы можем положить

$$\|v\|_t := \|T^t v\| \quad \text{для любого } v \in V.$$

Обозначим через $H^t \equiv H_\lambda^t$ пополнение пространства $V \equiv V_\lambda$ по норме $\|\cdot\|_t$ и положим

$$H^\infty \equiv H_\lambda^\infty = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} H_\lambda^t, \quad H^{-\infty} \equiv H_\lambda^{-\infty} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} H_\lambda^t.$$

Скалярное произведение на H порождает полуторалинейное спаривание между H^∞ и $H^{-\infty}$, а оператор T^t задает изоморфизм между пространствами H^s и H^{t-s} , задавая спаривание между ними, определяемое равенством

$$(u, v) := (T^t u, T^{-t} v) \quad \text{при } u \in H^t, \quad v \in H^{-t},$$

где скалярное произведение справа берется в пространстве H .

16.3.2. Конструкция Гудмана–Уолаха. Продолжим естественное правое действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на $L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, задаваемое заменой переменной, на алгебру $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$, требуя, чтобы $\text{Diff}_+(S^1)$ действовала тривиально на центральной подалгебре в $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$. Для $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ обозначим действие f на $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ через $\xi \mapsto \xi_f$, $\xi \in \widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$.

Для заданного представления старшего веса $(V, \pi) \equiv (V_\lambda, \pi_\lambda)$ алгебры $\widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ определим действие $f \in \text{Diff}_+(S^1)$ на (V, π) , полагая

$$f: \pi \longmapsto \pi_f, \quad \text{где } \pi_f(\xi)v := \pi(\xi_f)v$$

для $\xi \in \widetilde{L\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$, $v \in V$. Заметим, что для $v \in H^\infty$ образ $\pi(\xi_f)v$ снова принадлежит H^∞ . Основной результат работы [26] утверждает, что представления π и π_f унитарно эквивалентны. Более точно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 14 (ГУДМАН–УОЛАХ [26]). *Существует унитарное проективное действие σ группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на $H \equiv H_\lambda$ такое, что отображение*

$$\text{Diff}_+(S^1) \times H^n \longrightarrow H^n, \quad (f, v) \longmapsto \sigma(f)v,$$

непрерывно для любого $n \geq 0$ и

$$\sigma(f)\pi_f(\xi)v = \pi(\xi)\sigma(f)v$$

для любых $v \in H^\infty$, $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, $\xi \in \widetilde{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$.

Более того, в работе [26] доказано, что указанное $\text{Diff}_+(S^1)$ -действие на H однозначно определено с точностью до проективной эквивалентности. Более подробно, предположим, что τ – другое проективное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на H такое, что $\tau_f H^\infty \subset H^\infty$ для любого $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, которое сплетает представления π и π_f , т.е.

$$\tau_f \pi_f(\xi) = \pi(\xi) \tau_f$$

для любых $f \in \text{Diff}_+(S^1)$, $\xi \in \widetilde{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$. Тогда найдется непрерывное отображение $\mu: \text{Diff}_+(S^1) \rightarrow S^1$ такое, что $\tau_f = \mu(f)\sigma_f$.

16.3.3. Твисторное квантование пространства $\Omega_T G$.

В пункте 16.2.2 мы построили для любого младшего веса λ алгебры петель $\widetilde{L\mathfrak{g}}$ голоморфное линейное расслоение $L \equiv L_\lambda \rightarrow \Omega_T G$ и пространство $\Gamma \equiv \Gamma_\lambda$ его голоморфных сечений, на котором реализуется представление группы петель $\widetilde{LG}$ с младшим весом λ . Мы обозначили через $H \equiv H_\lambda$ пополнение пространства $\bar{\Gamma}^*$ относительно естественной нормы на $\bar{\Gamma}^*$.

Указанная конструкция зависит на самом деле от комплексной структуры на пространстве $\Omega_T G$, индуцируемой комплексным представлением

$$\Omega_T G = LG^{\mathbb{C}}/B^+ G^{\mathbb{C}}.$$

Обозначим эту комплексную структуру через J^0 , а соответствующие пространства сечений Γ_λ и H_λ соответственно через Γ_0 и H_0 , так что у нас имеется представление π_0 группы $\widetilde{LG}$ в пространстве Γ_0 .

Если мы меняем указанную комплексную структуру на комплексную структуру J_f под действием диффеоморфизма $f \in$

$\text{Diff}_+(S^1)$, то, пользуясь снова конструкцией Бореля–Вейля, мы можем реализовать представление младшего веса π_f группы $\widetilde{LG}$, отвечающее младшему весу λ , в пространстве Γ_f сечений расслоения L , голоморфных относительно комплексной структуры J_f на $\Omega_T G$. Обозначим сопутствующее пополнение пространства $\bar{\Gamma}_f^*$ через H_f .

В согласии с конструкцией Гудмана–Уолаха, имеется проективное унитарное действие

$$U_f: \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_f$$

группы $\text{Diff}_+(S^1)$, сплетающее представления π_0 и π_f :

$$\pi_f U_f(v) = U_f \pi_0(v) \text{ для } v \in H_0.$$

Оно однозначно определяется условием нормировки, накладываемым на вектора младшего веса: $U_f v_0 = v_f$, и задает непрерывный унитарный оператор

$$U_f: H^0 \longrightarrow H^f.$$

Тем самым, как и в п. 15.4, мы получаем голоморфное гильбертово расслоение

$$H = \bigcup_{f \in \mathcal{S}} H_f$$

и проективное унитарное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на H , задаваемое отображением $f \mapsto U_f$, накрывающим естественное $\text{Diff}_+(S^1)$ -действие на многообразии $\mathcal{S}$. Инфинитезимальная версия этого действия дает проективное унитарное представление ρ алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ младшего веса λ в пространстве H_0 , построенное ранее в п. 16.3.1.

Имея проективное представление ρ алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$, мы можем построить $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантную связность $\mathbf{A}$ на расслоении $H \rightarrow \mathcal{S}$, кривизна которой в начале $o \in \mathcal{S}$ совпадает с коциклом ρ , задаваемым в базисе $\{e_k\}$ формулой (см. [53], [54])

$$[\rho(e_m), \rho(e_n)] - \rho([e_m, e_n]) = \frac{c(\mathfrak{g})}{12} (m^3 - m) \delta_{m, -n},$$

где

$$c(\mathfrak{g}) = \frac{h \dim \mathfrak{g}}{h + \kappa(\mathfrak{g})},$$

а $\kappa(\mathfrak{g})$ – двойственное число Кокстера алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см., например, [77]).

Конструкция связности $\mathbf{A}$ аналогична конструкции из п. 15.4.2. Именно, у нас имеется снова разложение алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$ в прямую сумму

$$\text{Vect}(S^1) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{m},$$

где $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ – алгебра Ли группы Мебиуса $\text{Möb}(S^1)$ и $\mathfrak{m} \cong T_0 \mathcal{S}$. Это разложение, на самом деле, индуцировано разложением (15.11) из п. 15.4.2 относительно вложения алгебры $\text{Vect}(S^1)$ в алгебру $\mathfrak{sp}_{\text{HS}}(H_0)$. Указанное разложение вместе с проективным представлением $\rho: \text{Vect}(S^1) \rightarrow \text{End}(H_0)$ определяет, как и в п. 15.4.2, $\text{Diff}_+(S^1)$ -инвариантную связность $\mathbf{A}$ в расслоении $H \rightarrow \mathcal{S}$, кривизна которой в начале $o \in \mathcal{S}$ совпадает с коциклом представления ρ .

Рассмотрим теперь, как и в п. 15.5.2, расслоение квантования

$$\mathcal{H} := H \otimes K^{-1/2} \rightarrow \mathcal{S}$$

и наделим его связностью тензорного произведения $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} := \mathbf{A} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{B},$$

где $\mathbf{B}$ – связность на расслоении $K^{-1/2}$, построенная в п. 15.5.1. Кривизна связности $\mathbf{C}$ в базисе $\{e_k\}$ равна

$$R_{\mathbf{C}}(e_m, e_n) = \frac{c(\mathfrak{g}) - 26}{12} (m^3 - m) \delta_{m, -n}$$

и обращается в нуль в точности при $c(\mathfrak{g}) = 26$. При этом условии мы получаем плоскую унитарную связность на расслоении $\mathcal{H}$. Интегрируя ее, получим унитарное действие группы $\text{Diff}_+(S^1)$ на расслоении $\mathcal{H}$, которое определяет геометрическое квантование системы $(\Omega_T G, \mathcal{A})$ в пространстве H_0 .

Библиографические указания

В изложении п. 16.1 мы следуем в основном статьям [23], [26]. Конструкция Бореля–Вейля представлений младшего веса группы петель представлена в главе 11 книги Прессли–Сигала [65]. Проективное действие группы диффеоморфизмов $\text{Diff}_+(S^1)$ на представлениях младшего веса алгебры петель подробно исследуется в статье Гудмана–Уолаха [26]. Его инфинитезимальная версия, т.е. проективное представление алгебры Ли $\text{Vect}(S^1)$, задаваемое операторами D_k из п. 16.3.1, хорошо известна и может быть найдена, например, в книгах [38], [65]. Геометрическое квантование пространств петель компактных групп Ли было впервые построено Микельсоном [53], [54].

Список литературы

- [1] L. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Van Nostrand, Princeton, 1966 [MR 0200442](#), [Zbl 0138.06002](#); Перевод на русский язык: Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969 [MR 0243060](#).
- [2] L. Ahlfors, L. Bers, “Riemann’s mapping theorem for variable metrics”, *Ann. Math.*, **72** (1960), 385–404 [doi 10.2307/1970141](#), [MR 115006](#), [Zbl 0104.29902](#).
- [3] L. Ahlfors, “Some remarks on Teichmüller’s space of Riemann surfaces”, *Ann. Math.*, **74** (1961), 171–191 [doi 10.2307/1970309](#), [MR 204641](#), [Zbl 0146.30602](#).
- [4] V.I. Arnold, “Small denominators I; on the mapping of a circle into itself”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **46** (1961), 213–284.
- [5] M.F. Atiyah, “Instantons in two and four dimensions”, *Commun. Math. Phys.*, **93** (1984), 437–451 [doi 10.1007/BF01212288](#), [MR 763752](#), [Zbl 0564.58040](#), [ADS 1984CMath..93..437A](#); Перевод на русский язык в книге: Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969 [MR 0243060](#).
- [6] R.J. Baston, M.G. Eastwood, *The Penrose Transform: its Interaction with Representation Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1989 [MR 1038279](#), [Zbl 0726.58004](#).
- [7] Ф.А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1986 [MR 0869059](#), [Zbl 0678.58044](#).
- [8] G.D. Birkhoff, “Singular points of ordinary differential equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1909), 436–470 [doi 10.2307/1988594](#), [MR 1500848](#), [JFM 40.0352.02](#).
- [9] G.D. Birkhoff, “Equivalent singular points of ordinary linear differential equations”, *Math. Ann.*, **74** (1913), 134–139 [doi 10.1007/BF01455347](#), [MR 1511754](#), [JFM 44.0373.01](#).
- [10] A. Borel, “Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 1147–1151 [doi 10.1073/pnas.40.12.1147](#), [MR 77878](#), [Zbl 0058.16002](#), [ADS 1954PNAS...40.1147B](#).
- [11] R. Bott, “On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms”, *Enseign. math.*, **23**:3–4 (1977), 209–220 [MR 488080](#), [Zbl 0367.57004](#).
- [12] R. Bowen, “Hausdorff dimension of quasicircles”, *Publ. Math. IHES*, **50** (1979), 259–273 [MR 0556580](#), [ADS 1979LMath...3..259B](#).
- [13] M.J. Bowick, A. Lahiri, “The Ricci curvature of $\text{Diff } S^1/\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ”, *J. Math. Phys.*, **29** (1988), 1979–1981 [doi 10.1063/1.527854](#), [MR 957224](#), [Zbl 0679.58013](#), [ADS 1988JMP....29.1979B](#).
- [14] M.J. Bowick, S.G. Rajeev, “The holomorphic geometry of closed bosonic string theory and $\text{Diff } S^1/S^1$ ”, *Nucl. Phys. B*,

- 293** (1987), 348–384 [doi 10.1016/0550-3213\(87\)90076-9](#), [MR 908048](#), [ADS 1987NuPhB.293..348B](#).
- [15] F. E. Burstall, J. H. Rawnsley, *Twistor Theory for Riemannian Symmetric Spaces. With Applications to Harmonic Maps of Riemann Surfaces*, Lecture Notes in Math., **1424**, 1990 [MR 1059054](#), [Zbl 0699.53059](#).
- [16] A. Connes, *Geometrie Non Commutative*, Interditions, Paris, 1990 [MR 1079062](#), [Zbl 0745.46067](#).
- [17] Й. Давидов, А. Г. Сергеев, “Твисторное квантование пространств петель”, Тр. МИАН, **217**, 1997, 5–99 [MR 1632104](#), [Zbl 0979.53095](#).
- [18] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *Geometry of Four-Manifolds*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1990 [MR 1079726](#), [Zbl 0820.57002](#).
- [19] A. Douady, C. J. Earle, “Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle”, *Acta Math.*, **157** (1986), 23–48 [doi 10.1007/BF02392590](#), [MR 857678](#), [Zbl 0615.30005](#).
- [20] C. J. Earle, J. Eells, “On the differential geometry of Teichmüller spaces”, *J. Analyse Math.*, **19** (1967), 35–52 [doi 10.1007/BF02788708](#), [MR 220923](#), [Zbl 0156.30604](#).
- [21] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс, “Когомологии групп и алгебр Ли”, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **21**, VINITI, Moscow, 1988, 121–209 [MR 968446](#).
- [22] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984 [MR 0874337](#).
- [23] H. Garland, “The arithmetic theory of loop algebras”, *J. Algebra*, **53** (1978), 480–581 [doi 10.1016/0021-8693\(78\)90294-6](#), [MR 502647](#).
- [24] F. W. Gehring, J. Väisälä, “Hausdorff dimension and quasiconformal mappings”, *J. London Math. Soc.*, **6** (1973), 504–512 [doi 10.1112/jlms/s2-6.3.504](#), [MR 324028](#), [Zbl 0258.30020](#).
- [25] И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, “Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности”, *Функц. анализ и его прилож.*, **2** (1968), 92–93 [doi 10.1007/BF01075687](#), [MR 0245035](#).
- [26] R. Goodman, N. R. Wallach, “Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle”, *J. reine angew. Math. B*, **347** (1984), 67–133 [MR 0733047](#).
- [27] R. Goodman, N. R. Wallach, “Projective unitary positive-energy representations of $\text{Diff}(S^1)$ ”, *J. Funct. Anal.*, **63** (1985), 299–321 [doi 10.1016/0022-1236\(85\)90090-4](#), [MR 808265](#), [Zbl 0636.22013](#).
- [28] M. Goto, F. D. Grosshans, *Semisimple Lie Algebras*, M. Dekker, New York–Basel, 1978 [MR 0573070](#), [Zbl 0391.17004](#).
- [29] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977 [MR 0516965](#), [Zbl 0364.53011](#).
- [30] L. Guieu, “Nombre de rotation, structures géométriques sur un cercle et groupe de Bott–Virasoro”, *Ann. Inst. Fourier*, **46** (1996), 971–1009 [MR 1415954](#).

- [31] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algebres de Lie*, Cedic/Nathan, Paris, 1980 [MR 0644979](#), [Zbl 0464.22001](#).
- [32] R. S. Hamilton, “The inverse function theorem of Nash and Moser”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **7** (1982), 65–222 [doi 10.1090/S0273-0979-1982-15004-2](#), [MR 656198](#), [Zbl 0499.58003](#).
- [33] M. R. Herman, “Sur la groupe des difféomorphismes du tore”, *Ann. Inst. Fourier*, **23**:2, 75–86 [MR 391166](#), [Zbl 0269.58004](#).
- [34] M. R. Herman, “Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle a des rotations”, *Publ. Math. IHES*, **49** (1979), 5–234 [MR 538680](#).
- [35] L. Van Hove, “Sur certaines représentations unitaires des groupes infini de transformations”, *Mem. Acad. Roy. Belgique*, **26** (1951), 1–102 [MR 0057260](#).
- [36] S. T. Hu, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York, 1959 [MR 0106454](#).
- [37] N. E. Hurt, *Geometric Quantization in Action*, D. Reidel, Dordrecht–Boston–London, 1983 [MR 0689710](#), [Zbl 0505.22007](#).
- [38] V. G. Kac, A. K. Raina, *Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, World Scientific, Singapore, 1987 [MR 1021978](#).
- [39] A. A. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972 [MR 0412321](#).
- [40] A. A. Kirillov, “Infinite dimensional Lie groups: their orbits, invariants and representations”, *The geometry of moments*, Lect. Notes Math., **970**, 1982, 101–123 [doi 10.1007/BFb0066026](#), [MR 699803](#), [Zbl 0498.22017](#).
- [41] A. A. Кириллов, “Кэлерова структура на К-орбитах группы диффеоморфизмов окружности”, *Функц. анализ и его прилож.*, **21** (1987), 42–45 [doi 10.1007/BF01078025](#), [MR 0902292](#), [Zbl 0647.58010](#).
- [42] A. A. Кириллов, “Геометрическое квантование”, *Динамические системы, IV*, Совр. проблемы матем. Фунд. направления, **4**, ВИНТИ, М., 1990, 141–178.
- [43] A. A. Kirillov, “The orbit method, I: geometric quantization; II: infinite-dimensional Lie groups and Lie algebras”, *Contemp. Math.*, **145** (1993), 1–63 [MR 1216179](#).
- [44] A. A. Кириллов, Д. В. Юрьев, “Кэлерова геометрия бесконечномерного однородного пространства $M = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Rot}(S^1)$ ”, *Функц. анализ и его прилож.*, **21** (1987), 35–46 [doi 10.1007/BF01077802](#), [Zbl 0671.58007](#).
- [45] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New York–London, 1963 [MR 0152974](#), [Zbl 0119.37502](#); русск. пер.: Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1981.

- [46] B. Kostant, “Quantization and unitary representations”, *Lect. Notes Math.*, **170**, 1970, 87–208 [doi 10.1007/BFb0079068](#), [MR 294568](#), [Zbl 0223.53028](#).
- [47] S. Lang, *Differential Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1985 [MR 0772023](#).
- [48] В. Ф. Лазуткин, Т. Ф. Панкратова, “Нормальные формы и версальные деформации для уравнения Хилла”, *Функц. анализ и его прилож.*, **9** (1975), 41–48 [doi 10.1007/BF01075876](#), [MR 467828](#), [Zbl 0357.34021](#).
- [49] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1987 [MR 0867407](#), [Zbl 0606.30001](#).
- [50] L. Lempert, “The Virasoro group as a complex manifold”, *Math. Res. Lett.*, **2** (1995), 475–495 [MR 1355709](#).
- [51] L. Lempert, “Loop spaces as complex manifolds”, *J. Differ. Geom.*, **38** (1993), 519–543 [MR 1243785](#), [Zbl 0792.58008](#).
- [52] R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan, “On the dynamics of rational maps”, *Ann. Sci. École Norm. Super.*, **16** (1983), 193–217 [MR 732343](#), [Zbl 0524.58025](#).
- [53] J. Mickelsson, “String quantization on group manifolds and the holomorphic geometry of $\text{Diff } S^1/S^1$ ”, *Commun. Math. Phys.*, **112** (1987), 653–661 [doi 10.1007/BF01225379](#), [MR 910585](#), [Zbl 0629.58035](#), [ADS 1987CmaPh.112..653M](#).
- [54] J. Mickelsson, *Current algebras and groups*, Plenum Press, New York, 1989 [MR 1032521](#), [Zbl 0726.22015](#).
- [55] J. W. Milnor, “Remarks on infinite dimensional Lie groups”, *Relativity, groups and topology II* (Les Houches Session XL, 1983), eds. B. S. de Witt, R. Stora, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1010–1057 [MR 0830252](#).
- [56] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Wiley Interscience, New York, 1988 [MR 0927291](#).
- [57] S. Nag, “A period mapping in universal Teichmüller space”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **26** (1992), 280–287 [doi 10.1090/S0273-0979-1992-00273-2](#), [MR 1121571](#), [Zbl 0749.32013](#).
- [58] S. Nag, D. Sullivan, “Teichmüller theory and the universal period mapping via quantum calculus and the $H^{1/2}$ space on the circle”, *Osaka J. Math.*, **32** (1995), 1–34 [MR 1323099](#), [Zbl 0820.30027](#).
- [59] S. Nag, A. Verjovsky, “ $\text{Diff}(S^1)$ and the Teichmüller spaces”, *Comm. Math. Phys.*, **130** (1990), 123–138 [doi 10.1007/BF02099878](#), [MR 1055689](#), [Zbl 0705.32013](#), [ADS 1990CmaPh.130..123N](#).
- [60] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980 [MR 0827223](#).

- [61] А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Физматлит, М., 1995 [MR 1266842](#), [Zbl 0796.57001](#).
- [62] A. Pflüger, “Über die Konstruktion Riemannscher Flächen durch Verhäftung”, *J. Indian Math. Soc.*, **24** (1961), 401–412 [MR 0132827](#).
- [63] A. D. Popov, A. G. Sergeev, “Symplectic twistors and geometric quantization of strings”, *Algebraic geometry and its applications*, Aspects of Math., **E25**, eds. A. Tikhomirov, A. Tyurin, Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1994, 137–157 [MR 1282025](#).
- [64] S. Power, “Hankel operators on Hilbert space”, *Research Notes in Math.*, **64**, 1982 [MR 666699](#), [Zbl 0489.47011](#), [ADS 1982noop.conf.....P](#).
- [65] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1986 [MR 0900587](#), [Zbl 0618.22011](#); русск. пер.: А. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990.
- [66] G. Segal, “Unitary representations of some infinite dimensional groups”, *Commun. Math. Phys.*, **80** (1981), 301–342 [doi 10.1007/BF01208274](#), [MR 0626704](#), [Zbl 0495.22017](#), [ADS 1981CMAph..80..301S](#).
- [67] A. G. Sergeev, “The group of quasisymmetric homeomorphisms of the circle and quantization of the universal Teichmüller space”, *SIGMA*, **5** (2009), 01–20 [Mi sigma347](#), [MR 2481477](#).
- [68] J.-P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1992 [MR 1176100](#), [Zbl 0742.17008](#).
- [69] D. Shale, “Linear symmetries of free boson field”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1962), 149–167 [doi 10.2307/1993745](#), [MR 137504](#), [Zbl 0171.46901](#).
- [70] J.-M. Souriau, *Structure des Systèmes Dynamiques*, Dunod, Paris, 1970 [MR 0260238](#), [Zbl 0186.58001](#).
- [71] J. Sniatycki, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1980 [MR 0554085](#), [Zbl 0429.58007](#).
- [72] М. С. Стригунова, “Конечномерные подалгебры в алгебре Ли векторных полей на окружности”, *Тр. МИАН*, **236**, 2002, 338–342 [MR 1931034](#), [Zbl 1013.37017](#).
- [73] G. M. Tuynman, *Geometric Quantization*, CWI Syllabus, Amsterdam, 1985 [MR 0827498](#), [Zbl 0584.58018](#).
- [74] K. Uhlenbeck, “Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model)”, *J. Diff. Geom.*, **30** (1989), 1–50 [MR 1001271](#), [Zbl 0677.58020](#).
- [75] M. Vergne, “Second quantification et groupe symplectique”, *C.R. Acad. Sci. Ser. A*, **285** (1977), 191–194 [MR 457643](#), [Zbl 0386.22014](#).
- [76] Э. Б. Винберг, В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, *Группы и алгебры Ли, III*, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **41**, ВИНТИ, М., 1990 [MR 1349140](#), [Zbl 0797.22001](#).

- [77] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988 [MR 1064110](#), [Zbl 0722.22004](#).
- [78] H. C. Wang, “Closed manifolds with complex homogeneous structure”, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 1–32 [doi 10.2307/2372397](#), [MR 66011](#), [Zbl 0055.16603](#).
- [79] E. Witten, “Coadjoint orbits of the Virasoro group”, *Commun. Math. Phys.*, **114** (1988), 1–53 [doi 10.1007/BF01218287](#), [MR 925520](#), [Zbl 0632.22015](#), [ADS 1988CMaPh.114....1W](#).
- [80] N. M. J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, 2nd ed., Clarendon Press, 1992 [MR 1183739](#).
- [81] В.А. Зайцева, В.В. Круглов, А.Г. Сергеев, М.С. Стригунова, К.А. Трушкин, “Замечания о группах петель компактных групп Ли и группе диффеоморфизмов окружности”, *Тр. МИАН*, **224**, 1999, 139–151 [MR 1721359](#), [Zbl 0968.22017](#).
- [82] A. Zygmund, *Trigonometric Series I, II*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987; русск. пер.: А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, ГОНТИ, М., 1939.

Предметный указатель

- алгебра Вирасоро, 160
- алгебра Гейзенберга $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, 208
- алгебра Гейзенберга $\text{heis}(V)$, 245
- алгебра Ли касательных векторных полей $\text{Vect}(X)$, 46
- алгебра Ли касательных векторных полей на окружности $\text{Vect}(S^1)$, 46
- алгебра Ли–Фреше, 38
- алгебра наблюдаемых, 206, 208
 - комплексифицированная, 210
- алгебра петель, 41
- анти-доминантный
 - целочисленный вес, 268
- антидоминантный вес, 70
- антиканоническое расслоение K_J^{-1} , 226
- атлас, 21
- аффинная алгебра, 266
- аффинная группа, 266
- аффинный простой корень, 265

- BKS-квантование, 237
- BKS-спаривание, 235
- базисное скалярное
 - произведение на простой алгебре Ли, 140
- базисное центральное
 - расширение группы петель, 140
- банахова группа Ли, 38
- банахово многообразие, 21
- банахово пространство, 16
- борелевская подалгебра, 64

- Бореля–Вейля конструкция для группы петель, 270
- вакуум, 247
- вектор старшего веса
 - аффинной алгебры, 268
- векторное расслоение Фреше, 25
- векторные поля типа $(0, 1)$, 36
- векторные поля типа $(1, 0)$, 36
- вертикальное подрасслоение, 29, 251
- вес представления, 68, 71, 267
- весовое подпространство, 68, 71, 267
- весовое разложение, 68, 71
- весовой вектор, 68, 71, 267
- вещественная поляризация, 218
- виртуальная мощность, 94
- виртуальная размерность, 90
- вложение Берса, 181
- внешнее произведение, 34
- внешние дифференцирования
 - алгебры Ли, 81
- внешняя производная, 33
- внутреннее
 - дифференцирование алгебры Ли, 81

- гамильтонова алгебра, 209
- геодезический путь, 30
- гильбертова группа Ли, 38
- гильбертово многообразие, 21
- главное расслоение Фреше, 39
- гладкое отображение
 - многообразий Фреше, 27
 - локальный представитель, 27

- гладкое расслоение, 22
 голоморфное отображение, 19
 горизонтальное подрасслоение, 29, 251
 горизонтальный путь, 30
 грассманиан $\text{Gr}^\infty(H)$, 95
 грассманиан $\text{Gr}_b(H)$, 88
 грассманиан
 Гильберта–Шмидта
 $\text{Gr}_{\text{HS}}(H)$, 92
 грассманово многообразие, 60
 группа Вирасоро, 161
 группа Вирасоро–Ботта, 161
 группа Гейзенберга $\text{Heis}(V)$, 245
 группа Гильберта–Шмидта
 $\text{GL}_{\text{HS}}(H)$, 91
 группа Ли–Фреше, 38
 группа диффеоморфизмов, 45
 группа диффеоморфизмов
 окружности $\text{Diff}(S^1)$, 24, 46
 группа диффеоморфизмов
 окружности $\text{Diff}_+(S^1)$, 24, 46
 группа петель, 41
 группа
 полудифференцируемых
 матричных функций
 $L_{1/2}(\text{GL}(n, \mathbb{C}))$, 150
 группа токов, 41
 Гудмана–Уолаха конструкция, 275

 двойственное представление
 Гейзенберга алгебры
 $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, 212
 двойственное число Кокстера, 277
 двойственный корень, 63

 действие группы, 39
 детерминантное расслоение
 Det , 99
 диск Зигеля $\mathcal{D}$, 198
 дифференциал Бельтрами, 101
 дифференциал коцепи, 80, 84
 дифференциал типа (m, n) , 102
 дифференциальная форма, 33
 дифференцирование алгебры, 258
 дифференцирование алгебры
 Ли, 81
 дифференцируемое
 отображение пространств
 Фреше, 17
 доминантный вес, 69
 доминантный целочисленный
 вес, 267
 допустимая комплексная
 структура, 202, 251
 допустимый базис, 96

 зигелев диск
 Гильберта–Шмидта $\mathcal{D}_{\text{HS}}$, 201

 иммерсия, 27
 инвариантное скалярное
 произведение на алгебре
 Ли, 120
 индекс оператора Фредгольма, 88
 интегральный оператор
 Кальдерона–Зигмунда, 108

 канонические координаты, 206
 канонический элемент
 параболической
 подалгебры, 66
 каноническое расслоение
 многообразия флагов, 67

карта, 21
картановская подалгебра, 61
касательное отображение, 27
касательное расслоение, 26
квадратичный дифференциал, 163
квазиконформное
отображение, 101
квазиконформное отражение, 106
квазикруг, 106
квазиокружность, 106
квазисимметричный
гомеоморфизм, 104, 106, 176
 G -инвариантный, 187
квазифуксова группа, 188
квантование Баргмана–Фока, 221
квантование Дирака, 209
квантованная наблюдаемая, 238, 240
квантуемая наблюдаемая, 238
классическая система, 206
ковариантная производная, 30
когерентное состояние, 248
когомологии алгебры Ли, 80
когомологии алгебры петель, 141
когомологии группы Ли, 84
кограничное отображение, 80
кокорень, 63
комплексификация алгебры Ли, 44
комплексификация группы Ли, 44
комплексифицированная
алгебра Ли касательных
векторных полей на
окружности $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$, 46
комплексифицированное
касательное расслоение, 36
комплексная дилатация
квазиконформного
отображения, 101
комплексная структура, 36
совместимая, 37
конструкция Бореля–Вейля, 70
конфигурационное
пространство, 206
координатное отображение, 21
координатные окрестности, 21
коприсоединенное действие, 74
коприсоединенное
представление, 74
коприсоединенное
представление группы
петель, 142
корень алгебры Ли, 62
корень алгебры петель $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 264
корневое подпространство, 62
корневое подпространство
алгебры петель $L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 265
корневое разложение, 62
корневое разложение алгебры
петель $\mathbb{C} \oplus L\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 264
корневой вектор, 62
коцень алгебры Ли, 79
коцень группы Ли, 83, 84
коцикл Ботта, 161
коцикл Гельфанда–Фукса, 160
коцикл проективного
представления, 78
коцикл центрального
расширения, 78
кривизна связности, 30
кэлера метрика, 37
кэлера поляризация, 219

- кэлерово многообразии Фреше, 37
- лево-инвариантное векторное поле, 38
- левый сдвиг, 38
- лемма Тейхмюллера, 185
- максимальная дилатация квазиконформного отображения, 102
- максимальный тор, 71
- максимальный тор в группе петель, 269
- матрица Картана, 63
- металинейная группа $ML(n, \mathbb{C})$, 227
- метаплектическая группа $Mp(2n, \mathbb{R})$, 231
- метаплектическая структура, 231
- метод орбит, 75
- метрика Вейля–Петерсона, 189
- младший вес, 70
- многообразии Фреше, 21
 - комплексное, 21
- многообразии полных флагов, 60, 71
- многообразии флагов, 59, 65
- непрерывно дифференцируемое отображение, 19
- непрерывно дифференцируемое отображение пространств Фреше, 17
- норма Гильберта–Шмидта, 90
- нормализованный квазисимметричный гомеоморфизм, 177
- нормальная форма Матье, 168
- нормально упорядоченное произведение, 273
- однородное линейное расслоение L_λ , 72
- оператор Гильберта–Шмидта, 90
- оператор Костанта–Сурьо r_{KS} , 215
- оператор Коши–Грина, 108
- оператор Фредгольма, 88
- оператор Хилла, 167
- оператор рождения, 223, 246
- оператор с детерминантом, 97
- оператор со следом, 96
- оператор уничтожения, 223, 246
- операторы Вирасоро, 256
- отображение Альфорса, 186
- отображение расслоений Фреше, 27
- параболическая подалгебра, 64
- перекрестное отношение, 104
- плюккерова координата, 98
- плюккерovo отображение, 98
- подгруппа Леви, 66
- подмногообразие Фреше, 21
- подмножества, соизмеримые с $\mathbb{Z}_+$, 94
- положительный корень, 63
- полубесконечная форма, 98
- полунорма, 15
- поляризация гильбертова пространства, 87
- поляризация симплектического многообразия, 218
- поляризованное сечение, 218
- последовательность Коши, 15
- послойное отображение, 18

послыйный оператор, 18
 почти комплексная структура, 35
 интегрируемая, 36
 формально интегрируемая, 36
 почти комплексное
 многообразие Фреше, 36
 право-инвариантное векторное поле, 38
 правый сдвиг, 38
 предквантование, 210
 предквантование
 Костанта–Сурьо, 215
 представление
 Баргмана–Фока, 223
 представление Гейзенберга алгебры $\text{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, 212
 представление Гейзенберга алгебры Гейзенберга $\text{heis}(V)$, 246
 представление Гейзенберга группы Гейзенберга $\text{Heis}^{\mathbb{C}}(V)$, 247
 представление младшего веса аффинной алгебры, 269
 представление старшего веса аффинной алгебры, 268
 присоединенное действие, 120
 присоединенное представление, 120
 продолжение w^{μ}
 квазиконформного отображения w , 112
 продолжение w_{μ}
 квазиконформного отображения w , 112
 проективное представление, 78
 производная, 17, 27
 n -го порядка, 20
 вторая, 20
 простой корень, 62
 пространство Баргмана–Фока, 222
 пространство Фреше, 16
 полное, 15
 топология, 15
 пространство голоморфных сечений Γ_{λ} , 72
 пространство квантования, 209
 пространство петель, 41, 116
 пространство петель $\Omega_T G$, 132
 пространство свободных петель, 23
 пространство центрированных петель, 41, 116
 пространство центрированных петель $\Omega \mathbb{R}^d$, 124
 расслоение J -реперов Fr_J , 226
 расслоение Фреше, 27
 расслоение квантования, 255
 расслоение кэлеровых реперов Fr_K , 232
 расслоение
 металинейных J -реперов $\widetilde{\text{Fr}}_J$, 228
 расслоение метаплектических реперов $\widetilde{\text{Fr}}_{\omega}$, 231
 расслоение предквантования, 134, 214
 автоморфизм, 215
 расслоение симплектических реперов Fr_{ω} , 231
 расслоенное произведение, 28
 расстояние Тейхмюллера, 180
 расширенная алгебра петель, 264
 расширенная группа петель, 264

- связность, 29
 - локальное представление, 29
 - символ Кристоффеля, 29
 - симметричная, 30
- связность Картана–Маурера, 38
- симметрическое пространство $N(F)$, 67
- симплектическая алгебра Ли
 - Гильберта–Шмидта $\text{sp}_{\text{HS}}(V)$, 249
- симплектическая группа
 - Гильберта–Шмидта $\text{Sp}_{\text{HS}}(V)$, 200, 248
- симплектическая структура, 35
 - совместимая, 37
- симплектическая форма
 - Кириллова, 74, 207
- симплектической многообразии
 - Фреше, 35
- скалярное произведение на алгебре Ли, 120
- след оператора, 97
- соболевская норма порядка $1/2$, 146
- соболевское пространство
 - полудифференцируемых петель HG , 150
- соболевское пространство
 - полудифференцируемых функций, 146, 244
- стандартная борелевская подалгебра, 64
- стандартная параболическая подалгебра, 65
- стандартное представление
 - аффинной алгебры, 268
- стандартный флаг, 60
- старший вес, 68
- субмерсия, 27
- твисторная диаграмма, 251
- твисторное пространство, 251
- твисторное расслоение, 251
- теорема Берлинга–Альфorsa, 105
- теорема Берлинга–Хелсона, 118
- теорема Биркгофа, 127
- теорема Бореля–Вейля, 72
- теорема Мори, 103
- теорема Нехари, 164
- теорема
 - Ньюлендера–Ниренберга, 36
- теорема Шейла, 249
- теорема о площадях, 179
- теорема существования для квазиконформных отображений, 107
- универсальное пространство
 - Тейхмюллера, 177
- унитарная группа
 - Гильберта–Шмидта $U_{\text{HS}}(H)$, 91
- уравнение Бельтрами, 101
- уравнение Хилла, 167
- уровень представления, 270
- ускорение пути, 30
- условие квантования, 214
- фазовое пространство, 206
- фоковское пространство $F(M, J)$, 224
- фоковское пространство F_J , 245
- фоковское пространство
 - полуформ $F_{1/2}(M, J)$, 230
- фоковское пространство F_0 , 244
- фоковское расслоение, 252

фоковское расслоение
 полуформ, 255
 форма Киллинга, 120
 формула Берлинга–Альфорса,
 105
 фукова группа, 187
 фундаментальный вес, 69
 функция перехода, 21

 характер, 70
 характер представления, 73

 целочисленная
 дифференциальная
 форма, 134
 целочисленная орбита, 75
 центральное расширение
 алгебры Ли, 77
 центральное расширение
 алгебры петель, 139
 центральное расширение
 группы Ли, 78
 центральное расширение
 группы петель, 139

 частичная производная Ли, 238
 частичная связность, 227, 229
 число Лиувилля, 55
 число Рота, 55
 число вращения, 54
 число вращения Пуанкаре, 54

 шварциан, 164

 экспоненциальное
 отображение, 39
 энергия петли, 131
 энергия представления, 270

 ядерный оператор, 96

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 13

Армен Глебович Сергеев

Геометрическое квантование пространств петель

Компьютерная верстка: *А. М. Малокостов*

Сдано в набор 18.12.2009. Подписано в печать 28.12.2009.

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 18.375. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/spm/>