Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Арсланов, Теоретико-модельные свойства тьюринговых степеней разностной иерархии Ершова, *Совр. пробл. матем.*, 2011, выпуск 15, 5–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 02:45:21

Теоретико-модельные свойства тьюринговых степеней разностной иерархии Ершова

М. М. Арсланов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

В настоящее время накоплено довольно много результатов, относящихся к разработке структурной теории (тьюринговых) степеней неразрешимости, содержащих множества из различных уровней иерархии Ершова. Следующим естественным шагом должно было быть систематическое рассмотрение теоретико-модельных свойств этих структур, но в этой области сделано пока еще очень немного.

Эти исследования берут начало со следующего характеристического свойства множеств по тьюринговой сводимости (для краткости Т-сводимости) расположенных ниже $\emptyset'$ – степени неразрешимости проблемы остановки машины Тьюринга. Множество A Т-сводится к множеству $\emptyset'$ (для краткости $A \leq_T \emptyset'$) тогда и только тогда, когда существует такая вычислимая функция $f(s, x)$, что $A(x) = \lim_s f(s, x)$. Здесь $A(x)$ – характеристическая функция множества A :

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Таким образом, условие $A \leq_T \emptyset'$ эквивалентно тому, что множество A может быть вычислимо аппроксимировано в следующем смысле: существует такое множество равномерно вычислимых последовательностей $\{f(0, x), f(1, x), \dots, f(s, x), \dots \mid x \in \omega\}$, состоящих из 0 и 1, что для каждого x предел последовательности $f(0, x), f(1, x), \dots$ существует и равен значению $A(x)$.

Ершов [1]–[3] построил иерархию множеств, расположенных ниже $\emptyset'$, которая теперь известна как *иерархия Ершова*. Место множества A в иерархии определяется по количеству изменений в аппроксимации множества A с помощью описанной выше вычислимой последовательности, т.е. по количеству различных пар соседних элементов этой последовательности. Таким образом, иерархия Ершова ранжирует степени множеств, входящих в иерархию, в соответствии с алгоритмической сложностью распознавания их элементов. Иерархия Ершова состоит из *конечных* и *бесконечных* уровней. К конечным уровням иерархии относятся множества, у которых количество таких изменений ограничено некоторым натуральным числом. В противном случае множество принадлежит одному из бесконечных уровней иерархии Ершова. Таким образом, конечный уровень n , $n \geq 1$, иерархии Ершова составляют n -в.п. множества, которые в каноническом виде выглядят как

$$A = \bigcup_{i=0}^{[(n-1)/2]} \{(R_{2i+1} - R_{2i}) \cup (R_{2i} - R_{2i+1})\},$$

где $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ – такие в.п. множества, что $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots \subseteq R_{n-1}$. (Если n – число нечетное, то $R_n = \emptyset$.) Бесконечные уровни иерархии определяются с помощью бесконечных конструктивных ординалов. (Конечные уровни иерархии Ершова впервые под другими названиями были определены и изучены в работах Голда [4], Путнама [5] и др. Аддисон [6] рассмотрел общий метод построения “разностных” иерархий. В частности, построенная им иерархия, порожденная в.п. множествами, приводит к тем же классам n -в.п. множеств. В работе Аддисона получены также некоторые свойства n -в.п. множеств, например доказана теорема об иерархии.)

Как оказалось, возникающая иерархия множеств исчерпывает всю совокупность множеств, расположенных по Т-сводимости ниже $\emptyset'$. Каждый следующий уровень иерархии содержит все предыдущие, но не совпадает ни с одним из них, при этом уровни иерархии устроены настолько “равномерно”, что высказывалась даже гипотеза (Доуни [7]), что полурешетки тьюринговых степеней множеств конечных уровней иерархии начиная со второго неразличимы на языке первого порядка. Это предположение получило известность как *гипотеза Доуни* и вызвало целый ряд публикаций.

Степень **a** называется *n-в.п. степенью*, если она содержит некоторое *n-в.п.* множество. Если она содержит *n-в.п.* множества и не содержит $(n - 1)$ -в.п. множества, то называется *собственной n-в.п. степенью*. Множество всех *n-в.п.* степеней мы обозначим через $\mathcal{D}_n$ (как обычно, $\mathcal{R} = \mathcal{D}_1$ обозначает совокупность всех в.п. степеней). Через $\mathcal{D}$ ($\leq \mathbf{0}'$) обозначается совокупность степеней, по тьюринговой сводимости расположенных ниже $\mathbf{0}'$, а множество всех тьюринговых степеней – через $\mathcal{D}$. Все эти совокупности образуют верхние полурешетки относительно Т-сводимости: наименьшей верхней гранью степеней **a** и **b**, содержащих соответственно множества *A* и *B*, является степень множества

$$A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x + 1 \mid x \in B\}.$$

Мы придерживаемся обозначений, принятых в книге Соара [8]. В частности, частично вычислимые функционалы (с оракулом или без оракула) обозначаются заглавными греческими буквами, нумерация всех частично вычислимых функционалов (с оракулом или без оракула) обозначается через $\{\Phi_e\}_{e \in \omega}$; $\{W_e\}_{e \in \omega}$ означает стандартную нумерацию всех в.п. множеств.

Первые результаты в исследовании структурной теории *n-в.п.* степеней были получены в 70-х годах прошлого столетия, когда Купер [9] установил существование степени, содержащей *d-в.п.* множество, но не содержащей в.п. множества (т.е. существование собственной *d-в.п.* степени), а Лахлан (не опубликовано) доказал, что для любого $n > 1$ под каждой собственной *n-в.п.* степенью находится некоторая невычислимая в.п. степень. Эти два результата показывают, что совокупности *n-в.п.* степеней отличаются как от совокупности в.п. степеней, так и от совокупности всех степеней, расположенных ниже $\mathbf{0}'$ (так как по известной теореме Сакса существуют минимальные степени $< \mathbf{0}'$, а по упомянутой теореме Лахлана никакая *n-в.п.* степень не может быть минимальной).

Эти работы вызвали определенный интерес. Обобщая теорему Купера, Лерман и Хей (не опубликовано, см. [10]) установили, что для любого $n > 1$ существуют $(n + 1)$ -в.п. степени **c** и **d** такие, что интервал $\{\mathbf{b} \mid \mathbf{c} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{d}\}$ не содержит *n-в.п.* степеней. Они также отметили, что сочетание предложенного Купером для доказательства существования собственной *d-в.п.* степени метода с методом разрешения позволяет построить под каждой невычислимой в.п. степени собственную *d-в.п.* степень. Позднее автор [11], сочетая метод Купера с методом кодирования Сакса, построил собственную *d-в.п.* степень и над каждой не Т-полной в.п. степенью.

Более активные исследования по разработке структурной теории *n-в.п.* (в основном *d-в.п.*) степеней начались после публикаций автора [11], [12] и Доуни [7], в которых установлено, что элементарные теории в.п. степеней и *n-в.п.* степеней различны. Автором доказано, что для любого $n \geq 1$ и для каждой *n-в.п.* степени **a** $> \mathbf{0}$ существует *d-в.п.* степень **d** $< \mathbf{0}'$ такая, что $\mathbf{a} \cup \mathbf{d} = \mathbf{0}'$. Ранее в работах Ейтса и Купера (не опубликовано, см. статью Миллера [13]) было установлено, что в полурешетке в.п. степеней такой результат не имеет места. Отсюда следует, что эти теории различны на Σ_3^0 -уровне. Доуни доказал возможность вложения четырехэлементной решетки $\diamond$, называемой также *ромбом*, в *d-в.п.* степени с сохранением $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ (ранее Лахланом [14] было установлено, что в полурешетке в.п. степеней такой результат также не имеет места), а Купер, Лахлан, Лемпп, Соар и Харрингтон [15] установили, что упорядочение *n-в.п.* степеней неплотно для любого $n > 1$. Таким образом, эти теории различны уже на Σ_2^0 -уровне (на Σ_1^0 -уровне теории *n-в.п.* степеней при всех $n \geq 1$ совпадают, что

следует из приведенного выше результата Лахлана и теорем Мучника [16] и Сакса [17] о возможности вложения в $\mathcal{R}$ произвольного счетного частично упорядоченного множества, что означает также разрешимость их Σ_1^0 -теорий). В работе [7] Доуни сформулировал также свою ставшую знаменитой гипотезу об элементарной эквивалентности упорядочений n - и m -в.п. степеней при $n \neq m$, $n, m > 1$.

В настоящее время структурная теория n -в.п. степеней достаточно хорошо разработана, что нельзя сказать об изучении теоретико-модельных свойств этих структур. К крупным достижениям, полученным в этом направлении за последние годы, относятся кроме упомянутых работ автора и Доуни следующие:

- полурешетки d -в.п. и 3 -в.п. степеней не элементарно эквивалентны (опровержение гипотезы Доуни; автор, Калимуллин, Лемпп [18]; в этой работе приведен также первый пример определимой в полурешетке $\mathcal{D}_n$ бесконечной совокупности в.п. степеней);
- в.п. степени в сигнатуре $\{\leq\}$ не образуют Σ_1 -подструктуру n -в.п. степеней ни для какого $n \geq 2$ (Янг и Ю [19]);
- для любого $m \geq 1$ частично упорядоченные множества m -низких в.п. и m -низких d -в.п. степеней не элементарно эквивалентны (Ямалеев [20]; этот результат при $m = 1$ независимо получен М. Файзрахмановым).

Несмотря на многочисленные усилия, ответить на целый ряд естественно возникающих вопросов пока не удается.

Не разрешена проблема определимости (с параметрами или без параметров) в.п. степеней в структурах n -в.п. степеней при $n > 1$ (в более общей постановке – проблема определимости m -в.п. степеней в структурах n -в.п. степеней при $1 \leq m < n$).

Не исследована проблема определимости (с параметрами или без параметров) в Δ_2^0 -степенях множества всех n -в.п. степеней для некоторого (всех) $n > 1$. (Представляет интерес нахождение естественных множеств n -в.п. степеней, определимых с параметрами в Δ_2^0 -степенях.) Не известны также ответы на следующие вопросы. Существуют ли определимые в $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, индивидуальные n -в.п. степени, отличные от $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$? Если $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, фиксировано, то существуют ли множества m -в.п. степеней ($1 \leq m \leq n$) C и n -в.п. степени $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ такие, что $|C \cap [\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = 1$?

Проблемы определимости в степенных структурах $\mathcal{D}_n$ мы рассмотрим подробнее далее.

Остается открытой проблема элементарной эквивалентности структур n -в.п. степеней при различных $n > 2$. В недавней работе автора, Калимуллина и Лемппа [18] установлено, что полурешетки $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$ различны, т.е. следующее Σ_2^0 -предложение φ истинно в $\mathcal{D}_2$ и ложно в $\mathcal{D}_3$:

$$\varphi \doteq (\exists \mathbf{d} > \mathbf{0})(\exists \mathbf{e} > \mathbf{d})(\exists \mathbf{f} > \mathbf{e})\{(\forall \mathbf{u} \leq \mathbf{f})[\mathbf{u} \leq \mathbf{e} \vee \mathbf{e} \leq \mathbf{u} \cup \mathbf{d}] \ \& \ (\forall \mathbf{u} \leq \mathbf{e})[\mathbf{u} \leq \mathbf{d} \vee \mathbf{d} \leq \mathbf{u}]\}.$$

Этот результат опровергает предположение Доуни [7] о попарной элементарной эквивалентности этих структур. Однако проблема элементарной эквивалентности полурешеток $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_m$ при $m \neq n$ и $n, m \geq 3$ все еще остается открытой. Мы предполагаем, что теории этих полурешеток попарно различны и отличающее их предложение может быть получено подходящим обобщением приведенного выше предложения φ на соответствующие уровни иерархии. Но доказательство этого утверждения, если идти по пути простого обобщения приведенного в [18] доказательства, может оказаться технически весьма сложным.

Если полурешетки $\mathcal{D}_n$ и $\mathcal{D}_{n+1}$ не элементарно эквивалентны для некоторого $n \geq 1$, то возникает вопрос: не является ли $\mathcal{D}_n$ Σ_k -подструктурой $\mathcal{D}_{n+1}$ для некоторого $k \geq 1$? По определению структура $\mathcal{L}$ является Σ_k -подструктурой структуры $\mathcal{P}$, если $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}$ и для любой Σ_k -формулы $\varphi(x_1, \dots, x_r)$ и для любых $a_1, \dots, a_r \in \mathcal{L}$

$$\mathcal{L} \models \varphi(a_1, \dots, a_r) \iff \mathcal{P} \models \varphi(a_1, \dots, a_r).$$

В этом случае пишем $\mathcal{L} \preceq_{\Sigma_k} \mathcal{P}$.

Известно (Янг и Ю [19]), что в.п. степени в сигнатуре $\{\leq\}$ не образуют Σ_1 -подструктуру n -в.п. степеней ни для какого $n \geq 2$. Арсланов и Ямалеев недавно доказали, что существуют такие в.п. степень $\mathbf{d}$ и d -в.п. степень $\mathbf{e}$, что $\mathbf{0} < \mathbf{d} < \mathbf{e}$ и для любой d -в.п. степени $\mathbf{c} \leq \mathbf{e}$, либо $\mathbf{c} \leq \mathbf{d}$, либо $\mathbf{d} \leq \mathbf{c}$, но существует такая 3 -в.п. степень $\mathbf{u} \leq \mathbf{e}$, что $\mathbf{u}$ несравнима с $\mathbf{d}$. Отсюда следует, что Σ_1 -предложение

$$\exists u(\mathbf{0} < \mathbf{d} < \mathbf{e} \ \& \ u < \mathbf{e} \ \& \ u \not\leq \mathbf{d} \ \& \ \mathbf{d} \not\leq u)$$

истинно в $\mathcal{D}_3$ и ложно в $\mathcal{D}_2$, поэтому $\mathcal{D}_2 \not\leq_{\Sigma_1} \mathcal{D}_3$. Недавно стало известно, что Шор и Сламман (частное сообщение, не опубликовано) доказали, что $\mathcal{D}_m \not\leq_{\Sigma_1} \mathcal{D}_n$ при всех $1 \leq m < n$.

Одной из наиболее трудных открытых проблем является проблема разрешимости $\exists\forall$ -теории n -в.п. степеней для каждого $n \geq 1$. Как заметил Шор [21] (для случая в.п. степеней), по произвольной конечной решетке $\mathcal{L}$ легко построить Σ_2^0 -предложение, которое истинно в $\mathcal{D}_n$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}$ вложима в $\mathcal{D}_n$. Например, вложимость ромба в структуру d -в.п. степеней эквивалентна истинности следующего Σ_2^0 -предложения:

$$\exists a, b, c, d\{(a < b, c < d) \ \& \ \forall x(x \leq b, c \rightarrow x \leq a) \ \& \ x \geq b, c \rightarrow x \geq d)\}.$$

Однако проблема описания конечных решеток, вложимых в $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, вероятно является еще более трудной задачей. Существует множество публикаций, посвященных этой проблеме (библиографию работ см., например, в статье Лермана [22]), но окончательный результат вряд ли стоит ожидать в ближайшем будущем.

Известно также (Лерман [23]), что проверка истинности в $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, произвольного Σ_2^0 -предложения эквивалентна проблеме распознавания возможности по произвольному набору пар конечных решеток $\{\mathcal{P}, \mathcal{Q}_i\}$, $1 \leq i \leq m$, где $\mathcal{Q}_i$ – расширение $\mathcal{P}$ как частично упорядоченного множества, и определить по данному вложению $\mathcal{P}$ в $\mathcal{D}_n$, существует ли вложение некоторого $\mathcal{Q}_i$ в $\mathcal{D}_n$, расширяющее вложение $\mathcal{P}$. В некоторых частных случаях эта проблема решается положительно (например, Сламман и Соар [24], [25] для случая $m = 1$), но до получения общего решения еще далеко. Приведем пример, который иллюстрирует трудность проблемы для $\mathcal{D}_2$ даже при $m = 1$.

Пусть

$$\mathcal{P} = \{a, b, c \mid a < b < c\}, \quad \mathcal{Q} = \{a, b, c, d \mid a < b < c, a < d < c, b \not\leq d, d \not\leq b\}.$$

Ясно, что $\mathcal{Q}$ расширяет $\mathcal{P}$, и пусть $f: \mathcal{P} \mapsto \mathcal{D}_2$ – такое вложение $\mathcal{P}$ в $\mathcal{D}_2$, что $f(a) = \mathbf{0}$. Следующая теорема автора, Калимуллина и Лемппа [18] устанавливает, что при этом может не существовать расширяющего $\mathcal{P}$ вложения $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{D}_2$.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют такие в.п. степень $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ и d -в.п. степень $\mathbf{c} > \mathbf{b}$, что для любой в.п. степени $\mathbf{d}$, если $\mathbf{d} \leq \mathbf{c}$, то либо $\mathbf{b} \leq \mathbf{d}$, либо $\mathbf{d} \leq \mathbf{b}$.*

Некоторые теоретико-модельные свойства полурешеток $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, так же, как и решеток n -в.п. множеств $\mathcal{C}_n$, $n \geq 1$ ($\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ обозначает решетку всех в.п. множеств), можно вывести из соответствующих результатов для полурешеток $\mathcal{R}$ и $\mathcal{C}$, которые значительно более тщательно изучены. Например, так же, как и в вычислимо перечислимом случае, следующий результат может быть получен с помощью теорем Лахлана [26] о гипергиперпростых множествах и булевых алгебрах.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого $n \geq 1$ решетка $\mathcal{C}_n$ всех n -в.п. множеств не имеет вычислимого представления, т.е. она не изоморфна никакому вычислимому частичному порядку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ результат непосредственно следует из теоремы Лахлана [26] о том, что любая Σ_3^0 -булева алгебра изоморфна булевой алгебре в.п. надмножеств некоторого гипергиперпростого множества, и теоремы Фейнера [27] о существовании Σ_3^0 -булевой алгебры, которая не имеет вычислимого представления.

Теперь пусть $n \geq 2$ и A – произвольное гипергиперпростое множество. Если $A \subseteq B$, B является n -в.п. множеством и разность $B - A$ бесконечна, то она ко-в.п. (т.е. имеет в.п. дополнение). Действительно, $B - A$ должна быть $2k$ -в.п. множеством для некоторого четного $2k$ (в противном случае $\omega - A$ не иммунна) и

$$B - A = (A_1 - A_2) \cup (A_3 - A_4) \cup \dots \cup (A_{2k-1} - A_{2k})$$

для некоторых в.п. множеств $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_{2k}$. Теорема Лахлана о гипергипериммунной разности в.п. множеств гласит, что если в.п. множества X и Y таковы, что $X \supset Y$ и $X - Y$ гипергипериммунна, то существует вычислимое множество R такое, что $X - Y \subseteq R \subseteq X$. Отсюда следует, что существуют такие вычислимые множества $R_1, R_2, \dots, R_k$, что

$$A_{2i-1} - A_{2i} \subseteq R_i \subseteq A_{2i-1}, \quad B - A = \overline{R_1} \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^k \left(A_{2i} \cap \left\{ \bigcup_{m>2i} R_m \right\} \right) \right\}.$$

Это значит, что множество $A \cup \{\omega - B\}$ вычислимо перечислимо.

По теореме Лахлана множество B также в.п., поэтому булевы алгебры $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{C}_n(A)$ соответственно в.п. и n -в.п. надмножеств (по модулю конечных разностей) гипергиперпростого множества A совпадают.

При изучении степеней изоморфных копий $\mathcal{D}_n$ (для краткости – степеней представлений $\mathcal{D}_n$) весьма полезным является следующий результат, принадлежащий Шору [28], доказанный для в.п. степеней и в более общей формулировке).

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – произвольное Π_2^0 множество. Существует такая частичная решетка (т.е. верхняя полурешетка, в которой наибольшая верхняя грань существует не для всех пар элементов) $\mathcal{L}$, что:

- (1) $\mathcal{L}$ изоморфно вкладывается в любую полурешетку $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$;
- (2) если $\mathcal{L}$ изоморфно вкладывается в какую-нибудь полурешетку $\mathcal{S}$, то множество A вычислимо относительно (тьюрингова) скачка любого представления $\mathcal{S}$.

В частности, A вычислимо относительно скачка любого представления каждой полурешетки $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$. Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ (Шор [28]). Ни одна из полурешеток $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, не имеет вычислимого представления. Более того, степень любого представления каждой из них больше или равна $\mathbf{0}'$.

Доказательство следующей теоремы может быть получено фактически повторением доказательства Шора предыдущего результата. (Переход от степени $\mathbf{0}'$ к высокой степени $\mathbf{h}$ осуществляется с помощью техники high permitting.)

ТЕОРЕМА 4. Для любой высокой в.п. степени $\mathbf{h}$ полурешетка $\mathcal{D}_n$ ($\leq \mathbf{h}$) не имеет вычислимого представления.

По-видимому, справедливо и более общее утверждение: для любой в.п. степени $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ полурешетка $\mathcal{D}_n$ ($\leq \mathbf{a}$) не имеет вычислимого представления. Спектры степеней представлений как полурешеток $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, так и их фрагментов $\mathcal{D}_n$ ($\leq \mathbf{a}$) совершенно не исследованы.

Следующая теорема содержится в работе Лермана, Шора и Соара [29] для случая $n = 1$, но приведенное там доказательство проходит и в общем случае.

ТЕОРЕМА 5. Для любого $n \geq 1$ полурешетка $\mathcal{D}_n$ не счетно категорична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лерман, Шор и Соар [29] определили счетное множество попарно не изоморфных конечных частичных решеток (наибольшая нижняя грань существует не для всех пар степеней), порожденных тремя элементами, каждая из которых вкладывается в $\mathcal{D}$ и, следовательно, в $\mathcal{D}_n$ для каждого $n > 1$.

Каждая такая частичная решетка производит определенный 3-тип, реализуемый в $\mathcal{D}_n$. Теперь утверждение следует из теоремы Рыль-Нардзевского о счетной категоричности (см. Ершов и Палютин [30, с. 194]).

Рассмотрим более подробно проблемы определимости в полурешетках n -в.п. степеней. Одним из возможных способов доказательства определимости m -в.п. степеней в n -в.п. степенных структурах при $m < n$ является следующий:

- а) находится некоторое бесконечное определимое в $\mathcal{D}_n$ множество $\mathcal{S}$ m -в.п. степеней;
- б) доказывается, что степени из $\mathcal{S}$ порождают под операциями $\cup$ и $\cap$ полурешетку $\mathcal{D}_n$ (там, где она определена).

В этих исследованиях активно используются возможные способы разложения n -в.п. степеней на две несравнимые степени, поэтому начнем изложение с рассмотрения этих вопросов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Разложением степени $\mathbf{d}$ называются такие степени $\mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}_1$, что $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1 < \mathbf{d}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cup \mathbf{d}_1$. Говорят, что это разложение над степенью $\mathbf{a} < \mathbf{d}$, если $\mathbf{a} \leq \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1$. Наконец, разложение $\mathbf{d}$ на $\mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}_1$ является разложением, которое минует верхний конус степеней $\mathbf{b}$, если $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{d}_i, i \leq 1$.*

Ниже приводятся все основные результаты о разложениях n -в.п. степеней при различных $n \geq 1$, которые на сегодняшний день нам известны.

ТЕОРЕМА 6 (Сакс [31]). *Каждая в.п. степень $\mathbf{a} > 0$ разложима на две в.п. степени, минуя верхний конус степеней $\mathbf{b}$, для любой Δ_2^0 -степени $\mathbf{b} > 0$.*

ТЕОРЕМА 7 (Лахлан [32]). *Существуют такие в.п. степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, что $\mathbf{b}$ не разложима в в.п. степенях над $\mathbf{a}$.*

ТЕОРЕМА 8 (Робинсон [33]). *Каждая в.п. степень $\mathbf{a} > 0$ разложима на две низкие в.п. степени над любой низкой в.п. степенью.*

ТЕОРЕМА 9 (Купер [34] для случая $\mathbf{b} = 0$, Купер и Ли [35] для общего случая). *Каждая d -в.п. степень $\mathbf{a} > 0$ разложима в d -в.п. степенях над произвольной в.п. степенью $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.*

ТЕОРЕМА 10 (Купер, Лахлан, Лемпп, Соар и Харрингтон [15]). *Не каждая n -в.п. степень (даже в.п. степень) $\mathbf{d}$ разложима (даже в ω -в.п. степенях) над произвольной d -в.п. степенью $\mathbf{a} < \mathbf{d}$, для любого $n > 1$.*

ТЕОРЕМА 11 (Арсланов, Купер и Ли [35], [36]). *Любая в.п. степень $\mathbf{a} > 0$ разложима в d -в.п. степенях над произвольной низкой d -в.п. степенью $\mathbf{b} < \mathbf{a}$.*

ТЕОРЕМА 12 (Ли [37]). *Каждая d -в.п. степень $\mathbf{d} > 0$ разложима в d -в.п. степенях над каждой низкой d -в.п. степенью $\mathbf{x} < \mathbf{d}$.*

ТЕОРЕМА 13 (Шор и Сламан [38]). *Пусть степени $\mathbf{d}$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ таковы, что $\mathbf{d}$ является n -в.п. для некоторого $n \geq 1$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ такие Δ_2^0 -степени, что $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$. Тогда $\mathbf{d}$ можно разложить над $\mathbf{a}$ в Δ_2^0 -степенях, минуя верхний конус степеней $\mathbf{b}$.*

Ясно, что последний результат нельзя усилить, рассматривая разложения на d -в.п. степени (в [15] доказано, что этого нельзя сделать даже при $\mathbf{a} = 0$). Ямалеев [20] доказал, что такое разложение возможно при $\mathbf{a} = 0$, если $\mathbf{d}$ является собственно d -в.п. степенью, а $\mathbf{b}$ – такая невычислимая Δ_2^0 -степень, что между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ нет в.п. степеней.

ТЕОРЕМА 14 [20]. *Пусть собственно d -в.п. степени $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ таковы, что $\mathbf{d} > \mathbf{b}$ и интервал $(\mathbf{d}, \mathbf{b})$ не содержит в.п. степени. Тогда $\mathbf{d}$ можно разложить на две d -в.п. степени, минуя верхний конус степеней над $\mathbf{b}$.*

Следовательно, каждая собственная d -в.п. степень $\mathbf{b}$ обладает следующим свойством.

Для любой d -в.п. степени $\mathbf{d} > \mathbf{b}$ существует такая d -в.п. степень $\mathbf{a}$, что $\mathbf{b} < \mathbf{a} \leq \mathbf{d}$, и $\mathbf{a}$ разложима в d -в.п. степенях, миную верхний конус степеней $\mathbf{b}$.

Действительно, если между степенями $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ существует некоторая в.п. степень $\mathbf{a}$, тогда $\mathbf{a}$ разложима, миную верхний конус степеней над $\mathbf{b}$, по теореме Сакса о разложении; если же между $\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}$ нет в.п. степеней, то $\mathbf{d}$ сама таким образом разложима по теореме Ямалеева.

Теперь рассмотрим формулу

$$\varphi(x) \doteq (\exists b > x)(\forall d)[x < d \leq b \rightarrow (\forall d_0, d_1)[d = d_0 \cup d_1 \rightarrow x \leq d_0 \vee x \leq d_1]].$$

Из вышеизложенного следует, что

$$\mathcal{D}_2 \models \varphi(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{a} \text{ в.п.}$$

Если бы выполнялась и обратная импликация $\mathbf{a} \text{ в.п.} \Rightarrow \mathcal{D}_2 \models \varphi(\mathbf{a})$, то определимость в.п. степеней в $\mathcal{D}_2$ была бы установлена. Однако не каждая в.п. степень обладает этим свойством. Действительно, если $\mathcal{D}_2 \models \varphi(\mathbf{a})$ для некоторой в.п. степени, то пусть $\mathbf{b} > \mathbf{a}$ – такая d -в.п. степень, которая не разложима, миную верхний конус степеней $\mathbf{a}$. Тогда между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нет в.п. степеней, за исключением $\mathbf{a}$; в этом случае говорят, что $\mathbf{a}$ *изолирует* $\mathbf{b}$. Но в работе автора, Лемппа и Шора [39] установлено, что между любыми двумя в.п. степенями $\mathbf{a}_0 < \mathbf{a}_1$ существует в.п. степень, которая не изолирует никакую d -в.п. степень. Для каждой такой степени $\mathbf{a}$ имеем $\mathcal{D}_2 \models \neg\varphi(\mathbf{a})$.

Следующая теорема показывает, что тем не менее существует бесконечная совокупность в.п. степеней $\mathbf{a}$, удовлетворяющих формуле φ .

ТЕОРЕМА 15 (Арсланов, Калимуллин, Лемпп [18]). *Существует бесконечно много различных d -в.п. степеней $\mathbf{d}$ и в.п. степеней $\mathbf{b} < \mathbf{d}$ таких, что любая d -в.п. степень $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} < \mathbf{a} \leq \mathbf{d}$, не разложима в d -в.п. степенях, миную верхний конус степеней над $\mathbf{b}$.*

Отсюда следует, что множество

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid (\exists \mathbf{y} > \mathbf{x})(\forall \mathbf{z})(x < z \leq y \rightarrow (\forall \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)(\mathbf{z}_0 \cup \mathbf{z}_1 = \mathbf{z} \ \& \ \mathbf{z}_0 \mid \mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{z}_0 \vee \mathbf{x} \leq \mathbf{z}_1))\}$$

состоит только из в.п. степеней, бесконечно и определимо в $\mathcal{D}_2$ формулой

$$\varphi(x) = (\exists \mathbf{y} > \mathbf{x})(\forall \mathbf{z})(x < z \leq y \rightarrow (\forall \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)(\mathbf{z}_0 \cup \mathbf{z}_1 = \mathbf{z} \ \& \ \mathbf{z}_0 \mid \mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{z}_0 \vee \mathbf{x} \leq \mathbf{z}_1))\}.$$

Теперь предположим, что $\mathbf{d}$ – некоторая собственная d -в.п. степень. Для любого разложения $\mathbf{d}$ на две d -в.п. степени $\mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}_1$ по крайней мере одна из степеней $\mathbf{d}_i$, $i \leq 1$, должна обладать следующим свойством.

Любая d -в.п. степень $\mathbf{u}$, $\mathbf{d}_i \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{d}$, разложима на d -в.п. степени, миную верхний конус степеней над $\mathbf{d}_i$.

В противном случае по теореме Ямалеева для каждой степени $\mathbf{d}_i$, $i \leq 1$, между $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}$ существует в.п. степень, и, следовательно, степень $\mathbf{d}$ сама вычислимо перечислима (как наибольшая нижняя грань таких степеней).

Ответы на следующие вопросы пока не известны. (Из вышеизложенного следует, что положительный ответ на любой из них означает определимость в.п. степеней в $\mathcal{D}_2$.)

ВОПРОС 1. Верно ли, что каждая в.п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ является наименьшей верхней гранью двух несравнимых степеней из $\mathcal{S}$?

С этим вопросом связан также следующий: верно ли, что степени из $\mathcal{S}$ плотны среди в.п. степеней, т.е. верно ли, что между любыми двумя в.п. степенями $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ найдется некоторая степень из $\mathcal{S}$? Положительный ответ на этот вопрос немедленно влечет положительный ответ на вопрос 1: для этого разлагаем в.п. степень $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ на две несравнимые в.п. степени $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{a}_1$ (по теореме Сакса о разложении это можно сделать) и между степенями $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_i$, $i \leq 1$, находим степени $\mathbf{b}_i \in \mathcal{S}$. Имеем $\mathbf{a} = \mathbf{b}_0 \cup \mathbf{b}_1$.

ВОПРОС 2. Верно ли, что для каждой в.п. степени $\mathbf{a}$ существует такое разложение на (d -в.п. степени) $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$, что некоторые d -в.п. степени $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ такие, что $\mathbf{a}_i < \mathbf{b}_i < \mathbf{a}$, не разложимы, минуя верхний конус степеней $\mathbf{a}_i$, для каждого $i \in \{0, 1\}$?

Исследование проблемы определимости в.п. степеней в полурешетках $\mathcal{D}_n$, $n > 2$, также можно проводить по следующей схеме.

1) Пусть $1 \leq m < n$ и собственные n -в.п. степени $\mathbf{d}$ и $\mathbf{b}$ таковы, что $\mathbf{d} > \mathbf{b}$ и интервал $(\mathbf{d}, \mathbf{b})$ не содержит m -в.п. степеней. Верно ли, что $\mathbf{d}$ разложима в n -в.п. степенях, минуя верхний конус степеней над $\mathbf{b}$?

2) Каждая n -в.п. степень $\mathbf{a}$ разложима на две $(n+1)$ -в.п. степени $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$, так что существуют такие $(n+1)$ -в.п. степени $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_i < \mathbf{b}_i < \mathbf{a}$, не разложимые в $(n+1)$ -в.п. степени, минуя верхний конус степеней над $\mathbf{a}_i$, для каждого $i \in \{0, 1\}$.

Мы предполагаем, что для каждого $n \geq 1$ множества

$$\mathcal{S}_n = \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \mid (\exists \mathbf{y} > \mathbf{x})(\forall \mathbf{z})(\mathbf{x} < \mathbf{z} \leq \mathbf{y} \rightarrow (\forall \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1)(\mathbf{z}_0 \cup \mathbf{z}_1 = \mathbf{z} \ \& \ \mathbf{z}_0 \mid \mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{z}_0 \vee \mathbf{x} \leq \mathbf{z}_1))\}$$

n -в.п. степеней определимы в $\mathcal{D}_{n+1}$.

Мы также предполагаем, что это множество n -в.п. степеней порождает весь класс n -в.п. степеней и, таким образом, справедливо следующее свойство.

Для любого $n > 1$ n -в.п. степени равномерно определимы в $\mathcal{D}_{n+1}$.

Перейдем к рассмотрению вопросов определимости с параметрами.

ТЕОРЕМА 16. *Существует бесконечная совокупность в.п. степеней, каждая из которых определима в $\mathcal{D}_2$ с одним параметром из $\mathcal{D}_2 - \mathcal{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\mathbf{a} \in \mathcal{S}$ пусть $\mathbf{d}$ является такой степенью, что для любой степени $\mathbf{z}$ при $\mathbf{a} < \mathbf{z} \leq \mathbf{d}$ и $\mathbf{z}_0 \cup \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}$ для некоторых d -в.п. степеней $\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{z}_1$, и $\mathbf{z}_0 \mid \mathbf{z}_1$, справедливо либо $\mathbf{a} \leq \mathbf{z}_0$, либо $\mathbf{a} \leq \mathbf{z}_1$. Ясно, что $\mathbf{d}$ не вычислимо перечислима и однозначно определяет в.п. степень $\mathbf{a}$. В частности, $S \cap [\mathbf{0}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{a}\}$.

Сламан и Вудин [40] доказали, что класс $\mathcal{R}$ в.п. степеней определим с параметрами в $\mathcal{D}$ ($\leq \mathbf{0}'$). Принципиальное место в их доказательство занимает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 17 [40]. *Пусть $\mathcal{A}$ – равномерно низкое множество Δ_2^0 -степеней, ограниченное некоторой низкой степенью $\mathbf{a}$. Тогда $\mathcal{A}$ определимо с параметрами в $\mathcal{D}$ ($\leq \mathbf{0}'$).*

Множество степеней $\mathcal{A}$ называется *равномерно низкой совокупностью*, если существуют последовательность множеств $\langle X(n) \mid n \in \omega \rangle$ и $\emptyset'$ -вычислимая функция f такие, что $\{\deg(X(n)) \mid n \in \omega\} = \mathcal{A}$ и $\Phi_{f(n)}^{\emptyset'} = (X(n))'$.

Из теоремы 17 определимость $\mathcal{R}$ с параметрами в $\mathcal{D}$ ($\leq \mathbf{0}'$) выводится с помощью следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 18 (Уэлш [41]). *Существуют две равномерно вычислимы совокупности в.п. степеней $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ такие, что каждая из них ограничена некоторой низкой степенью и каждая в.п. степень $\mathbf{a}$ является наименьшей верхней гранью $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{A}_0$ и $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{A}_1$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно креативное множество $K = \{\langle e, n \rangle \mid n \in W_e\}$ разложить по теореме Сакса на два низких Т-несравнимых множества A_0 и A_1 и определить $\mathcal{A}_i = \{e \mid \langle e, n \rangle \in A_i\}_{n \in \omega}$, $i \leq 1$.

По теореме 18 класс $\mathcal{R}$ в.п. степеней определим с параметрами в $\mathcal{D}$ ($\leq \mathbf{0}'$).

В [15] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 19. *Существуют d -в.п. множество E и в.п. множество D такие, что $\emptyset <_T D <_T D \oplus E$ и для любого 2-в.п. множества U , если $U \leq_T D \oplus E$, то либо $D \leq_T U$, либо $U \leq_T D$.*

Нетрудно проверить, что удовлетворение дополнительного требования

$$(\forall e)(\exists \infty s)(\Phi_e^D(e)[s] \downarrow) \rightarrow \Phi_e^D(e) \downarrow,$$

которое позволяет в этой теореме сделать степень множества D низкой, легко сочетается с процессом удовлетворения всех остальных ее требований. Таким образом, существуют в.п. множества низкой степени, удовлетворяющие условиям приведенной теоремы. Нам не известно, существуют ли множества не низкой степени с этими свойствами, т.е. существуют ли такие d -в.п. степени $\mathbf{d} > \mathbf{0}$, у которых разложения на d -в.п. степени не могут быть низкими:

$$(\mathbf{d} = \mathbf{a} \cup \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{a}' > \mathbf{0}' \ \& \ \mathbf{b}' > \mathbf{0}'.$$

Если бы приведенную выше теорему удалось усилить таким образом, то это бы означало, что описанный выше метод Сламана и Вудина принципиально не подходит для доказательства определимости n -в.п. степеней с параметрами в $\mathcal{D} (\leq \mathbf{0}')$. А именно, n -в.п. степени при $n > 1$ в общем случае нельзя разложить на две низкие n -в.п. степени, в отличие от случая в.п. степеней.

Список литературы

- [1] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств, I”, *Алгебра и логика*, **7:1** (1968), 47–74.
- [2] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств, II”, *Алгебра и логика*, **7:4** (1968), 15–47.
- [3] Ю. Л. Ершов, “Об одной иерархии множеств, III”, *Алгебра и логика*, **9:1** (1970), 34–51.
- [4] E. M. Gold, “Limiting recursion”, *J. Symbolic Logic*, **30:1** (1965), 28–48.
- [5] H. Putnam, “Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski”, *J. Symbolic Logic*, **30:1** (1965), 49–57.
- [6] J. W. Addison, “The method of alternating chains”, *Theory of Models*, North Holland, Amsterdam, 1965, 1–16.
- [7] R. Downey, “D.r.e. degrees and the nondiamond theorem”, *Bull. London Math. Soc.*, **21:1** (1989), 43–50.
- [8] R. I. Soare, *Recursively Enumerable Sets and Degrees. A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1987; Р. И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казан. матем. общ-во, Казань, 2001.
- [9] S. B. Cooper, *Degrees of Unsolvability*, Ph.D. Thesis, Univ. of Leicester, 1971.
- [10] R. L. Epstein, R. Haas, R. L. Kramer, “Hierarchies of sets and degrees below $0'$ ”, *Logic Year 1979–80*, Lecture Notes in Math., **859**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 32–48.
- [11] М. М. Арсланов, “О структуре степеней ниже $0'$ ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1988, № 7, 27–33.
- [12] М. М. Арсланов, “Структурные свойства степеней ниже $0'$ ”, *Докл. АН СССР*, **283:2** (1985), 270–273.
- [13] D. P. Miller, “High recursively enumerable degrees and the anti-cupping property”, *Logic Year 1979–80*, Lecture Notes in Math., **859**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 230–245.
- [14] A. H. Lachlan, “Lower bounds for pairs of recursively enumerable degrees”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **16:1** (1966), 537–569.
- [15] S. B. Cooper, L. Harrington, A. H. Lachlan, S. Lempp, R. I. Soare, “The d.r.e. degrees are not dense”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **55:2** (1991), 125–151.
- [16] А. А. Мучник, “Решение проблемы сводимости Поста и некоторых других проблем теории алгоритмов, I”, Тр. ММО, **7**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1958, 391–405.
- [17] G. E. Sacks, *Degrees of Unsolvability*, Ann. of Math. Stud., **55**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963.
- [18] М. М. Арсланов, I. Sh. Kalimullin, S. Lempp, “On Downey’s conjecture”, *J. Symbolic Logic*, **75:2** (2010), 401–441.

- [19] Y. Yang, L. Yu, “On Σ_1 -structural differences among Ershov hierarchies”, *J. Symbolic Logic*, **71**:4 (2006), 1223–1236.
- [20] М. М. Ямалеев, “Разложимость 2-вычислимо перечислимых степеней с избеганием конусов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 6, 76–80.
- [21] R. A. Shore, “The recursively enumerable degrees”, *Handbook of Computability Theory*, Stud. Logic Found. Math., **140**, North-Holland, Amsterdam, 1999, 169–197.
- [22] M. Lerman, “Embeddings into the recursively enumerable degrees”, *Computability, Enumerability, Unsolvability*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **224**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 185–204.
- [23] M. Lerman, *The Degrees of Unsolvability. Local and Global Theory*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [24] T. A. Slaman, R. I. Soare, “Algebraic aspects of the computably enumerable degrees”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **92**:2 (1995), 617–621.
- [25] T. A. Slaman, R. I. Soare, “Extension of embeddings in the computably enumerable degrees”, *Ann. of Math. (2)*, **154**:1 (2001), 1–43.
- [26] A. H. Lachlan, “The elementary theory of recursively enumerable sets”, *Duke Math. J.*, **35**:1 (1968), 123–146.
- [27] L. Feiner, “Hierarchies of Boolean algebras”, *J. Symbolic Logic*, **35**:3 (1970), 365–374.
- [28] R. A. Shore, “Finitely generated codings and the degrees r.e. in a degree $\mathbf{d}$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1982), 256–263.
- [29] M. Lerman, R. A. Shore, R. I. Soare, “The elementary theory of the recursively enumerable degrees is not $\aleph_0$ -categorical”, *Adv. in Math.*, **53**:3 (1984), 301–320.
- [30] Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, *Математическая логика*, Наука, М., 1987.
- [31] A. H. Lachlan, “A recursively enumerable degree which will not split over all lesser ones”, *Ann. Math. Logic*, **9**:4 (1976), 307–365.
- [32] R. W. Robinson, “Interpolation and embedding in the recursively enumerable degrees”, *Ann. of Math. (2)*, **93**:2 (1971), 285–314.
- [33] S. B. Cooper, “A splitting theorem for the n -r.e. degrees”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:2 (1992), 461–471.
- [34] S. B. Cooper, A. Li, “Turing definability in the Ershov hierarchy”, *J. London Math. Soc. (2)*, **66**:3 (2002), 513–528.
- [35] M. Arslanov, S. B. Cooper, A. Li, “There is no low maximal d.c.e. degree”, *MLQ Math. Log. Q.*, **46**:3 (2000), 409–416.
- [36] M. Arslanov, S. B. Cooper, A. Li, “There is no low maximal d.c.e. degree – Corrigendum”, *MLQ Math. Log. Q.*, **50**:6 (2004), 628–636.
- [37] A. Li, “The low splitting theorem in the difference hierarchy”, *New Computational Paradigms*, Lecture Notes in Comput. Sci., **3526**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 287–296.
- [38] R. A. Shore, T. A. Slaman, “A splitting theorem for n -REA degrees”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:12 (2001), 3721–3728.
- [39] M. M. Arslanov, S. Lempp, R. A. Shore, “On isolating r.e. and isolated d-r.e. degrees”, *Computability, Enumerability, Unsolvability*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **224**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, 61–80.
- [40] T. A. Slaman, W. H. Woodin, “Definability in the Turing degrees”, *Illinois J. Math.*, **30**:2 (1986), 320–334.
- [41] L. V. Welch, *A hierarchy of families of recursively enumerable degrees and a Π^1_1 -theorem on bounding minimal pairs*, Ph.D. Thesis, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.