Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Л. Максимова, Амальгамируемость, интерполяция и неявная определимость в многообразиях алгебр, *Совр. пробл. матем.*, 2011, выпуск 15, 15–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:51:41

Амальгамируемость, интерполяция и неявная определимость в многообразиях алгебр

Л. Л. Максимова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

1. Введение

Проблемы зависимости между структурными свойствами классов алгебр и свойствами формальных языков, описывающих эти классы, алгоритмические проблемы различных теорий играют большую роль в научном творчестве выдающегося математика Мальцева, основателя теории алгебраических систем [1], [2].

Алгебраическая семантика логических систем послужила основой для применения алгебраических методов в исследованиях по логике. К числу фундаментальных теорем логики относятся интерполяционная теорема Крейга [3] и теорема Бета о неявной определимости [4].

Мы рассматриваем проблемы амальгамируемости, интерполяции и справедливости свойства Бета и их вариантов в многообразиях алгебр. Нас интересует вопрос: когда исследование этих проблем можно свести к изучению более узких классов, а именно классов финитно неразложимых алгебр? Мы укажем достаточные условия для такого сведения.

В тех случаях, когда такое сведение возможно (например, в табличных конгруэнц-дистрибутивных многообразиях), получаем эффективный метод проверки исследуемых свойств. Метод применим для исследования свойств, близких к амальгамируемости, и интерполяционных свойств в многообразиях алгебр, ассоциированных с модальными и суперинтуиционистскими логиками, а также с подструктурными логиками и многими другими. Во многих случаях удается доказать разрешимость свойств на классе табличных логик и многообразий.

Взаимосвязи категорных свойств многообразий и синтаксических свойств их эквациональных теорий были обнаружены в 60-е годы XX века. Были установлены связи интерполяционного свойства с амальгамируемостью, позднее замечена связь свойства Бета с сюръективностью эпиморфизмов. Соотношения различных версий интерполяционного свойства и свойства Бета с амальгамируемостью и сюръективностью эпиморфизмов в алгебраической логике рассматривались в [5]–[14] и других работах.

Более подробно были изучены модальные и суперинтуиционистские логики (см. [15], [16]). Результаты о связи синтаксических и категорных свойств в подструктурных логиках представлены в [17].

При исследовании модальных логик обнаружилась возможность сведения интерполяционного свойства, свойства Бета и амальгамируемости в многообразиях модальных алгебр к подходящим свойствам классов финитно неразложимых алгебр. Это сведение имело большое значение для доказательства разрешимости указанных свойств в многообразиях гейтинговых алгебр и алгебр замыкания и в табличных многообразиях модальных алгебр. В этой статье будет получено обобщение указанных результатов о сведении на другие многообразия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00090а), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3606.2010.1) и программы АВЦП Минобрнауки России “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1.10726).

Будут найдены достаточные условия для подобного сведения. Это позволит доказать разрешимость исследуемых свойств во многих табличных многообразиях, т.е. многообразиях, порожденных конечным множеством конечных алгебр.

В п. 2.1 приведены определения амальгамируемости и родственных свойств. В 2.2 дан краткий обзор результатов об интерполяции, свойствах определимости по Бету и амальгамируемости в многообразиях алгебр, связанных с модальными, суперинтуиционистскими и позитивными логиками, приведены результаты о разрешимости указанных свойств. В параграфе 3 дан обзор результатов о взаимосвязях категорных и синтаксических свойств многообразий алгебр. Параграф 4 посвящен проблеме сведения вариантов амальгамируемости, интерполяции и свойства Бета к финитно неразложимым алгебрам. В параграфе 5 найдены достаточные условия разрешимости рассматриваемых свойств в табличных многообразиях алгебр.

2. Основные сведения

2.1. Определения. Пусть V – класс алгебр. Напомним определения амальгамируемости AP, сверхамальгамируемости SupAP, сильной амальгамируемости StrAP, ограниченной амальгамируемости RAP, слабой амальгамируемости WAP, сюръективности эпиморфизмов ES* и сильной сюръективности эпиморфизмов SES.

Класс V *амальгамируем*, если он удовлетворяет условию

AP: Для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и мономорфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$ и $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

Класс V *сильно амальгамируем*, если он удовлетворяет условию

StrAP: AP с дополнительным условием

$$\delta(\mathbf{B}) \cap \varepsilon(\mathbf{C}) = \delta(\mathbf{A}).$$

Класс V обладает *свойством ограниченной амальгамируемости*, если выполнено условие

RAP: Для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$ и $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и ограничение δ' отображения δ на $\mathbf{A}$ является мономорфизмом.

Класс V , в котором все алгебры частично упорядочены, называем *сверхамальгамируемым*, если он удовлетворяет условию

SupAP: AP с дополнительными условиями: для всех $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$

$$\delta(x) \leq \varepsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \leq z \text{ и } z \leq y),$$

$$\delta(x) \geq \varepsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \geq z \text{ и } z \geq y).$$

Рассмотрим также следующий слабый вариант свойства SupAP:

WSupAP: Если $\mathbf{A}$ – общая подалгебра алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ из V , то существуют $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и для всех $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$

$$\delta(x) \leq \varepsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \leq z \text{ и } z \leq y),$$

$$\delta(x) \geq \varepsilon(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \geq z \text{ и } z \geq y).$$

Зафиксируем сигнатуру, состоящую из функциональных символов и констант и включающую две константы $\perp$ и $\top$. Алгебру $\mathbf{A}$ назовем *ограниченной*, если она удовлетворяет условию: $\mathbf{A} \models \perp = \top$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}$ одноэлементна. Рассмотрим многообразия, состоящие из ограниченных алгебр. В качестве примера можно взять ограниченные решетки, гейтинговы алгебры, модальные алгебры, булевы алгебры с операторами. Ограниченную алгебру называем *невырожденной*, если она содержит не менее двух элементов. Для многообразий ограниченных алгебр определим понятие *слабой амальгамируемости*.

WAP: для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ есть общая подалгебра $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$ и $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$, где $\mathbf{D}$ невырожденная, если $\mathbf{A}$ невырожденная.

Определим также свойства *сюръективности эпиморфизмов* (ES*) и *сильной сюръективности эпиморфизмов* (SES).

ES*: для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ из V , для любого мономорфизма $\alpha: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и любого $x \in \mathbf{B} - \alpha(\mathbf{A})$ такого, что $\{x\} \cup \alpha(\mathbf{A})$ порождает $\mathbf{B}$, существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $\beta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ и $\gamma: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ такие, что $\beta\alpha = \gamma\alpha$ и $\beta(x) \neq \gamma(x)$.

SES: для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ из V , для любого мономорфизма $\alpha: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и любого $x \in \mathbf{B} - \alpha(\mathbf{A})$ существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $\beta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ и $\gamma: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ такие, что $\beta\alpha = \gamma\alpha$ и $\beta(x) \neq \gamma(x)$.

В любых многообразиях алгебр имеем

$$\text{StrAP} \Rightarrow \text{AP} \Rightarrow \text{RAP} \Rightarrow \text{WAP}, \quad \text{StrAP} \Rightarrow \text{SES} \Rightarrow \text{ES}^*.$$

В общем случае обратные импликации неверны. Кроме того,

$$\text{ES}^* \not\Rightarrow \text{WAP}, \quad \text{AP} \not\Rightarrow \text{ES}^*, \quad \text{StrAP} \iff \text{AP} \& \text{ES}^*$$

(см. теорему 3.14).

В многообразиях частично упорядоченных алгебр

$$\text{SupAP} \Rightarrow \text{StrAP}, \quad \text{SupAP} \Rightarrow \text{WSupAP} \Rightarrow \text{SES}.$$

Важную роль в наших рассуждениях имеет свойство продолжаемости конгруэнций. Известно, что все многообразия модальных и гейтинговых алгебр обладают *свойством продолжаемости конгруэнций*.

CEP: для любых алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$, где $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{B}$, любая конгруэнция Φ на $\mathbf{A}$ может быть продолжена до конгруэнции Ψ на $\mathbf{B}$ такой, что ограничение отношения Ψ на алгебру $\mathbf{A}$ совпадает с Φ .

Обзоры по категорным свойствам классов алгебр, их соотношениям и взаимосвязям с синтаксическими свойствами теорий можно найти в [7], [11], [18]–[20]. Мы ограничимся несколькими примерами.

Многообразие $\mathcal{L}_{01}$ всех ограниченных решеток сверхамальгамируемо, а значит, имеет также StrAP, AP и SES [21]. С другой стороны, $\mathcal{L}_{01}$ не имеет CEP.

Многообразие $\mathcal{DL}$ дистрибутивных решеток имеет свойство продолжаемости конгруэнций CEP [22]. Это верно и для дистрибутивных решеток с псевдодополнениями [23]. С другой стороны, отсутствие дистрибутивности часто влечет отсутствие свойства CEP. Можно доказать, что единственное нетривиальное многообразие решеток со свойством CEP – это многообразие дистрибутивных решеток. Многообразие решеток с псевдодополнениями не имеет CEP [21].

Напомним, что *решетка с псевдодополнениями* – это ограниченная решетка с дополнительной операцией $\neg$, удовлетворяющая условию

$$x \wedge y = \perp \iff x \leq \neg y. \quad (1)$$

Многообразие $\mathcal{DP}$ всех дистрибутивных решеток с псевдодополнениями имеет свойство амальгамируемости AP [23]. Только три его собственных нетривиальных подмногообразия имеют AP [23], в частности, многообразие алгебр Стоуна (удовлетворяющих дополнительно тождеству $\neg x \vee \neg\neg x = 1$) и многообразие булевых алгебр. Единственное нетривиальное подмногообразие многообразия $\mathcal{DP}$ имеет SupAP и StrAP – это многообразие $\mathcal{B}$ булевых алгебр. Остальные подмногообразия не имеют ни ES*, ни SupAP, ни StrAP [21]. Все подмногообразия многообразия $\mathcal{DP}$ имеют WAP [14].

2.2. Многообразия, ассоциированные с логиками. Алгебраическая семантика логических систем послужила основой для применения алгебраических методов в исследованиях по логике. К числу фундаментальных теорем логики относятся интерполяционная теорема Крейга [3] и теорема Бета о неявной определимости [4]. Имеется большое число работ по проблеме интерполяции и связанной с ней проблеме амальгамируемости в классах алгебр, ассоциированных с неклассическими логиками [6], [13], [15], [17].

Приведем краткий обзор результатов по проблеме амальгамируемости и свойствам Бета в многообразиях модальных и гейтинговых алгебр, а также близких к ним алгебр. Интерес к этой проблеме был вызван равносильностью интерполяционных свойств модальной или суперинтуиционистской логики и амальгамируемости соответствующего многообразия алгебр, обнаруженной в [15], [24], [25]. В частности, интуиционистская пропозициональная логика Int характеризуется многообразием гейтинговых алгебр, а любая суперинтуиционистская логика – подходящим подмногообразием этого многообразия. Суперинтуиционистская логика L обладает интерполяционным свойством Крейга тогда и только тогда, когда соответствующее многообразие гейтинговых алгебр $V(L)$ амальгамируемо; кроме того, в случае гейтинговых алгебр амальгамируемость равносильна сверхамальгамируемости. *Интерполяционное свойство Крейга* определяется следующим образом.

CIP: если в L верна импликация $A \rightarrow B$, то существует интерполянт, т.е. такая формула C , что в L верны $A \rightarrow C$ и $C \rightarrow B$ и все переменные формулы C входят одновременно в A и в B .

В модальных логиках свойство CIP эквивалентно сверхамальгамируемости соответствующего многообразия модальных алгебр, а амальгамируемость равносильна *дедуктивному интерполяционному свойству*.

IPD: если $A \vdash_L B$, то существует такая формула C , что $A \vdash_L C$ и $C \vdash_L B$ и все переменные формулы C входят одновременно в A и в B .

Свойства сюръективности эпиморфизмов SES и ES* в модальных и суперинтуиционистских логиках равносильны [26], [15] соответственно *свойствам Бета* PB2 и B2:

PB2: пусть $\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{q}'$ – попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие y и z , $A(\mathbf{x}, \mathbf{q}, y)$ – формула. Если $A(\mathbf{x}, \mathbf{q}, y), A(\mathbf{x}, \mathbf{q}', z) \vdash_L (y \leftrightarrow z)$, то $A(\mathbf{x}, \mathbf{q}, y) \vdash_L (y \leftrightarrow B(\mathbf{x}))$ для некоторой формулы $B(\mathbf{x})$.

B2: удаляя $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ из PB2, получаем свойство B2.

Напомним некоторые определения. *Импликативная решетка* (или *решетка с относительными псевдодополнениями*) – это алгебра $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \top)$ с решеточными операциями $\wedge, \vee$, наибольшим элементом $\top$ и дополнительной операцией относительного псевдодополнения, т.е.

$$z \leq x \rightarrow y \iff z \wedge x \leq y.$$

Алгебра $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \top, \perp)$, где $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, \rightarrow, \top)$ есть импликативная решетка, а $\perp$ – произвольный элемент множества A , называется *J-алгеброй*. *Гейтинговая алгебра* – это J-алгебра, в которой $\perp$ является наименьшим элементом.

Модальной алгеброй называется алгебра $\mathbf{A} = (A, \wedge, \neg, \top, \Box)$, где $(A, \wedge, \neg, \top)$ есть булева алгебра, а одноместная операция $\Box$ удовлетворяет условиям

$$\Box \top = \top, \quad \Box(x \wedge y) = \Box x \wedge \Box y.$$

Модальная алгебра называется *транзитивной*, если на ней выполнено неравенство

$$\Box x \leq \Box \Box x.$$

Транзитивная модальная алгебра называется *топобулевой алгеброй*, если удовлетворяет $\Box x \leq x$, и *диагонализируемой алгеброй*, если

$$\Box(\Box x \rightarrow x) \leq \Box x, \quad \text{где } y \rightarrow z = \neg(y \wedge \neg z).$$

Топобулева алгебра называется *эпистемической*, если выполнено

$$x \leq \Box \Diamond x, \quad \text{где } \Diamond x = \neg \Box \neg x,$$

и *гжегорчиковой алгеброй*, если

$$\Box(\Box(x \rightarrow \Box x) \rightarrow x) \leq x.$$

Известно, что все указанные многообразия имеют свойство СЕР. Многообразия всех импликативных решеток, J-алгебр и гейтинговых алгебр, булевых алгебр, а также всех модальных алгебр, транзитивных модальных алгебр, топобулевых, диагонализируемых, эпистемических и гжегорчиковых алгебр свержамальгамируемы. Кроме того, имеется лишь конечное число амальгамируемых многообразий топобулевых алгебр [27], [15] и конечное число амальгамируемых многообразий гейтинговых алгебр [24], хотя семейства многообразий топобулевых и гейтинговых алгебр имеют мощность континуума. Напротив, существует континуум амальгамируемых многообразий диагонализируемых алгебр [15]. При этом семейство неамальгамируемых многообразий диагонализируемых алгебр также имеет мощность континуума. Слабая амальгамируемость существенно отличается от ограниченной амальгамируемости и, тем более, от амальгамируемости. В частности, все многообразия диагонализируемых алгебр, гжегорчиковых и гейтинговых алгебр слабо амальгамируемы [14]. С другой стороны для класса эпистемических алгебр слабая амальгамируемость эквивалентна сильной амальгамируемости [28], поэтому все свойства, кроме ES^* , равносильны.

В многообразиях модальных алгебр имеет место [12], [14], [15], [21]

$$\begin{aligned} \text{SupAP} &\iff \text{WSupAP} \implies \text{StrAP} \implies \text{AP} \implies \text{RAP} \implies \text{WAP}, \\ \text{StrAP} &\iff \text{AP} \& ES^* \implies \text{SES} \implies ES^*. \end{aligned}$$

В общем случае обратные импликации неверны. Кроме того,

$$ES^* \not\Rightarrow \text{WAP}. \quad \text{AP} \not\Rightarrow ES^*.$$

Все многообразия модальных транзитивных алгебр имеют ES^* [29], [15]. В многообразиях модальных транзитивных алгебр справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \text{SupAP} &\iff \text{WSupAP} \implies \text{StrAP} \iff \text{AP} \implies \text{SES} \implies \text{RAP} \implies \text{WAP}, \\ \text{StrAP} &\not\Rightarrow \text{SupAP}, \quad \text{SES} \not\Rightarrow \text{AP}, \quad \text{WAP} \not\Rightarrow \text{RAP}. \end{aligned}$$

В многообразиях эпистемических алгебр [28]:

$$\text{SupAP} \iff \text{StrAP} \iff \text{AP} \iff \text{SES} \iff \text{RAP} \iff \text{WAP}.$$

Для многообразий гейтинговых и гжегорчиковых алгебр и импликативных решеток имеем [30], [31]:

$$\text{SupAP} \iff \text{StrAP} \iff \text{AP} \implies \text{RAP} \iff \text{SES}, \quad \text{SES} \not\Rightarrow \text{AP},$$

все указанные многообразия имеют ES^* [15]; как было сказано выше, все многообразия гейтинговых и гжегорчиковых алгебр имеют WAP [14].

Полностью описаны многообразия гейтинговых и гжегорчиковых алгебр и импликативных решеток со свойствами амальгамируемости и сильной сюръективности эпиморфизмов [32]–[34]. В [15] указан список всех амальгамируемых многообразий топобулевых алгебр; установлено, что число амальгамируемых многообразий топобулевых алгебр не более 49 и не менее 43; все они конечно базиремы и порождаются своими конечными алгебрами. Найден эффективный критерий слабой амальгамируемости многообразий транзитивных модальных алгебр [35].

Найденные описания позволили доказать разрешимость алгоритмических проблем, связанных с интерполяцией и свойствами Бета в важных классах неклассических логик, с одной стороны, и с амальгамируемостью и сюръективностью эпиморфизмов в многообразиях соответствующих алгебр – с другой. Более точно, следующие свойства являются разрешимыми:

- интерполяционное свойство Крейга и дедуктивное интерполяционное свойство в суперинтуиционистских и позитивных исчислениях, а также в модальных исчислениях, содержащих модальную логику $S4$ [24], [27], [15];
- амальгамируемость, сильная амальгамируемость и сверхамальгамируемость в многообразиях топобулевых и гейтинговых алгебр и импликативных решеток [24], [27], [15];
- проективное свойство Бета над интуиционистской логикой и над логикой Гжегорчика, а также в позитивных логиках [36], [34], [33];
- сильная сюръективность эпиморфизмов и ограниченная амальгамируемость в многообразиях гейтинговых и гжегорчиковых алгебр и импликативных решеток [36], [34], [30], [33], [31];
- слабое интерполяционное свойство над модальной логикой $K4$ [35];
- слабая амальгамируемость в многообразиях транзитивных модальных алгебр [35].

Под разрешимостью свойства P над логикой L мы понимаем существование алгоритма, который по любой конечной системе схем аксиом, добавляемых к стандартным аксиомам и правилам логики L , определяет, обладает ли полученное в итоге исчисление свойством P . Свойство P считается разрешимым, например, в многообразиях гейтинговых алгебр, если существует алгоритм, который по любой конечной системе тождеств определяет, обладает ли свойством P подмногообразие гейтинговых алгебр, удовлетворяющих этим тождествам.

Все указанные выше свойства являются разрешимыми также в табличных модальных, суперинтуиционистских и позитивных логиках и соответствующих многообразиях [37] (см. далее теорему 5.1). Логика (или многообразие) называется *табличной*, если порождается конечным числом конечных алгебр. Под разрешимостью свойства P в табличных логиках понимается существование алгоритма, который по любой заданной конечной системе конечных алгебр определяет, обладает ли свойством P логика, порожденная этой системой.

3. Интерполяция, амальгамируемость и свойства Бета

В этом параграфе будет дан обзор результатов о взаимосвязях категорных и синтаксических свойств многообразий алгебр. Свойство амальгамируемости классов алгебр связано с интерполяционными свойствами их эквациональных теорий. Различные варианты свойства Бета равносильны подходящим вариантам свойства сюръективности эпиморфизмов. Соотношения различных версий интерполяционного свойства и свойства Бета с амальгамируемостью и сюръективностью эпиморфизмов в алгебраической логике рассматривались в [5], [7]–[12], [14], [15], [18] и других работах.

Приведем ряд определений. Зафиксируем произвольную сигнатуру, состоящую из функциональных символов и/или констант. Для данного множества переменных $\mathbf{x}$ через $t(\mathbf{x})$ обозначим любой терм, все переменные которого входят в $\mathbf{x}$, а через $F(\mathbf{x})$ – множество всех таких

термов. Для данной алгебры $\mathbf{A}$ *означиванием* в $\mathbf{A}$ называется любой гомоморфизм алгебры термов в алгебру $\mathbf{A}$. Если $t = t'$ – равенство двух термов и v – означивание, говорим, что $t = t'$ выполнено в $\mathbf{A}$ при означивании v и пишем $\mathbf{A} \models (t = t')[v]$, если $v(t) = v(t')$.

Если Γ – множество равенств и γ – равенство, то для любого многообразия V определим:

$$\Gamma \models_V \gamma \iff (\forall \mathbf{A} \in V)(\forall v)(\mathbf{A} \models \Gamma[v] \implies \mathbf{A} \models \gamma[v]).$$

Отметим, что отношение $\models_V$ можно заменить на синтаксическое отношение выводимости в эквациональной логике. Поэтому отношение $\models_V$ является компактным, т.е.

$$\Gamma \models_V \gamma, \text{ если и только если } \Gamma_0 \models_V \gamma \text{ для некоторого конечного } \Gamma_0 \subseteq \Gamma.$$

Для доказательств используется представление алгебр с помощью множества порождающих и определяющих соотношений [2].

Пусть фиксирована сигнатура Σ , состоящая из функциональных символов и/или констант. Если $\mathbf{x}$ – множество переменных, через $F(\mathbf{x})$ обозначаем множество всех термов данной сигнатуры от переменных из $\mathbf{x}$. Пусть заданы многообразие V сигнатуры Σ и алгебра $\mathbf{A} \in V$. Зафиксируем некоторое множество X порождающих алгебры $\mathbf{A}$. Каждому элементу $a \in X$ ставим в соответствие переменную p_a , обозначим $\mathbf{x} = \{p_a \mid a \in X\}$. Определяем каноническое означивание $v_0(p_a) = a$. На множестве $F(\mathbf{x})$ определим отношение

$$t =_{\mathbf{A}} t' \iff \mathbf{A} \models v_0(t) = v_0(t').$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Отношение $=_{\mathbf{A}}$ есть конгруэнция на $F(\mathbf{x})$ и существует изоморфизм φ_0 между $F(\mathbf{x})/_={\mathbf{A}}$ и $\mathbf{A}$ такой, что $\varphi_0(t/_={\mathbf{A}}) = v_0(t)$ для любого $t \in F(\mathbf{x})$.*

Для данной алгебры $\mathbf{A}$ с множеством порождающих X обозначаем

$$D^+(\mathbf{A}, X) = \{\delta(\mathbf{x}) \mid \mathbf{A} \models \delta(\mathbf{x})[v_0]\}.$$

Если X совпадает с $\mathbf{A}$, то обозначаем

$$D^+(\mathbf{A}) = D^+(\mathbf{A}, X).$$

Стандартным способом доказываются следующие утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если $\mathbf{B} \models D^+(\mathbf{A}, X)[v]$ для некоторой алгебры $\mathbf{B}$ и означивания v , то отображение $h(a) = v(p_a)$ можно продолжить до гомоморфизма из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$.*

Если Θ – конгруэнция на $\mathbf{A}$, то запись $(a = a') \in \Theta$ означает, что $(a, a') \in \Theta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть V – многообразие. Тогда $\Gamma \models_V \gamma$, если и только если для любой алгебры $\mathbf{A} \in V$, для любого означивания v в $\mathbf{A}$ и для любой конгруэнции Θ на $\mathbf{A}$ из $\Gamma[v] \subseteq \Theta$ следует $\gamma[v] \in \Theta$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Пусть V – многообразие, $\mathbf{A} \in V$, X – множество порождающих алгебры $\mathbf{A}$, $\Gamma \cup \{\delta\}$ – некоторое множество равенств от переменных из $\mathbf{x} = \{p_a \mid a \in X\}$, Φ – конгруэнция на $\mathbf{A}$, порожденная множеством $v_0(\Gamma)$. Тогда*

$$v_0(\delta) \in \Phi \iff D^+(\mathbf{A}, X), \Gamma \models_V \delta.$$

В частности, для любых термов $t = t(\mathbf{x})$, $t' = t'(\mathbf{x})$ выполняется

$$v_0(t) = v_0(t') \iff D^+(\mathbf{A}, X) \models_V t = t'.$$

Вторая часть утверждения следует из первой при пустом Γ .

3.1. Амальгамируемость и интерполяция. Определим ряд интерполяционных свойств. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ – попарно не пересекающиеся списки переменных, $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ – произвольные множества равенств, $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ – равенство. Следующее свойство (*интерполяционный принцип для равенств*) рассматривалось в [38]:

EIP: если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ и $F(\mathbf{x}) \neq \emptyset$, то существует $\Gamma'(\mathbf{x})$ такое, что $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

В добавление мы определим свойство IPR *ограниченной интерполяции*:

IPR: если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x})$, то существует $\Gamma'(\mathbf{x})$ такое, что $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x})$.

Ясно, что IPR – частный случай EIP.

Хотя IPR не симметрично, из него выводится симметричная форма IPR:

если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x})$, то существуют $\Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Delta'(\mathbf{x})$ такие, что $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$, $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \delta$ для всех $\delta \in \Delta'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}), \Delta'(\mathbf{x}) \models_V \delta(\mathbf{x})$.

Для вывода достаточно применить IPR еще раз к выражению $\Gamma'(\mathbf{x}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \delta(\mathbf{x})$, поменяв местами $\Gamma'(\mathbf{x}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Рассмотрим также частный случай IPR при пустом $\mathbf{z}$, а именно,

WRIP: если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}) \models_V \delta(\mathbf{x})$, то существует $\Gamma'(\mathbf{x})$ такое, что $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}), \Delta(\mathbf{x}) \models_V \delta(\mathbf{x})$.

Для классов частично упорядоченных алгебр определим *интерполяционный принцип для неравенств*:

IP: пусть $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \quad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq v(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, то существует терм $t(\mathbf{x})$ такой, что

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq t(\mathbf{x}), \quad \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Слабое интерполяционное свойство WIP определяем для классов ограниченных алгебр:

если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \perp = \top$, то существует $\Gamma'(\mathbf{x})$ такое, что $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma'(\mathbf{x})$ и $\Gamma'(\mathbf{x}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \perp = \top$.

Под *ограниченной алгеброй* понимаем частично упорядоченную алгебру с наименьшим и наибольшим элементами $\perp$ и $\top$. Ясно, что WIP является частным случаем IPR.

ТЕОРЕМА 3.5. Для любого многообразия V :

- EIP равносильно конъюнкции AP & CEP [38];
- IPR равносильно конъюнкции RAP & CEP [12];
- если V – многообразие ограниченных алгебр, то $\text{WAP} \& \text{CEP} \Rightarrow \text{WIP} \Rightarrow \text{WAP}$ [14];
- CEP равносильно WRIP [8].

Как мы видим, в случае многообразий со свойством продолжаемости конгруэнций CEP свойство амальгамируемости равносильно свойству EIP. Однако в общем случае это не так [8]. Следующий эквивалент амальгамируемости в произвольных многообразиях найден в [8] (где это свойство обозначено через ROB^*):

EIP*: пусть $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \quad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, то $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Введем также следующие свойства:

IPR* : пусть $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \quad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x})$, то $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x})$;

WIP* : пусть $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \quad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

если $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \perp = \top$, то $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \perp = \top$.

ТЕОРЕМА 3.6. Для любого многообразия V :

- (1) AP равносильно EIP*;
- (2) RAP равносильно IPR*;
- (3) если V – многообразие ограниченных алгебр, то WAP равносильно WIP*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Доказано в [8]. Приведем доказательство для (2). Аналогично доказывается (3).

RAP $\Rightarrow$ IPR*. Пусть $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \quad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\},$$

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x}).$$

Докажем, что $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x})$.

На множестве термов $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определяем конгруэнцию

$$t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx_1 t'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \iff \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V t(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = t'(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

а на множестве $F(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ – конгруэнцию

$$t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \approx_2 t'(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \iff \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = t'(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Положим $\mathbf{B}' = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\approx_1$, $\mathbf{C} = F(\mathbf{x}, \mathbf{z})/\approx_2$. Очевидно, $\mathbf{B}', \mathbf{C} \in V$.

Пусть $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{C}$, порожденная множеством $\mathbf{x}/\approx_2$. Из условия $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$ следует, что $t(\mathbf{x}) \approx_1 t'(\mathbf{x}) \iff t(\mathbf{x}) \approx_2 t'(\mathbf{x})$ для любых термов $t(\mathbf{x}), t'(\mathbf{x})$, а значит, отображение $\varphi(t(\mathbf{x})/\approx_2) = (t(\mathbf{x})/\approx_1)$ является мономорфизмом из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}'$. Отображение φ^{-1} можно продолжить до изоморфизма ψ из $\mathbf{B}'$ на подходящую алгебру $\mathbf{B}$ такую, что $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{B}$. В силу RAP существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$ и $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и ограничение ε' отображения ε на $\mathbf{A}$ является мономорфизмом.

В алгебре $\mathbf{D}$ определим означивание v :

$$v(y) = \delta\psi(y/\approx_1) \quad \text{для } y \in \mathbf{x} \cup \mathbf{y}, \quad v(z) = \varepsilon(z/\approx_2) \quad \text{для } z \in \mathbf{x} \cup \mathbf{z}.$$

Определение корректно, так как выполняется $\delta\psi(x/\approx_1) = \varepsilon(x/\approx_2)$ при $x \in \mathbf{x}$. По построению алгебры $\mathbf{B}$ получаем $\mathbf{D} \models \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})[v]$, а по построению алгебры $\mathbf{C}$ имеем $\mathbf{D} \models \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})[v]$. Следовательно, $\mathbf{D} \models \tau(\mathbf{x})[v]$. Отсюда, так как ε' – мономорфизм, получаем $\mathbf{C} \models \tau(\mathbf{x})[v_0]$, где $v_0(x) = x/\approx_2$. По определению алгебры $\mathbf{C}$ отсюда следует, что $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x})$.

IPR* $\Rightarrow$ RAP. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Обозначим

$$\mathbf{x} = \{p_a \mid a \in \mathbf{A}\}, \quad \mathbf{y} = \{p_a \mid a \in \mathbf{B} - \mathbf{A}\}, \quad \mathbf{z} = \{p_a \mid a \in \mathbf{C} - \mathbf{A}\}.$$

На множестве $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ положим

$$t\Theta t' \iff D^+(\mathbf{B}), D^+(\mathbf{C}) \models_V t = t'.$$

Тогда Θ является конгруэнцией на $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Обозначим

$$\mathbf{D} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})/\Theta$$

и положим

$$g(b) = p_b/\Theta \quad \text{для } b \in \mathbf{B}, \quad h(c) = p_c/\Theta \quad \text{для } c \in \mathbf{C}.$$

Тогда по предложению 3.2 g, h – гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно в алгебру $\mathbf{D}$, причем $g(a) = h(a)$ для всех $a \in \mathbf{A}$.

Покажем, что ограничение гомоморфизма g на алгебру $\mathbf{A}$ является мономорфизмом. Пусть $a, b \in \mathbf{A}$ и $g(a) = g(b)$. Тогда по определению алгебры $\mathbf{D}$ получаем

$$D^+(\mathbf{B}), D^+(\mathbf{C}) \models_V p_a = p_b.$$

Поскольку $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, для любого равенства $\tau(\mathbf{x})$ выполняется

$$D^+(\mathbf{B}) \models_V \tau(\mathbf{x}) \iff D^+(\mathbf{C}) \models_V \tau(\mathbf{x}).$$

По IPR* получаем

$$D^+(\mathbf{C}) \models_V p_a = p_b.$$

По предложению 3.4 отсюда следует $a = b$, что и требовалось.

В [21] найден алгебраический эквивалент для свойства ИР в многообразиях алгебр, основанных на решетках. Доказательство верно и для *полурешеточно упорядоченных алгебр*, т.е. алгебр, в сигнатуре которых присутствует операция $\wedge$, которая интерпретируется как точная нижняя грань.

ТЕОРЕМА 3.7 [21]. Пусть V – многообразие полурешеточно упорядоченных алгебр. Тогда

- WSupAP равносильно ИР;
- SupAP равносильно конъюнкции ИР & EIP*.

Поскольку существуют амальгамируемые многообразия без свойства SupAP, из теоремы 3.7 следует, что в общем случае ИР не следует из AP.

Рассмотрим случай, когда в рассматриваемом многообразии наряду с операцией $\wedge$ взятия точной нижней грани, существуют термы $\mathbf{e}(x, y)$ и $\mathbf{t}$ без переменных, определяющие равенство, т.е. удовлетворяющие условию

$$\text{EQ}: x = y \iff \mathbf{t} \leq \mathbf{e}(x, y).$$

Примерами таких многообразий могут служить многообразия булевых алгебр с операторами, гейтинговых алгебр и алгебр, связанных с нечеткими, подструктурными и релевантными логиками.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. В многообразиях, удовлетворяющих условию EQ, выполнено

$$\text{WSupAP} \implies \text{SupAP}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая теорему 3.7, выведем EIP* из ИР. Пусть $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$, где

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \quad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}.$$

Пусть

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t_1 = t_2, \quad \text{где } t_1 = t_1(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad t_2 = t_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Докажем, что $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t_1 = t_2$.

По условию EQ получаем

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \mathbf{t} \leq \mathbf{e}(t_1, t_2).$$

По ИР существует $t(\mathbf{x})$ такой, что

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \mathbf{t} \leq t(\mathbf{x}), \quad \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t(\mathbf{x}) \leq \mathbf{e}(t_1, t_2).$$

Отсюда $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \mathbf{t} \wedge t(\mathbf{x}) = \mathbf{t}$, а значит, $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \mathbf{t} \leq t(\mathbf{x})$, поскольку $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$. Поэтому $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \mathbf{t} \leq \mathbf{e}(t_1, t_2)$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t_1 = t_2$.

Из этого предложения и теоремы 3.7 сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.9. *Для любого многообразия, удовлетворяющего условию EQ, свойства ИР, SupAP и WSupAP равносильны.*

3.2. Свойства Бета и сюръективность эпиморфизмов. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{q}'$ – попарно не пересекающиеся списки переменных, не содержащие y и z , $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q}, y)$ – некоторое множество формул. Говорим, что многообразие V имеет *проективное свойство Бета* РВР, если выполнено условие:

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q}, y), \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q}', z) \models_V y = z, \text{ где } F(\mathbf{x}) \neq \emptyset \text{ влечет } \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{q}, y) \models_V y = t(\mathbf{x})$$

для некоторого термина $t(\mathbf{x})$.

Многообразию V имеет *свойство Бета* ВР, если удовлетворяет условию:

$$\text{из } \Gamma(\mathbf{x}, y), \Gamma(\mathbf{x}, z) \models_V y = z, \text{ где } F(\mathbf{x}) \neq \emptyset, \text{ следует } \Gamma(\mathbf{x}, y) \models_V y = t(\mathbf{x}) \text{ для}$$

некоторого термина $t(\mathbf{x})$.

Рассмотрим также *финитарное свойство Бета* FBP:

$$\text{пусть } \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \text{ и для всех } 1 \leq i \leq n \text{ выполнено}$$

$$\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V y_i = z_i, \text{ где } F(\mathbf{x}) \neq \emptyset. \text{ Тогда существуют термины } t_i(\mathbf{x})$$

такие, что $\Gamma(\mathbf{x}, y) \models_V y_i = t_i(\mathbf{x})$ для всех $1 \leq i \leq n$.

Ясно, что РВР $\Rightarrow$ FBP $\Rightarrow$ ВР.

Заметим, что можно вывести FBP из ВР [26], [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. *Для любого многообразия свойства FBP и ВР равносильны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n . Пусть для всех $1 \leq i \leq n$ выполнено

$$\Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n), \Gamma(\mathbf{x}, z_1, \dots, z_n) \models_V y_i = z_i,$$

где $F(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. При $n = 1$ требуемый терм существует по ВР.

Пусть $n > 1$. Тогда по ВР существует терм $t(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1})$ такой, что

$$\Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n) \models_V y_n = t(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Подставим в исходное соотношение $t(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1})$ вместо y_n и $t(\mathbf{x}, z_1, \dots, z_{n-1})$ вместо z_n . Получаем для всех $1 \leq i \leq n - 1$

$$\Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1}, t(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1})), \Gamma(\mathbf{x}, z_1, \dots, z_{n-1}, t(\mathbf{x}, z_1, \dots, z_{n-1})) \models_V y_i = z_i.$$

По индукционной гипотезе для всех $i \leq n - 1$ существуют термины $t_i(\mathbf{x})$ такие, что

$$\Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1}, t(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1})) \models_V y_i = t_i(\mathbf{x}).$$

Учитывая, что

$$\Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n), y_n = t(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1}) \models_V \Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1}, t(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1})),$$

и что равенство $y_n = t(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_{n-1})$ выводится из $\Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n)$, получаем, что для всех $i \leq n - 1$ выполняется

$$\Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n) \models_V y_i = t_i(\mathbf{x}).$$

Следовательно,

$$\Gamma(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n) \models_V y_n = t(\mathbf{x}, t_1(\mathbf{x}), \dots, t_{n-1}(\mathbf{x})).$$

Известно, что свойство Бета не следует из интерполяционного свойства ЕІР: существует контрпример в многообразиях модальных алгебр [15]. Однако легко вывести РВР из ІР.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. *Для любого многообразия частично упорядоченных алгебр проективное свойство Бета РВР следует из ІР.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x), \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \models_V x = y$. Тогда

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x), \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \models_V x \leq y.$$

Ясно, что для любого $\delta(\mathbf{p})$ выполнено условие

$$\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x) \models_V \delta(\mathbf{p}) \iff \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \models_V \delta(\mathbf{p}).$$

По ІР существует терм $t(\mathbf{p})$ такой, что $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x) \models_V x \leq t(\mathbf{p})$ и $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}', y) \models_V t(\mathbf{p}) \leq y$. Отсюда $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{q}, x) \models_V x = t(\mathbf{p})$.

Таким образом, в многообразиях частично упорядоченных алгебр выполнено

$$\text{ІР} \implies \text{РВР} \implies \text{FBP} \iff \text{ВР}.$$

Кроме того,

$$\text{РВР} \not\Rightarrow \text{ІР}, \quad \text{ВР} \not\Rightarrow \text{РВР}$$

(см. [32]).

Укажем алгебраические эквиваленты для свойств Бета.

ТЕОРЕМА 3.12. *Для любого многообразия алгебр:*

- (1) *проективное свойство Бета РВР равносильно SES;*
- (2) *свойство Бета ВР равносильно ES*.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Доказано в [26] для многообразий модальных и гейтинговых алгебр, доказательство легко переносится на общий случай [11].

(2) Доказано в [25].

Другой эквивалент свойства Бета ВР был найден ранее Немети [39, теорема 5.6.10]:

RES: пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$ и h – гомоморфизм из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ порождается множеством $h(\mathbf{A}) \cup \{a\}$ для некоторого $a \in \mathbf{B}$; если для любых гомоморфизмов k, l алгебры $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C} \in V$ выполняется $kh = lh \Rightarrow k = l$, то $h(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$.

В дополнение укажем эквивалент свойства Бета в терминах максимальных подалгебр:

ESM: если $\mathbf{A}$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B} \in V$, то существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g \neq h$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. *Для любого многообразия свойство ES* равносильно свойству ESM.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Rightarrow$. Пусть V имеет ES* и $\mathbf{A}$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B}$. Существует $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Тогда $\mathbf{A} \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{B}$ и по ES* существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$.

$\Leftarrow$. Пусть $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{B}$. Рассмотрим

$$\Sigma = \{\mathbf{A}' \mid \mathbf{A}' - \text{подалгебра алгебры } \mathbf{B}, \mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}', b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}'\}.$$

Тогда Σ удовлетворяет условиям леммы Цорна, а значит, имеет максимальный элемент $\mathbf{A}_1$. Покажем, что $\mathbf{A}_1$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B}$. Допустим, что собственная подалгебра $\mathbf{A}'$ алгебры $\mathbf{B}$ содержит $\mathbf{A}_1$. Тогда $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}'$, а значит, $\mathbf{A}' \in \Sigma$ и $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_1$.

По ESM существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}_1$ и $g \neq h$. Поскольку $\mathbf{A}_1 \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{B}$, получаем $g(b) \neq h(b)$.

Можно показать, что свойство ESM равносильно каждому из следующих свойств ESM1 и ESM2.

- ESM1: если $\mathbf{A}$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B} \in V$, $b \in \mathbf{A} - \mathbf{B}$, то существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$.
- ESM2: если $\mathbf{A}$ – максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{B} \in V$, то существуют $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы g, h из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{C}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $g(b) \neq h(b)$ для всех $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$.

В многообразиях гейтинговых алгебр свойства SES и PBP следуют из амальгамируемости. Однако это нарушается в многообразиях модальных алгебр, где в общем случае BP не следует из AP. В многообразиях модальных алгебр свойство сильной амальгамируемости StrAP равносильно конъюнкции AP & BP [25]. Это же справедливо и для произвольных многообразий [19], [17].

ТЕОРЕМА 3.14. *Для любого многообразия свойство сильной амальгамируемости StrAP равносильно конъюнкции AP & ES* и влечет SES.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) StrAP равносильно AP & ES* [25], [19], [17].

2) Свойство SES следует из StrAP: достаточно в определении StrAP подожить $\mathbf{C} = \mathbf{B}$.

Свойство ограниченной амальгамируемости RAP следует из SES в многообразиях гейтинговых алгебр [32]. Следующая теорема применима также к произвольным многообразиям модальных алгебр, решеток с относительными псевдодополнениями, а также к многообразиям резидуальных решеток [40].

Напомним, что алгебра называется *невыврожденной*, если она содержит не менее двух элементов. Невыврожденная алгебра называется *подпрямо неразложимой*, если она не представима как подпрямое произведение ее собственных факторалгебр. Алгебра называется *финитно неразложимой*, если не представима как конечное подпрямое произведение ее собственных факторалгебр.

ТЕОРЕМА 3.15 [12]. *Пусть многообразие V конгруэнц-дистрибутивно и, кроме того, подалгебры подпрямо неразложимых алгебр из V финитно неразложимы. Тогда если V имеет SES, то V имеет RAP.*

Учитывая теоремы 3.5 и 3.12, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.16. *Пусть многообразие V конгруэнц-дистрибутивно и, кроме того, подалгебры подпрямо неразложимых алгебр финитно неразложимы. Тогда если V имеет CEP и PBP, то оно обладает свойством IPR.*

Эти результаты можно применить к известным классам алгебр. Суммируя полученные утверждения и учитывая результаты из [25], [26], для многообразий модальных алгебр мы получаем следующие соотношения:

- 1) IIP $\Leftrightarrow$ SupAP;
- 2) IIP $\Rightarrow$ EIP & BP $\Leftrightarrow$ StrAP, EIP & BP $\nRightarrow$ IIP;
- 3) EIP & BP $\Rightarrow$ PBP $\Leftrightarrow$ SES;
- 4) PBP $\nRightarrow$ EIP $\Leftrightarrow$ AP, EIP $\nRightarrow$ PBP;
- 5) PBP $\Rightarrow$ IPR $\Leftrightarrow$ RAP;
- 6) EIP $\Rightarrow$ IPR, IPR & BP $\nRightarrow$ EIP;
- 7) PBP $\Rightarrow$ BP, IPR $\nRightarrow$ BP, BP $\nRightarrow$ IPR.

Аналогичные соотношения имеют место для многообразий резидуальных решеток [40], так как они обладают свойством CEP, а также удовлетворяют условиям теоремы 3.15.

4. Сведение к финитно неразложимым алгебрам

При исследовании модальных логик обнаружилась возможность сведения интерполяционного свойства, свойства Бета и амальгамируемости в многообразиях модальных алгебр к подходящим свойствам классов финитно неразложимых алгебр. Это сведение имело большое значение для доказательства разрешимости указанных свойств в многообразиях гейтинговых алгебр и алгебр замыкания и в табличных многообразиях модальных алгебр. В этом параграфе будет получено обобщение указанных результатов о сведении на другие многообразия. Будут найдены достаточные условия для подобного сведения.

Для сравнения приведем теорему о финитизации для многообразий модальных алгебр и родственных многообразий.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для любого многообразия V модальных алгебр, J-алгебр или импликативных решеток:*

- (1) V имеет SupAP тогда и только тогда, когда для любых конечно порожденных финитно неразложимых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, мономорфизмов $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $\gamma: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ и элементов $b_0 \in \mathbf{B}$, $c_0 \in \mathbf{C}$ таких, что не существует $a \in \mathbf{A}$, удовлетворяющего условиям $b_0 \leq \beta(a)$ и $\gamma(a) \leq c_0$, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$ и $h: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g\beta = h\gamma$ и $g(b_0) \not\leq h(c_0)$ [24], [25], [33];
- (2) V имеет AP тогда и только тогда, когда для любых конечно порожденных финитно неразложимых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, мономорфизмов $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $\gamma: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ и элемента $c_0 \in \mathbf{C}$, $c_0 \neq \top$, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta(x) = \varepsilon\gamma(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\delta(c_0) \neq \top$ [24], [25], [33];
- (3) V имеет StrAP тогда и только тогда, когда V имеет AP и ES* [25];
- (4) V имеет RAP тогда и только тогда, когда для любых конечно порожденных подпрямо неразложимых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, мономорфизмов $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $\gamma: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ и различных элементов $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$ существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$ и $h: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g\beta = h\gamma$ и $g\beta(a_1) \neq h\gamma(a_2)$ [41];
- (5) многообразие V модальных или гейтинговых алгебр имеет WAP тогда и только тогда, когда класс конечно порожденных финитно неразложимых алгебр из V имеет WAP [14];
- (6) V имеет ES* тогда и только тогда, когда класс конечно порожденных финитно неразложимых алгебр из V имеет ES* [25];
- (7) V имеет SES тогда и только тогда, когда для любых финитно неразложимых конечно порожденных $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ из V , для любых мономорфизмов $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, $\gamma: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ и для любых $x \in \mathbf{B}$, $y \in \mathbf{C}$, если $\neg(\exists z \in \mathbf{A})(x = \beta(z) \ \& \ \gamma(z) = y)$, то существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из $V(L)$ и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{B} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x, y) \neq \varepsilon(x, y)$ и $\delta(\beta(z), \gamma(z)) = \varepsilon(\beta(z), \gamma(z))$ для всех z из $\mathbf{A}$ [26].

Напомним, что алгебра называется *невыврожденной*, если она содержит не менее двух элементов. Невыврожденная алгебра *подпрямо неразложима*, если она не представима как подпрямое произведение ее собственных фактор-алгебр. Алгебра *финитно неразложима*, если не представима как конечное подпрямое произведение ее собственных фактор-алгебр. Невыврожденная алгебра $\mathbf{A}$ называется *простой*, если она имеет точно две конгруэнции: нулевую конгруэнцию $\text{id}_{\mathbf{A}} = \{(a, a) \mid a \in \mathbf{A}\}$ и несобственную конгруэнцию $\mathbf{A}^2$.

Для данного класса алгебр V через $\text{SI}(V)$ обозначается класс подпрямо неразложимых, через $\text{FI}(V)$ – класс финитно неразложимых, а через $\text{Sim}(V)$ – класс простых алгебр из V . Через $\text{FG}(V)$ обозначается класс конечно порожденных алгебр из класса V .

Конгруэнция называется *неразложимой*, если она не представима как пересечение конечного числа отличных от нее конгруэнций, и *вполне неразложимой*, если она не представима

как пересечение отличных от нее конгруэнций. Отметим, что алгебра $\mathbf{A}$ финитно неразложима тогда и только тогда, когда $\text{id}_{\mathbf{A}}$ неразложима; невырожденная алгебра $\mathbf{A}$ подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда ее нулевая конгруэнция $\text{id}_{\mathbf{A}}$ вполне неразложима.

Легко доказывается

ЛЕММА 4.2. *Для любой собственной конгруэнции Φ на алгебре $\mathbf{A}$:*

- факторалгебра $\mathbf{A}/\Phi$ финитно неразложима, если и только если Φ неразложима;
- $\mathbf{A}/\Phi$ подпрямо неразложима, если и только если Φ вполне неразложима.

ЛЕММА 4.3. *Пусть $a, b \in \mathbf{A}$, $a \neq b$. Тогда существует гомоморфизм h из $\mathbf{A}$ на подходящую подпрямо неразложимую алгебру $\mathbf{B}$ такой, что $h(a) \neq h(b)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство всех конгруэнций, не содержащих пару (a, b) , непусто и удовлетворяет условиям леммы Цорна, а значит, имеет максимальный элемент, который и будет вполне неразложимой конгруэнцией.

Для многообразий со свойством продолжаемости конгруэнций справедлива

ЛЕММА 4.4. *Пусть многообразие V имеет СЕР, $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in V$, $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, Φ – конгруэнция на $\mathbf{A}$. Если Φ неразложима, то существует неразложимая конгруэнция Ψ на $\mathbf{B}$ такая, что $\Psi \cap \mathbf{A}^2 = \Phi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$\Sigma = \{\Psi \mid \Psi \text{ – конгруэнция на } \mathbf{B} \text{ и } \Psi \cap \mathbf{A}^2 = \Phi\}.$$

По СЕР множество Σ непусто. Кроме того, Σ частично упорядочено по включению и объединение любой цепи элементов из Σ снова принадлежит Σ . По лемме Цорна Σ содержит максимальный элемент Ψ_0 . Нетрудно показать, что Ψ_0 неразложима.

4.1. Амальгамируемость и ограниченная амальгамируемость. Рассмотрим условия сведения для свойств амальгамируемости AP и ограниченной амальгамируемости RAP. Имеет место

ЛЕММА 4.5 [23]. *Для любого многообразия V следующие условия эквивалентны:*

- (1) V амальгамируемо;
- (2) *для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и для любых $s, c' \in \mathbf{C}$, если $s \neq c'$, то существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $g: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $h: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $h(c) \neq h(c')$.*

Следующая теорема доказана в [23] для свойства амальгамируемости.

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть многообразие V имеет СЕР и, кроме того, класс $\text{SI}(V)$ замкнут относительно взятия подалгебр. Если $\text{SI}(V)$ имеет AP, то V имеет AP.*

По аналогии можно доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 4.7. *Пусть многообразие V имеет СЕР и, кроме того, подалгебры подпрямо неразложимых алгебр из V финитно неразложимы. Тогда если класс $\text{FI}(V)$ финитно неразложимых алгебр из V имеет AP, то V имеет AP.*

Мы отметим, что условия теоремы 4.7 выполняются, например, в случае модальных алгебр и импликативных решеток в то время, как условие замкнутости класса $\text{SI}(V)$ относительно подалгебр не выполняется.

В общем случае из амальгамируемости многообразия не следует амальгамируемость классов подпрямо неразложимых или финитно неразложимых алгебр: это не выполняется даже для модальных алгебр, хотя и выполняется для гейтинговых алгебр и импликативных решеток [15]. В этой связи оказывается полезным следующее свойство.

APF: для любых алгебр $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ – конечно порожденные и финитно неразложимые и $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и для любой пары c_1, c_2 различных элементов из $\mathbf{C}$ существуют конечно порожденная подпрямо неразложимая $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\varepsilon(c_1) \neq \varepsilon(c_2)$.

Очевидно, в многообразиях APF равносильно свойству

APF': для любых конечно порожденных финитно неразложимых алгебр $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, для любых мономорфизмов β и γ алгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно и для любой пары c_1, c_2 различных элементов из $\mathbf{C}$ существуют конечно порожденная подпрямо неразложимая $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta(x) = \varepsilon\gamma(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\varepsilon(c_1) \neq \varepsilon(c_2)$.

ТЕОРЕМА 4.8. Пусть многообразие V обладает свойством CEP и, кроме того, подалгебры подпрямо неразложимых алгебр финитно неразложимы. Тогда V амальгамируемо, если и только если V имеет APF.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.3 ясно, что APF следует из AP. Пусть V имеет APF. Докажем, что V удовлетворяет условию (2) леммы 4.5. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, $c, c' \in \mathbf{C}$, $c \neq c'$. По лемме 4.3 существует вполне неразложимая конгруэнция Ψ на $\mathbf{C}$ такая, что $(c, c') \notin \Psi$. При этом алгебра $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}/\Psi$ подпрямо неразложима и является гомоморфным образом алгебры $\mathbf{C}$ относительно гомоморфизма $f(z) = z/\Psi$. Пусть $\mathbf{A}_1$ – образ алгебры $\mathbf{A}$ относительно f . По условию теоремы алгебра $\mathbf{A}_1$ финитно неразложима. Это означает, что конгруэнция $\Psi_0 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ алгебры $\mathbf{A}$ неразложима. По лемме 4.4 существует неразложимая конгруэнция Φ на $\mathbf{B}$ такая, что $\Psi_0 = \Phi \cap \mathbf{A}^2$. Обозначим $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$. Тогда $\mathbf{B}_1$ финитно неразложима и отображение $\beta: \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{B}_1$, где $\beta(x/\Psi) = x/\Phi$ для $x \in \mathbf{A}$, является мономорфизмом. По APF' существуют конечно порожденная подпрямо неразложимая $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta f(x) = \varepsilon f(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\varepsilon f(c) \neq \varepsilon f(c')$. Тогда $g(y) = \delta(y/\Phi)$ для $y \in \mathbf{B}$ и $h(z) = \varepsilon f(z)$ для $z \in \mathbf{C}$ – требуемые гомоморфизмы.

Перейдем к ограниченной амальгамируемости. Следующие утверждения доказаны в [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. Для любого многообразия V следующие условия эквивалентны:

- (1) V имеет RAP;
- (2) для любых мономорфизмов $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и $\gamma: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ алгебр из V существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ и $\delta\beta$ является мономорфизмом;
- (3) для любых $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ таких, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и для любых $a, a' \in \mathbf{A}$, если $a \neq a'$, то существуют алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta(x) = \varepsilon(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и $\delta(a) \neq \delta(a')$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Пусть многообразие V имеет CEP. Тогда следующие условия эквивалентны:

- V имеет RAP.
- для любых мономорфизмов $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и $\gamma: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ подпрямо неразложимых алгебр из V существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $\delta: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $\varepsilon: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $\delta\beta = \varepsilon\gamma$ и $\delta\beta$ есть мономорфизм.

Учитывая теорему 3.5, (2), можно в предложении 4.10 ограничиться конечно порожденными алгебрами $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$. Из предложения 4.10 сразу вытекает

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть многообразие V имеет CEP. Тогда V имеет RAP, если и только если класс $\text{FGSI}(V)$ конечно порожденных подпрямо неразложимых алгебр из V имеет RAP.

4.2. Слабая амальгамируемость и простые алгебры. Слабое интерполяционное свойство и слабая амальгамируемость в многообразиях ограниченных алгебр изучались в [14]. Приведем основные результаты этой статьи.

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть V – многообразие ограниченных алгебр. Тогда

- (1) если V имеет WIP, то оно имеет WAP;
- (2) если V имеет CEP и $FG(V)$ имеет WAP, то V имеет WIP.

Непосредственно из теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4.13. Для любого многообразия V ограниченных алгебр со свойством CEP следующие условия эквивалентны:

- (1) V имеет WIP;
- (2) V имеет WAP;
- (3) $FG(V)$ имеет WAP.

Для многообразий модальных алгебр эквивалентность WIP и WAP следует из [28, теорема 2.3].

Напомним, что невырожденная алгебра называется *простой*, если она имеет точно две конгруэнции. Легко видеть, что в ограниченной алгебре конгруэнция Θ является собственной тогда и только тогда, когда $(\perp, \top) \notin \Theta$. Для любой собственной конгруэнции Θ ограниченной алгебры $\mathbf{A}$ существует максимальная конгруэнция $\Theta' \supseteq \Theta$; алгебра $\mathbf{A}/\Theta$ является простой тогда и только тогда, когда Θ – максимальная конгруэнция на $\mathbf{A}$.

Легко видеть, что справедлива следующая

ЛЕММА 4.14. Если многообразие V имеет CEP, то невырожденная подалгебра простой алгебры из V является простой алгеброй.

ТЕОРЕМА 4.15 [14]. Пусть многообразие V ограниченных алгебр имеет CEP. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) V слабо амальгамируемо;
- (2) класс простых алгебр из V амальгамируем;
- (3) класс конечно порожденных простых алгебр из V амальгамируем.

В [35] описаны все конечно порожденные, простые транзитивные модальные алгебры. Это позволило доказать разрешимость слабой амальгамируемости в многообразиях транзитивных модальных алгебр.

В [23] доказано, что существуют точно четыре нетривиальных амальгамируемых многообразия дистрибутивных решеток с псевдодополнениями. С другой стороны, имеется лишь одна простая дистрибутивная решетка с псевдодополнениями – это двухэлементная булева алгебра. Поэтому все многообразия дистрибутивных решеток с псевдодополнениями имеют WAP и WIP.

Аналогично, каждый из классов простых гейтинговых, диагонализированных и гжегорчиковых алгебр состоит из одной двухэлементной алгебры. Поэтому все подмногообразия гейтинговых, диагонализированных и гжегорчиковых алгебр имеют WAP и WIP [28].

С другой стороны, в многообразиях эпистемических алгебр слабая амальгамируемость равносильна сверхамальгамируемости [28]. Все амальгамируемые многообразия эпистемических алгебр были описаны в [27], [42]. Можно показать, что простые эпистемические алгебры – это в точности модальные алгебры $\mathbf{A} = (A, \wedge, \neg, \top, \Box)$, где $\Box\top = \top$, $\Box x = \perp$ при $x \neq \top$. Кроме тривиального многообразия и многообразия всех эпистемических алгебр, амальгамируемыми являются многообразия, порожденные двухэлементной или четырехэлементной алгеброй указанного вида.

4.3. Сверхамальгамируемость и свойство делимости. В формулировке свойства сверхамальгамируемости предполагается, что все алгебры частично упорядочены. Мы ограничимся рассмотрением классов алгебр, основанных на нижних полурешетках. То есть предполагаем, что в многообразиях выражима бинарная операция $\wedge$ взятия точной нижней грани.

Неизвестно, как в общем случае свести свойство сверхамальгамируемости к финитно неразложимым алгебрам. В случае модальных или гейтинговых алгебр такое сведение возможно (см. теорему 4.1) и играет большую роль в изучении сверхамальгамируемости. По теореме 3.5 сверхамальгамируемость равносильна конъюнкции свойств AP и WSupAP. Теорема 4.8 дает достаточные условия для сведения свойства AP.

Теперь рассмотрим вопрос о финитизации свойств ИР и WSupAP. Когда свойство WSupAP можно свести к рассмотрению финитно неразложимых алгебр?

Определим свойство

FWSupAP: для любой алгебры $\mathbf{A}$, любых финитно неразложимых и конечно порожденных $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, если $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, элементы $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ удовлетворяют условию $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b \leq a \ \& \ a \leq c)$, то существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $h: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g(a) = h(a)$ для всех $a \in \mathbf{A}$ и $g(b) \not\leq h(c)$.

Нетрудно понять, что в многообразиях свойство FWSupAP равносильно следующему свойству.

FWSupAP': для любой алгебры $\mathbf{A}$, любых финитно неразложимых и конечно порожденных $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$, любых мономорфизмов $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ и $\gamma: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ и любых элементов $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ таких, что $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b \leq \beta(a) \ \& \ \gamma(a) \leq c)$, существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$, $h: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g\beta = h\gamma$ и $g(b) \not\leq h(c)$.

Мы сформулируем *свойство делимости* SEP, которое справедливо для модальных и гейтинговых алгебр и существенно использовалось при исследовании амальгамируемости в многообразиях этих алгебр.

SEP: пусть $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ из V , $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ и $\neg(\exists x \in \mathbf{A})(b \leq x \ \& \ x \leq c)$. Тогда существуют неразложимые конгруэнции Φ на $\mathbf{B}$ и Ψ на $\mathbf{C}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b/\Phi \leq a/\Phi \ \& \ a/\Psi \leq c/\Psi)$.

Ясно, что в случае полурешеток условие $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b/\Phi \leq a/\Phi \ \& \ a/\Psi \leq c/\Psi)$ равносильно условию $\neg(\exists a \in \mathbf{A})((b, b \wedge a) \in \Phi \ \& \ (a, a \wedge c) \in \Psi)$.

ТЕОРЕМА 4.16. Для любого многообразия V полурешеточно упорядоченных алгебр, обладающего свойством делимости SEP, следующие условия эквивалентны:

- (1) V имеет ИР;
- (2) V имеет WSupAP;
- (3) V имеет FWSupAP.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.7 ИР и WSupAP равносильны. Мы докажем

$$\text{WSupAP} \implies \text{FWSupAP} \quad \text{и} \quad \text{FWSupAP} \implies \text{ИР}.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть V имеет WSupAP. Докажем, что V имеет FWSupAP. Пусть даны алгебры $\mathbf{A}$, финитно неразложимые и конечно порожденные $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in V$ такие, что $\mathbf{A}$ является общей подалгеброй алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, и элементы $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ удовлетворяют условию $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b \leq a \ \& \ a \leq c)$. По WSupAP существуют $\mathbf{D}$ из V и гомоморфизмы $g: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{D}$ и $h: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$ и, кроме того,

$$g(x) \leq h(y) \iff (\exists z \in \mathbf{A})(x \leq z \ \text{и} \ z \leq y).$$

Ясно, что можно считать алгебру $\mathbf{D}$ конечно порожденной. Кроме того, имеем $g(b) \not\leq h(c)$, т.е. $g(b) \wedge h(c) \neq g(b)$. По лемме 4.3 существует гомоморфизм f из $\mathbf{D}$ на подходящую подпрямую неразложимую алгебру $\mathbf{D}'$ такой, что $f(g(b)) \wedge f(h(c)) \neq f(g(b))$, что равносильно $f(g(b)) \not\leq f(h(c))$. Тогда $\mathbf{D}'$ – искомая алгебра, которая требуется в FWSupAP.

(3) $\Rightarrow$ (1). Допустим, для доказательства от противного, что V имеет свойство FWSupAP', равносильное FWSupAP, но не имеет ИП. Существуют $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, удовлетворяющие условиям:

$$(1) \Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x}), \text{ где}$$

$$\Gamma'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\}, \quad \Delta'(\mathbf{x}) = \{\alpha(\mathbf{x}) \mid \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \alpha(\mathbf{x})\};$$

$$(2) \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq v(\mathbf{x}, \mathbf{z});$$

$$(3) \text{ не существует терма } t(\mathbf{x}) \text{ такого, что } \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq t(\mathbf{x}) \text{ и } \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V t(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Без ограничения общности можно считать, что списки $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ конечны. На множестве термов $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определяем конгруэнцию

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx_1 \tau'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \iff \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \models_V \tau(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tau'(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

а на множестве $F(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ – конгруэнцию

$$\tau(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \approx_2 \tau'(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \iff \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \models_V \tau(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \tau'(\mathbf{x}, \mathbf{z}).$$

Положим $\mathbf{B} = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\approx_1$, $\mathbf{C}' = F(\mathbf{x}, \mathbf{z})/\approx_2$.

Пусть $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{B}$, порожденная множеством $\mathbf{x}/\approx_1$. Из условия $\Gamma'(\mathbf{x}) = \Delta'(\mathbf{x})$ следует, что $\tau(\mathbf{x}) \approx_1 \tau'(\mathbf{x}) \iff \tau(\mathbf{x}) \approx_2 \tau'(\mathbf{x})$ для любых термов $\tau(\mathbf{x}), \tau'(\mathbf{x})$, а значит, отображение $\varphi(\tau(\mathbf{x})/\approx_1) = (\tau(\mathbf{x})/\approx_2)$ является мономорфизмом из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{C}'$. Отображение φ^{-1} можно продолжить до изоморфизма ψ из $\mathbf{C}'$ на подходящую алгебру $\mathbf{C}$ такую, что $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{C}$.

Положим $b = u(\mathbf{x}, \mathbf{y})/\approx_1$, $c = \varphi^{-1}(v(\mathbf{x}, \mathbf{z})/\approx_2)$. По условию (3) не существует элемента $a \in \mathbf{A}$ такого, что $b \leq a$ и $a \leq c$.

Применяем свойство отделимости. Существуют неразложимые конгруэнции Φ на $\mathbf{B}$ и Ψ на $\mathbf{C}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b/\Phi \leq a/\Phi \ \& \ a/\Psi \leq c/\Psi)$. Обозначим $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}/\Psi$. Тогда $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{C}_1$ финитно неразложимы и образ $\mathbf{A}_1$ подалгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}_1$ изоморфно вложим в $\mathbf{C}_1$ с помощью мономорфизма $\gamma(a/\Phi) = a/\Psi$. По свойству WSupAP' существуют подпрямую неразложимая алгебра $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g: \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{D}$, $h: \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g(b/\Phi) \not\leq h(c/\Psi)$ и $g(a/\Phi) = h\gamma(a/\Phi)$ для всех $a \in \mathbf{A}$.

Строим означивание v формул от переменных $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ в алгебре $\mathbf{D}$, полагая

$$v(y) = g((y/\approx_1)/\Phi) \text{ для } y \in (\mathbf{x} \cup \mathbf{y}), \quad v(z) = h((z/\approx_2)/\Psi) \text{ для } z \in \mathbf{z}.$$

Тогда, учитывая, что $h((x/\approx_2)/\Psi) = v(x)$ для $x \in \mathbf{x}$, получаем

$$\mathbf{D} \models \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})[v], \quad \mathbf{D} \models \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{z})[v].$$

Из условия (2) заключаем, что $\mathbf{D} \models (u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq v(\mathbf{x}, \mathbf{z}))[v]$, т.е. $g(b/\Phi) \leq h(c/\Psi)$ – противоречие.

4.4. Свойства Бета и финитно неразложимые алгебры. В общем случае свойство Бета не сводится к финитно неразложимым алгебрам. Например, многообразие ограниченных дистрибутивных решеток не обладает свойством Бета (см., например, [21]), хотя класс финитно неразложимых алгебр из этого многообразия состоит лишь из двухэлементных решеток, не имеющих собственных подалгебр, и, очевидно, обладает свойством ES^* , эквивалентным ВР.

Для сведения свойств Бета нам достаточно следующего свойства отделимости SEP1, которое вытекает из SEP:

SEP1: пусть $\mathbf{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{B}$ из V , $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$; тогда существуют неразложимые конгруэнции Φ и Ψ на $\mathbf{B}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists a \in \mathbf{A})((a, b) \in \Phi \ \& \ (a, b) \in \Psi)$.

Легко вывести SEP1 из SEP: достаточно положить в SEP $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ и $c = b$.

ТЕОРЕМА 4.17. Пусть многообразие V имеет SEP1. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) V имеет свойство Бета BP;
- (2) для любой конечно порожденной, финитно неразложимой алгебры $\mathbf{B} \in V$ и любого $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$ такого, что $\mathbf{A} \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{A}$, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{C} \in V$ и гомоморфизмы $g: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ и $h: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ такие, что $g(b) \neq h(b)$ и $g(x) = h(x)$ для всех $x \in \mathbf{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Следует из эквивалентности BP и ES* (теорема 3.12).

(2) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что V не обладает свойством BP, и найдем контрпример для (2).

Существует множество равенств $\Gamma(\mathbf{p}, x)$ такое, что

$$\Gamma(\mathbf{p}, x), \Gamma(\mathbf{p}, y) \models_V x = y, \quad \neg \exists t(\mathbf{p})(\Gamma(\mathbf{p}, x) \models_V x = t(\mathbf{p})).$$

Очевидно, список $\mathbf{p}$ можно считать конечным. Берем следующую конгруэнцию на алгебре термов $F(\mathbf{p}, x)$:

$$u(\mathbf{p}, x) \approx v(\mathbf{p}, x) \iff \Gamma(\mathbf{p}, x) \models_V u(\mathbf{p}, x) = v(\mathbf{p}, x).$$

Обозначим через $\mathbf{B}$ факторалгебру алгебры $F(\mathbf{p}, x)$ по этой конгруэнции, а через $\mathbf{A}$ – подалгебру алгебры $\mathbf{B}$, состоящую из образов термов из $F(\mathbf{p})$. Для любой переменной $z \in \mathbf{p} \cup \{x\}$ обозначаем $z' = z / \approx$. Тогда $x' \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. По свойству SEP1 существуют неразложимые конгруэнции Φ и Ψ на $\mathbf{B}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists a \in \mathbf{A})((x', a) \in \Phi \text{ и } (x', a) \in \Psi)$.

Обозначим $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} / \Phi$, $b = x' / \Phi$, $\mathbf{A}_1 = \{a / \Phi \mid a \in \mathbf{A}\}$. Покажем, что $b \in \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1$.

Допустим (для доказательства от противного), что $b \in \mathbf{A}_1$, т.е. существует $a \in \mathbf{A}$ такой, что $x' / \Phi = a / \Phi$. Тогда $(x', a) \in \Phi$. Кроме того, для любого равенства $\gamma(\mathbf{p}, x) \in \Gamma(\mathbf{p}, x)$ имеем $\mathbf{B} \models \gamma(\mathbf{p}', x')$, поэтому $\gamma(\mathbf{p}', x') \in \Phi$. Из $(x', a) \in \Phi$ получаем $\gamma(\mathbf{p}', a) \in \Phi$, а значит, $\gamma(\mathbf{p}', a) \in \Psi$. Таким образом, $\Gamma(\mathbf{p}', a) \subseteq \Psi$.

Из условия $\mathbf{B} \models \Gamma(\mathbf{p}', x')$ заключаем, что $\Gamma(\mathbf{p}', x') \subseteq \Psi$. Учитывая $\Gamma(\mathbf{p}', a) \subseteq \Psi$ и $\Gamma(\mathbf{p}, x), \Gamma(\mathbf{p}, y) \models_V x = y$, получаем $(x', a) \in \Psi$, что противоречит условию $\neg(\exists a \in \mathbf{A})((x', a) \in \Phi \text{ и } (x', a) \in \Psi)$. Следовательно, $b \in \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1$.

Поскольку конгруэнция Φ является неразложимой, алгебра $\mathbf{B}_1$ финитно неразложима. Кроме того, $\mathbf{B}_1$ – конечно порожденная и $\mathbf{A}_1 \cup \{b\}$ порождает $\mathbf{B}_1$.

Допустим, что существуют подпрямо неразложимая $\mathbf{D} \in V$ и два гомоморфизма h и g из $\mathbf{B}_1$ в $\mathbf{D}$ такие, что $h(a) = g(a)$ для всех $a \in \mathbf{A}_1$ и $h(b) \neq g(b)$. Рассмотрим следующее означивание v в алгебре $\mathbf{D}$:

$$\begin{aligned} v(p) &= g(p' / \Phi) = h(p' / \Phi) && \text{для любой переменной } p \in \mathbf{p}, \\ v(x) &= g(b), && v(y) = h(b). \end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{D} \models \Gamma(\mathbf{p}, x)[v]$, $\mathbf{D} \models \Gamma(\mathbf{p}, y)[v]$, однако $\mathbf{D} \not\models (x = y)[v]$, что противоречит $\Gamma(\mathbf{p}, x), \Gamma(\mathbf{p}, y) \models_V x = y$. Теорема доказана.

Для проективного свойства Бета недостаточно, чтобы класс конечно порожденных финитно неразложимых алгебр из V имел свойство SES даже в случае, когда V имеет свойство SEP1 или даже более сильное свойство SEP. Простой контрпример был найден в [26] в классе гейтинговых алгебр. Там показано, что многообразие, порожденное 5-элементной линейно упорядоченной гейтинговой алгеброй, не имеет свойства SES. С другой стороны, для любой линейно упорядоченной гейтинговой алгебры $\mathbf{B}$ и любой ее подалгебры легко найти требуемые гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$. Тем не менее, при условии SEP1 сведение существует. Следующая

теорема является аналогом теоремы 3.8 из [26], доказанной для многообразий модальных алгебр.

ТЕОРЕМА 4.18. Пусть многообразие V имеет SEP1. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) V имеет проективное свойство Бета PBP;
- (2) для любых конечно порожденных финитно неразложимых алгебр $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, имеющих общую подалгебру $\mathbf{A}$, и любых элементов $b \in \mathbf{B}$, $c \in \mathbf{C}$ таких, что $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b = a \ \& \ a = c)$, существуют подпрямо неразложимая алгебра $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g: \mathbf{B} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ и $h: \mathbf{B} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g(b, c) \neq h(b, c)$ и $g(a, a) = h(a, a)$ для всех $a \in \mathbf{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем равносильность PBP и SES (теорема 3.12).

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть даны $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ из V , имеющие общую подалгебру $\mathbf{A}$, и $b \in \mathbf{B}, c \in \mathbf{C}$ такие, что $\neg(\exists a \in \mathbf{A})(b = a \ \& \ a = c)$. Тогда алгебра $\mathbf{A}' = \{(z, z) \mid z \in \mathbf{A}\}$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ и $(b, c) \in \mathbf{D} - \mathbf{A}'$. По SES существуют алгебра $\mathbf{D}'$ в $V(L)$ и требуемые гомоморфизмы. При этом можно взять алгебру $\mathbf{D}'$ подпрямо неразложимой.

(2) $\Rightarrow$ (1). В силу равносильности PBP и SES достаточно доказать SES для конечно порожденных алгебр. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – конечно порожденные алгебры из V , $\mathbf{A}$ – подалгебра алгебры $\mathbf{B}$ и $b \in \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Тогда по SEP1 существуют неразложимые конгуэнции Φ и Ψ на $\mathbf{B}$ такие, что $\Phi \cap \mathbf{A}^2 = \Psi \cap \mathbf{A}^2$ и $\neg(\exists a \in \mathbf{A})((a, b) \in \Phi \ \& \ (a, b) \in \Psi)$.

Тогда алгебры $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\Phi$ и $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}/\Psi$ финитно неразложимы. Заметим, что алгебра $\mathbf{A}_0 = \{a/\Phi \mid a \in \mathbf{A}\}$ изоморфно вложима в $\mathbf{B}_2$ с помощью мономорфизма $i_2(a/\Phi) = a/\Psi$, причем $\neg(\exists z \in \mathbf{A}_0)(b/\Phi = z \ \& \ b/\Psi = z)$. Существует изоморфизм φ алгебры $\mathbf{B}_2$ на подходящую алгебру $\mathbf{C}$ такую, что $\mathbf{A}_0$ является подалгеброй $\mathbf{C}$. Положим $b_1 = b/\Phi$, $c = \varphi(b/\Psi)$. По условию (2) существуют $\mathbf{D} \in V$ и гомоморфизмы $g: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ и $h: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ такие, что $g(b_1, c) \neq h(b_1, c)$ и $g(a, a) = h(a, a)$ для всех $a \in \mathbf{A}_0$. Для $x \in \mathbf{B}$ полагаем $\beta(x) = g(x/\Phi, \varphi(x/\Psi))$, $\gamma(x) = h(x/\Phi, \varphi(x/\Psi))$. Тогда β и γ – требуемые гомоморфизмы из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{D}$.

5. Многообразия, порожденные конечными алгебрами

Применим результаты предыдущих параграфов к табличным многообразиям. Многообразие алгебр конечной сигнатуры называется *табличным*, если оно порождается конечным числом конечных алгебр или, эквивалентно, одной конечной алгеброй. Укажем достаточные условия для разрешимости интерполяционных свойств, вариантов амальгамируемости и свойства Бета в табличных многообразиях алгебр.

Теоремы 3.5, 3.6 и 4.1 позволяют эффективно доказать или опровергнуть рассматриваемые свойства в табличных многообразиях модальных алгебр, импликативных решеток или гейтинговых алгебр. В случае указанных табличных многообразий можно за конечное число шагов проверить, удовлетворяет ли подкласс, состоящий из финитно неразложимых алгебр условиям (1)–(7) теоремы 4.1. С использованием известной теоремы Йонссона [43] доказываемся

ТЕОРЕМА 5.1. Следующие свойства являются разрешимыми на классах табличных многообразий модальных или гейтинговых алгебр, или решеток с относительными псевдодополнениями:

- (1) амальгамируемость, сверхамальгамируемость, сильная амальгамируемость, ограниченная амальгамируемость, слабая амальгамируемость;
- (2) сюръективность эпиморфизмов ES^* и сильная сюръективность эпиморфизмов SES;
- (3) интерполяционные свойства EIP, IPR, WIP, IIP;
- (4) свойство Бета BP и проективное свойство Бета PBP.

Напомним, что все указанные в теореме многообразия обладают свойством продолжаемости конгруэнций, поэтому свойства EIP^* , IPR^* и WIP^* равносильны EIP^* , IPR^* и WIP^* соответственно.

Для проверки свойств, указанных в теореме 5.1, по данному конечному множеству алгебр, порождающих многообразие V , достаточно построить конечный класс финитно неразложимых алгебр, содержащий все с точностью до изоморфизма финитно неразложимые алгебры из V , а затем проверить требуемые в теореме 4.1 условия.

Существенную роль в доказательстве играет тот факт, что все рассматриваемые многообразия конгруэнц-дистрибутивны, т.е. все алгебры, имеют дистрибутивные решетки конгруэнций. Если конгруэнц-дистрибутивное многообразие порождается конечным числом конечных алгебр, то по теореме Йонссона [43] оно имеет лишь конечное число (с точностью до изоморфизма) финитно неразложимых алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие, порожденное конечным множеством K конечных алгебр конечной сигнатуры. Тогда любая финитно неразложимая алгебра из V конечна, и можно эффективно найти конечный класс K_0 конечных алгебр, состоящий из всех (с точностью до изоморфизма) финитно неразложимых алгебр из V .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть многообразие V порождается конечным множеством K конечных модальных алгебр. Поскольку многообразие конгруэнц-дистрибутивно, по теореме Йонссона любая подпрямо неразложимая алгебра из V входит в класс $\text{HSP}_U(K)$ [43], где H , S и P_U – замыкания класса алгебр относительно взятия гомоморфных образов, подалгебр и ультрапроизведений соответственно. Можно показать что это же верно и для финитно неразложимых алгебр. Любое ультрапроизведение алгебр из K конечно и изоморфно некоторой алгебре из K . Отсюда следует, что любая финитно неразложимая алгебра из V изоморфна некоторой алгебре из класса $\text{HS}(K)$, поэтому любая финитно неразложимая алгебра конечна. Кроме того, класс $\text{HS}(K)$ является конечным с точностью до изоморфизма. Проверка свойства финитной неразложимости также является эффективной. Таким образом, получим конечный подкласс K_0 , содержащий с точностью до изоморфизма все финитно неразложимые алгебры из V .

Используя критерии, найденные в предыдущих параграфах, установим результаты о разрешимости исследуемых в работе свойств в табличных многообразиях. Предполагаем, что табличное многообразие задается с помощью конечной алгебры, порождающей это многообразие. Обозначаем через $V(\mathbf{A})$ многообразие, порожденное алгеброй $\mathbf{A}$. Учитывая предложение 5.2, мы ограничимся рассмотрением конгруэнц-дистрибутивных многообразий конечной сигнатуры.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечной сигнатуры, обладающее свойством продолжаемости конгруэнций CEP . Тогда*

- (1) *существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойствами RAP и IPR ;*
- (2) *если подалгебры подпрямо неразложимых алгебр из V финитно неразложимы, то существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойствами AP и EIP ;*
- (3) *если V – многообразие ограниченных алгебр, то существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойствами WAP и WIP .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.5 свойство RAP равносильно IPR , AP равносильно EIP , а WAP эквивалентно WIP . По предложению 5.2 эффективно строится конечный класс, состоящий из всех с точностью до изоморфизма финитно неразложимых алгебр из $V(\mathbf{A})$. Далее используем теоремы 4.11, 4.5 и 4.15.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие полурешеточно упорядоченных алгебр конечной сигнатуры, обладающее свойством отделимости SEP. Тогда существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойствами IP и WSupAP.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 3.7, предложения 5.2 и теоремы 4.16.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечной сигнатуры, обладающее свойством отделимости SEP1. Тогда существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойствами BP, PBP, ES* или SES.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 3.12, предложения 5.2 и теорем 4.17 и 4.18.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть V – конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечной сигнатуры, обладающее свойством CEP, причем подалгебры подпрямо неразложимых алгебр финитно неразложимы. Тогда:

- (1) если V – многообразие полурешеточно упорядоченных алгебр, имеющее SEP, то существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойством SupAP;
- (2) если V имеет SEP1, то существует алгоритм, позволяющий для любой конечной алгебры $\mathbf{A} \in V$ определить, обладает ли многообразие $V(\mathbf{A})$ свойством StrAP.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Сразу следует из теорем 3.7, 5.3, 5.4.

(2) Следует из теорем 3.14, 5.3, 5.5.

Теорема 5.3 применима, например, к многообразиям дистрибутивных решеток с псевдодополнениями, резидуальных решеток [40] и так называемых BL-алгебр [13], используемых для интерпретации нечетких логик, поскольку все эти многообразия конгруэнц-дистрибутивны и обладают свойством CEP. Все теоремы 5.3–5.6 применимы к многообразиям булевых алгебр с операторами [44].

Список литературы

- [1] А. И. Мальцев, “О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики”, *Труды Международного конгресса математиков* (Москва, 1966), Мир, М., 1966, 217–231.
- [2] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Современная алгебра, Наука, М., 1970.
- [3] W. Craig, “Three uses of the Herbrand-Gentzen theorem in relating model theory and proof theory”, *J. Symbolic Logic*, **22**:3 (1957), 269–285.
- [4] E. W. Beth, “On Padoa’s method in the theory of definition”, *Indagationes Math.*, **15**:4 (1953), 330–339.
- [5] B. Jónsson, “146–157”, *Theory of Models* (Berkeley, 1963), North-Holland, Amsterdam, 1965.
- [6] D. Pigozzi, “Amalgamation, congruence-extension, and interpolation properties in algebras”, *Algebra Universalis*, **1** (1971), 269–349.
- [7] J. Barwise, S. Feferman (eds.), *Model-Theoretic Logics*, Perspect. Math. Logic, Springer-Verlag, New York, NY, 1985.
- [8] H. Ono, “Interpolation and the Robinson property for logics not closed under the Boolean operations”, *Algebra Universalis*, **23**:2 (1986), 111–122.
- [9] I. Sain, “Beth’s and Craig’s properties via epimorphisms and amalgamation in algebraic logic”, *Algebraic Logic and Universal Algebra in Computer Science* (Ames, IA, 1988), Lecture Notes in Comput. Sci., **425**, Springer-Verlag, 1990, 209–225.
- [10] J. Czelakowski, D. Pigozzi, “Amalgamation and Interpolation in abstract algebraic logic”, *Models, Algebras and Proofs* (Bogotá, 1995), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **203**, Marcel Dekker, New York, NY, 1999, 187–265.

- [11] E. Hoogland, *Definability and Interpolation. Model-Theoretic Investigations*, ILLC Publications, Dissertation Series, Nr. DS-2001-05, Amsterdam, Univ. of Amsterdam, 2001.
- [12] Л. Л. Максимова, “Ограниченная интерполяция и проективное свойство Бета в эквациональной логике”, *Алгебра и логика*, **42:6** (2003), 712–726.
- [13] F. Montagna, “Interpolation and Beth’s property in propositional many-valued logics: A semantic investigation”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **141:1-2** (2006), 148–179.
- [14] Л. Л. Максимова, “Слабая форма интерполяции в эквациональной логике”, *Алгебра и логика*, **47:1** (2008), 94–107.
- [15] D. M. Gabbay, L. Maksimova, *Interpolation and Definability. Modal and Intuitionistic Logics*, Oxford Logic Guides, **46**, Clarendon Press, Oxford, 2005.
- [16] L. Maksimova, “Definability and interpolation in non-classical logics”, *Studia Logica*, **82:2** (2006), 271–291.
- [17] H. Kihara, H. Ono, “Interpolation properties, Beth definability properties and amalgamation properties for substructural logics”, *J. Logic Comput.*, **20:4** (2010), 823–875.
- [18] P. D. Bacsich, “Amalgamation properties and interpolation theorems for equational theories”, *Algebra Universalis*, **5:1** (1975), 45–55.
- [19] E. W. Kiss, L. Márki, P. Pröhle, W. Tholen, “Categorical algebraic properties. A compendium on amalgamation, congruence extension, epimorphisms, residual smallness, and injectivity”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **18:1** (1983), 79–141.
- [20] H. Andréka, I. Németi, I. Sain, “Algebraic logic”, *Handbook of Philosophical Logic*, v. 2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 133–247.
- [21] Л. Л. Максимова, Е. Орловская, “Свойство Бета и интерполяция в алгебрах и логиках, основанных на решётках”, *Алгебра и логика*, **47:3** (2008), 307–334.
- [22] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
- [23] G. Grätzer, H. Lakser, “The structure of pseudocomplemented distributive lattices. II. Congruence extension and amalgamation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **156** (1971), 343–358.
- [24] Л. Л. Максимова, “Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия псевдобулевых алгебр”, *Алгебра и логика*, **16:6** (1977), 643–681.
- [25] Л. Л. Максимова, “Модальные логики и многообразия модальных алгебр: свойство Бета, интерполяция и амальгамируемость”, *Алгебра и логика*, **31:2** (1992), 145–166.
- [26] Л. Л. Максимова, “Проективные свойства Бета в модальных и суперинтуиционистских логиках”, *Алгебра и логика*, **38:3** (1999), 316–333.
- [27] Л. Л. Максимова, “Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр”, *Алгебра и логика*, **18:5** (1979), 556–586.
- [28] L. Maksimova, “Interpolation and joint consistency”, *We Will Show Them!*, v. 2, Essays in Honour of Dov Gabbay, King’s College Publ., London, 2005, 293–305.
- [29] Л. Л. Максимова, “Аналог теоремы Бета в нормальных расширениях модальной логики $K4$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **33:6** (1992), 118–130.
- [30] L. Maksimova, “Problem of restricted interpolation in superintuitionistic and some modal logics”, *Log. J. IGPL*, **18:3** (2010), 367–380.
- [31] Л. Л. Максимова, “Проективное свойство Бета и интерполяция в позитивных и близких к ним логиках”, *Алгебра и логика*, **45:1** (2006), 85–113.
- [32] L. L. Maksimova, “Intuitionistic logic and implicit definability”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **105:1-3** (2000), 83–102.
- [33] Л. Л. Максимова, “Неявная определимость и позитивные логики”, *Алгебра и логика*, **42:1** (2003), 65–93.
- [34] L. Maksimova, “Projective Beth property in Extensions of Grzegorczyk logic”, *Studia Logica*, **83:1-3** (2006), 365–391.
- [35] А. В. Карпенко, “Слабое интерполяционное свойство в расширениях логик $S4$ и $K4$ ”, *Алгебра и логика*, **47:6** (2008), 705–722.
- [36] Л. Л. Максимова, “Разрешимость проективного свойства Бета в многообразиях гейтинговых алгебр”, *Алгебра и логика*, **40:3** (2001), 290–301.

- [37] L. Maksimova, “Decidability of some properties in tabular logics”, *13th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Volume of Abstracts (2007, Beijing, China), 124–125.
- [38] A. Wroński, “On a form of equational interpolation property”, *Foundations of Logic and Linguistics* (Salzburg, 1983), Plenum Press, London, 1985, 23–29.
- [39] L. Henkin, J.D. Monk, A. Tarski, *Cylindric Algebras*, Part II, Stud. Logic Found. Math., **115**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [40] T. Kowalski, H. Ono, “Splittings in the variety of residuated lattices”, *Algebra Universalis*, **44**:3–4 (2000), 283–298.
- [41] L. Maksimova, “Restricted interpolation in modal logics”, *Advances in Modal Logic*, v.4, King’s College Publ., London, 2003, 297–311.
- [42] Л.Л. Максимова, “Интерполяционные теоремы в модальных логиках. Достаточные условия”, *Алгебра и логика*, **19**:2 (1980), 194–213.
- [43] B. Jónsson, “Algebras whose congruence structures are distributive”, *Math. Scand.*, **21** (1967), 110–121.
- [44] B. Jónsson, A. Tarski, “Boolean algebras with operators. Part I”, *Amer. J. Math.*, **73**:4 (1951), 891–939.