Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Многогранники ограниченного остатка,
Совр. пробл. матем., 2012, выпуск 16, 82–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 06:02:39

Многогранники ограниченного остатка

В. Г. Журавлёв

Владимирский государственный университет

Последнему рыцарю теории чисел посвящается

Введение

0.1. Одномерный случай. Гекке в 1921 г. доказал теорему [1]: для отклонений $\delta(i, X) = r(i, X) - i|X|$, где $r(i, X)$ – количество точек орбиты длины i относительно вращения $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod 1$ окружности единичной длины на угол α , попавших в отрезок X , выполняется неравенство

$$|\delta(i, X)| \leq h \quad (0.1)$$

при условии, что отрезок X имеет длину $|X| = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$.

Орен [2] смог заменить отрезок в теореме Гекке конечным объединением интервалов X и получил для таких множеств оценку

$$\delta(i, X) = O(1), \quad (0.2)$$

при этом отдельные интервалы из множества X сами могут и не обладать свойством (0.2). Если выполняется условие (0.2), то X называется *множеством ограниченного остатка* или, кратко, *BR-множеством*.

0.2. Многомерный случай. В 1954 г. Сюс [3] построил первое семейство параллелограммов $X^2 \subset \mathbb{T}^2$, для которых выполняется оценка (0.2). Анализ конструкции Сюс привел Лиарде [4] к открытию возможной редукции от *BR-множеств* X^D к аналогичным множествам меньшей размерности X^{D-1} . Это был важный шаг, так как он позволял строить *BR-множества* X^D для произвольной размерности D . Так, например, параллелограммы Сюса X^2 получаются подъемом отрезков Гекке X^1 .

Неожиданный подход к построению множеств X^D обнаружили Рози [5] и Ференци [6]. Они связали свойство X^D быть *BR-множеством* со свойствами соответствующего индуцированного отображения $S_\alpha|X^D$ – отображения первого возвращения или отображения Пуанкаре. Идея Рози–Ференци была реализована в [7], где доказано общее неравенство

$$|\delta(i, X^2)| < 2 \quad (0.3)$$

для всех множеств $X^2 \subset \mathbb{T}^2$ из последовательности самоподобных фрактальных областей Рози $\mathcal{R}_1 \supset \dots \supset \mathcal{R}_h \supset \dots$, обладающих свойством $\bigcap_{h=1}^\infty \mathcal{R}_h = \{0\}$.

Глобальный подход к поиску *BR-множеств* был предложен в [8], где вместо отдельных множеств $X_k^D \subset \mathbb{T}^D$ стали рассматриваться полные разбиения торов $\mathbb{T}_{c,\lambda}^D = X_0^D \sqcup X_1^D \sqcup \dots \sqcup X_s^D$ с некоторыми параметрами c, λ . Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора $\mathbb{T}^D$ в накрывающее пространство $\mathbb{R}^D$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^D & \xrightarrow{S_v} & \mathbb{R}^D \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (0.4)$$

при котором повороту тора S_α отвечает перекладывание S_v некоторых множеств $X'_0, X'_1, \dots, X'_s$ из $\mathbb{R}^D$. Если число таких множеств X'_k окажется $s + 1 \leq D + 1$, то каждый из образов $X_k^D = \pi(X'_k)$ на торе $\mathbb{T}^D$ будет BR -множеством, а соответствующее объединение $T_{c,\lambda}^D = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \dots \sqcup X'_s$ из $\mathbb{R}^D$ – перекладывающейся торической разверткой $T^D = \pi^{-1}(\mathbb{T}^D) \subset \mathbb{R}^D$ для $\mathbb{T}^D$. Такие развертки T^D были сконструированы в [9] с помощью операции вытягивания единичных кубов.

0.3. BR -многогранники. Цель настоящей работы – на основе схемы (0.4) представить систематический подход [8]–[10] к построению многомерных BR -множеств. Мы останавливаемся исключительно на выпуклых BR -множествах, хотя методы [9] позволяют исследовать и невыпуклый случай.

Основными являются теоремы 4.1 и 5.2, в которых для произвольной размерности D строятся BR -многогранники $X^D = P_k$: параллелепипеды и выпуклые параллелоэдры с числом вершин $\#V(P_k) = 2^{D+1} - 2$. Для размерностей $D = 1$ и 2 это будут множества, содержащие соответственно отрезки и шестиугольники с попарно параллельными и равными сторонами, а для $D = 3, 4$ – параллелоэдры Вороного [11], среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр. Для указанных BR -многогранников $X^D = P_k$ в теореме 5.2 доказывается неравенство

$$|\delta(i, X^D)| \leq Dh \quad (0.5)$$

– многомерный аналог теоремы Гекке (0.1) и неравенства (0.3). В неравенстве (0.5) отклонения $\delta(i, X^D)$ рассматриваются для сдвига тора S_β на вектор $\beta = (\alpha + l)/h$, где l – произвольный вектор из кубической решетки $\mathbb{Z}^D$.

1. Торические развертки и множества ограниченного остатка

1.1. Перекладывающиеся торические развертки. Пусть дан D -мерный тор

$$\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / L, \quad (1.1)$$

где L – невырожденная решетка из вещественного арифметического векторного пространства $\mathbb{R}^D$, т.е. решетка L имеет размерность D над $\mathbb{R}$. Пусть задан сдвиг тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod L. \quad (1.2)$$

Разверткой T^D тора $\mathbb{T}^D$ назовем такое подмножество T^D из $\mathbb{R}^D$, что ограничение фактор отображения

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\bmod L} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto x \bmod L$$

на указанное подмножество $T^D \subset \mathbb{R}^D$ задает биекцию

$$T^D \xrightarrow{\bmod L} \mathbb{T}^D. \quad (1.3)$$

Пусть дана торическая развертка T^D , удовлетворяющая следующему условию. Существует такое разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D \quad (1.4)$$

развертки T^D , что если с помощью биекции (1.3) отождествить тор $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T^D , то индуцированное отображение $T^D \xrightarrow{S_v} T^D$ для сдвига тора (1.2) будет эквивалентно перекладыванию областей $T_0, T_1, \dots, T_D$ развертки T^D :

$$S_v(x) = x + v(x), \quad (1.5)$$

где вектор сдвига $v(x)$ зависит от $x \in T^D$ и определяется условием

$$v(x) = v_k, \quad \text{если } x \in T_k, \quad (1.6)$$

при этом $v_0, v_1, \dots, v_D$ – некоторая фиксированная система векторов.

Заметим, что разбиению (1.4) развертки T^D отвечает разбиение

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D \quad (1.7)$$

тора $\mathbb{T}^D$ на области $\mathbb{T}_k \equiv T_k \bmod L$.

1.2. Примеры перекладывающихся торических разверток.

1.2.1. Проекция куба. Обозначим через C^{D+1} единичный $(D+1)$ -мерный куб, вложенный в пространство $\mathbb{R}^{D+1}$. Его проекцией на подпространство $\mathbb{R}^D \subset \mathbb{R}^{D+1}$ вдоль некоторого направления $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{D+1}$ будет D -мерный многогранник $\mathcal{P}^D$. Выбранное направление $\mathbf{p}$ условно разделяет D -мерные грани куба C^{D+1} на два вида: видимые и невидимые.

Так, например, в случае $D = 1$ стороны квадрата C^2 при проектировании на прямую вдоль вектора общего положения $\mathbf{p}$ разделяются на пары видимых и невидимых, для $D = 2$ шесть граней куба C^3 при проектировании на плоскость также распадаются на два множества, состоящие соответственно из трех видимых и трех невидимых граней.

Возвращаясь к произвольной размерности D и проектируя, скажем, первые грани, получим

$$\mathcal{P}^D = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_D \quad (1.8)$$

– разбиение $\mathcal{P}^D$ на многогранники $\mathcal{P}_k$ без общих внутренних точек. Заметим, что в вырожденном случае количество многогранников в (1.8) может быть меньше $D + 1$. Если же затем спроектировать грани второго вида, то снова придем к разбиению (1.8), в котором многогранники $\mathcal{P}_k$ некоторым образом переложены параллельными сдвигами. Это явление объясняется тем, что для каждой D -грани куба C^{D+1} существует параллельная ей D -грань.

Многогранник $\mathcal{P}^D$ является *параллелоэдром*: он разбивает пространство $\mathbb{R}^D$ на области $\mathcal{P}^D[l] = \mathcal{P}^D + l$ параллельными сдвигами на векторы l из некоторой решетки L :

$$\mathbb{R}^D = \coprod_{l \in L} \mathcal{P}^D[l].$$

Поэтому после отбрасывания лишних граничных точек $\mathcal{P}^D$ превращается в развертку тора $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$. При этом можно проверить, что перекладыванию многогранников $\mathcal{P}_k$ из разбиения (1.8) соответствует некоторый сдвиг тора $\mathbb{T}^D$, и, таким образом, мы получаем перекладывающуюся торическую развертку $\mathcal{P}^D$ (детали см. в п. 3.4).

Так, в случае $D = 1$ возникает отрезок, составленный из двух меньших отрезков, а при $D = 2$ получается шестиугольник $\mathcal{P}^D$ с попарно параллельными и равными сторонами, разбитый на три перекладывающихся параллелограмма.

В разделах 3, 4 мы рассмотрим приведенную выше конструкцию и даже более общую конструкцию, комбинируя проекцию $\mathbf{p}$ с некоторой дополнительной операцией вытягивания кубов.

1.2.2. Произведения торических разверток. В [9] были определены некоммутативные произведения $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$, позволяющие из двух торических разверток T^{D_1} и T^{D_2} строить новую развертку тора $\mathbb{T}^D$ размерности $D = D_1 + D_2$. Операция умножения обладает свойством: *если исходные развертки T^{D_1} и T^{D_2} были перекладывающимися, то любое их произведение $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ также будет перекладывающейся торической разверткой.*

Например, если выбрать в качестве разверток T^{D_1} , T^{D_2} перекладывающиеся отрезки, то их произведения $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ представляют собой прямоугольники, разбитые на три перекладывающиеся области, каждая из которых также является некоторым прямоугольником. В частности, на этом пути после подходящего гиперболического автоморфизма тора получаются параллелограммы Сюс [3].

1.3. Трансляционная решетка и ранг вектора сдвига. Из определений (1.2), (1.5) и (1.6) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha \bmod L \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \dots, D, \quad (1.9)$$

при этом векторы

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, D \quad (1.10)$$

принадлежат основной решетке периодов L тора (1.1). В дальнейшем на протяжении всей статьи будем предполагать, что L является невырожденной решеткой, порождаемой

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D] \quad (1.11)$$

векторами (1.10) над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, т.е.

$$\text{система векторов } l_1, \dots, l_D \text{ имеет ранг } D \text{ над } \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Следовательно, при этом условии вектор сдвига α можно разложить по данному базису:

$$\alpha = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_D l_D. \quad (1.13)$$

Пусть α – произвольный вектор из $\mathbb{R}^D$ с координатами $(\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ в базисе (1.13). Определим его *ранг относительно решетки L* равенством

$$\text{rank}_L(\alpha) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} M(\alpha) - 1, \quad (1.14)$$

где $M(\alpha) = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D] \subset \mathbb{R}$ обозначает модуль над кольцом $\mathbb{Z}$, порождаемый числами $1, \alpha_1, \dots, \alpha_D$; $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \dots, \alpha_D]$ – размерность этого модуля над $\mathbb{Z}$. Если $\alpha' \subset \mathbb{R}^D$ – другой вектор, удовлетворяющий условию $\alpha' \equiv \alpha \bmod L$, то из определения (1.14) вытекает

$$\text{rank}_L(\alpha') = \text{rank}_L(\alpha).$$

Это означает, что ранг $\text{rank}_L(\alpha)$ корректно определен для векторов α на торе $T^D \simeq \mathbb{R}^D/L$. Из определения (1.14) также следуют неравенства

$$0 \leq \text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) \leq D.$$

Назовем вектор α *иррациональным*, если $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) > 0$. Если при этом ранг принимает наибольшее значение $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то будем говорить, что вектор *максимально иррациональный*. В оставшемся случае $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = 0$ скажем, что вектор *рациональный*. Такое название объясняется тем, что координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_D$ в разложении (1.13) – рациональные числа.

Для вектора α отвечающие ему сдвиг S_α тора (1.2) и перекладывание S_v из (1.6) будем называть соответственно *иррациональными*, *максимально иррациональными* и *рациональными*.

1.4. Векторная T -дробная часть. Для любого $x \in \mathbb{R}^D$ определим его векторную дробную часть $\text{Fr}(x)$, полагая

$$\text{Fr}(x) = \bar{x}, \quad (1.15)$$

где $\bar{x} \equiv x \bmod L$ и $\bar{x}$ принадлежит развертке $T = T^D \subset \mathbb{R}^D$. Корректность определения (1.15) вытекает из факта существования разбиения

$$\mathbb{R}^D = \coprod_{l \in L} T[l] \quad (1.16)$$

пространства $\mathbb{R}^D$ на области $T[l] = T + l = \{x + l : x \in T\}$, получающиеся параллельным сдвигом области T на векторы l из решетки L . Чтобы указать зависимость дробной части $\text{Fr}(x)$

от развертки $T = T^D$, мы будем также использовать дополнительное обозначение $\text{Fr}_T(x)$, и точку или вектор $\text{Fr}_T(x)$ будем называть *T -дробной частью* $x \in \mathbb{R}^D$.

Пусть

$$\Delta \text{Fr}(x) = \text{Fr}(x + \alpha) - \text{Fr}(x)$$

– векторно значная разностная функция с шагом α , где α – вектор сдвига (1.2) тора $\mathbb{T}^D$. Тогда выполняется следующая формула [8]

$$\Delta \text{Fr}(x) = v(\bar{x}) \quad (1.17)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^D$, где $\bar{x} = \text{Fr}(x)$ по определению T -дробной части (1.15) принадлежит развертке T и вектор $v(\bar{x})$ согласно (1.5) представим в виде суммы

$$v(\bar{x}) = \alpha + l(\bar{x}), \quad (1.18)$$

при этом $l(\bar{x}) = l_k$, если $\bar{x} \in T_k$ для $k = 1, \dots, D$, и $l(\bar{x}) = l_0 = 0$, если $\bar{x} \in T_0$. Здесь l_k – векторы (1.10).

1.5. Суммарное векторное отклонение. Для $i = 0, 1, 2, \dots$ определим векторно значную функцию $\delta(i, x_0)$, полагая

$$\delta(i, x_0) = \sum_{0 \leq j < i} \Delta \text{Fr}(j\beta + x_0), \quad (1.19)$$

где

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l), \quad (1.20)$$

при этом h – произвольное натуральное число и l – любой вектор из решетки L . Используя формулу (1.17), сумму (1.19) можем преобразовать к следующему виду:

$$\delta(i, x_0) = \sum_{0 \leq j < i} v(\bar{x}_j). \quad (1.21)$$

Здесь $x_j = j\beta + x_0$ и все точки $\bar{x}_j = \text{Fr}(x_j)$ принадлежат развертке тора T . Теперь, поставляя в сумму (1.21) выражение (1.18) для вектора $v(\bar{x})$, можем записать

$$\delta(i, x_0) = \sum_{0 \leq j < i} (\alpha + l(\bar{x}_j)) = i\alpha + \sum_{0 \leq j < i} l(\bar{x}_j) = i\alpha + \sum_{0 \leq k \leq D} \sum_{\substack{0 \leq j < i \\ \bar{x}_j \in T_k}} l(\bar{x}_j). \quad (1.22)$$

Так как $l(\bar{x}_j) = l_k$, если $\bar{x}_j \in T_k$, и $l_0 = 0$ по определению (1.18), то из (1.22) для $\delta(i, x_0)$ вытекает представление

$$\delta(i, x_0) = i\alpha + \sum_{0 \leq k \leq D} l_k \sum_{\substack{0 \leq j < i \\ \text{Fr}(j\beta + x_0) \in T_k}} 1$$

или, в другой форме,

$$\delta(i, x_0) = i\alpha + r_1(i, x_0)l_1 + \dots + r_D(i, x_0)l_D, \quad (1.23)$$

где

$$r_k(i, x_0) = \#\{\text{Fr}(j\beta + x_0) \in T_k : 0 \leq j < i\}. \quad (1.24)$$

Пусть $\mathbb{T}^D = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D$ – разбиение тора (1.7), отвечающее разбиению (1.4) развертки тора T^D . Если теперь воспользоваться сдвигом тора

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\beta} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\beta(x) \equiv x + \beta \bmod L \quad (1.25)$$

на вектор β , определенный равенством (1.20), то из сравнения

$$\text{Fr}(j\beta + x_0) \equiv S_\beta^j(x_0) \bmod L$$

следует, что считающую функцию (1.24) можно записать в виде

$$r_k(i, x_0) = \#\{j : S_\beta^j(x_0) \in \mathbb{T}_k, 0 \leq j < i\}. \quad (1.26)$$

Сумму (1.19) можно также вычислить иным способом. Используя определение (1.19), запишем $\delta(i, x_0)$ в виде разности сумм:

$$\delta(i, x_0) = \sum_{0 \leq j < i} \text{Fr}(j\beta + \alpha + x_0) - \sum_{0 \leq j < i} \text{Fr}(j\beta + x_0). \quad (1.27)$$

Согласно (1.20) имеем

$$\alpha \equiv h\beta \bmod L. \quad (1.28)$$

Тогда из (1.28) и определения (1.16) векторной T -дробной части $\text{Fr}(x)$ следует равенство

$$\text{Fr}(j\beta + \alpha + x_0) = \text{Fr}(j\beta + h\beta + x_0),$$

из которого вытекает

$$\sum_{0 \leq j < i} \text{Fr}(j\beta + \alpha + x_0) = \sum_{0 \leq j < i} \text{Fr}(j\beta + h\beta + x_0) = \sum_{h \leq j < i+h} \text{Fr}(j\beta + x_0). \quad (1.29)$$

Поэтому из (1.27) и (1.29) для функции $\delta(i, x_0)$ получаем еще одно представление

$$\delta(i, x_0) = \sum_{h \leq j < i+h} \text{Fr}(j\beta + x_0) - \sum_{0 \leq j < i} \text{Fr}(j\beta + x_0). \quad (1.30)$$

Предположим, что $i > h$. Тогда из (1.30) вытекают равенства

$$\begin{aligned} \delta(i, x_0) &= \sum_{h \leq j < i+h} \text{Fr}(j\beta + x_0) - \sum_{0 \leq j < i} \text{Fr}(j\beta + x_0) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq h-1} (\text{Fr}(j\beta + i\beta + x_0) - \text{Fr}(j\beta + x_0)). \end{aligned} \quad (1.31)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. 1) Пусть вектор сдвига β определен равенством (1.20) и $\delta(i, x_0)$ – векторно-значная функция (1.19). Тогда $\delta(i, x_0)$ представима в виде суммы

$$\delta(i, x_0) = i\alpha + r_1(i, x_0)l_1 + \cdots + r_D(i, x_0)l_D, \quad (1.32)$$

где $r_k(i, x_0)$ равно количеству попаданий начальной точки x_0 под действием сдвига S_β в область $\mathbb{T}_k$ из разбиения (1.7) тора $\mathbb{T}^D$. Кроме (1.32) вектор функция $\delta(i, x_0)$ может быть представлена еще в одном из двух видов:

$$\delta(i, x_0) = \sum_{0 \leq j < i} (\text{Fr}(j\beta + h\beta + x_0) - \text{Fr}(j\beta + x_0)) \quad (1.33)$$

для $0 \leq i \leq h$ и

$$\delta(i, x_0) = \sum_{0 \leq j \leq h-1} (\text{Fr}(j\beta + i\beta + x_0) - \text{Fr}(j\beta + x_0)) \quad (1.34)$$

для $i > h$. Здесь $\text{Fr} = \text{Fr}_T(x)$ определено равенством (1.15) и равно векторной T -дробной части точки $x \in \mathbb{R}^D$.

2) В частности, если $h = 1$, то в этом случае вектором сдвига будет $\beta = \alpha$ и формулы (1.33) и (1.34) принимают единообразный вид

$$\delta(i, x_0) = \text{Fr}(i\alpha + x_0) - \text{Fr}(x_0) \quad (1.35)$$

для любого $i = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (1.32) была доказана в (1.23). Равенство (1.33) вытекает непосредственно из определения (1.19) и сравнения (1.28), а равенство (1.34) совпадает с (1.31).

1.6. Цветные k -отклонения. По условию L – невырожденная решетка (1.11). Поэтому для ее базиса $l_1, \dots, l_D$ существует двойственный базис $l_1^*, \dots, l_D^*$, связанный с исходным базисом соотношениями

$$l_k^* \cdot l_m = \delta_{km}, \quad (1.36)$$

где $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_D y_D$ – скалярное произведение и δ_{km} – символ Кронекера. Используя двойственный базис (1.36) и представление (1.32), получаем следующие равенства

$$l_k^* \cdot \delta(i, x_0) = r_k(i, x_0) + i l_k^* \cdot \alpha \quad \text{для } k = 1, \dots, D. \quad (1.37)$$

Обозначим

$$\delta_k(i, x_0) = l_k^* \cdot \delta(i, x_0) \quad (1.38)$$

и перепишем (1.37) в виде

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i a_k \quad \text{для } k = 1, \dots, D. \quad (1.39)$$

Здесь коэффициенты a_k задаются равенством

$$a_k = -l_k^* \cdot \alpha = -\alpha_k, \quad (1.40)$$

где α_k – координаты (1.13) вектора α относительно базиса $l_1, \dots, l_D$.

Назовем $\delta_k(i, x_0)$ из (1.39) отклонением распределения точек *орбиты*

$$\text{Orb}_{S_\beta}(x_0) = \{S_\beta^i(x_0) \equiv x_0 + i\beta \bmod L, i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (1.41)$$

относительно области $\mathbb{T}_k \subset \mathbb{T}^D$ либо, кратко, *k -отклонением* или *цветным отклонением*.

Из (1.37) и (1.39) следует, что вектор функция $\delta(i, x_0)$ и цветные отклонения $\delta_k(i, x_0)$ связаны между собой соотношением

$$\delta(i, x_0) = \delta_1(i, x_0) l_1 + \dots + \delta_D(i, x_0) l_D. \quad (1.42)$$

Поэтому $\delta(i, x_0)$ естественно назвать *векторным суммарным отклонением* распределения точек орбиты $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ относительно всех областей $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_D$ из разбиения (1.7) тора $\mathbb{T}^D$.

Остается выяснить вопрос о вычислении отклонения $\delta_0(i, x_0)$ относительно области $\mathbb{T}_0 \subset \mathbb{T}^D$. Заметим, что считающие функции $r_0(i, x_0), r_1(i, x_0), \dots, r_D(i, x_0)$ не являются независимыми, так как непосредственно из определений (1.24) и (1.26) следует, что они удовлетворяют тождеству

$$r_0(i, x_0) + r_1(i, x_0) + \dots + r_D(i, x_0) = i \quad (1.43)$$

для любого $i = 0, 1, 2, \dots$. Определим a_0 равенством

$$a_0 + a_1 + \dots + a_D = 1. \quad (1.44)$$

Согласно (1.43) и (1.44) записываем

$$[r_0(i, x_0) - i a_0] + [r_1(i, x_0) - i a_1] + \dots + [r_D(i, x_0) - i a_D] = 0. \quad (1.45)$$

По аналогии (1.38) с отклонениями $\delta_1(i, x_0), \dots, \delta_D(i, x_0)$ определим нулевое цветное отклонение как

$$\delta_0(i, x_0) = r_0(i, x_0) - i a_0. \quad (1.46)$$

Тогда в силу (1.45) и (1.39) для всех цветных отклонений выполняется соотношение

$$\delta_0(i, x_0) + \delta_1(i, x_0) + \dots + \delta_D(i, x_0) = 0 \quad (1.47)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, и, следовательно, для нулевого отклонения получаем представление

$$\delta_0(i, x_0) = -\delta_1(i, x_0) - \dots - \delta_D(i, x_0). \quad (1.48)$$

С другой стороны, согласно (1.38) и (1.48) для отклонения $\delta_0(i, x_0)$ можем записать

$$\delta_0(i, x_0) = -l_1^* \cdot \delta(i, x_0) - \dots - l_D^* \cdot \delta(i, x_0) = -(l_1^* + \dots + l_D^*) \cdot \delta(i, x_0). \quad (1.49)$$

Если теперь в дополнение к векторам $l_1^*, \dots, l_D^*$ из (1.36) определить еще вектор l_0^* равенством

$$l_0^* = -l_1^* - \dots - l_D^*, \quad (1.50)$$

то из (1.49) для нулевого отклонения $\delta_0(i, x_0)$ будет следовать представление

$$\delta_0(i, x_0) = l_0^* \cdot \delta(i, x_0). \quad (1.51)$$

Сравнивая его с представлением (1.38), видим, что нам удалось, тем самым, восстановить симметрию между цветными отклонениями относительно всех областей $\mathbb{T}_0, \mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_D$ из разбиения (1.7) тора $\mathbb{T}^D$. Причиной нарушения симметрии было первоначальное выделение вектора v_0 с целью определить базис $l_1, \dots, l_D$ решетки L (см. (1.10) и (1.11)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D]$ будет полной решеткой (1.11), $l_1^*, \dots, l_D^*$ – двойственный базис (1.36) к базису $l_1, \dots, l_D$ решетки L , вектор l_0^* определен равенством (1.50) и

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - ia_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (1.52)$$

где x_0 – произвольная начальная точка из тора $\mathbb{T}^D$, коэффициенты a_k задаются равенствами $a_k = -l_k^* \cdot \alpha$ для $k = 1, \dots, D$ и $a_0 = 1 - a_1 - \dots - a_D$.

Тогда k -отклонения (1.52) удовлетворяют следующему тождеству:

$$\delta_0(i, x_0) + \delta_1(i, x_0) + \dots + \delta_D(i, x_0) = 0 \quad (1.53)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. При этом k -отклонения $\delta_k(i, x_0)$ и векторное отклонение $\delta(i, x_0)$, определенное равенством (1.19), связаны следующими соотношениями:

$$\delta_k(i, x_0) = l_k^* \cdot \delta(i, x_0) \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (1.54)$$

и

$$\delta(i, x_0) = \delta_1(i, x_0)l_1 + \dots + \delta_D(i, x_0)l_D \quad (1.55)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенства (1.53) и (1.54) для k -отклонений $\delta_k(i, x_0)$ вытекают из равенств (1.47) и (1.38), (1.51), а разложение (1.55) было доказано в (1.42).

2. Границы для k -отклонений

2.1. Грубые границы для k -отклонений. Пусть $x \in \mathbb{R}^D$. Определим векторно значную функцию:

$$\mathcal{D}(x, x_0) = \sum_{0 \leq j \leq h-1} (\text{Fr}(j\beta + x_0 + x) - \text{Fr}(j\beta + x_0)).$$

Из определения (1.15) T -дробной части $\text{Fr}(x)$ вытекает равенство

$$\mathcal{D}(x + l, x_0) = \mathcal{D}(x, x_0)$$

для любого вектора l из решетки L , т.е. $\mathcal{D}(x, x_0)$ – периодическая функция на пространстве $\mathbb{R}^D$ с полной решеткой периодов L . В терминах функции $\mathcal{D}(x, x_0)$ равенство (1.34) можем записать как композицию

$$\delta(i, x_0) = \mathcal{D}(\text{Fr}(i\beta), x_0) \quad (2.1)$$

функций $\text{Fr}(x)$ и $\mathcal{D}(x, x_0)$.

Пусть $i > h$. Определим разностную функцию

$$\Delta(x, y) = \text{Fr}(x + y) - \text{Fr}(y), \quad (2.2)$$

обладающую согласно определению (1.15) T -дробной части $\text{Fr}(x)$ свойством периодичности

$$\Delta(x + l, y + l') = \Delta(x, y)$$

с периодами l, l' из решетки L . Используя (2.2), функцию $\mathcal{D}(x, x_0)$ можно будет переписать в виде

$$\mathcal{D}(x, x_0) = \sum_{0 \leq j \leq h-1} \Delta(x, j\beta + x_0). \quad (2.3)$$

Из определения (2.2) разностной функции $\Delta(x, y)$ следует, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^D$ справедливо включение

$$\Delta(x, y) \in T_\Delta, \quad (2.4)$$

где $T_\Delta = \{t - t' : t, t' \in T\}$ – разностное множество для развертки $T = T^D$. Из определения вытекает, что разностное множество T_Δ центрально-симметрично относительно начала координат в $\mathbb{R}^D$. Из (2.3) и (2.4) вытекает включение

$$\mathcal{D}(x, x_0) \in hT_\Delta \quad (2.5)$$

для любого x из $\mathbb{R}^D$, где умножение на h в правой части (2.5) означает гомотетию $t \mapsto ht$ с коэффициентом $h = 1, 2, 3, \dots$.

Как следствие из (2.4) для любых $x, y \in \mathbb{R}^D$ также получаем последовательность включений

$$l_k^* \cdot \Delta(x, y) \in (l_k^* \cdot T)_\Delta \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (2.6)$$

поскольку $l_k^* \cdot (T)_\Delta = (l_k^* \cdot T)_\Delta$ в силу равенства $l_k^* \cdot T = \{l_k^* \cdot t, t \in T\}$. Если обозначить

$$\mathcal{D}_k(x, x_0) = l_k^* \cdot \mathcal{D}(x, x_0), \quad (2.7)$$

то из (2.5)–(2.7) для любого $x \in \mathbb{R}^D$ получаем включения

$$\mathcal{D}_k(x, x_0) \in h(l_k^* \cdot T)_\Delta \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D. \quad (2.8)$$

Для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$ определим крайние значения:

$$\underline{m}_k(X) = \inf_{x \in X} l_k^* \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = \sup_{x \in X} l_k^* \cdot x. \quad (2.9)$$

Из включений (2.8) и (2.9) следует неравенство

$$|\mathcal{D}_k(x, x_0)| \leq (\overline{m}_k(T) - \underline{m}_k(T))h \quad (2.10)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^D$ и $k = 0, 1, \dots, D$. Поскольку согласно (2.1) векторное отклонение $\delta(i, x_0)$ разлагается в композицию $\delta(i, x_0) = \mathcal{D}(\text{Fr}(i\beta), x_0)$, то из (2.10) вытекают неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(T)h \quad \text{для } i > h \quad (2.11)$$

с константами

$$c_k(T) = \overline{m}_k(T) - \underline{m}_k(T), \quad (2.12)$$

не зависящими от h, i и определяемыми исключительно размерами развертки тора $T = T^D$, определенной в (1.4).

В случае $0 \leq i \leq h$ рассуждения аналогичны и вместо (2.11) из (1.33) и (2.5) получаем неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(T)i \quad \text{для} \quad 0 \leq i \leq h. \quad (2.13)$$

ТЕОРЕМА 2.1. 1) При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(T^D)h \quad (2.14)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где $c_k(T^D)$ – константы (2.12), не зависящие от h, i и определяемые размерами развертки тора T^D из (1.4).

2) Если дополнительно предположить, что α – максимально иррациональный сдвиг (см. п. 1.3) и в разбиении (1.4) развертки T^D каждая область T_k кубируема, то k -отклонения $\delta_k(i, x_0)$, определенные равенствами (1.52), имеют вид

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - ia_k, \quad (2.15)$$

где

$$a_k = \frac{\text{vol } T_k}{\text{vol } T^D} \quad (2.16)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. Здесь $\text{vol } T_k$ и $\text{vol } T^D$ обозначают объемы областей $T_k \subset T^D$ и всей развертки тора T^D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Неравенства (2.14) следуют из (2.11) и (2.13).

2) Из представления (2.15) и неравенств (2.14) следует

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{r_k(i, x_0)}{i} = a_k. \quad (2.17)$$

В силу (1.20) вектор сдвига β также будет максимально иррациональным. Для таких сдвигов тора S_β известно [12], что

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{r_k(i, x_0)}{i} = \frac{\text{vol } T_k}{\text{vol } T^D}.$$

Отсюда и из (2.17) вытекает равенство (2.16).

2.2. Вырождение орбит. Пусть вектор сдвига α будет произвольным, т.е. не обязательно иррациональным, и пусть $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$ – орбита (1.41) произвольной начальной точки $x_0 \in T$ относительно сдвига S_β , где вектор сдвига β определен равенством (1.20). Обозначим через $\overline{\text{Orb}}_{S_\beta}(x_0)$ замыкание орбиты $\text{Orb}_{S_\beta}(x_0)$.

Если вектор сдвига α будет максимально иррациональным, т.е. $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$, то вектор β , как мы уже отмечали, также будет максимально иррациональным. Из теоремы Вейля [12] следует, что для указанных β будет выполняться равенство

$$\dim \overline{\text{Orb}}_{S_\beta}(x_0) = D, \quad (2.18)$$

и, таким образом, в этом случае выполняется формула

$$\overline{\text{Orb}}_{S_\beta}(x_0) = \overline{T}. \quad (2.19)$$

В общем случае равенство (2.19) нужно заменить на включение

$$\overline{\text{Orb}}_{S_\beta}(x_0) \subseteq \overline{T}, \quad (2.20)$$

поэтому для констант (2.12) из (2.20) будет следовать неравенство

$$c_k(X) \leq c_k(T). \quad (2.21)$$

Здесь множество X определяется с помощью биекции (1.3):

$$T^D \supseteq X \longrightarrow \overline{\text{Orb}}_{S_\beta}(x_0) \subset \mathbb{T}^D. \quad (2.22)$$

Если неравенство (2.21) будет строгим, то как следствие в случае произвольного вектора сдвига α мы получим для отклонений $\delta_k(i, x_0)$ усиление неравенства (2.14).

Повторяя доказательство теоремы 2.1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. *При любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X)h \quad (2.23)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, где константы $c_k(X)$ вычисляются по формуле

$$c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X), \quad (2.24)$$

не зависят от i и определяются исключительно размерами множества X из (2.22). Константы $\overline{m}_k(X)$ и $\underline{m}_k(X)$ определены в (2.9).

2.3. Точные границы для k -отклонений. В начале докажем общую формулу для k -отклонений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. 1) Пусть вектор сдвига β определен равенством (1.20) и k -отклонения

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - ia_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D$$

определены в (1.38) и (1.51). Тогда k -отклонения могут быть представлены еще в одном из двух видов:

$$\delta_k(i, x_0) = \sum_{0 \leq j < i} (\text{Fr}_k(j\beta + h\beta + x_0) - \text{Fr}_k(j\beta + x_0)) \quad (2.25)$$

для $0 \leq i \leq h$ и

$$\delta_k(i, x_0) = \sum_{0 \leq j \leq h-1} (\text{Fr}_k(j\beta + i\beta + x_0) - \text{Fr}_k(j\beta + x_0)) \quad (2.26)$$

для $i > h$. Здесь

$$\text{Fr}_k(x) = l_k^* \cdot \text{Fr}(x) \quad (2.27)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$ и $\text{Fr}(x) = \text{Fr}_T(x)$ обозначает векторную T -дробную часть (2.1) точки $x \in \mathbb{R}^D$.

2) В случае $h = 1$, когда вектор сдвига $\beta = \alpha$, формулы (2.25) и (2.26) принимают более простой вид

$$\delta_k(i, x_0) = \text{Fr}_k(i\alpha + x_0) - \text{Fr}_k(x_0) \quad (2.28)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$ и любого $i = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (2.25) вытекает непосредственно из определения (1.19) и формул для k -отклонений (1.37), (1.51), а равенство (2.26) – из (1.34).

2.4. Единичный базис. По условию (1.12) векторы $l_1, \dots, l_D$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, поэтому существует линейное отображение A такое, что $Al_k = -\mathbf{e}_k$ для $k = 1, 2, \dots, D$, где

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_D = (0, 0, \dots, 1)$$

– единичный базис. Так как преобразование A невырожденное, то при переходе от развертки T к AT сохраняются все приведенные выше рассуждения из данного раздела. Поэтому, не уменьшая общности, можем считать, что

$$l_1 = -\mathbf{e}_1, \quad \dots, \quad l_D = -\mathbf{e}_D. \quad (2.29)$$

Тогда решетка L , определенная в (1.11), будет иметь вид

$$L = \mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D], \quad (2.30)$$

т.е. будет кубической решеткой $\mathbb{Z}^D$ в пространстве $\mathbb{R}^D$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть векторы $l_1, \dots, l_D$ выбраны в виде (2.29) и x_0 – произвольная начальная точки из тора $\mathbb{T}^D$.

1) Тогда k -отклонения (1.39) и (1.46) принимают вид

$$\delta_k(i, x_0) = r_k(i, x_0) - i\alpha_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D, \quad (2.31)$$

где вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и

$$\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D.$$

2) Пусть выбран вектор сдвига $\beta = (\alpha + l)/h$ с произвольным натуральным h и вектором l из кубической решетки $\mathbb{Z}^D$. Тогда при любом $k = 0, 1, \dots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i, x_0)| \leq c_k(X)h \quad (2.32)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ с константами $c_k(X) = \overline{m}_k(X) - \underline{m}_k(X)$, где множество X определено в (2.22),

$$\underline{m}_k(X) = -\sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x, \quad \overline{m}_k(X) = -\inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$\underline{m}_0(X) = \inf_{x \in X} \mathbf{e}_0 \cdot x, \quad \overline{m}_0(X) = \sup_{x \in X} \mathbf{e}_0 \cdot x$$

для $k = 0$, где $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_D$.

3) В случае $h = 1$ выполняются точные неравенства

$$x_{0k} - \sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \leq \delta_k(i, x_0) \leq x_{0k} - \inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \quad (2.33)$$

для $k = 1, \dots, D$, где начальная точка $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0D})$ записана в базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$, и

$$\underline{m}_0(X) - \sigma(x_0) \leq \delta_0(i, x_0) \leq \overline{m}_0(X) - \sigma(x_0), \quad (2.34)$$

где $\sigma(x_0) = x_{01} + \dots + x_{0D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Согласно (1.40) и (2.29) имеем $a_k = -l_k^* \cdot \alpha = \mathbf{e}_k \cdot \alpha = \alpha_k$ для $k = 1, \dots, D$. Отсюда и из (1.44) для отклонений $\delta_k(i, x_0)$ вытекает формула (2.31).

2) Неравенство (2.32) следует из теоремы 2.2 и формулы (2.9) для крайних значений $\underline{m}_k(X)$ и $\overline{m}_k(X)$.

3) Пусть $h = 1$. По формуле (2.28) имеем

$$\delta_k(i, x_0) = \text{Fr}_k(i\alpha + x_0) - \text{Fr}_k(x_0) \quad (2.35)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. В этом представлении согласно формуле (2.27)

$$\text{Fr}_k(x) = l_k^* \cdot \text{Fr}(x) = -\mathbf{e}_k \cdot \text{Fr}(x) \quad (2.36)$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$\text{Fr}_0(x) = l_0^* \cdot \text{Fr}(x) = \mathbf{e}_0 \cdot \text{Fr}(x), \quad (2.37)$$

так как $l_k^* = -\mathbf{e}_k$ для $k = 1, \dots, D$, и в силу равенства (1.50) имеем

$$l_0^* = -l_1^* - \dots - l_D^* = \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_D = \mathbf{e}_0. \quad (2.38)$$

По определению (1.15) векторной дробной части $\text{Fr}(x)$ можем записать, что

$$\text{Fr}(x) = x \quad \text{для } x \in T^D, \quad (2.39)$$

где T^D – развертка тора (1.4). Пусть вектор $x = (x_1, \dots, x_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$. Тогда из (2.36), (2.37) и (2.39) получаем равенства

$$\text{Fr}_k(x) = -x_k \quad (2.40)$$

для $k = 1, \dots, D$ и еще одно равенство

$$\text{Fr}_0(x) = x_1 + \dots + x_D = \sigma(x) \quad (2.41)$$

в случае $k = 0$. Пусть сначала $k = 1, \dots, D$. Тогда по формулам (2.35) и (2.40) для отклонений $\delta_k(i, x_0)$ получаем представление

$$\delta_k(i, x_0) = x_{0k} - x_k, \quad (2.42)$$

где $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0D})$ и точки $x = i\alpha + x_0 = (x_1, \dots, x_D)$ принадлежат множеству $X \subseteq T^c$. Следовательно, для них выполняются неравенства

$$\inf_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x \leq x_k \leq \sup_{x \in X} \mathbf{e}_k \cdot x. \quad (2.43)$$

Из (2.42) и (2.43) вытекают неравенства (2.33). Они являются точными, так как указанные точки x при $i \rightarrow +\infty$ всюду плотно заполняют множество X .

В оставшемся случае $k = 0$ в силу (2.35) и (2.41) для отклонения $\delta_0(i, x_0)$ получаем другое представление

$$\delta_0(i, x_0) = \mathbf{e}_0 \cdot x - \sigma(x), \quad (2.44)$$

из которого вытекают неравенства (2.34).

3. Разбиения вытянутых параллелепедов

3.1. Вытянутые кубы C_s . Приведем основные понятия и результаты из [9], необходимые нам для дальнейшего. Пусть $C = C^D$ – замкнутый D -мерный куб, натянутый на единичные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$. Обозначим через $\mathbb{R}_+^D$ положительный конус, состоящий из $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$ с координатами $x_1 > 0, \dots, x_D > 0$. Для любого вектора $\mathbf{s}$ из конуса $\mathbb{R}_+^D$ определим операцию *вытягивания* Str_s произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^D$, полагая

$$\text{Str}_s(X) = \bigcup_{t \in I} (X + ts), \quad (3.1)$$

где $I = [0, 1]$, при этом $\mathbf{s}$ будем называть *вытягивающим вектором*. Операцию вытягивания (3.1) также можно записать через сумму по Минковскому:

$$\text{Str}_{\mathbf{s}}(X) = X + \mathbf{s} \cdot I. \quad (3.2)$$

Применяя данную операцию к единичному кубу C , построим из него многогранник

$$C_{\mathbf{s}} = \text{Str}_{\mathbf{s}}(C), \quad (3.3)$$

представляющий собой вытянутый куб, имеющий объем $\text{vol } C_{\mathbf{s}} = \sigma(\mathbf{s}) + 1$. Здесь мы обозначили $\sigma(\mathbf{s}) = s_1 + \dots + s_D$ для вектора $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_D)$ (см. [8]).

Далее мы будем использовать понятие разбиения множеств в обычном смысле, когда рассматриваются покрытия множеств $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots$ с условием $X_k \cap X_{k'} = \emptyset$ для $k \neq k'$, а также в расширенном смысле $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$, предполагая, что различные множества X_k не имеют общих внутренних точек.

Вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}$ обладают следующим важным для наших целей свойством [9, теорема 1.1]: для любого вектора $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^D$ имеет место разбиение пространства

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L_{\mathbf{s}}} C_{\mathbf{s}}[l], \quad (3.4)$$

где $C_{\mathbf{s}}[l] = C_{\mathbf{s}} + l$ – множество, полученное сдвигом куба $C_{\mathbf{s}}$ на вектор l , и $L_{\mathbf{s}} = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_{1,\mathbf{s}}, \dots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{s}}]$ – полная решетка, порождаемая векторами $\mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} = \mathbf{e}_k + \mathbf{s}$ для $k = 1, \dots, D$.

Таким образом, вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}$ трансляционно разбивают пространство $\mathbb{R}^D$ с помощью трансляционной решетки $L_{\mathbf{s}}$.

3.2. Вытянутые параллелепедры $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}$. Линейное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{M_{\mathbf{s}}} \mathbb{R}^D: \quad \mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} \mapsto \mathbf{e}_k, \quad k = 1, \dots, D \quad (3.5)$$

задает изоморфизм решеток $M_{\mathbf{s}}: L_{\mathbf{s}}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^D$ и переводит D -мерный единичный куб C в параллелепедр – параллелепипед

$$C = M_{\mathbf{s}}(C), \quad (3.6)$$

натянутый соответственно на векторы $\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{c}, \dots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_D - \mathbf{c}$, где вектор $\mathbf{c}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{c} = M_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}), \quad (3.7)$$

поскольку согласно (3.5) $M_{\mathbf{s}}(\mathbf{e}_k) = M_{\mathbf{s}}(\mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} - \mathbf{s}) = \mathbf{e}_k - \mathbf{c}$. Пусть $\mathbf{s} = s_1 \mathbf{e}_1 + \dots + s_D \mathbf{e}_D$. Тогда из последнего равенства получаем $s_1 M_{\mathbf{s}}(\mathbf{e}_1) + \dots + s_D M_{\mathbf{s}}(\mathbf{e}_D) = \mathbf{s} - \sigma(\mathbf{s})\mathbf{c}$. Так как левая часть последнего равенства равна $M_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}) = \mathbf{c}$, то записываем $\mathbf{c} = \mathbf{s} - \sigma(\mathbf{s})\mathbf{c}$. Отсюда для вектора $\mathbf{c}$ из (3.7) выводим явную формулу

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{s}}{\sigma(\mathbf{s}) + 1}. \quad (3.8)$$

Согласно (3.6) вытянутый куб $C_{\mathbf{s}}$ отображается $M_{\mathbf{s}}: C_{\mathbf{s}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{s}}$ в многогранник

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}} = \text{Str}_{\mathbf{c}}(C), \quad (3.9)$$

получающийся вытягиванием параллелепедра C вдоль вектора $\mathbf{c}$, связанного с вектором $\mathbf{s}$ формулой (3.8). Вытянутый параллелепедр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ имеет объем

$$\text{vol } \mathcal{C}_{\mathbf{c}} = 1 \quad (3.10)$$

и число вершин $\#V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}) = 2^{D+1} - 2$ (см. [8]).

3.3. Вытягивающие векторы для параллелоэдров. Согласно формуле (3.8) отображения, переводящие вытягивающие векторы $\mathbf{s}$ в векторы $\mathbf{c}$, имеют вид

$$\text{inv}(x) = \frac{x}{\sigma(x) + 1}$$

и представляют собою линейно-инверсные преобразования пространства $\mathbb{R}^D$. Для наших целей мы ограничим инверсию inv на положительный конус $\mathbb{R}_+^D \subset \mathbb{R}^D$.

Имеет место следующая биекция [10, лемма 3.1]:

$$\text{inv}: \mathbb{R}_+^D \longrightarrow \mathbf{C}_{<1}. \quad (3.11)$$

Здесь

$$\mathbf{C}_{<1} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D : \sigma(\mathbf{c}) < 1\}, \quad (3.12)$$

где $\sigma(\mathbf{c}) = c_1 + \dots + c_D$. Замыкание множества $\mathbf{C}_{<1}$ является D -мерным симплексом, который содержит $(D-1)$ -мерный симплекс $\overline{\mathbf{C}}_1 = \{\mathbf{c} \in \overline{\mathbb{R}}_+^D : \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$.

В [10] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. 1) *Множество*

$$\mathbf{C}_{\leq 1} = \mathbf{C}_{<1} \sqcup \mathbf{C}_1, \quad (3.13)$$

где $\mathbf{C}_1 = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D : \sigma(\mathbf{c}) = 1\}$ – внутренность симплекса (1.38), представляет собой множество вытягивающих векторов для параллелоэдров (3.9): любому вектору $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ соответствует $\mathbf{c} \mapsto \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ – выпуклый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$.

2) *Вытянутые параллелоэдры $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ разбивают пространство*

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l] \quad (3.14)$$

на многогранники $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l] = \mathcal{C}_{\mathbf{c}} + l$ без общих внутренних точек.

3.4. Разбиения и перекладывания вытянутых параллелоэдров. Используя (3.14), определим разбиение пространства $\mathbb{R}^D$:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]. \quad (3.15)$$

Обозначим через

$$\partial \mathcal{T}_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \partial \mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]$$

множество всех границ разбиения $\mathcal{T}_{\mathbf{c}}$, состоящее из границ всех многогранников $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}[l]$. Для любого $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, $0 < \lambda < 1$, определим следующее множество границ:

$$\partial \mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda} = \partial \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \cup [\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \cap (\partial \mathcal{T}_{\mathbf{c}} - \alpha)] \subset \mathcal{C}_{\mathbf{c}}. \quad (3.16)$$

Границы $\partial \mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$ разбивают вытянутый параллелоэдр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ на $D+1$ областей без общих внутренних точек [10]:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda} = \overline{\mathcal{P}}_0 \cup \dots \cup \overline{\mathcal{P}}_D, \quad (3.17)$$

где $\overline{\mathcal{P}}_k$ для $k = 1, \dots, D$ – параллелоэдры, содедержающие точки $e_k = (0, \dots, \overset{(k)}{1}, \dots, 0)$, а

$$\overline{\mathcal{P}}_0 = \overline{[\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \setminus (\overline{\mathcal{P}}_1 \cup \dots \cup \overline{\mathcal{P}}_D)]}$$

– вытянутый параллелепедр вида $\overline{\mathcal{P}}_0 = \text{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C})$. Отметим, что $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ – это тот же самый параллелепедр $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$, определенный в (3.9), но уже разбитый (3.17) на $D+1$ многогранников $\overline{\mathcal{P}}_0, \dots, \overline{\mathcal{P}}_D$. Здесь мы через $\overline{\mathcal{P}}_k$ обозначаем замкнутые многогранники. Для дальнейшего же нам потребуются не сами $\overline{\mathcal{P}}_k$, а некоторые незамкнутые многогранники $\mathcal{P}_k \subset \overline{\mathcal{P}}_k$, которые будут определены в п. 4.2.

Поясним приведенную выше конструкцию на примере небольших размерностей D . Так, в случае $D = 1$ множество границ $\partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ (3.16) состоит из трех точек, две из которых являются концами интервала $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$, а оставшаяся делит его на две части: $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \overline{\mathcal{P}}_0 \cup \overline{\mathcal{P}}_1$. Если $D = 2$, то границы $\partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ разбивают шестиугольник $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ на меньший шестиугольник и два параллелограмма с общей стороной: $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \overline{\mathcal{P}}_0 \cup \overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{P}}_2$. Если же $D = 3$, то $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \overline{\mathcal{P}}_0 \cup \overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{P}}_2 \cup \overline{\mathcal{P}}_3$ представляет собою разбиение ромбического додекаэдра $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ на такой же меньший додекаэдр и три параллелепипеда, попарно имеющих по одной общей грани и общее для всех ребро. Случай произвольной размерности D разобран в [9], [10].

Зададим перекладывание

$$S_v: \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \quad (3.18)$$

вытянутого параллелепедра $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$, имеющего разбиение (3.17), с помощью параллельных сдвигов

$$S_v(\overline{\mathcal{P}}_k) = \overline{\mathcal{P}}_k[v_k] = \overline{\mathcal{P}}_k + v_k$$

многогранников $\overline{\mathcal{P}}_k$ из разбиения (3.17) соответственно на векторы

$$v_k = \alpha - \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ \mathbf{e}_k, & \text{если } k > 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Перекладывание S_v индуцирует многозначное отображение

$$S_v: \text{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \quad (3.20)$$

определяемое условиями $x \mapsto S_v(x) = x + v_k$, если $x \in \overline{\mathcal{P}}_k$.

Из [9, предложение 1.1] вытекает следующее свойство перекладывания S_v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Вытянутый параллелепедр $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} = \text{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C})$ с разбиением (3.17) замкнут $S_v(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ относительно операции перекладывания (3.18).*

Из определения (3.19) векторов сдвигов v_k вытекают сравнения $v_k \equiv \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}$ для любого $k = 0, 1, \dots, D$. Отсюда и из (3.20) получаем сравнение

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}, \quad (3.21)$$

означающее, что многозначное отображение S_v становится однозначным на вытянутом параллелепедре $S_v: \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$, если отображение S_v рассмотреть по $\pmod{\mathbb{Z}^D}$.

Определим на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D / \mathbb{Z}^D$ сдвиг

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D: \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^D}.$$

Тогда из (3.18)–(3.21) вытекает, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\mathbf{c}} & \xrightarrow{S_v} & \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \\ \text{mod } \mathbb{Z}^D \downarrow & & \downarrow \text{mod } \mathbb{Z}^D \\ \mathbb{T}^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^D \end{array} \quad (3.22)$$

4. Перекладывающиеся торические развертки: продолжение

4.1. Определение перекладывающихся торических разверток. Назовем подмножество $T^D \subset \mathbb{R}^D$ *перекладывающейся торической разверткой*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) множество T^D ограничено;
- 2) задано разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \dots \sqcup T_D \quad (4.1)$$

на непересекающиеся множества T_k ;

- 3) с помощью разбиения (4.1) и некоторой фиксированной системы $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ векторов из $\mathbb{R}^D$ задано перекладывание $\mathcal{S}_v(T^D) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(T_0) \cup \mathcal{S}_v(T_1) \cup \dots \cup \mathcal{S}_v(T_D)$, где $\mathcal{S}_v(T_k) = T_k[v_k]$;
- 4) множество T^D замкнуто относительно перекладывания $\mathcal{S}_v$, т.е. выполняется включение $\mathcal{S}_v(T^D) \subseteq T^D$;
- 5) отображение факторзации

$$T^D \xrightarrow{\text{mod } L_v} \mathbb{T}_v^D: \quad x \mapsto x \bmod L_v \quad (4.2)$$

задает биекцию между T^D и тором $\mathbb{T}_v^D \simeq \mathbb{R}^D / L_v$, где $L_v = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D]$ – полная решетка из $\mathbb{R}^D$ с базисом $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \dots, D$;

- 6) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^D & \xrightarrow{\text{mod } L_v} & \mathbb{T}_v^D \\ S_v \downarrow & & \downarrow S_\alpha \\ T^D & \xrightarrow{\text{mod } L_v} & \mathbb{T}_v^D \end{array}$$

где S_v – отображение $S_v(x) = x + v_k$, если $x \in T_k$, индуцированное перекладыванием $\mathcal{S}_v$, и $S_\alpha(x) = x + \alpha \bmod L_v$ – сдвиг тора $\mathbb{T}_v^D$ на вектор $\alpha \equiv v_0 \bmod L_v$.

4.2. Построение перекладывающихся торических разверток. Чтобы построить для вытянутого параллелограмма $\mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$ с разбиением (3.17) соответствующую ему перекладывающуюся торическую развертку $T_{\mathbf{c}, \lambda} \subset \mathbb{R}^D$, нам потребуется следующий алгоритм [9], определяющий индекс $i(x)$ точек $x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$ в случае максимально иррационального сдвига $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ (см. определение п. 1.3).

i-АЛГОРИТМ. Шаг 1. Для точки $x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}^{\text{int}}$ полагаем

$$i(x) = k, \quad \text{где } k \text{ – наименьший номер с условием } x \in \mathcal{P}_k^c. \quad (4.3)$$

Тем самым, мы определили индексы $i(x)$ для всех внутренних точек x из $\mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$.

Шаг 2. Пусть точка x принадлежит границе $\partial \mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$ многогранника $\mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$, и пусть существует точка $x' \in \mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}^{\text{int}}$ с условием

$$S_v(x') = x. \quad (4.4)$$

Тогда индекс $i(x)$ также определяем по правилу (4.3).

Шаг 3. Пусть $x_1 = x$ – та же самая точка, что была на шаге 2. Так как индекс точки x_1 уже определен, то однозначно определен ее образ $x_2 = S_v(x_1)$. Если $x_2 \in \partial \mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$, то приписываем ей индекс $i(x_2)$ по правилу (4.3). Затем рассматриваем точку $x_3 = S_v(x_2)$ и т.д. Если на каком-то шаге $x_j = S_v(x_{j-1})$ окажется внутренней точкой $\mathcal{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$, то для нее индекс $i(x_j)$ уже был определен на шаге 1.

Шаг 4. Пусть точка $y \in \partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ не удовлетворяет условию (4.4) и не попадает ни в какую S_v -орбиту точек $x \in \partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ с условием (4.4). Таким точкам припишем индекс $i(y) = -1$.

Из i -алгоритма вытекает, что любая точка x из вытянутого параллеледэдра $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ имеет однозначно определенный индекс $i(x) = -1, 0, 1, \dots, D$. Используя индекс $i(x)$, определим следующие множества:

$$\mathcal{P}_k = \{x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} : i(x) = k\} \quad (4.5)$$

для $k = 0, 1, \dots, D$. Из однозначности индекса $i(x)$ следует $\mathcal{P}_{k_1} \cap \mathcal{P}_{k_2} = \emptyset$ с номерами $k_1 \neq k_2$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ и вектор сдвига выбран в виде $\alpha = \lambda\mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leq 1$ в случае $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{< 1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. Кроме того, пусть $\mathcal{P}_k$ – многогранники (4.5). Тогда их объединение

$$T_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D \quad (4.6)$$

является перекладывающейся торической разверткой из $\mathbb{R}^D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для максимально иррационального вектора сдвига $\text{rank}_{\mathbb{Z}}(\alpha) = D$ теорема была доказана [9, теорема 1.2].

Если же $\text{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha) < D$, то ε -шевелением $\alpha \rightarrow \alpha_\varepsilon$: $\|\alpha - \alpha_\varepsilon\| < \varepsilon$ можно добиться, чтобы выполнялось условие $\text{rank}_{\mathbb{Z}^D}(\alpha) = D$. Далее, по построению (3.17) разбиения $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$, а значит, и разбиения $T_{\mathbf{c},\lambda}^D$ непрерывно зависимы от вектора сдвига α . Отсюда следует, что утверждение теоремы выполняется для всех векторов сдвига $\alpha \in \mathbb{T}^d$, $\alpha \neq 0$.

Итак, мы доказали, что любому вытянутому параллеледэдру $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ с разбиением $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}$ из (3.17) i -алгоритм ставит в соответствие перекладывающуюся торическую развертку $T_{\mathbf{c},\lambda}^D \subset \mathcal{C}_{\mathbf{c}}$ с разбиением (4.6):

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}} \implies \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \implies T(\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}) = T_{\mathbf{c},\lambda}^D. \quad (4.7)$$

Ее роль состоит в том, что посредством биекции (4.2) она задает каноническое разбиение тора

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D \quad (4.8)$$

на множества $\mathbb{T}_k^D = \mathcal{P}_k \bmod \mathbb{Z}^D$, являющиеся по теореме 2.1 множествами ограниченного остатка. Тор с разбиением (4.8) будем обозначать

$$\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}(T_{\mathbf{c},\lambda}^D). \quad (4.9)$$

Из последовательности шагов (3.17), (4.7) и (4.8) складывается следующий алгоритм построения разбиений тора $\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D$.

ОБЩАЯ СХЕМА ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОГО РАЗБИЕНИЯ ТОРА $\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D$:

$$\mathcal{C} \implies \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \implies \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda} \implies T_{\mathbf{c},\lambda}^D \implies \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D. \quad (4.10)$$

5. Отклонения и BR -многогранники

5.1. Многомерная теорема Гекке. Пусть $T_{\mathbf{c},\lambda}^D$ – перекладывающаяся торическая развертка (4.6) с разбиением $T_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{P}_D$ и с заданным на ней перекладыванием S_v (см. определение (1.5)). Указанной развертке $T_{\mathbf{c},\lambda}^D$ в силу (4.9) соответствует разбиение тора $\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \dots \sqcup \mathbb{T}_D^D$, на котором определен сдвиг $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D$.

Введем обозначение (ср. (1.20))

$$\beta = \frac{1}{h}(\alpha + l), \quad (5.1)$$

при этом h – произвольное натуральное число и $l \in \mathbb{Z}^D$ – целый вектор. Определим *считающую функцию*

$$r_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) = \#\{j : S_\beta^j(x_0) \in \mathbb{T}_k^D, 0 \leq j < i\},$$

где S_β – сдвиг тора $S_\beta(x) \equiv x + \beta \bmod \mathbb{Z}^D$ на вектор β , определенный равенством (5.1), и x_0 – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$. Пусть вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$ и $\alpha_0 = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_D$. Обозначим через

$$\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) = r_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D) - i\alpha_k \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D \quad (5.2)$$

отклонение распределения точек орбиты $\text{Orb}(S_\beta, x_0) = \{S_\beta^j(x_0), j = 0, 1, 2, \dots\}$ относительно области $\mathbb{T}_k^D$ на торе $\mathbb{T}^D$.

ТЕОРЕМА 5.1 (многомерная теорема Гекке). 1) Пусть $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}$ и вектор сдвига выбран в виде $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, где $0 < \lambda \leq 1$ в случае $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{< 1}$ и $0 < \lambda < 1$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$. Тогда для отклонений (5.2) выполняются неравенства

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D)| \leq c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})h \quad (5.3)$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Константы $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ вычисляются по формуле

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = \max_{v \in V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v - \min_{v \in V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})} \mathbf{e}_k \cdot v, \quad (5.4)$$

где $\mathbf{e}_k$ – единичные векторы для $k = 1, \dots, D$ и $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \dots - \mathbf{e}_D$. Здесь через $V(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ обозначено множество вершин вытянутого параллелоэдра $\mathbf{C}_{\mathbf{c}}$. Таким образом, константы $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ в неравенстве (5.3) не зависят от выбора множителя h в определении (5.1) вектора сдвига β .

2) Если вектор $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$ записан в единичном базисе $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$, то константы $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ вычисляются по формулам

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)c_k \quad (5.5)$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad (5.6)$$

для $k = 0$.

3) Для констант $c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}})$ из (5.5), (5.6) выполняется общее неравенство

$$c_k(\mathbf{C}_{\mathbf{c}}) \leq D \quad \text{для любого } \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leq 1}. \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (5.3) и формула (5.4) являются частными случаями неравенства (2.14) из теоремы 2.1 и формулы (2.12). Константы (5.5) и (5.6) вычислены в [10].

5.2. BR-многогранники. Напомним, что согласно (3.6) параллелоэдр $\mathcal{C}$ натянут на векторы $\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{c}, \dots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_D - \mathbf{c}$, а вытянутый параллелоэдр $\mathbf{C}_{\mathbf{c}}$ по определению (3.9) имеет вид

$$\mathbf{C}_{\mathbf{c}} = \mathcal{C} + \mathbf{c} \cdot I.$$

Отсюда и из определения (3.17) разбиения $\mathbf{C}_{\mathbf{c}, \lambda}$ параллелоэдра $\mathbf{C}_{\mathbf{c}}$ следует, что замкнутые многогранники $\overline{\mathcal{P}}_k$ с номерами $k = 1, \dots, D$ допускают простое описание

$$\overline{\mathcal{P}}_k = \overline{\mathcal{P}}_k + \omega. \quad (5.8)$$

Здесь $\overline{\mathcal{P}}_k \subset \mathbb{R}^D$ обозначает замкнутый параллелепипед, натянутый на векторы

$$\alpha, \quad \mathbf{c} - \mathbf{e}_{k'}, \quad k' = 1, \dots, D, \quad k' \neq k, \quad (5.9)$$

где $\mathbf{c} = \lambda \alpha$ и $\mathbf{e}_{k'}$ – единичные векторы. Точка

$$\omega = \mathbf{e}_0 - (D - 1)\mathbf{c} - \alpha, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{e}_0 = (1, \dots, 1)$, является общей для всех многогранников $\bar{\mathcal{P}}_k$ для $k = 0, 1, \dots, D$. При этом в случае $k = 0$ многогранник $\bar{\mathcal{P}}_0$ также задается равенством (5.8), в котором полагаем $\omega = 0$ и $\bar{\mathcal{P}}_0$ – вытянутый параллелепедр вида (см. (3.9))

$$\bar{\mathcal{P}}_0 = \text{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C}). \quad (5.11)$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ и $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$, то из определения (5.8) следует (вычисления приведены в [9])

$$\text{vol } \bar{\mathcal{P}}_k = \alpha_k. \quad (5.12)$$

В (4.5) были определены незамкнутые многогранники $\mathcal{P}_k$, содержащие все внутренние и некоторые граничные точки многогранника $\mathcal{P}_k^c$. Используя $\mathcal{P}_k$, определим соответствующие незамкнутые многогранники P_k равенством (ср. (5.8))

$$\mathcal{P}_k = P_k + \omega \quad \text{для } k = 0, 1, \dots, D. \quad (5.13)$$

Множество $X \subset \mathbb{R}^D$ назовем $\mathbb{Z}^D$ -различимым, если оно удовлетворяет свойству

$$x - y \in \mathbb{Z}^D \implies x = y \quad \text{для всех } x, y \in X. \quad (5.14)$$

Из определения (5.13) следует, что все многогранники P_k являются $\mathbb{Z}^D$ -различимыми, так как согласно теореме 4.1 все их сдвиги в совокупности образуют торическую развертку $T_{\mathbf{c}, \lambda}^D$. Теперь мы хотим ввести в обозначение многогранников P_k все независимые определяющие их параметры. Пусть даны произвольный вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и число $h = 1, 2, 3, \dots$ такие, что существует вектор α , удовлетворяющий условиям

$$\alpha \in \mathbf{C}_{<1}, \quad \alpha \equiv h\beta \bmod \mathbb{Z}^D. \quad (5.15)$$

Обозначим через

$$P_k = P_{\beta, h, \lambda, k} \quad (5.16)$$

многогранники, определенные равенствами (5.13) для векторов α из (5.15), и $\mathbf{c} = \lambda \alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leq 1$.

Для сдвига S_β тора $\mathbb{T}^D$ и многогранника P_k зададим считающую функцию

$$r(i; \beta, x_0, P_k) = \#\{j : S_\beta^j(x_0) \in P_k \bmod \mathbb{Z}^D, 0 \leq j < i\},$$

где x_0 – произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$. Также зададим отклонение

$$\delta(i; \beta, x_0, P_k) = r(i; \beta, x_0, P_k) - i\alpha_k \quad (5.17)$$

распределения точек орбиты $\text{Orb}(S_\beta, x_0) = \{S_\beta^j(x_0), j = 0, 1, 2, \dots\}$ относительно области $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть даны вектор сдвига $\beta \in \mathbb{R}^D$ и $h = 1, 2, 3, \dots$, удовлетворяющие условиям (5.15), $\mathbf{c} = \lambda \alpha$, где $\sigma(\alpha) < \lambda \leq 1$, и пусть $P_k = P_{\beta, h, \lambda, k}$ – отвечающие этим параметрам многогранники (5.16). При этих условиях имеют место следующие утверждения.

1) Для отклонений (5.17) выполняются неравенства

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leq h\gamma_k \quad (5.18)$$

с константами

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)c_k \quad (5.19)$$

для $k = 1, \dots, D$ и

$$\gamma_k = 1 + (D - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c})) \quad (5.20)$$

для $k = 0$, где $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_D)$.

2) Также для отклонений выполняется общее неравенство

$$|\delta(i; \beta, x_0, P_k)| \leq hD. \quad (5.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка ω определена в (5.10), и пусть $\omega = 0$ в случае $k = 0$. Тогда имеет место тождество

$$\delta(i; \beta, x_0, P_k) = \delta_k(i; \beta, x_0 + \omega, \mathbb{T}_{\mathbf{c}, \lambda}^D).$$

Поэтому утверждение 1) непосредственно вытекает из многомерной теоремы Гекке 5.1, а неравенства (5.21) следуют из (5.18)–(5.20), если учесть, что вектор $\mathbf{c} = \lambda\alpha$ для $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$ (см. (3.12)) имеет координаты $0 < c_k < 1$.

Как уже отмечалось, многогранники P_k , определенные в (5.13), являются $\mathbb{Z}^D$ -различимыми, а из теоремы 5.2 следует, что относительно сдвига S_β многогранники P_k , если их рассматривать как области $\mathbb{P}_k^D \equiv P_k \bmod \mathbb{Z}^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, являются множествами ограниченного остатка. Многогранники, обладающие указанными свойствами, естественно назвать *многогранниками ограниченного остатка* или, кратко, *BR-многогранниками*.

Для произвольной размерности D многогранники P_k с номерами $k = 1, \dots, D$ (по своей конструкции – параллелепипеды (5.9)) представляют собой простейший вид BR-многогранников. Многогранник P_0 также может быть параллелепипедом в исключительном случае вектора $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, когда $\lambda = 1$. Если же $\lambda < 1$, то P_0 – параллелоэдр с числом вершин $\#V(P_k) = 2^{D+1} - 2$.

Наконец заметим, что приведенное во введении неравенство (0.5) вытекает из неравенства (5.21).

Список литературы

- [1] E. Hecke, “Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins”, *Hamb. Abh.*, **1**:1 (1922), 54–76.
- [2] I. Oren, “Admissible functions with multiple discontinuities”, *Proceedings of the Special Seminar on Topology*, Vol. I, Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City, 1981, 217–230.
- [3] R. Szűsz, “Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheit-squadrats”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **5**:1-2 (1954), 35–39.
- [4] P. Liardet, “Regularities of distribution”, *Compositio Math.*, **61**:3 (1987), 267–293.
- [5] G. Rauzy, “Ensembles à restes bornés”, *Seminaire de theorie des nombres de Bordeaux 1983/1984*, Exp. No. 24, Univ. Bordeaux I, Talence, 1984.
- [6] S. Ferenczi, “Bounded remainder sets”, *Acta Arith.*, **61**:4 (1992), 319–326.
- [7] В. Г. Журавлёв, “Разбиения Розы и множества ограниченного остатка на торе”, *Труды по теории чисел*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 83–106.
- [8] В. Г. Журавлёв, “Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей”, *Алгебра и анализ*, **24**:1 (2012), 95–130.
- [9] В. Г. Журавлёв, “Перекалывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 26, Зап. научн. сем. ПОМИ, **392**, ПОМИ, СПб., 2011, 95–145.
- [10] В. Г. Журавлёв, “Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова”, *Алгебра и анализ*, **24**:4 (2012), 97–136.
- [11] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, В 3-х томах, Т. 2, АН УССР, Киев, 1952.
- [12] H. Weyl, “Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins”, *Math. Ann.*, **77**:3 (1916), 313–352.