Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гончар, Рациональные аппроксимации аналитических функций, *Совр. пробл. матем.*, 2003, выпуск 1, 83–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm4>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:12:08

Рациональные аппроксимации аналитических функций

А. А. Гончар

1. Введение

Проблематика, связанная с классическими конструкциями рациональных аппроксимаций аналитических функций (непрерывные дроби, аппроксимации Паде и их различные обобщения), составляет важное направление на стыке теории приближений, комплексного анализа, вычислительной математики. Развитие этого направления в 18–19 вв. (в основном, в рамках классической теории непрерывных дробей) связано с именами многих выдающихся математиков — от Эйлера, Лагранжа, Гаусса до Чебышева, Маркова, Стилтьеса. Интерес к конструктивным рациональным аппроксимациям вновь значительно возрос в последние десятилетия. Благодаря современному развитию вычислительной техники, начиная с 1960-х годов аппроксимации Паде и их обобщения находят новые многочисленные приложения к самым разнообразным вопросам физики, механики и других наук. С другой стороны, теоретический анализ возникающих при этом математических проблем приводит к принципиально новым задачам в комплексном анализе, теории потенциала, теории ортогональных многочленов и других областях анализа.

Настоящая работа отражает вклад автора в теорию конструктивных рациональных аппроксимаций аналитических функций. В работу включены результаты, опубликованные автором (частично — совместно с учениками) в 1969–1997 гг. Эти результа-

ты относятся к теории сходимости аппроксимаций Паде и более общих рациональных интерполяционных процессов, существенно расширяющих рамки классической теории непрерывных дробей, обратным задачам теории аппроксимаций Паде, применению многоточечных аппроксимаций Паде (решений интерполяционной задачи Коши–Якоби) к вопросу о скорости чебышевской рациональной аппроксимации аналитических функций, асимптотическим свойствам аппроксимаций Эрмита–Паде для систем функций марковского типа. Развитые методы и полученные результаты позволили, в частности, дать решения ряда задач в рассматриваемом направлении, долгое время остававшихся открытыми и активно обсуждавшихся в литературе, во всяком случае, начиная с 50–60-х годов.

Подчеркнем, что всюду в работе речь идет о приближениях заданных функций рациональными функциями со *свободными* полюсами; все рассматриваемые аппроксимации имеют *нелинейный* характер. Оптимальный (в том или ином смысле) выбор коэффициентов как числителя, так и знаменателя аппроксимирующей рациональной функции позволяет соответствующим аппроксимациям моделировать особенности приближаемой функции и осуществлять эффективное аналитическое продолжение функции, заданной своим разложением в степенной ряд. С этим связаны принципиальные преимущества рассматриваемых аппроксимаций по сравнению с полиномиальными аппроксимациями, а также рациональными аппроксимациями с заранее *фиксированными* полюсами.

2. Теория сходимости. Обратные задачи

2.1. *Аппроксимации Паде* — это локально наилучшие рациональные аппроксимации аналитической функции, заданной своим разложением в степенной ряд (или формального степенного ряда). Точнее, аппроксимацией Паде типа (n, m) степенного ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (2.1)$$

называется рациональная функция $f_{n,m}(z)$ класса

$$\mathfrak{R}_{n,m} = \left\{ r(z) : r(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}, \sum_0^m |b_k| \neq 0 \right\},$$

имеющая максимально возможный (в классе $\mathfrak{R}_{n,m}$) порядок касания с рядом f в точке $z = 0$. Аппроксимация Паде $f_{n,m}$ может быть определена также как отношение p/q любых полиномов p, q ($q \neq 0$), удовлетворяющих соотношениям

$$\deg p \leq n, \quad \deg q \leq m, \quad (qf - p)(z) = Az^{n+m+1} + \dots \quad (2.2)$$

Для любой пары индексов (n, m) существует единственная аппроксимация Паде $f_{n,m}$ ряда f . Она вычисляется непосредственно по коэффициентам $c_0, c_1, \dots, c_{n+m}$ заданного степенного ряда. Для *нормальных* индексов (n, m) имеем

$$(f - f_{n,m})(z) = Bz^{n+m+1} + \dots \quad (2.3)$$

Совокупность всех аппроксимаций $f_{n,m}$, $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, составляет *таблицу* Паде ряда f . Наибольший интерес (как для теории, так и для приложений) представляют *диагональные* последовательности $\{f_{n,n+j}\}$, $j \in \mathbb{Z}$ — фиксировано (в первую очередь — *главная диагональ* $\{f_{n,n}\}$) и *строки* таблицы Паде $\{f_{n,m}\}$, $m \in \mathbb{N}$ — фиксировано.

Классические алгоритмы, связанные с разложением функций или переразложением степенных рядов в непрерывные дроби, тесно связаны с аппроксимациями Паде. Как правило, подходящие дроби таких непрерывных дробей являются диагональными аппроксимациями Паде соответствующих степенных рядов. Многие фундаментальные результаты, связанные с аппроксимациями Паде, были получены в рамках классической теории непрерывных дробей.

Основные результаты *теории сходимости непрерывных дробей* формулируются в терминах, связанных с параметрами соответствующих непрерывных дробей. Это существенно сужает возможности применения методов и результатов теории непрерывных дробей к вопросам сходимости аппроксимаций Паде для общих классов аналитических функций.

В *теории сходимости аппроксимаций Паде* основной интерес представляют результаты двух типов — прямые и обратные.

В *прямых* теоремах на основании известной заранее информации об аналитическом продолжении функции, заданной своим разложением в степенной ряд (области голоморфности и мероморфности, расположение и характер особых точек, принадлежность функции тому или иному классу, например, классу алгебраических функций и т.п.) делаются те или иные выводы о сходимости соответствующих аппроксимаций, асимптотическом поведении их полюсов, скорости сходимости и др. Отметим, что при общих предположениях об аналитических свойствах заданной функции ее аппроксимации Паде могут иметь “случайные” полюсы в области голоморфности приближаемой функции; поэтому в соответствующих теоремах общего характера речь идет о сходимости вне “малых” исключительных множеств (почти равномерная сходимость, сходимость по мере или по емкости). В *обратных* задачах исходные данные связаны с самими аппроксимациями Паде; особый интерес представляют обратные теоремы, в которых на основе минимальной информации о предельном поведении полюсов аппроксимаций Паде делается вывод о сходимости этих аппроксимаций, аналитическом продолжении приближаемой функции, расположении и характере ее особенностей. Ясно, что с точки зрения приложений особенно важны именно обратные результаты. Далее приведены основные результаты работы, относящиеся к теории сходимости аппроксимаций Паде.

2.2. Исторически первый результат о сходимости *строк* таблицы Паде был получен Монтессу де Болором в 1902 году. Опираясь на формулы Адамара для радиусов m -мероморфности функции f , заданной своим разложением в степенной ряд, он доказал следующую теорему: если функция f имеет ровно m полюсов в круге $D: |z| < R$ (здесь и в дальнейшем полюсы считаются с учетом их кратностей), то m -я строка $\{f_{n,m}\}$ ее таблицы Паде равномерно сходится к f внутри (на компактных подмножествах) области D' , которая получается из D удалением полюсов функции f . По существу, была доказана равномерная сходимость $\{f_{n,m}\}$ к f внутри D в *сферической метрике*. Отсюда уже следует, что полюсы аппроксимаций сходятся к полюсам заданной функции: каждый полюс функции “притягивает” столько полюсов аппроксимаций, какова его кратность, и сходятся они к полюсам f со скоростью геометрической прогрессии (*геометрически*). Обращая последнее утверждение, автор получил следующий результат (по-видимому, первый результат *обратного*

характера для произвольного m): если полюсы m -й строки Паде формального степенного ряда f геометрически сходятся к некоторым точкам комплексной плоскости, то ряд f определяет m -мероморфную функцию в круге D , содержащем все эти точки.

Тот факт, что в этих результатах речь идет о функциях, имеющих ровно m полюсов в круге D , связан с существом дела. В общем случае (когда число полюсов f в D может быть $< m$), ситуация усложняется; тем не менее и в общем случае можно доказать, что m -я строка $\{f_{n,m}\}$ сходится к f внутри D , например, по емкости (или равномерно, но вне множества произвольно малой 1-меры). Опираясь, в частности, на это утверждение, и для общего случая удалось “сомкнуть” прямые и обратные теоремы и в терминах, связанных с предельным поведением полюсов строк таблицы Паде, полностью охарактеризовать m -мероморфное продолжение функции, заданной своим разложением в степенной ряд.

Сформулируем основной результат работы [12]. Пусть f — произвольный степенной ряд вида (2.1) (вообще говоря, формальный), $R_0 = R_0(f)$ — радиус сходимости ряда f . Если $R_0 > 0$, то через $f = f(z)$ будем обозначать сумму ряда в его круге сходимости $D_0 = D_0(f)$ и аналитическую функцию, определяемую элементом (f, D_0) . В этом случае при любом натуральном m положим: $D_m = D_m(f)$ — круг m -мероморфности f (максимальный открытый круг с центром в нуле, в который функция $f(z)$, $z \in D_0$, продолжается как мероморфная функция, имеющая $\leq m$ полюсов); $R_m = R_m(f)$ — радиус круга D_m ; $d_m = d_m(f) = \{(a_1, \nu_1), \dots, (a_s, \nu_s)\}$, — дивизор полюсов f в D_m , $|d_m| = \nu_1 + \dots + \nu_s$ — число полюсов f в D_m . Если $R_0 = 0$, то $R_m = 0$ при любом m .

Пусть $\{f_{n,m}\}$ (m — фиксировано, $n = 1, 2, \dots$) — m -я строка таблицы Паде ряда f . Для $a \in \mathbb{C}$ введем две характеристики — $\Delta(a)$ и $\mu(a)$, связанные с асимптотическим поведением последовательности множеств $P_{n,m} = \{z_{n,1}, \dots, z_{n,m_n}\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $z_{n,1}, \dots, z_{n,m_n}$, $m_n \leq m$, — конечные (свободные) полюсы рациональной функции $f_{n,m}$. Первая из интересующих нас характеристик определяется формулой

$$\Delta(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \prod_{z_{n,j} \in U} |z_{n,j} - a|^{1/n}$$

(U — фиксированный круг с центром в точке a). Вторую характе-

ристику — целое неотрицательное число $\mu(a)$ — определим следующим образом. Будем считать, что $z_{n,j}(a)$ — это полюсы $z_{n,j} \in U$, перенумерованные в порядке неубывания их расстояний от точки a . Положим

$$\delta_j(a) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |z_{n,j}(a) - a|^{1/n}, \quad j = 1, \dots, m',$$

где $m' = \liminf m_n$; для $j = m' + 1, \dots, m$ по определению $\delta_j(a) = 1$. Очевидно, величины $\Delta(a)$ и $\delta_j(a)$ не зависят от выбора U . Если $\Delta(a) = 1$ (тогда все $\delta_j(a) = 1$), то $\mu(a) = 0$. Если $\Delta(a) < 1$, то при некотором μ имеем: $\delta_1(a) \leq \dots \leq \delta_\mu(a) < 1$, в то время как $\delta_{\mu+1}(a) = 1$ (или $\mu = m$); в этом случае полагаем $\mu(a) = \mu$.

ТЕОРЕМА. Пусть f формальный степенной ряд, m — натуральное число и $a \neq 0$ — фиксированная точка плоскости $\mathbb{C}$ ($a \in \mathbb{C}^*$). Следующие утверждения эквивалентны:

- i) $a \in D_m$ и f имеет полюс в точке a ;
- ii) $\Delta(a) < 1$ (или, что то же самое, $\mu(a) \geq 1$).

При этом (если выполнено какое-либо из условий i), ii)) имеют место формулы:

$$R_m = \frac{|a|}{\Delta(a)}, \quad \nu = \mu(a),$$

где ν — кратность полюса f в точке a .

Положим

$$P_m = \{a \in \mathbb{C}^* : \Delta(a) < 1\} = \{a \in \mathbb{C}^* : \mu(a) \geq 1\}.$$

Из теоремы вытекает следствие: $R_m > R_0$ в том и только том случае, когда $P_m \neq \emptyset$; при этом

$$R_m = \frac{|a|}{\Delta(a)} \quad \text{для всех } a \in P_m, \quad d_m = \{(a, \mu(a)) : a \in P_m\},$$

в частности, $|d_m| = \sum_{a \neq 0} \mu(a)$.

Простая геометрическая природа характеристик Δ и μ (и, тем самым, связанных с ними формул) позволила доказать аналогичные результаты для значительно более общих (чем классические аппроксимации Паде) рациональных интерполяционных процессов; подробнее см. [7], [12].

2.3. Наибольший интерес в рассматриваемом круге вопросов представляют *диагональные* аппроксимации. Всюду в дальнейшем обсуждаются результаты, относящиеся к диагональным аппроксимациям Паде $f_{n,n} = f_n$ и их обобщениям.

Первые результаты о сходимости диагональных аппроксимаций Паде для общих классов аналитических функций были получены Наттолом (1970 г.) и Поммеренке (1973 г.). Теорема Наттолла относилась к мероморфным функциям (во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$), теорема Поммеренке — к однозначным аналитическим функциям, множество особенностей которых имеет нулевую емкость; в первой работе речь шла о сходимости по мере, во второй — о *сходимости по емкости* (второе — значительно сильнее). Существенным развитием этих результатов является следующая теорема ([2], [3]).

ТЕОРЕМА. Пусть f — функция, голоморфная в точке $z = 0$, U — произвольно малая окрестность нуля и

$$\rho_n = \rho_n(f, U) = \inf_{r \in \mathbb{R}_n} \|f - r\|_U$$

($\mathbb{R}_n = \mathbb{R}_{n,n}$, $\|g\|_U$ — суп-норма g на U). Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{1/n} = 0, \quad (2.4)$$

то:

i) аналитическая функция f , определяемая элементом (f, U) , однозначна в своей вейерштрассовой естественной области существования W_f ;

ii) последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}$ сходится по емкости к f внутри области W_f .

Утверждение i) этой теоремы представляет собой *локальное* условие (в классе всех аналитических функций, множество особенностей которых имеет нулевую емкость — необходимое и достаточное условие) однозначности в *целом* аналитической функции f , определяемой элементом (f, U) .

Хорошо известно, что мероморфные в $\mathbb{C}$ функции и однозначные аналитические функции, множество особенностей которых имеет нулевую емкость, удовлетворяют условию (2.4).

Справедливо также следующее утверждение: пусть f — функция, голоморфная в области G ($0 \in G$) и U — произвольно малая окрестность нуля; если $|f - f_n|^{1/n} \rightarrow 0$ по мере в U , то

$|f - f_n|^{1/n} \rightarrow 0$ по емкости внутри G . Тем самым, из быстрой сходимости f_n к f по мере в U уже следуют утверждения i), ii) теоремы.

Аналогичные результаты получены автором и для функций многих переменных (см. [4]).

2.4. Фундаментальное значение для теории обратных задач имеет следующий вопрос. Предположим, что диагональные аппроксимации Паде f_n , $n \geq n_0$, формального степенного ряда f не имеют полюсов (голоморфны) в круге $D_r: |z| < r$; можно ли утверждать, что в этом случае последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри D_r и, тем самым, ряд f определяет функцию, голоморфную в этом круге? Положительный ответ на этот вопрос получен в работе [13]. Сформулируем здесь достаточно общую теорему в этом направлении (в [13] доказаны более сильные утверждения).

Пусть D — открытый круг, содержащий точку $z = 0$, или область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, являющаяся объединением таких кругов (например, $D = \mathbb{C} \setminus [a, +\infty)$, $a > 0$), $G = D \setminus e$, где $e \not\equiv 0$ — относительно замкнутое подмножество области D , имеющее нулевую емкость; f_n , $n = 1, 2, \dots$, — последовательность диагональных аппроксимаций Паде ряда f такая, что

$$(f - f_n)(z) = A_n z^{2n+1} + \dots$$

для всех достаточно больших n .

ТЕОРЕМА. Если аппроксимации Паде f_n формального степенного ряда f не имеют полюсов в области G (для всех $n \geq n(f)$), то последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри (на компактных подмножествах) области G и, тем самым, ряд f определяет функцию, голоморфную в G .

Заметим, что из классических результатов о нормальных семействах мероморфных функций (теорема Монтеля) вытекает равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ в заданной области G в том случае, когда функции этой последовательности в области G выпускают три значения a , b и $c = \infty$. Теорема показывает, что последовательности диагональных аппроксимаций Паде имеют замечательную специфику — их равномерная сходимость (в областях указанного вида) вытекает уже из того факта, что функции f_n выпускают в области G только одно значение $c = \infty$ (не имеют полюсов).

Утверждения теоремы справедливы и в том случае, когда множество полюсов диагональных аппроксимаций Паде не имеет предельных точек в области G . Последнее условие, очевидно, и необходимо для равномерной сходимости внутри G (по определению). Принципиальное значение соответствующего критерия равномерной сходимости заключается в том, что формулируется он в терминах, связанных только с предельным поведением полюсов диагональных аппроксимаций Паде.

Такой же характер имеет следующий критерий равномерной сходимости в сферической метрике (при тех же условиях на f и G); см. [16].

ТЕОРЕМА. Следующие утверждения эквивалентны:

i) последовательность $\{f_n\}$ диагональных аппроксимаций Паде ряда f равномерно сходится в сферической метрике внутри области G ;

ii) существует дискретное подмножество P области G ($0 \notin P$) и функция $p: P \rightarrow \mathbb{N}$ такие, что множество полюсов рациональных функций последовательности $\{f_n\}$ не имеет предельных точек в области $G \setminus P$ и для каждой точки $a \in P$ справедливы соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |z_{n,j}(a) - a|^{1/n} < 1, \quad j = 1, \dots, p(a),$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |z_{n,p+1}(a) - a| > 0, \quad p = p(a),$$

где $z_{n,j}(a)$ — полюсы f_n , перенумерованные в порядке невозрастания их расстояний от точки a .

В частности, если выполнено условие ii), то ряд f определяет мероморфную функцию $f(z)$, $z \in G$, множество полюсов которой совпадает с P , а кратность полюса f в точке $a \in P$ равна $p(a)$.

Последний вывод (уже для случая круга и конечного числа полюсов) наиболее важен для приложений.

3. Скорость рациональных аппроксимаций аналитических функций

3.1. Задачи, связанные со скоростью чебышевских рациональных аппроксимаций аналитических функций, занимают центральное место в рассматриваемой теории. Анализ вопросов сходимости рациональных интерполяционных процессов (метод многоточечных аппроксимаций Паде) позволил в последние годы решить основные задачи в этом направлении.

Пусть E — компакт в расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, f — непрерывная функция на E , $\mathfrak{R}_n$ — класс всех рациональных функций от z порядка не выше n ($\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_{n,n}$). Обозначим через $\rho_n = \rho_n(f, E)$ расстояние от f до $\mathfrak{R}_n$ (в чебышевской метрике на E). Если f голоморфна на компакте E ($f \in H(E)$), то последовательность ρ_n стремится к нулю *геометрически*; точнее,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{1/n} = q < 1. \quad (3.1)$$

Величина $q = q(f, E)$ является основной характеристикой скорости рациональной аппроксимации f на E . Вопросы описания величины q в терминах, связанных с аналитическим продолжением функции f , играют фундаментальную роль в теории рациональных аппроксимаций аналитических функций.

Далее предполагается, что компакт E состоит из конечного числа нетривиальных связных компонент (континуумов). Пусть F — компакт, принадлежащий дополнению к E , и $h(E, F)$ — модуль конденсатора (E, F) ; иначе говоря, $h(E, F) = 1/c$, где $c = c(E, F)$ — емкость этого конденсатора. Следующая теорема вытекает из результатов Уолша (1930-х годов), относящихся к интерполяции рациональными функциями с *фиксированными* полюсами: если функция f голоморфна в открытом множестве $G = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F$ и $E \subset G$, то $q \leq \exp(-h(E, F))$.

Верхнюю грань величины $h(E, F)$ в классе всех компактов F таких, что f допускает голоморфное (однозначное аналитическое) продолжение в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus F$, обозначим через $h = h(f, E)$ и назовем эту величину *модулем голоморфности* функции $f \in H(E)$. В наиболее интересных случаях существует единственный компакт F_f , для которого $h(E, F_f) = h$; открытое множество $G_f = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F_f$

называется *максимальной областью голоморфности функции* $f \in H(E)$.

Из (3.1) следует, что для любой $f \in H(E)$ величины q и h связаны неравенством

$$q \leq e^{-h}. \quad (3.2)$$

Эта оценка позволяет вычислить q только при $h = +\infty$; последнее означает, что функция f — однозначная аналитическая функция, множество особенностей которой имеет нулевую емкость. В общем случае нельзя описать величину q в терминах, связанных только с понятием аналитического продолжения f по Вейерштрассу (более того, с рациональными аппроксимациями связана возможность обобщения этого понятия); в частности, q нельзя выразить через h . Построены примеры функций, для которых $0 < q = e^{-h}$; однако, эти функции имеют весьма экзотическую природу. Результаты, полученные автором в 1980-х годах, показывают, что для широких классов аналитических функций, включающих важнейшие функции анализа, q *вычисляется по h* , причем справедливо соотношение (ср. (3.2))

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^{1/n} = e^{-2h}. \quad (3.3)$$

Уже первые результаты достаточно общей природы, относящиеся к функциям марковского типа и приводящие к формуле (3.3) (см. [8], [14]), основывались на интерполяциях рациональными функциями со *свободными* полюсами.

3.2. Прежде чем переходить к описанию итоговых результатов в рассматриваемом направлении, остановимся на методе многоточечных аппроксимаций Паде и схеме его применения к задачам о скорости рациональной аппроксимации.

Пусть $f \in H(E)$, $\alpha = \{\alpha_{n,k}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, — треугольная таблица точек (узлов интерполяции), принадлежащих компакту E ; положим

$$A_n(z) = (z - \alpha_{n,1}) \cdots (z - \alpha_{n,n}).$$

Фиксируем натуральное число n и рассмотрим рациональную функцию $R_n = P_n/Q_n$, где P_n , Q_n — произвольные полиномы от z , удовлетворяющие условиям

$$\deg P_n \leq n-1, \quad \deg Q_n \leq n \quad (Q_n(z) \not\equiv 0); \quad \frac{Q_n f - P_n}{A_{2n}} \in H(E). \quad (3.4)$$

Последнее соотношение означает, что $Q_n f - P_n = 0$ во всех точках $2n$ -й строки таблицы α . Полиномы, удовлетворяющие (3.4), *существуют* для любой $f \in H(E)$; их отношение определяет *единственную* рациональную функцию R_n (с точностью до обычного отождествления). Эта рациональная функция называется *многоточечной аппроксимацией Паде* (в рассматриваемом случае, типа $(n-1, n)$) функции f , соответствующей узлам интерполяции $\alpha_{2n,1}, \dots, \alpha_{2n,2n}$. Если $Q_n \neq 0$ в этих узлах, то R_n интерполирует в них функцию f . В противном случае, при переходе от $Q_n f - P_n$ к $f - R_n$ некоторые из интерполяционных условий теряются; однако, потеря d_n условий интерполяции сопровождается понижением (на d_n) степеней числителя и знаменателя R_n .

Основные трудности, связанные с применением многоточечных аппроксимаций Паде, лежат в анализе асимптотического поведения их полюсов (в первую очередь, с вопросом о том, как это поведение связано с характером и расположением особенностей функции f).

Если функция $f \in H(E)$ допускает голоморфное продолжение в открытое множество $G = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F$ (без ограничения общности можно считать, что E и F — компакты в $\mathbb{C}$ и $f(\infty) = 0$), то полиномы Q_n удовлетворяют *комплексным* соотношениям ортогональности

$$\int_{\gamma} Q_n(t) t^j \frac{f(t) dt}{A_{2n}(t)} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3.5)$$

где γ — контур, охватывающий F (γ лежит в дополнении к $E \cup F$). Для разности $f - R_n$ имеем

$$(f - R_n)(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{A_{2n}(z)}{(Q_n Q)(z)} \int_{\gamma} \frac{(Q_n Q f)(t) dt}{A_{2n}(t)(z-t)}, \quad (3.6)$$

где Q — произвольный полином степени не выше n (интегралы в (3.5), (3.6) не зависят от γ и их можно записывать как f_F).

В 1983–1988 гг. на основе метода многоточечных аппроксимаций Паде был решен ряд узловых задач, связанных со скоростью рациональных аппроксимаций аналитических функций. Общая теорема относится к последовательностям функций, задающихся интегралами типа Коши; она формулируется в терминах, связанных с равновесным распределением заряда на пластинах конденсатора при условии, что на одной из его

пластин действует *внешнее поле*. Изучение характера сходимости многоточечных аппроксимаций Паде приводит к вопросам, относящимся к предельным распределениям нулей ортогональных многочленов с переменными (зависящими от номера многочлена) весовыми функциями (см. (3.5)); теоретико-потенциальные задачи равновесия с внешним полем позволяют охарактеризовать такие распределения (для вещественного случая см. [14], [15]). В случае комплексных соотношений ортогональности (для многозначных аналитических функций, например, для функций с конечным числом точек ветвления) возникает также проблема выбора компакта F . Важные результаты в этом направлении получены Шталем; в частности, им доказаны гипотезы Наттолла и автора, относящиеся к локальным аппроксимациям. Полученные результаты показывают, что полюсы аппроксимаций “выбирают” экстремальную систему кривых F_f (при надлежащем выборе узлов интерполяции α). Однако, в общем случае анализ задач о предельном распределении свободных полюсов аппроксимаций (нулей ортогональных многочленов) удобно основывать непосредственно на свойстве *симметрии* соответствующей системы “разрезов” F . Вопросы построения кривых, обладающих надлежащим свойством симметрии, и вычисления параметров соответствующих теоретико-потенциальных задач, связаны с экстремальными задачами геометрической теории функций (типа задач Чеботарева и Лаврентьева) и траекториями квадратичных дифференциалов на римановых поверхностях.

3.3. Прежде чем формулировать основную теорему (см. [18], [19]), введем необходимые для этого понятия. Пусть (E, F) — конденсатор, φ — вещественная непрерывная функция (внешнее поле) на F ((E, F, φ) — оснащенный конденсатор). Обозначим через $M(E, F)$ множество всех вещественных мер (зарядов) вида $\mu = \mu_F - \mu_E$, где μ_E, μ_F — вероятностные меры на E, F (соответственно).

Существует единственный заряд λ , минимизирующий энергию (с учетом поля φ) в классе $M(E, F)$:

$$J_\varphi(\lambda) = \inf\{J_\varphi(\mu) : \mu \in M(E, F)\},$$

где

$$J_\varphi(\mu) = \iint \log \frac{1}{|t - z|} d\mu(t) d\mu(z) + 2 \int \varphi(t) d\mu_F(t).$$

Если дополнение к $E \cup F$ связно, то заряд λ (и только этот заряд — в классе $M(E, F)$) удовлетворяет следующим соотношениям равновесия (приблизительно всюду на указанных множествах; $V = V^\lambda$ — логарифмический потенциал λ):

$$\begin{aligned} V(z) &= w_1, \quad z \in E, \\ (V + \varphi)(z) &= \min_F (V + \varphi) = w_2, \quad z \in L = \text{Supp } \lambda_F. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Положим $w = w(E, F, \varphi) = w_2 - w_1$; равновесная константа w , как и равновесный заряд $\lambda = \lambda_F - \lambda_E$, единственным образом определяется соотношениями равновесия (3.7).

Будем говорить, что оснащенный конденсатор (точнее, его пластина F) обладает свойством симметрии в гармоническом поле φ и писать $(E, F, \varphi) \in S$, если выполнены условия:

i) φ — гармоническая функция в некоторой окрестности Ω пластины F ;

ii) $L = \text{Supp } \lambda_F$ — правильный компакт ($\text{cap}(L \setminus L_0) = 0$, где L_0 — множество всех точек $\zeta \in L$, окрестности которых пересекаются с L по аналитической дуге);

iii) $\frac{\partial(V + \varphi)}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial(V + \varphi)}{\partial n_-}(\zeta)$, $\zeta \in L_0$, где $\partial/\partial n_\pm$ — производные по нормали к L_0 в противоположных направлениях.

ТЕОРЕМА. Пусть Φ_n — последовательность функций, голоморфных в окрестности Ω пластины F конденсатора (E, F) , и g — функция, голоморфная в $\Omega \setminus F$. Предположим, что выполнены следующие условия:

i) $(2n)^{-1} \log \frac{1}{|\Phi_n|} \rightarrow \varphi$ равномерно внутри Ω ;

ii) $(E, F, \varphi) \in S$;

iii) $g \in H_0(\Omega \setminus F)$

(последнее означает, что $g \in H(\Omega \setminus F)$ и имеет достаточно правый скачок на L_0). Тогда для последовательности функций

$$f_n(z) = \oint_F \frac{\Phi_n(t)g(t) dt}{t - z}, \quad z \in E,$$

справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(f_n, E)^{1/n} = e^{-2w}, \quad w = w(E, F, \varphi).$$

При $\Phi_n(z) \equiv 1$ (тем самым, $\varphi \equiv 0$) из этой теоремы вытекает, что соотношение (3.3) справедливо, в частности, в следующих случаях:

1) E — континуум и элемент (f, E) определяет многозначную аналитическую функцию с конечным числом точек ветвления (в частности, алгебраическую функцию);

2) E есть объединение конечного числа попарно непересекающихся континуумов $E_1, \dots, E_N$ и $f_j(z) \equiv c_j$ для $z \in E_j$, $j = 1, \dots, N$ (случай двух отрезков вещественной прямой соответствует классической задаче Золотарева; для двух континуумов в комплексной плоскости формула (3.3) содержится в работе [1]).

3.4. Эта же теорема легла в основу решения известной задачи о скорости рациональной аппроксимации экспоненты на полуоси (см. [19]). Положим

$$r_n = \rho_n(e^{-x}, E^+), \quad E^+ = [0, +\infty].$$

Многочисленные работы были посвящены последовательному улучшению констант c_1, c_2 в оценках вида

$$0 < c_1 \leq \liminf r_n^{1/n} \leq \limsup r_n^{1/n} \leq c_2 < 1$$

и приближенным вычислениям (гипотетически существующего) предела $r_n^{1/n}$. С другой стороны, сама возможность геометрической скорости рациональной аппроксимации функции e^{-x} , имеющей существенную особенность в точке $z = \infty \in E^+$, породила большое число исследований в этом направлении.

Приведенная выше теорема приводит к решению этой задачи в терминах, связанных с равновесным зарядом в поле $\varphi(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} z$ на (заранее неизвестной) пластине F оснащенного конденсатора (E, F, φ) . Требование $(E, F, \varphi) \in S$ позволяет найти эту пластину и дать явное решение соответствующей задачи равновесия в терминах, связанных с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами. Мы приведем ответ в наиболее интересной (теоретико-числовой) форме.

ТЕОРЕМА. *Существует предел $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n^{1/n}$; его значение ν совпадает с (единственным) положительным корнем уравнения:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{8}, \quad a_n = \left| \sum_{d|n} (-1)^d d \right|. \quad (3.8)$$

Другими словами, коэффициент a_n является модулем алгебраической суммы всех (простых и составных) делителей числа n , в которой четные делители учитываются со знаком плюс, а нечетные — со знаком минус. Вычисление ν на основе (3.8) не составляет труда.

Явное решение получено и для более общей задачи о скорости рациональной аппроксимации функции e^{-z} в угловых областях вида $E_\theta: |\arg z| \leq \theta < \pi/2$. А именно, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(e^{-z}, E_\theta)^{1/n} = \nu_\theta \in (0, 1);$$

при этом $\nu_\theta = -h^2$, где $h = \exp(\pi i \omega' / \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{\vartheta_0(t)}{\vartheta_3(t)} \right)^{2\alpha} dt = 0, \quad \alpha = 1 - \frac{\theta}{\pi}$$

(ϑ_0, ϑ_3 — тэта-функции, соответствующие $\tau = \omega' / \omega$).

4. Метод векторных потенциалов. Аппроксимации Эрмита–Паде

4.1. Классическое понятие равновесного распределения заряда — для компакта (проводника) F и для конденсатора (F_1, F_2) (F_j — непересекающиеся компакты в $\widehat{\mathbb{C}}$) — играет важную роль во многих вопросах теории приближений. Ряд задач, относящихся к рациональным аппроксимациям аналитических функций, естественным образом приводит к более общему понятию равновесного распределения зарядов (*равновесной меры*) для системы проводников $(F_1, F_2, \dots, F_m)$; при этом задаются величины зарядов на каждом из проводников, закон их взаимодействия (взаимодействие зарядов, принадлежащих F_j и F_k , может быть различно для разных j, k , и общий закон взаимодействия задается $(m \times m)$ -матрицей) и внешние поля, действующие в пределах этих проводников.

В соответствии со сказанным выше, исходными данными рассматриваемой задачи являются:

$F = (F_1, \dots, F_m)$ — множество компактов в $\widehat{\mathbb{C}}$;

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ — вектор с положительными координатами;

$A = \|a_{j,k}\|$ — вещественная симметричная $(m \times m)$ -матрица;

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ — множество непрерывных функций в $\widehat{\mathbb{C}}$ со значениями в $(-\infty, +\infty]$, $\varphi_j(x) \neq \infty$, $x \in F_j$.

Далее предполагается, что F_j — отрезки вещественной прямой, A — положительно определенная матрица и $a_{j,k} = 0$ при $F_j \cap F_k \neq \emptyset$.

Через $M = M_\theta(F)$ обозначим множество всех векторных мер $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, где μ_j — (положительные борелевские) меры, причем $S(\mu_j) = \text{Supp } \mu_j \subset F_j$ и $|\mu_j| = \mu_j(F_j) = \theta_j$. Для меры $\mu \in M$ определим *векторный потенциал* $W^\mu = \{W_j^\mu(x), x \in F_j : j = 1, \dots, m\}$, где

$$W_j^\mu(z) = \sum_{k=1}^m a_{j,k} V^{\mu_k}(z) + \varphi_j(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

(V^ν — логарифмический потенциал ν). *Энергия* (удвоенная) меры μ — с учетом матрицы взаимодействия и вектора внешних полей — задается формулой:

$$J_\varphi(\mu) = (A\mu, \mu) + 2 \int \varphi d\mu = \sum_{j,k=1}^m a_{j,k}(\mu_j, \mu_k) + 2 \sum_{k=1}^m \int \varphi_k d\mu_k,$$

где (μ_j, μ_k) — взаимная энергия указанных мер. Сформулируем теорему, лежащую в основе метода векторных потенциалов (ср. [17]).

ТЕОРЕМА. *Каждая из следующих задач имеет единственное решение λ в классе M ; решения этих задач совпадают:*

- (A) $J_\theta(\lambda) = \min_{\mu \in M} J_\theta(\mu)$;
- (B) $W_j^\lambda(x) \equiv w_j = \min_{F_j} W_j^\lambda, \quad x \in S(\lambda_j), \quad j = 1, \dots, m$;
- (C) $\min_{F_j} W_j^\lambda = \max_{\mu \in M(j, \lambda)} \min_{F_j} W_j^\mu, \quad j = 1, \dots, m$; $M(j, \lambda)$ — множество мер $\mu \in M$ таких, что $\mu_k = \lambda_k$ для всех $k \neq j$.

Векторная мера λ , решающая задачи (A), (B), (C), называется *равновесной мерой*. Наиболее важной для приложений является характеристика меры λ как решения задачи равновесия (B). Соответствующее утверждение теоремы можно сформулировать так: *существует единственная мера $\lambda \in M$ такая, что (для некоторых констант w_j) имеют место соотношения: $W_j^\lambda(x) = w_j$ на $S(\lambda_j)$ и $W_j^\lambda(x) \geq w_j$ на всем отрезке F_j , $j = 1, \dots, m$. Это свойство равновесия однозначно определяет и меру λ , и набор равновесных констант $w = (w_1, \dots, w_m)$.*

Теорема справедлива и при более общих предположениях относительно исходных данных задачи.

4.2. В классической работе Эрмита о трансцендентности числа e была введена конструкция рациональных аппроксимаций, сыгравшая важную роль в ряде задач анализа и теории чисел. В дальнейшем соответствующие рациональные функции стали называться аппроксимациями Эрмита–Паде. Один из основных вариантов этой конструкции состоит в построении рациональных аппроксимаций с общим знаменателем для конечного набора степенных рядов с центром в точке $z = \infty$:

$$f = (f_1, \dots, f_m); \quad f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{j,k}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.1)$$

А именно, фиксируем мультииндекс $n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$; положим $|n| = n_1 + \dots + n_m$. Всегда *существует* полином $Q_n(z) \neq 0$, $\deg Q_n \leq |n|$, удовлетворяющий соотношениям:

$$(Q_n f_j - P_{n,j})(z) = \frac{A_{n,j}}{z^{n_j+1}} + \dots, \quad j = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

(справа стоят ряды по возрастающим степеням $1/z$, $P_{n,j}$ — полиномиальная часть степенного разложения $Q_n f_j$ в точке $z = \infty$). Для любого решения задачи (4.2) рациональные функции $R_{n,j} = P_{n,j}/Q_n$, $j = 1, \dots, m$, называются *аппроксимациями Эрмита–Паде* (или *совместными аппроксимациями Паде*) для набора степенных рядов (4.1). Если любой полином Q_n , удовлетворяющий соотношениям (4.2), с необходимостью имеет степень $|n|$ (такие индексы называются *нормальными*), то существует единственный (с точностью до нормирующего числового множителя) полином Q_n , удовлетворяющий этим соотношениям, и, тем самым, *единственный* набор $\{R_{n,j}\}$ аппроксимаций Эрмита–Паде для f . Случай $m = 1$ соответствует классическим аппроксимациям Паде (для степенных разложений с центром в точке $z = \infty$); далее рассматриваются $m \geq 2$.

4.3. Опишем результаты, полученные для функций марковского типа:

$$f_j(z) = \widehat{s}_j(z) = \int \frac{ds_j(x)}{z - x}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (4.3)$$

где s_j — конечные положительные борелевские меры с компактными носителями на вещественной прямой. Степенные разложения марковских функций f_j в точке $z = \infty$ имеют

вид (4.1), где $c_{j,k} = \int x^k ds_j(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — моменты мер s_j . Полиномы Q_n в этом случае удовлетворяют следующей системе соотношений ортогональности:

$$\int Q_n(x) x^k ds_j(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

Эта система для функций марковского типа может служить определением *полиномов Эрмита–Паде* Q_n , соответствующих мультииндексу n (как и выше, вместе со стандартными условиями $Q_n(z) \not\equiv 0$, $\deg Q_n \leq |n|$).

Через $\Delta(s_j)$ будем обозначать минимальный отрезок, содержащий носитель меры s_j . В дальнейшем удобно считать, что задается *система отрезков* Δ_j и мер s_j таких, что $\Delta(s_j) = \Delta_j$, $j = 1, \dots, m$.

Вопросы сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде для случая, когда отрезки Δ_j попарно не пересекаются (*системы Анжелеско*) был изучен в работе [11]. В этом случае все индексы нормальны и многочлен Q_n имеет n_j различных нулей внутри отрезка Δ_j , $j = 1, \dots, m$. Основываясь на методе векторных потенциалов (в рассматриваемых здесь задачах внешние поля отсутствуют, но они возникают в процессе доказательства соответствующих теорем) был получен первый результат общего характера, характеризующий предельные распределения нулей многочленов Q_n и области сходимости аппроксимаций Эрмита–Паде $R_{n,j}$.

Меру, ассоциированную с нулями произвольного полинома $q(z)$, обозначим через $\mu(q)$: $\mu(q) = \sum \delta_\zeta$, где сумма берется по всем нулям полинома q (с учетом их кратностей). Пусть Λ_θ — произвольная последовательность мультииндексов n , для которой

$$\lim \frac{n_j}{|n|} = \theta_j > 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Предполагается, что меры s_j удовлетворяют условию: $s'_j > 0$ почти всюду на Δ_j .

ТЕОРЕМА. Пусть $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ — набор попарно непересекающихся отрезков, λ — равновесная векторная мера, соответствующая исходным данным: Δ , θ и матрице взаимодействия $A = \|a_{j,k}\|$, где $a_{j,j} = 2$, $a_{j,k} = 1$ при $j \neq k$ ($\varphi \equiv 0$).

Тогда

$$\frac{1}{|n|} \mu(Q_n) \rightarrow \lambda_1 + \dots + \lambda_m$$

при $n \in \Lambda_\theta$, $|n| \rightarrow \infty$, и

$$\lim_{n \in \Lambda_\theta} |(f_j - R_{n,j})(z)|^{1/|n|} = \exp(W_j^\lambda(z) - w_j),$$

$$z \in D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup \Delta_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

где w_j , $j = 1, \dots, m$, — набор равновесных констант.

Содержащееся в теореме утверждение о (слабой) сходимости мер, ассоциированных с нулями полинома Q_n , эквивалентно следующей асимптотической формуле

$$\lim_{n \in \Lambda_\theta} |Q_n(z)|^{1/|n|} = \exp\left(-\sum_{j=1}^m V^{\lambda_j}(z)\right), \quad z \in D.$$

Из теоремы следует, что последовательность аппроксимаций Эрмита–Паде $R_{n,j}$ *сходится* в области $D_j^+ = \{z \in D : w_j - W_j^\lambda(z) > 0\}$ и *расходится* в области $D_j^- = \{z \in D : w_j - W_j^\lambda(z) < 0\}$. Области сходимости всегда не пусты (они содержат точку $z = \infty$); непустыми могут оказаться и области расходимости. Последний факт — возможность существования областей расходимости — в *марковской* ситуации впервые был обнаружен в связи с приведенной теоремой.

Принципиальное значение имеет тот факт, что описанная асимптотическая картина (предельное распределение нулей Q_n , характер сходимости аппроксимаций $R_{n,j}$) определяется только *геометрией* задачи и не зависит от самих функций f_j (мер s_j).

В последующих работах на основе метода векторных потенциалов были изучены асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде для *систем Никишина* (Е. М. Никишин, Г. Шталь и др.). Эти системы соответствуют случаю, когда все отрезки Δ_j совпадают; Никишин предложил специальную конструкцию мер s_j , гарантирующую “независимость” соотношений ортогональности (4.4), и доказал свойство нормальности (тем самым, единственность аппроксимаций) для мультииндексов n , $n_1 \geq \dots \geq n_m$.

Удобно ввести следующие обозначения. Пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся отрезки вещественной прямой, σ_1 и σ_2 — меры с носителями на F_1 , F_2 соответственно. Определим меру $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$

формулой: $d\langle\sigma_1, \sigma_2\rangle(x) = |\widehat{\sigma}_2(x)| d\sigma_1(x)$, $x \in F_1$. Для системы отрезков $F_1, \dots, F_m$ таких, что $F_{j-1} \cap F_j = \emptyset$, $j = 2, \dots, m$, и мер $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, $S(\sigma_j) \subset F_j$, индуктивно определим меры $\langle\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k+1}\rangle = \langle\sigma_1, \langle\sigma_2, \dots, \sigma_{k+1}\rangle\rangle$, $k = 2, \dots, m-1$. Меры s_j , приводящие к системам Никишина, определяются по заданным $\Delta_1 = F_1, \dots, F_m$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_m$: $s_1 = \sigma_1 = \langle\sigma_1\rangle$, $s_2 = \langle\sigma_1, \sigma_2\rangle$, $\dots$, $s_m = \langle\sigma_1, \dots, \sigma_m\rangle$. Отвлекаясь от других параметров задачи равновесия, связанной с системами Никишина, отметим, что матрица $A = \|a_{j,k}\|$ в этом случае такова: $a_{j,j} = 2$, $a_{j,j\pm 1} = -1$, остальные $a_{j,k} = 0$.

4.4. В недавней работе [21] рассматриваемые задачи исследованы для произвольных марковских систем, удовлетворяющих условию: *для любых $j \neq k$ отрезки Δ_j и Δ_k или не пересекаются, или совпадают* (обобщенные системы Никишина или GN-системы). Каждая GN-система определяется с помощью (плоского) графа-дерева Γ , m вершин которого, по существу, нумеруют функции соответствующей системы (4.3). Множество вершин графа можно рассматривать как частично упорядоченное множество $(\Gamma, \prec)$ с аксиомой индукции: каждый непустой отрезок $\{\beta : \beta \prec \alpha\}$ имеет наибольший элемент α_- . Удобно рассматривать также расширенный граф $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \{\omega\}$, где $\omega \notin \Gamma$ — наименьший элемент $\bar{\Gamma}$ (корневая вершина графа).

Отношение “непосредственного следования” для вершин $\alpha_- \prec \alpha$ (ребро графа $\bar{\Gamma}$) будем обозначать символом $\rightarrow$ (от α_- к α). Через α^+ обозначим множество всех элементов, “непосредственно следующих” за α ; отношение “соседства”, в котором находятся элементы множества α^+ , обозначается символом $\leftrightarrow$.

Каждому $\alpha \in \Gamma$ приводится в соответствие отрезок F_α и мера σ_α с носителем на F_α ; предполагается, что два отрезка не пересекаются, если их индексы связаны одним из отношений $\rightarrow$ или $\leftrightarrow$, а меры удовлетворяют условию: $\sigma'_\alpha > 0$ почти всюду на F_α (для всех $\alpha \in \Gamma$).

Для любого $\alpha \in \Gamma$ существует единственная *определяющая* эту вершину цепочка элементов вида: $\gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$, $\gamma \in \omega^+$. GN-системой, соответствующей графу Γ и заданному набору мер $\{\sigma_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, назовем систему марковских функций $f_\alpha = \widehat{s}_\alpha$, где $s_\alpha = \langle\sigma_\gamma, \dots, \sigma_\beta, \sigma_\alpha\rangle$, $\alpha \in \Gamma$ ($\gamma \rightarrow \dots \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ — цепочка, определяющая α).

В работе [21] исследованы асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде для произвольных GN-систем. Ограничимся

здесь описанием исходных данных задачи равновесия, в терминах которой формулируются основные результаты работы: $F = \{F_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, где F_α — носители мер σ_α ; $\theta = \{\theta_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$, θ_α — функция распределения, соответствующая заданному на графе распределению вероятностей $\{p_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$; $A = \|a_{j,k}\|$ — матрица взаимодействия зарядов, элементы которой определяются следующим образом: $a_{\alpha,\beta} = 2$, если $\alpha = \beta$; $a_{\alpha,\beta} = -1$, если индексы связаны отношением $\rightarrow$; $a_{\alpha,\beta} = 1$, если индексы связаны отношением $\leftrightarrow$; $a_{\alpha,\beta} = 0$ в остальных случаях. Все результаты асимптотического характера для аппроксимаций Эрмита–Паде GN-систем связаны с равновесной мерой λ , соответствующей этим исходным данным. В частности, для предельного распределения нулей Q_n имеем:

$$\frac{1}{|n|} \mu(Q_n) \rightarrow \sum_{k \in \omega^+} \lambda_k$$

(подробнее см. [21]).

5. Заключение

Основные результаты работы относятся к теории сходимости конструктивных рациональных аппроксимаций аналитических функций. Развита теория обратных задач, непосредственно связанная с применениями метода аппроксимаций Паде к вопросам эффективного аналитического продолжения функций. В терминах, связанных с предельным поведением полюсов строк таблицы Паде, дана полная характеристика мероморфного продолжения функции, заданной своим разложением в степенной ряд. Получено *локальное* условие однозначности аналитической функции в целом и доказаны теоремы сходимости рациональных аппроксимаций для соответствующих классов функций. Для широкого класса областей доказан принципиально новый критерий равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде: *голоморфность аппроксимаций в данной области влечет их равномерную сходимость внутри этой области*. На основе метода многоточечных аппроксимаций Паде решены узловые задачи, относящиеся к вопросу о скорости чебышевской рациональной аппроксимации аналитических функций, в частности, известная задача о скорости рациональной аппроксимации экспоненты на полуоси. Разработаны новые подходы, основанные на применении

векторных потенциалов и связанных с ними равновесных мер (метод векторных потенциалов), которые позволили изучить асимптотические свойства аппроксимаций Эрмита–Паде для систем функций марковского типа и доказать соответствующие теоремы сходимости.

Методы и результаты представленной работы существенно использовались и получили дальнейшее развитие в ряде последующих работ российских и зарубежных математиков.

Список публикаций

- [1] Гончар А. А., “О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями” // *Матем. сб.*, 1969, **78**, 640–654.
- [2] Гончар А. А., “Локальное условие однозначности аналитических функций” // *Матем. сб.*, 1972, **89**(1), 148–164.
- [3] Гончар А. А., “О сходимости аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1973, **92**(1), 152–164.
- [4] Гончар А. А., “Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных” // *Матем. сб.*, 1974, **93**(2), 296–313.
- [5] Гончар А. А., “Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки” // *Матем. сб.*, 1974, **94**(2), 265–282.
- [6] Гончар А. А., “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций” // *Матем. сб.*, 1975, **97**(4), 607–629.
- [7] Гончар А. А., “О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций” // *Матем. сб.*, 1975, **98**(4), 564–577.
- [8] Гончар А. А., “О скорости рациональных аппроксимаций некоторых аналитических функций” // *Матем. сб.*, 1978, **105**(2), 147–164.
- [9] Гончар А. А., Лопес Г., “О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1978, **105**(4), 512–524.

- [10] Гончар А. А., Лунгу К. Н., “Полюсы диагональных аппроксимаций Паде и аналитическое продолжение функций” // *Матем. сб.*, 1980, **111**(2), 279–292.
- [11] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа” // *Труды МИАН*, 1981, **157**, 31–48.
- [12] Гончар А. А., “Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций” // *Матем. сб.*, 1981, **115**(4), 590–613.
- [13] Гончар А. А., “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1982, **118**(4), 535–556.
- [14] Гончар А. А., “О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций” // *Труды МИАН*, 1984, **166**, 52–60.
- [15] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов” // *Матем. сб.*, 1984, **125**(1), 117–127.
- [16] Гончар А. А., “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде в сферической метрике.” // *Математические структуры — вычислительная математика — математическое моделирование*. София, 1984. **2**, 29–35.
- [17] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “О задаче равновесия для векторных потенциалов” // *УМН*, 1985, **40**(4), 155–156.
- [18] Гончар А. А., “Рациональные аппроксимации аналитических функций” // *Труды Международного конгресса математиков (США, Беркли, 1986)*, 1987, **1**, 739–748.
- [19] Гончар А. А., Рахманов Е. А., “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций” // *Матем. сб.*, 1987, **134**(3), 306–352.
- [20] Гончар А. А., Рахманов Е. А., Суетин С. П., “О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений” // *Труды МИАН*, 1991, **200**, 136–146.
- [21] Гончар А. А., Рахманов Е. А., Сорокин В. Н., “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для функций марковского типа” // *Матем. сб.*, 1997, **188**(5), 33–58.