Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Комментарии к моим работам, написанные мной самим, *Совр. пробл. матем.*, 2013, выпуск 17, 7–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm41>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:21:54

Комментарии к моим работам, написанные мной самим

А. А. Карацуба

Введение (от составителей¹). В середине 80-х годов Анатолий Алексеевич Карацуба сделал для себя сборник ксерокопий своих статей в хронологическом порядке в четырех томах и рукописные комментарии² к ним. Настоящая статья составлена из фрагментов этих (фактически дневниковых) записей: иногда авторский комментарий к той или иной работе приведен полностью, иногда частично (пояснения составителей даются в сносках, пропущенные строки обозначаются звездочками, пропущенные слова – точками).

В 1990–2000 гг. к некоторым комментариям А. А. Карацуба добавил короткие замечания по дальнейшему развитию темы (в настоящем тексте его комментариев эти более поздние замечания даются прописным шрифтом).

С 1954 г. по 1959 г. Анатолий Карацуба учился на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Первым его руководителем был Андрей Николаевич Колмогоров, у которого он защитил курсовую работу 3-го курса под названием “О вариациях функций двух переменных” и курсовую работу 4-го курса “Эксперименты с автоматами”. На основе “Экспериментов с автоматами” была написана первая статья А. А. Карацубы, с которой начинаются его комментарии.

А. А. Карацуба часто вспоминал свои студенческие годы, своих преподавателей и наставников – профессоров МГУ. Вспоминал прогулки на лыжах, которые А. Н. Колмогоров устраивал для своих учеников, для чего хранил на своей даче 20 пар лыж и 20 пар лыжных ботинок, а также по 20 пар тапочек и чашек для последующего чаепития с учениками.

Запись А. А. Карацубы от 19 ноября 1985 г.: “Слушая Кэтлин Ферриер³ (Шуман на немецком языке), вспомнил Комаровку⁴, Павла Сергеевича⁵ и Андрея Николаевича⁶, их музыкальные концерты после лыж. Необыкновенная атмосфера, ни с чем не сравнимо (и никогда, по-видимому, не повторится). Другое время, другое отношение к науке. Редкий прагматизм и карьеризм”.

Выбрав в качестве основного направления теорию чисел, в 1962 г. А. А. Карацуба защитил кандидатскую диссертацию “Рациональные тригонометрические суммы специального вида и их приложения” (руководитель – Николай Михайлович Коробов).

После защиты в 1966 г. докторской диссертации “Метод тригонометрических сумм и теоремы о среднем” А. А. Карацуба стал научным сотрудником Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (МИАН), которым в то время руководил Иван Матвеевич Виноградов. А. А. Карацуба всегда с восхищением относился к научным достижениям И. М. Виноградова. В [1] он писал о И. М. Виноградове: “Он решил проблему Гольдбаха, которая не поддавалась усилиям ученых в течение столетий, а метод тригонометрических сумм Виноградова коренным образом изменил лицо аналитической теории чисел и открыл новую эру в этой классической области математики”. Там же: “Опираясь на небольшое количество математических понятий и фактов, он настолько глубоко проникает в сущность стоящих проблем, что это дает ему возможность и создать необходимый аппарат для решения, и решить проблему”.

А. А. Карацуба всю жизнь вспоминал И. М. Виноградова и его высказывания по разным поводам. Из дневниковых записей А. А. Карацубы от 23 ноября 1983 г.: “Читаю-перечитываю (10–15 мин.) наши

¹ С. А. Гриценко, Е. А. Карацуба.

² Заглавие, выбранное А. А. Карацубой для его комментариев, напоминает об одной из его любимых книг: Д. Дефо, “Жизнь и удивительные приключения Робинзона Крузо, моряка из Йорка, прожившего двадцать восемь лет в полном одиночестве на необитаемом острове у берегов Америки близ устьев реки Ориноко, куда он был выброшен кораблекрушением, во время которого весь экипаж корабля кроме него погиб; с изложением его неожиданного освобождения пиратами, написанные им самим”.

³ Kathleen Mary Ferrier.

⁴ Деревня под Москвой, где находилась дача А. Н. Колмогорова.

⁵ Павел Сергеевич Александров.

⁶ Андрей Николаевич Колмогоров.

книжки по альпинизму. Они грызут гору (Яник Сеньер⁷ и др.), упорно, трудно, холодно; я грызу математику, и чувства такие же. Вот где схожесть гор и математики. Сколько раз пытался бросить (реальный ноль), но что-то останавливает. Прав был И. М.⁸, говоря, что заниматься задачей надо до тех пор, пока теплится надежда (хоть чуть-чуть), что получится результат”.

У Анатолия Алексеевича Карацубы была своя научная школа. Среди его аспирантов, защитивших кандидатские диссертации, были Г. Колесник⁹, С. Воронин¹⁰, Г. Архипов¹¹, В. Чубариков¹², М. Петечук¹³, В. Плаксин¹⁴, З. Рахмонов¹⁵, И. Джаббаров¹⁶, А. Лаврик¹⁷, С. Гриценко¹⁸, Г. Негматова¹⁹, Д. Толев²⁰, М. Королев²¹, М. Чанга²², И. Резвякова²³. А. А. Карацуба любил всех своих учеников, радовался каждому новому полученному ими результату, гордился их успехами, переживал вместе с ними их неудачи и потери²⁴.

В настоящей статье комментарии А. А. Карацубы касаются работ, выполненных до 1990 г. При этом в архиве не хватает комментариев к некоторым статьям третьего тома, а для четвертого тома найдена лишь одна страница комментариев (полный список научно-исследовательских работ А. А. Карацубы можно найти в [2]). Кроме того, в сборник, составленный А. А. Карацубой, не вошли его монографии (см. [3]–[11]). Не удалось найти полные имена некоторых упомянутых в тексте математиков. Приводятся только самые существенные ссылки. Однако даже в таком виде комментарии представляют собой интересный документ, который, возможно, окажется полезным математикам, работающим в области теории чисел и некоторых других областях чистой математики, а также в информатике²⁵.

⁷Yannick Seigneur.

⁸И. М. Виноградов.

⁹Григорий Абрамович Колесник. Эмигрировал в США еще в советские годы, став “невозвращенцем”, профессор Лос-Анжелесского университета, США.

¹⁰Сергей Михайлович Воронин. Профессор Московского педагогического государственного университета, ведущий научный сотрудник отдела теории чисел МИАН; умер в г. Москве в 1997 г.

¹¹Геннадий Иванович Архипов. Профессор МГУ, ведущий научный сотрудник отдела теории чисел МИАН.

¹²Владимир Николаевич Чубариков. Профессор МГУ, и.о. декана механико-математического факультета МГУ, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа.

¹³Михаил Михайлович Петечук. Научный сотрудник СКТВ “Квант” (Украина); умер в г. Ужгороде в 2001 г.
¹⁴Владимир Александрович Плаксин. Доцент кафедры теории вероятностей и анализа данных Петрозаводского государственного университета.

¹⁵Зарулло Хусейнович Рахмонов. Профессор Таджикского государственного университета, заведующий кафедрой алгебры и теории чисел ТГНУ, директор Института математики АН Республики Таджикистан.

¹⁶Ильгар Шикар оглы Джаббаров. Доцент в Гянджинском государственном университете, Азербайджан.

¹⁷Алла Александровна Лаврик. Ассистент математического факультета Цюрихского технического университета (ETH Zürich), Швейцария; умерла в г. Цюрихе в 2003 г.

¹⁸Сергей Александрович Гриценко. Профессор Белгородского государственного университета, заведующий кафедрой алгебры, теории чисел и геометрии БГУ.

¹⁹Гавхар Дехкановна Негматова. Директор колледжа в г. Душанбе, Республика Таджикистан.

²⁰Дойчин Иванов (Иванович) Толев. Профессор кафедры математического анализа факультета математики и информатики Софийского университета, Болгария.

²¹Максим Александрович Королев. Старший научный сотрудник отдела алгебры и теории чисел МИАН.

²²Марис Евгеньевич Чанга. Доцент Московского государственного университета геодезии и картографии.

²³Ирина Сергеевна Резвякова. Научный сотрудник отдела алгебры и теории чисел МИАН.

²⁴В настоящей статье А. А. Карацубы не всем ученикам уделяется одинаковое внимание, что связано с объективными причинами. В то время, когда была написана основная часть комментариев, ученик А. А. Карацубы Г. И. Архипов устраивался на работу в МИАН на должность старшего научного сотрудника (что тогда было исключительно трудно для математика, который еще не являлся доктором наук) и защищал докторскую диссертацию. Поэтому работам Г. И. Архипова уделяется большое внимание, с самыми высокими оценками его вклада. Известно, что А. А. Карацуба очень высоко оценивал вклад и потенциалы и других своих учеников, некоторых из которых он называл лучшими математиками своего поколения.

²⁵В то время как настоящая статья готовилась к печати, пришло известие о внезапной смерти Геннадия Ивановича Архипова.

А. А. Карацуба

1.

К томам N 1 - N 4

1987 г. Комментарии

к моим работам, написанные мной самим.

Постараюсь ответить на вопросы: как возникла задача, кто её поставил, что сделал лично я, что взял у других, какое развитие дальше получила работа, что из неё позднее вышло

1. Решение одной ^{гл. 1} задачи из теории конечных автоматов, УМН, 1960, т. XV, в. 3 (93), с. 157-159

Задача поставлена американским математиком - Муром; прочитал её в [1], и е. в сб. "Автоматы", 1956 г Весной 1957 г., после написания и защиты курсовой работы на 3-м курсе (курсовая написана под руководством академика Колмогорова А. Н., называлась "О вариациях функции двух переменных"; содержание её и сама она потеряна А. Н.; там, в частности, доказал какую-то теорему из теории размерности по-другому) А. Н. Колмогоров, который в это время очень активно занимался теорией информации, кибернетикой, дал летом прочитать статью Мура и подумав над её задачами. Очень долго не мог понять постановку задачи с "тёрками Эммином", пока не сообразил, что вместе с "Эммином" у экспериментатора ещё есть схема автомата (диаграмма работы). Задачу решил летом ⁽¹⁹⁵⁷⁾ в г. Грузин (Домна), под вымышленом. Решение было "сырое", но правильное. Осенью рассказал А. Н. Колмогорову;

Постараюсь ответить на вопросы: как возникла задача, кто ее поставил, что сделал лично я, что взял у других, какое развитие дальше получила работа, что из нее полезного вышло.

Том 1

1.1. “Решение одной задачи из теории конечных автоматов”, Успехи математических наук, т. 15, № 3(93) (1960), с. 157–159. Задача поставлена американским математиком Муром²⁶; прочитал ее в [12], т.е. в сборнике “Автоматы”, 1956 г. Весной 1957 г., после написания и защиты курсовой работы на 3-м курсе (курсовая написана под руководством академика А. Н. Колмогорова, называлась “О вариациях функций двух переменных”; содержание ее и сама она потеряна А. Н.²⁷; там, в частности, доказал какую-то теорему из теории размерности по-другому) А. Н. Колмогоров, который в это время очень активно занимался теорией информации, кибернетикой, дал на лето прочитать статью Мура и подумать над его задачей. Очень долго не мог понять постановки задачи с “черным ящиком”, пока не сообразил, что вместе с “ящиком” у экспериментатора еще есть схема автомата (диаграмма работы). Задачу решил летом 1957 г. в г. Грозном (дома²⁸), под виноградом. Решение было “сырое”, но правильное. Осенью рассказал А. Н. Колмогорову, в обсуждении принимал участие В. И. Арнольд²⁹ (дело было в Комаровке). Все в этой работе придумал я (кроме той леммы Мура, на которую я ссылаюсь).

В 1961 г. Хиббард³⁰ опубликовал в Америке работу, в которой по-существу переписал³¹ мою (с некоторыми обобщениями).

*** **

Весной 1958 г. эту работу я защитил как курсовую ...

Тогда же А. Н. Колмогоров сдал ее в УМН³²; он очень помог придать ей тот законченный вид, который она сейчас имеет.

Наши³³ “ученые” Барздин³⁴ и Трахтенброт³⁵ приписывают эти две мои теоремы Хиббарду (в своей книге³⁶). В более ранней книге (забыл автора, нашего) теорема названа³⁷ теоремой Мура–Карацубы. Сейчас наши университетские кибернетики ее так и называют.

Насколько мне известно, моя теорема является единственно точной (единственно точный нелинейный порядок оценки) в теории экспериментов с автоматами (т.е. не подлежащий уточнению результат). На эту тему много позже делал доклад в Берлине на Международном симпозиуме³⁸; поставил там задачу (см. № 2.6); не знаю, решил ли ее кто-либо.

1.2. “Проблема Тэрри для системы сравнений”, Математический сборник, т. 55, № 2 (1961), с. 209–220. Задачу поставил профессор Н. М. Коробов в 1958 г. в качестве дипломной работы. Решил ее я в 1959 г. В это время Н. М. Коробов доказал “теорему о среднем

²⁶Edward Forrest Moore.

²⁷А. Н. Колмогоров.

²⁸А. А. Карацуба родился и вырос в г. Грозном.

²⁹Владимир Игоревич Арнольд, однокурсник и коллега А. А. Карацубы.

³⁰Thomas Nathaniel Hibbard.

³¹Имеется в виду “повторил”; на справедливость такого мнения указывает тот факт, что в работе Хиббарда фигурирует в точности автомат, построенный Карацубой, хотя разновидностей таких автоматов можно придумать очень много.

³²Журнал “Успехи математических наук”.

³³В момент этой записи упомянутые авторы, как и А. А. Карацуба, жили в СССР.

³⁴Janis Barzdins.

³⁵Борис Авраамович Трахтенброт.

³⁶По-видимому, имеется в виду книга: Б. А. Трахтенброт, Я. М. Барздин, *Конечные автоматы. Поведение и синтез*, М.: Наука, 1970.

³⁷Эту теорему под названием теорема Мура–Карацубы можно найти, например, в книге: М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, Л. И. Розоноэр, И. М. Смирнова, А. А. Таль, *Логика. Автоматы. Алгоритмы*, М.: Физматгиз, 1963.

³⁸Симпозиум по дискретной математике и приложениям в математической кибернетике 1974 г. в Берлине.

для сравнений”, подобную теореме И. М. Виноградова³⁹. Метод доказательства также Виноградовский. Мне надо было получить асимптотическую формулу для числа решений “гибридной” системы уравнений – сравнений. Я выучил статью Хуа Ло-кена⁴⁰ (*Acta Sci. Sinica*, 1 (1952)), узнал, что такое точки первого и второго классов, как получается асимптотика, какую роль в этом играет теорема о среднем, и получил свою теорему. Работа в основном являлась учебной. После нее я мог решить любую аддитивную задачу типа проблемы Варинга–Тэрри⁴¹. Тогда же понял, что теорема Н. М. Коробова о среднем для этой системы и утверждение, тривиально следующее из теоремы о среднем И. М. Виноградова:

$$N_k(P) = \sum_{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n} J(0, \dots, 0, \lambda_{r+1}q, \dots, \lambda_n q) \leq J \sum_{\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n} 1,$$

для моих целей дают один результат.

Работа оказала большое положительное влияние на все мои последующие занятия теоремами о среднем и тригонометрическими суммами.

1.3. “Оценки тригонометрических сумм особого вида и их приложения”, Доклады АН СССР, т. 137, № 3 (1961), с. 513–514. Прочитал и понял статью И. М. Виноградова “Новая оценка $\zeta(1 + it)$ ”, *ИАН*⁴², 22 (1958), 161–164⁴³. Знал тематику А. Г. Постникова⁴⁴ об L -рядах с $\chi \pmod{p^n}$, $p \geq 3$ – постоянное. Понял, что Виноградовскую технику можно сюда перенести, что и сделал. Позднее это же делали Н. Г. Чудаков⁴⁵, В. Н. Чубариков⁴⁶ и (кажется) Г. Иванец⁴⁷. Позднее техника, которую я здесь разрабатывал, получила применение в других моих работах. Таким образом, это одна из первых работ по теме, которая родила p -адический метод.

1.4. “Умножение многозначных чисел на автоматах”, Доклады АН СССР, т. 145, № 2 (1962), с. 293–294 (совместно с Ю. Офманом⁴⁸). Задачу о сложности умножения двух n -значных чисел поставил А. Н. Колмогоров. Впервые ее я услышал в 1956 г. В частности, на одном из заседаний Московского математического общества о ней говорил Колмогоров (1956 г.). Тогда же он говорил о том, что в “чешской системе счисления”⁴⁹, т.е. в системе счисления остаточных классов, сложность умножения равняется $cn \log n$. А. Г. Витушкин⁵⁰ заметил, что если бы люди жили в этой системе счисления, то не было бы задачи Колмогорова; Колмогоров отметил, что система счисления возникла при измерениях, чтобы сравнивать величины, чего в “чешской системе счисления” сделать нельзя, так как по записи двух чисел в ней нельзя узнать, какое из них больше.

А. Н. Колмогоров думал, что нижняя оценка сложности есть $O(n^2)$, т.е. “человечество за много тысячелетий выбрало (создало) оптимальный способ умножения, которым мы пользуемся и сейчас”.

Эта задача всегда меня привлекала. Даже летом 1956 г. в г. Грозном я говорил о ней своему школьному учителю Н. А. Кузьменко⁵¹. Осенью 1960 г. А. Н. Колмогоров организовал

³⁹О теореме Виноградова “о среднем” см., например, [7; с. 90], см. также [11; с. 88].

⁴⁰Hua Lo-keng или Hua Luogeng. См. [13].

⁴¹Gaston Tarry. О проблеме Тэрри см., например, [7; с. 26], см. также [11; с. 20].

⁴²*Известия АН СССР. Серия математическая.*

⁴³См. [14].

⁴⁴Алексей Георгиевич Постников.

⁴⁵Николай Григорьевич Чудаков.

⁴⁶Владимир Николаевич Чубариков, ученик А. А. Карацубы.

⁴⁷Henryk Iwaniec.

⁴⁸Юрий Павлович Офман.

⁴⁹“Чешская система счисления”, аббревиатура CSS, была построена чешскими математиками Антонином Свободой и Мирославом Валахом в [15].

⁵⁰Анатолий Георгиевич Витушкин.

⁵¹Николай Акимович Кузьменко. Учитель математики и руководитель математического кружка в мужской средней школе № 6 г. Грозного.

семинар по кибернетике, на первом заседании которого повторил эту задачу (как и другие). Неделью я упорно думал над ней, стараясь получить оценку снизу $O(n^2)$. Разбил число на два блока и фантазировал. Вдруг увидел, что вместо нижней оценки $O(n^2)$ получается верхняя вида $O(n^{\log_2 3})$. Рассказал Н. М. Коробову (в МИАНе). Он как-то равнодушно отнесся к этому. После очередного заседания семинара рассказал А. Н. Колмогорову (на квартире у него). Он сначала не поверил, попросил тут же посмотреть В. М. Тихомирова⁵². Тихомиров подтвердил, что все правильно. А. Н. Колмогоров, по-видимому, очень огорчился. На очередном заседании семинара рассказал о моей работе, и на этом семинар прекратил работу (так расстроился Колмогоров). Затем он ездил по свету... в Англии рассказал этот результат Эрдешу⁵³, рассказывал многим⁵⁴ и, наконец, не сообщив мне, опубликовал (и, наверное, сам написал) эту заметку. Потом в СССР приезжал Штрассен⁵⁵... и сделал⁵⁶ на этой моей идее⁵⁷... умножение матриц⁵⁸. Чуть раньше мой результат уточнил А. Тоом⁵⁹ (ученик О. Б. Лупанова⁶⁰, а затем – И. И. Пятецкого⁶¹). На Западе эта тематика получила широкое развитие – быстрые вычисления (например, быстрое преобразование Фурье⁶² в идейном отношении близко к моей работе). Есть монография: Д. Кнут, *Искусство программирования*, т. 2, где (тенденционно) описана история возникновения быстрых вычислений⁶³.

*** **

Появился⁶⁴ т. 3 *Избранных трудов* А. Н. Колмогорова, 1987 г., М.: Наука; на с. 199 помещен его доклад на Международном математическом конгрессе в Стокгольме (1962 г.), в котором: “Обычный школьный рецепт умножения дает лишь

$$m(s) \asymp s^2,$$

а оценки Оффмана и Карацубы таковы:

$$s \asymp m(s) \asymp s^{\log_2 3}.$$

Таким образом, оценка Оффмана: $m(s) \asymp s$, т.е. тривиальность. Бред какой-то.

*** **

В 1967 г. (или около того) я сделал

$$M(n) = O(n \log n \log \log n \log \log \log n \dots \underbrace{(\log \log \dots \log n)^2}_r),$$

$r \geq 2$ любое; А. Н.⁶⁵ представил в ДАН⁶⁶ и спросил, можно ли отправить работу за границу (рукопись) своим друзьям-коллегам. Я согласился. Затем я обнаружил неточность, которая

⁵²Владимир Михайлович Тихомиров.

⁵³Pál Erdős.

⁵⁴Открытый А. А. Карацубой метод умножения явился первым быстрым методом, и само его открытие было удивительным сюрпризом для А. Н. Колмогорова и других специалистов в этой области.

⁵⁵Volker Strassen.

⁵⁶В 1969 г.; см. [16].

⁵⁷В той или иной мере все существующие быстрые алгоритмы используют идею А. А. Карацубы, по крайней мере в виде используемого в них быстрого умножения.

⁵⁸Обобщение идеи А. А. Карацубы с умножения чисел на умножение матриц технически нетривиально.

⁵⁹Андрей Леонович Тоом. См. статью: А. Л. Тоом, “О сложности схемы из функциональных элементов, реализующей умножение целых чисел”, *Докл. АН СССР*, **150**:2 (1963), 496–498.

⁶⁰Олег Борисович Лупанов.

⁶¹Илья Иосифович Пятецкий-Шапиро.

⁶²Первый алгоритм быстрого преобразования Фурье появился в 1965 г.

⁶³См. [17].

⁶⁴См. [18].

⁶⁵А. Н. Колмогоров.

⁶⁶*Доклады Академии наук СССР*; для публикации статьи в этом журнале требуется представление статьи одним из академиков по специальности.

достаточно просто исправлялась, забыл на индексы суммирования знак $\neq$ поставить, огорчился и забрал рукопись с представлением А.Н. Вскоре появилась⁶⁷ работа... с этим же алгоритмом, а в 1971 – ...новая работа⁶⁸ (с FFT⁶⁹).

*** **

1.5. “Аналог проблемы Варинга”, Вестник МГУ, № 1 (1962), с. 38–46. Был второй год аспирантуры. Н. М. Коробов спросил как-то, чем я хотел бы заниматься: продолжать тему А. Г. Постникова (L -ряды и т.п., что я уже сделал) или заняться конечными рядами Фурье и их приложениями к вычислению интегралов. Я выбрал первое. Мне нужны были задачи (темы) для кандидатской работы. Стал думать. Придумал эту задачу. Мысль такая: чем короче прогрессия (больше модуль сравнения; модуль может быть любой специфики), тем “ближе” сравнение к уравнению. Как задачу, так и решение ее придумал сам. Как потом заметил Н. М. Коробов, “на этой задаче можно учить круговому методу” (просто видно, где большие дуги и что они дают, а где малые). Эта статья – следующий шаг к p -адическому методу.

Осталась незамеченной.

1.6. “Распределение дробных долей многочленов специального вида”, Вестник МГУ, № 3 (1962), с. 34–38. Продолжение 1.5, т.е. “набирал” на кандидатскую. Поместил здесь оценку Н. М. Коробова (назвал прямо теорему).

1.7. “Проблема Варинга для сравнения по модулю, равному степени простого числа”, Вестник МГУ, № 4 (1962), с. 28–38. Задачу придумал летом 1961 г. в г. Грозном (опять под виноградом в саду, где решил задачу про автоматы). Думал о проблеме Варинга⁷⁰, об оценке $G(n)$, полученной И. М. Виноградовым. Придумал задачу и сразу же – решение. Главное – точный результат для аналога $G(n)$. В статье ясно видна идея p -адического метода (p -адическая метрика); помогла работа 1.5. Схема решения – Виноградовский метод оценки $G(n)$, только в p -адической форме. Эта работа и породила p -адический метод в том виде, который потом помог развить теорию кратных сумм и т.п. Эта работа породила также работу 1.8.

1.8. “О теореме о среднем”, Доклады АН СССР, т. 149, № 2 (1963), с. 245–248. Размышляя над работой 1.7 (ее идейной стороной; все время хотел и сейчас хочу найти истинный порядок $G(n)$ в проблеме Варинга), вдруг понял, что теорему о среднем И. М. Виноградова можно делать через сравнения (сдвиг в полной системе приводит к сравнениям). Это было весной (март) 1962 г. Сразу же написал доказательство. Рассказал Н. М. Коробову. Он стал ею заниматься также; сообщил, что может сделать какие-то улучшения в дзете и предложил опубликовать серию работ на эту тему (совместных). Первой и явилась эта статья (и последней). Я вставил фразу: “По основной идее эта работа близка к работе (3)”, т.е. к 1.7. Конечно, Н. М. Коробов внес положительный вклад в оформление этой работы; она получилась лаконичной, четкой. Вся техника этой работы (плюс находки и идеи Г. И. Архипова⁷¹) применяется в теории кратных сумм. Это – p -адический метод в теории тригонометрических сумм.

⁶⁷В Германии.

⁶⁸Арнольда Шёнхаге и Фолькера Штрассена, содержит алгоритм умножения с оценкой сложности

$$M(n) = O(n \log n \log \log n);$$

см. [19].

⁶⁹С использованием быстрого преобразования Фурье – Fast Fourier Transforms.

⁷⁰Edward Waring. О проблеме Варинга см., например, [7; с. 95], см. также [11; с. 94].

⁷¹Геннадий Иванович Архипов, ученик А. А. Карацубы.

На эту тему появилось много вариаций: С. Б. Стечкин⁷², Э. Бомбьери⁷³, К. Чандрасекхаран⁷⁴, Г. И. Архипов.

Доказательство этой теоремы (в основных технических чертах) совпадает с доказательством И. М. Виноградова с заменой леммы о попадании на лемму о полной системе сравнений. Эта лемма была раньше (1942 г.) сформулирована Ю. В. Линником⁷⁵. О ее существовании я не знал; доказательства ее также не было в печати. Ю. В. Линник также (1942 г.) дал⁷⁶ другое доказательство теоремы Виноградова, и также p -адическое. Но у него в системе уравнений неизвестные заранее имеют специальный вид; и в его доказательстве много неясных мест; оно может быть и ошибочным. Эту идею Линника нельзя провести в жизнь, создавая теорию кратных сумм. Я же пользуюсь существованием сдвига и с его помощью делаю систему сравнений. Тогда же я подчеркнул, что этот новый p -адический метод сводит (через теорему о среднем) вопрос об оценке коротких сумм к вопросу о полных суммах.

1.9. “Тригонометрические суммы специального вида и их приложения”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 28, № 1 (1964), с. 237–248. Задачу придумал сам, т.е. увидел, что если записывать Постниковский характер $(\bmod p^n)$ через $\exp$, а потом сделать p -адический сдвиг $x \rightarrow x + p^\lambda y$, то получим $\exp$ с показателем вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2p^{\lambda+1}x^2 + \dots + a_m p^{(\lambda+1)(m-1)}x^m$, где $(a_j, p) = 1$. Соответствующие суммы назвал L -суммами, оценил их с понижением вида c/r^2 , приложил к L -рядам Постникова. Насколько могу понять, это были первые оценки, точность которых возрастала вместе с возрастанием длины интервала суммирования. При оценках таких сумм пользовался идеей Виноградова, т.е. $x \rightarrow x + p^\lambda yz$, и понижением степени многочлена за счет выбора λ (эта идея идет от Гаусса, Вейля⁷⁷, Морделла⁷⁸, Виноградова, Харди⁷⁹–Литтлвуда⁸⁰ и была также у Коробова; см. работу 1.6). Позднее на эту тему несколько работ написал Н. М. Коробов, а когда он изучал суммы с $f(x) = g^x/p^n$, которые также являются L -суммами, то не сослался даже на мою работу.

1.10. “Приложение № 4” к книге Хуа⁸¹. 1964. Обзор. Изложение p -адического доказательства теоремы о среднем Виноградова, сформулированы результаты по суммам и дзете Н. М. Коробова и по суммам и L -рядам – мои (также аналог проблемы Варинга, т.е. работы 1.5, 1.7).

1.11. “О системах сравнений”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 29, № 4 (1965), с. 935–944. Н. М. Коробовым на Съезде⁸² (4-м) в Ленинграде (1961 г.) была поставлена задача об оценке сверху для числа решений системы сравнений – аналог теоремы о среднем Виноградова, но для сравнений. Я постоянно размышлял над ней. В общем виде решить ее не смог. Но построил модули, для которых эта задача решается с нужным ответом. Этому и посвящена работа. Статья послужила также источником другой – 1.14. Отрабатывался p -адический метод.

1.12. “Об оценке числа решений некоторых уравнений”, Доклады АН СССР, т. 165, № 1 (1965), с. 31–32. Стал думать над проблемой Варинга и оценкой $G(n)$. Ясно, что надо было иметь правильную оценку для $I_{k,n}(P)$ – числа решений уравнения

$$x_1^n + \dots + x_k^n = y_1^n + \dots + y_k^n, \quad 0 < x_i, y_i \leq P.$$

⁷²Сергей Борисович Стечкин.

⁷³Enrico Bombieri.

⁷⁴Komaravolu Chandrasekharan.

⁷⁵Юрий Владимирович Линник.

⁷⁶См., например, [7; с. 133–134], см. также [11; с. 133–134].

⁷⁷Hermann Klaus Hugo Weyl.

⁷⁸Louis Joel Mordell.

⁷⁹Godfrey Harold Hardy.

⁸⁰John Edensor Littlewood.

⁸¹Хуа Ло-кен. См. [20].

⁸²По-видимому, имеется в виду Четвертый всесоюзный математический съезд 1961 г.

Поставил себе задачу: получить при заданном k возможно лучшее понижение. Это и сделано. Доказана также аналогичная оценка для “выщербленной” системы уравнений.

1.13. “Системы сравнений и уравнения Варинговского типа”, Доклады АН СССР, т. 165, № 2 (1965), с. 274–276. Продолжение работы 1.12. Работы 1.12, 1.13 только в последние годы⁸³ получили развитие (я + Г. И. Архипов → новая оценка интеграла И. М. Виноградова).

1.14. “Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 30, № 1 (1966), с. 183–206. Пытаясь решить задачу Н. М. Коробова об $N_{k,n}$ (см. работу 1.11), придумал задачу об $N_{k,n}(q_1, \dots, q_n)$ для “почти всех” $q_1, \dots, q_n$ и решил ее. Обнаружилась удивительная связь: тех оценок для “выщербленных” систем уравнений, которые были получены мной на основе разработанного метода, хватало для решения этой задачи (для “почти всех”). Эта связь и этот эффект еще ни мной, ни кем другим до конца не осознан, хотя уже много получено из раздумий над этим (Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков). Н. М. Коробов своих учеников на это направление “пускал”, но не знаю, что они придумали (В. Быковский⁸⁴, Соколинский⁸⁵). В работе используется лемма 4 (Хуа) для выделения главного члена, которая затем “заиграла” во многих работах (Чубариков, Архипов, Митькин⁸⁶ и др.). На Западе этой работы не знают (нет никаких сведений на этот счет).

Над ней стоит еще раз задуматься!

1.15. “Асимптотические формулы для некоторого класса тригонометрических сумм”, Доклады АН СССР, т. 169, № 1 (1966), с. 9–11. Размышляя над проблемой Варинга, $G(n)$, решил получить асимптотику для тригонометрических сумм специального вида (т.е. хотел понять, как они себя ведут; пусть имеют частный вид, но зато на полном диапазоне длины – от самых коротких до самых длинных). Теорема 1 сформулирована неправильно – главный член несколько другой (нет второго слагаемого, см. работу 1.22), хотя следствие из нее – правильное (оценка суммы). Обобщение этой работы было сделано Н. М. Коробовым⁸⁷ (даже не теоремы, а следствия из нее, т.е. получены оценки); он вместо $f(x) = ax^n$ рассмотрел $f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x$ с теми же результатами (опубликовано в *Матем. заметках*).

Таким образом, эта работа – начало теории правильного поведения модуля тригонометрической суммы в зависимости от длины суммирования.

1.16. “Метод тригонометрических сумм и теоремы о среднем”, Математические заметки, т. 1, № 1 (1967), с. 99–110. Реферат докторской диссертации, защищенной в МИАНе (1966 г.), оппоненты И. М. Виноградов, Н. Г. Чудаков, А. И. Виноградов⁸⁸. Постановки задач в диссертации и результаты.

1.17. “Об оценках полных тригонометрических сумм”, Математические заметки, т. 1, № 2 (1967), с. 199–208. Есть суммы (полные с простым модулем), которые оцениваются лучше, чем по методу А. Вейля⁸⁹. Класс таких сумм был обнаружен А. Г. Постниковым (из устных сообщений) и опубликован Н. М. Акулиничевым (учеником А. Г. Постникова). Я стал думать над этим; нашел еще много таких сумм. Далее “почти все” суммы оцениваются $\leq \sqrt{np}$. Будет ли так для “всех”? Этот вопрос поставил я и придумал ответ – решение для больших $n \asymp p/\ln p$ (отрицательный ответ). Там же поставил задачу: уменьшить значение n

⁸³Написано в 1985 г.

⁸⁴Виктор Алексеевич Быковский.

⁸⁵Владимир Зиновьевич Соколинский.

⁸⁶Дмитрий Алексеевич Митькин.

⁸⁷По-видимому, имеется в виду статья: Н. М. Коробов, “Двойные тригонометрические суммы и их приложения к оценке рациональных сумм”, *Матем. заметки*, 6:1 (1969), 25–34.

⁸⁸Аскольд Иванович Виноградов.

⁸⁹André Weil.

в моей теореме. До сих пор никто результата не усилил, хотя появился ряд статей (Д. А. Митькин, С. А. Степанов⁹⁰ + А. Г. Постников), где обобщается мой результат и дается (другое?) доказательство (для сумм символов Лежандра).

Сейчас я думаю, что если $n \leq p^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $p \rightarrow +\infty$, то уже должна быть нетривиальная оценка полной суммы с многочленом в экспоненте; p – простое число. Однако совсем неожиданно для меня в конечных полях моя гипотеза (тривиальность оценки при $n > q^{0.5+\varepsilon}$) оправдалась; это сделал в 1986 г. В. Зиновьев⁹¹, и это идет из теории кодирования! Неисповедимы пути Господни!

В этой же работе доказал ряд тождеств между суммами Гаусса и суммами с многочленами в экспоненте (теорема 5). Позднее Н. М. Коробов опубликовал половину этой теоремы (связь между суммами Гаусса и суммами с показательной функцией) без ссылок на мою теорему...

*** **

1.18. “Об одной системе неопределенных уравнений”, Математические заметки, т. 4, № 2 (1968), 125–128. В статье даю равномерную оценку интеграла J (И. М. Виноградова), которая обычно применяется при оценках сумм Г. Вейля, и даю также равномерную оценку суммы Г. Вейля по старшему коэффициенту. Работа – непосредственное продолжение работы 1.8 и, конечно, работ И. М. Виноградова по оценкам сумм Г. Вейля.

1.19. “Об одной асимптотической формуле”, Труды московского математического общества, т. 18 (1968), с. 77–82. Задачу поставил сам; она продолжает работы 1.5, 1.7, 1.15. Как и в работе 1.15, допущена ошибка (лемма 4), хотя следствие – правильное (как и теорема статьи). Когда американцы переводили⁹² эту статью, послал им исправления. Они их учли, и появился перевод 1.20.

1.20. “On an asymptotic formula”. Перевод 1.19 с моими исправлениями.

1.21. “Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях”, Доклады АН СССР, т. 180, № 6 (1968), с. 1287–1289. Делал доклад на семинаре А. О. Гельфонда⁹³ по работе Д. Берджесса⁹⁴ о его оценке суммы характеров; был 1967 г. Придумал новое доказательство теоремы Берджесса: сдвиг $x \rightarrow x + yz$ и $x \rightarrow xy^{-1} + z$. Рассказал в МИАНе Н. М. Коробову. Его (как всегда) увлекла эта идея, он стал активно заниматься и даже (как сказал он) получил улучшение (оказалось – ошибочно, так как на этой идее Берджесс все получил). Так как ничего нового я сразу не мог получить, то никакой статьи не публиковал. Затем сразу появилось две статьи о суммах характеров в конечных полях: Берджесса и Дэвенпорта⁹⁵–Льюиса⁹⁶, где результат Берджесса переносился на поле степени 2 и, со значительным ухудшением, на поле степени $n \geq 2$. Я сразу же сделал для любой степени $n \geq 2$. Эту идею (дословно) потом использовал Берджесс в своей статье⁹⁷... Развитие идеи этой работы позволило получить мне все результаты с суммами характеров с простыми числами (см. ниже). Часто излагаю это в лекциях; Л. П. Постникова⁹⁸ также читала где-то.

⁹⁰Сергей Александрович Степанов.

⁹¹Виктор Александрович Зиновьев. См., например, статью: В. А. Зиновьев, С. Н. Лицын, “Нижние оценки полных рациональных тригонометрических сумм”, *УМН*, **43**:1(259) (1988), 199–200.

⁹²Журнал “Труды ММО”, как и другие ведущие математические журналы СССР и России, выходит в двух вариантах, сначала на русском языке, а затем в переводе на английский.

⁹³Александр Осипович Гельфонд.

⁹⁴David A. Burgess.

⁹⁵Harold Davenport.

⁹⁶Donald John Lewis.

⁹⁷По-видимому, имеется в виду статья: D. A. Burgess, “A note on character sums over finite fields”, *J. Reine Angew. Math.*, **255** (1972), 80–82.

⁹⁸Людмила Петровна Постникова.

1.22. “О тригонометрических суммах”, Доклады АН СССР, т. 189, № 1 (1969), с. 31–34. Продолжение работы 1.15. Исправлена теорема и лемма из работы 1.15 и доказана новая теорема 1 об асимптотической формуле для почти всех сумм $S(a; P, q)$ определенного класса. Приложений (работа) пока не нашла, хотя думал вставить в проблему Варинга.

1.23. “О суммах характеров с простыми числами”, Доклады АН СССР, т. 190, № 3 (1970), с. 517–518. На основе идеи работы 1.21 получена новая оценка суммы характеров от последовательности сдвинутых простых чисел, не тривиальная при длине $\geq q^{0.5+\varepsilon}$. Задача придумана И. М. Виноградовым (как применение его метода оценок сумм с простыми числами). Кроме И. М., никто серьезно этой проблематикой не занимался. Ю. В. Линник надеялся применить это к квазиримановой гипотезе (и для L -рядов), но ничего не вышло. У И. М. оценка не тривиальна при длине $\geq q^{0.75+\varepsilon}$.

*** **

1.24. “Об оценках сумм характеров”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 34, № 1 (1970), с. 20–30. Работа является продолжением работы 1.21. В этой проблематике важно иметь не только нетривиальные оценки возможно более коротких сумм характеров, но также и по возможности более точные оценки пусть более длинных сумм (для теории L -рядов). Аналогичная работа есть у Берджесса. Я сделал это для конечных полей. Стоило бы продолжать это направление; никто этого не делал⁹⁹ (может быть, в Англии было?).

1.25. “Суммы характеров с простыми числами”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 34, № 2 (1970), с. 299–321. Подробное изложение (с полными доказательствами) работы 1.23. Начало целой серии работ по оценкам сумм слагаемых вида $\chi(p+k)$. Надо внимательно все посмотреть и подумать над новыми приложениями этих результатов. Такая техника и такие идеи должны дать что-то хорошее (кроме того, что уже есть).

1.26. “Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях”, Доклады АН СССР, т. 192, № 4 (1970), с. 724–727. Задачу придумал я, хотя (как потом узнал, мне написал об этом М. Ютила¹⁰⁰) она уже была у Ю. В. Линника, М. Ютилы и других – гольдбаховы числа в арифметических прогрессиях. Задача придумана на такую идею: рассмотрим сравнение $uv + p \equiv l(D)$. Тогда число J его решений равно

$$J = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi} \sum_{u,v} \chi(uv) \sum_p \chi(l-p).$$

Выделяя главный член, остаток R оценим так:

$$|R| \ll \max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_p \chi(l-p) \right| \left| \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi} \left| \sum_u \chi(u) \right|^2 \right|,$$

т.е. “бинарная” задача решается по схеме тернарной (пользуемся мультипликативностью задачи). Эту идею с блеском применил М. М. Петечук¹⁰¹ в задаче суммы $\tau_k(n)$, $n \equiv l \pmod{p^k}$, $p \geq 3$ фиксированное (его кандидатская диссертация¹⁰²). Совсем недавно (1985 г.) Г. Иванец и Дж. Фридлендер¹⁰³ эту идею также использовали в задаче $\sum \tau_k(n)$, $n \equiv l \pmod{D}$; Иванец знал о ней от нас; был у нас на семинаре, и М. Петечук об этом рассказывал. . .

⁹⁹Написано в 1985 г.

¹⁰⁰Matti Jutila.

¹⁰¹Михаил Михайлович Петечук, ученик А. А. Карацубы.

¹⁰²См., например, статью: М. М. Петечук, “Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечетного простого числа”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 892–908.

¹⁰³John Benjamin Friedlander.

Идея очень красивая; она “заиграла” и в других задачах (типа “большого решета”), но пока яркого ничего (кроме работы Петечука) нет. Надо бы еще подумать!

1.27. “Распределение степенных вычетов и невычетов в аддитивных последовательностях”, Доклады АН СССР, т. 196, № 4 (1971), с. 759–760. Задачу придумал сам. Задача на идею двойных сумм $\chi(u+v)$ с возможностью представить v в виде $v = xu$ и затем $\chi(ux^{-1} + y)$, т.е. продолжение все той же идеи из 1.21.

Следовало бы продолжить это!

1.28. “Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 35, № 3 (1971), с. 469–484. Продолжение исследований, начатых (и придуманных) И. М. Виноградовым с применением идеи работы 1.21 и ниже. Удалось не только “укоротить” длину суммы, но и снять ряд ограничений, которые раньше были. В лемме 5 применил такое соображение: умножая обе части сравнения вида $a(\dots) \equiv B \pmod{D}$ на подходящее b , делал число ab , $ab(\dots) \equiv bB \pmod{D}$, $ab \equiv c \pmod{D}$, $c \leq \sqrt{D}$, т.е. “загонял” неудобные числа в “малый” интервал. Работа в техническом отношении сложная, но хорошо отработана. Тема и результаты – наши, нашей школы теории чисел.

1.29. “Об одной арифметической сумме”, Доклады АН СССР, т. 199, № 4 (1971), с. 770–772. Задачу придумал я. Задача на применение идеи работы 1.26 плюс оценки сумм характеров специального вида. Продолжений не видел.

Следовало бы продолжить!

1.30. “Оценки тригонометрических сумм методом И. М. Виноградова и их применения”, Труды МИАН СССР, т. 112, 1971, с. 241–255. Давно была задумка написать статью об оценке тригонометрических сумм с $F(x)$, зная поведение $F^{(k)}(x)$, $k = k_1, \dots, k_r$. Оценка была, но не было приложений. Посмотрел Е. К. Титчмарша¹⁰⁴ “Теорию дзеты”¹⁰⁵, нашел высокие моменты и проблему делителей Дирихле. Увидел, что из оценки И. М. Виноградова дзеты вида

$$\zeta(\sigma + it) = O(|t|^{c(1-\sigma)^{3/2}} \log |t|), \quad |t| \geq 2,$$

можно сильно улучшить упомянутые результаты (моменты и Дирихле¹⁰⁶). Доказательства очень простые, но результаты впечатляют. Так появилась статья. Еще в ней есть оценка суммы с быстро растущей $F(x)$. Результаты статьи, идеи ее и продолжение исследований были у нас (Ёдгоров¹⁰⁷, Пантелеева¹⁰⁸), в Японии, в Югославии (Ивич¹⁰⁹) и др. В 1985 г. А. Ивич прислал книгу “The Riemann zeta function”, 1985 г. издания¹¹⁰. В ней на с. 382 говорится о статье Н. Е. Рихерта¹¹¹, “Einführung in die Theorie der Starken Rischschen Summierbarkeit von Dirichletreihen”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.* (1960), 17–75, где получен результат

$$\Delta_k(x) = O(x^{\alpha_k + \varepsilon}), \quad \alpha_k \leq 1 - Ck^{-2/3},$$

и написано, что я его передоказал в 1971 г., т.е. в настоящей работе. Я посмотрел статью Рихерта. Действительно, там есть этот результат, но о нем, по-видимому, никто никогда не знал. И доказан он на 60 страницах, у меня же – на трех страницах. Мою работу сразу же

¹⁰⁴Edward Charles Titchmarsh.

¹⁰⁵См. [21].

¹⁰⁶То есть оценку остаточного члена в асимптотической формуле для суммы функций $\tau_k(n)$, $n \leq x$, где $\tau_k(n)$ – число представлений n в виде произведения k сомножителей.

¹⁰⁷Ж. Ёдгоров.

¹⁰⁸Елена Ивановна Пантелеева-Деза.

¹⁰⁹Aleksandar Ivić.

¹¹⁰По-видимому, имеется в виду книга: А. Ивич, “The Riemann Zeta-Function”, John Wiley and Sons, New York, 1985.

¹¹¹Hans-Egon Richert.

стали уточнять, развивать, о работе же Рихерта не было никаких упоминаний. Наверное, делал он “через голову”, моя же идея очень проста: оценка дзеты в окрестности прямой $\text{Re } s = 1$ используется прямо и только.

Таким образом, нечаянно обидел Рихерта, не сослался на него, так как не знал работы. При первом же удобном случае надо исправить эту оплошность.

Исправил (1995, Springer).

Говорил с Рихертом об этом в Обервольфахе¹¹²; в издании Springer-Verlag моего учебника¹¹³ “Основы аналитической теории чисел, 2-е изд.”, в задачах указан результат Рихерта и его работа.

1.31. “Проблема делителей Дирихле в числовых полях”, Доклады АН СССР, т. 204, № 3 (1972), с. 540–541. Посмотрел, куда еще можно применить идеи работы 1.30. Прочитал работу Э. Ландау¹¹⁴ 1912 г. и все результаты ее усилил соответствующим образом.

1.32. “Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 36, № 3 (1972), с. 475–483. Задачу (равномерную оценку остатка) придумал сам. Хотел через получаемую асимптотику вывести асимптотический закон распределения простых чисел. Сама работа получилась интересной. Нашла применения также лемма 1 в других работах (на нее ссылаются). Ее в основном и цитируют на Западе.

1.33. “О некоторых проблемах теории простых чисел, связанных с методом И. М. Виноградова”, Труды МИАН СССР, т. 132, 1973, с. 257–261. Доклад, прочитанный мной на пленарном заседании Международной конференции 1971 г., посвященной 80-летию И. М. Виноградова. Передо мной доклад читал Э. Бомбьери. С идейной стороны отображен метод Виноградова оценок сумм слагаемых $\chi(p+k)$ и полученные здесь результаты. Все это очень понравилось Ю. В. Линнику.

1.34. “Об оценках снизу сумм характеров от многочленов”, Математические заметки, т. 14, № 1 (1973), с. 67–72. Продолжение (перенесение на суммы символов Лежандра) работы 1.17. Был ряд “продолжателей” (Д. А. Митькин, С. А. Степанов), которые ничего нового не сделали. Совсем недавно В. Зиновьев получил в конечных полях то, что я хотел: полная сумма почти тривиально оценивается, если $n = q^{0.5-\varepsilon}$. Сама же моя гипотеза для полей степени 1, наверное, не верна. Думаю, что если $f \not\equiv g^2 \pmod{p}$, степень f равна $n \leq p^{1-\varepsilon}$, $p \rightarrow \infty$, то $\sum_{x=1}^p (f(x)/p) = \bar{0}(p)$; p – простое число.

Может, все это пригодится в теории кодов; по крайней мере В. Зиновьев и другие этим активно занимаются и смотрят как “кодировщики”.

Сейчас (1997 г.) Л. А. Бассальго¹¹⁵ и В. А. Зиновьев в конечных полях получили, что оценка А. Вейля является точной, т.е.

$$|S| = (n-1)\sqrt{q}.$$

Сумма в конечном поле сводится к обычной прямой сумме с квадратным многочленом в экспоненте, последняя же точно вычисляется (сумма Гаусса) и получается точный результат.

¹¹²Математический исследовательский институт на юге Германии, где проводятся математические конференции по отдельным дисциплинам; А. А. Карацуба посещал Обервольфах в 1986 г., в 1988 г. и в 1991 г.

¹¹³См. [8].

¹¹⁴Edmund Landau. По-видимому, имеется в виду работа Е. Landau, “Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, **6** (1912), 687–771.

¹¹⁵Леонид Александрович Бассальго. См., например, статью: Л. А. Бассальго, В. А. Зиновьев, “Многочлены специального вида над конечным полем с максимальным модулем тригонометрической суммы”, *УМН*, **52:2(314)** (1997), 31–44.

Том 2

2.1. “Среднее значение модуля тригонометрической суммы”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 37, № 6 (1973), с. 1203–1227. В одном из разговоров с С. Б. Стечкиным возник вопрос об упрощенной верхней границе J , равномерной по всем параметрам. Насколько помню, мечтой С. Б. Стечкина и была оценка¹¹⁶ (2)...

В работе есть несколько интересных соображений, в частности лемма 9, теорема 2. Позднее соображения, примененные при доказательстве теоремы 3, были использованы Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым в работах по теории кратных сумм.

*** **

2.2. “Суммы характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их применения”, Математические заметки, т. 17, № 1 (1975), с. 155–159. Доклад, который я прочитал на Всесоюзной конференции по теории чисел в Вильнюсе (май, 1974 г.). История оценок сумм характеров, арифметические задачи, связанные с этим, задачи И. М. Виноградова, его гипотезы, последние достижения, мои результаты. Объяснены идейные истоки, позволившие продвинуться в этих вопросах.

2.3. “О некоторых проблемах современной аналитической теории чисел”, Математические заметки, т. 17, № 2 (1975), с. 341–350. Доклад, который я прочитал на годичном собрании Отделения математики АН СССР (зима, 1974 г.). Здесь рассказано о многомерной проблеме делителей Дирихле, моих результатах, а также о работе 2.2.

2.4. “О некоторых арифметических задачах с числами, имеющими малые простые делители”, Acta Arithmetica, Vol. 27 (1975), p. 489–492. Этот том был посвящен памяти Ю. В. Линника. В статье сформулированы теоремы, которые продолжают исследования Линника. Эти теоремы я неоднократно обсуждал с Линником, который хорошо понимал арифметику проблемы Варинга и все, что с ней связано. Развитие этой тематики неожиданно проявилось в моей работе 3.19.

2.5. “Тригонометрические суммы и их применения”, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, 1974), Vol. 1, 1975, p. 365–368. Доклад, который ... я не смог прочитать, так как не был в Ванкувере. Короткое общее соображение о задачах типа задач работы 2.4 и идейные истоки, позволившие продвинуться в многомерной проблеме делителей.

2.6. “Experimente mit Automaten”, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, Band 11 (1975), 611–612. Короткий доклад по моей работе 1.1; хотел еще раз подчеркнуть, что задачу решил я... Там же сформулировал задачу: получить нижнюю оценку вида

$$f_A(n, 2, 2) \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1.$$

Доклад прочитан в Берлине (первый раз был за границей) на международном симпозиуме по кибернетике¹¹⁷. Решена ли моя задача – не знаю.

¹¹⁶То есть оценка

$$J = J_{k,n}(P) \leq e^{cn^3 \log n} P^{2k - (n^2 + n)/2},$$

где J – интеграл Виноградова, $n \geq 2$, $P \geq 1$, $k \geq c_1 n^2 \log n$ и $c > 0$, $c_1 > 0$ – абсолютные постоянные.

¹¹⁷International Symposium “Diskrete Mathematik und Anwendungen in der Mathematischen Kybernetik”, Berlin, 1974.

2.7. “Berechnungen und die Kompliziertheit von Beziehungen”, Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, Band 11 (1975), s. 603–606. См. работу 2.6. Рассказал о проблематике быстрых вычислений, о том, что основной идейный толчок в этой области был дан моей работой 1.4, что затем только развивали мою идею, не внося принципиально новых соображений. . . , о работах Ю. В. Бендерского¹¹⁸ (деление, извлечение корня) и сформулировал задачу о быстром вычислении (простейших) трансцендентных функций. С помощью АГС¹¹⁹ задачу решил Р. Брент¹²⁰ (R. P. Brent, “Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions”, *ACM*, **23:2** (1976), 242–251), причем как само собой разумеющееся говорил о задаче (хотя четко она была поставлена у меня и Бендерского¹²¹), об итеративном методе (все из моего доклада), но не сослался на мой доклад¹²².

*** **

Вся тематика быстрых вычислений грешит такими “ссылками”.

*** **

Принципиально новый метод (метод БВЕ¹²³) и принципиально новые результаты получены здесь Е. А. Карацубой (1989–2002 гг.). Все опубликовано, реализовано в виде программ.

2.8. “Об одной системе сравнений”, Математические заметки, т. 19, № 3 (1976), с. 389–392. В. Н. Чубариков (был аспирантом) сдавал отчет по работам Ю. В. Линника; рассказывал (меня в то время интересовала проблема Гильберта–Камке¹²⁴, которую потом решил Г. И. Архипов) работу¹²⁵ Линника из *УМН*, **14:3** (1959), 153–160; был при этом С. М. Воронин¹²⁶. Вдруг видим ошибку в работе Линника. Исправить не можем, и на этой ошибке принципиально построено все доказательство. Даю Чубарикову месяц-два на исправление, на то, чтобы нашел правильное доказательство. Не получилось. Злюсь, ругаю его. Решил сам посмотреть, шел из МИАНа рассерженный на Володю, на задачу; около угла к автобусу № 57 сообразил, как ее сделать. Дома все оформил; правильно. Так появилась теорема. Ее чуть уточнил (константу) К. К. Марджанишвили¹²⁷. Г. И. Архипов (а потом В. Н. Чубариков) пользовались ею и ее идеями в своих исследованиях по Гильберту–Камке и простым числам.

2.9. “О распределении значений неглавных характеров”, Труды МИАН СССР, т. 142 (1976), с. 156–164. Издавали сборник, посвященный 85-летию И. М. Виноградова. Мне хотелось написать статью, прямо продолжающую исследования И. М. Посмотрел его работы; увидел $\chi(w + k)$, $w = p_1 \cdots p_r$. Сделал подобно работам 1.23, 1.25, 1.26, 1.28. Техника и идеи – из этих же работ. В 1985 г. Гавхар Негматова¹²⁸ продолжила эти работы (*Докл. АН Тадж. ССР*, **28:4** (1985), 193–197), защитила кандидатскую диссертацию.

¹¹⁸Юрий Викторович Бендерский, ученик А. А. Карацубы, написавший под его руководством дипломную работу на механико-математическом факультете МГУ; в настоящее время живет и работает в г. Иерусалиме.

¹¹⁹Метод АГС – это метод арифметико-геометрических средних Гаусса.

¹²⁰Richard Pierce Brent.

¹²¹См. статью: Ю. В. Бендерский, “Быстрые вычисления”, *Доклады Академии Наук СССР*, **223:5** (1975), 1041–1043.

¹²²Доклад был сделан А. А. Карацубой в 1974 г. в Берлине на международном симпозиуме “Diskrete Mathematik und Anwendungen in der Mathematischen Kybernetik”.

¹²³Метод БВЕ – это метод быстрого вычисления E -функций, который дает возможность вычислять E -функции Зигеля и, в частности, $\exp(x)$ для любого аргумента x со сложностью, близкой к оптимальной.

¹²⁴Проблемой Гильберта–Камке называется круг задач, связанных с исследованием вопроса об одновременном представлении натуральных чисел суммами ограниченного числа натуральных слагаемых соответствующего вида. David Hilbert. Erich Kamke. См. статьи: D. Hilbert, “Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n -ter Potenzen (Waring’sches Problem)”, *Math. Ann.*, **67** (1909), 281–300; E. Kamke, “Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes”, *Math. Ann.*, **83:1-2** (1921), 85–112.

¹²⁵Имеется в виду работа: Ю. В. Линник, “Некоторые замечания об оценках тригонометрических сумм”, *УМН*, **14:3**(87) (1959), 153–160.

¹²⁶Сергей Михайлович Воронин, ученик А. А. Карацубы.

¹²⁷Константин Константинович Марджанишвили.

¹²⁸Гавхар Дехкановна Негматова, ученица А. А. Карацубы.

2.10. “Верхняя граница модуля кратной тригонометрической суммы” (совместно с Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым), Труды МИАН СССР, т. 143 (1977), с. 3–31. Это 2-й том к 85-летию И. М. Виноградова. Г. И. Архипов своей работой¹²⁹ (*Матем. заметки*, 17:1 (1975), 143–153) положил начало теории кратных тригонометрических сумм (КТС). Задачу построения такой теории поставил я; ее решил Г. И., причем первые свои сообщения он так плохо делал (на моем семинаре), что я долго не мог понять и поверить, что все правильно. Потом понял. Г. И. и В. Н.¹³⁰ опубликовали совместную работу по КТС в ИАН¹³¹ (1976 г.). Стали поступать сообщения, что в эту тематику встречается Н. М. Коробов (как всегда!) и вставляет еще свою ученицу. Боясь, что все “уплывет”, если активно не заняться КТС, я предложил Г. И. и В. Н. вместе заняться этой темой и написать совместную статью. Так появилась эта работа. Она очень “сырая”. Большую ее часть написал В. Н., я и Г. И. только “контролировали”. В ней немало огрехов; в частности, обозначение на с. 4 ($\sum \cdots \sum$), придуманное “не от хорошей жизни” и переписанное затем “последователями”. Тем не менее статья была первой в серии работ, составивших фундамент теории КТС. В ней есть ряд оригинальных утверждений.

2.11. “Распределение значений символов Лежандра от многочленов с простыми числами”, Доклады АН СССР, т. 238, № 3 (1978), с. 524–526. Занимаясь суммами характеров, постоянно думал о сдвиге $x \rightarrow x + yz \rightarrow xy^{-1} + z$. Пытался воспользоваться этим, чтобы оценить короткую сумму $\sum_x \chi(f(x))$, f – многочлен; ничего это не дало; однако когда посмотрел $\sum_{p \leq Y} \chi(f(p))$, то получилась нетривиальная оценка при $Y \geq q^{0.75+\varepsilon}$ (т.е. длина меньше q и ровно то, что было у И. М. для $\chi(p+k)$); правда, оценка из гипотезы, еще не доказанной. Без всяких гипотез, т.е. безусловный, результат получен для f второй степени. На это также мне указал в письме А. И. Виноградов. Получился ряд арифметических следствий.

Считаю эту работу одной из лучших во всей теории характеров.

2.12. “Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 42, № 2 (1978), с. 315–324. Подробное изложение работы 2.11. Перенесена Г. Негматовой на $w = p_1 \cdots p_k$. Очень важная и хорошая тема и работа.

2.13. “Об интеграле И. М. Виноградова” (совместно с Г. И. Архиповым), Доклады АН СССР, т. 239, № 4 (1978), с. 764–765. Была моя старая идея делать теорему о среднем для малых k . Прикидки давали что-то новое. Предложил Г. И. посмотреть эту идею внимательно. И вдруг он заявляет, что получается

$$P^k \ll J \ll P^{k(1+\varepsilon)}, \quad 1 \leq k \leq \varepsilon^2 n^2.$$

Для меня это было полной неожиданностью. Вместо P^{2k-ck} , $c < 1$, c – постоянная, получилось $c = 1 + O(\varepsilon)$. Мы с Г. И. Архиповым опубликовали статью; развивали далее эту идею. Позднее ученик Н. М. Коробова Соколинский “проехал” по этой работе. Сейчас (1986 г.) ученица Г. И. Архипова Оля Тырина¹³² довела идею и утверждения до совершенства.

2.14. “Новая оценка интеграла И. М. Виноградова” (совместно с Г. И. Архиповым), Известия АН СССР. Серия математическая, т. 42, № 4 (1978), с. 751–762. Подробное изложение работы 2.13. Очень отработано изложение теоремы о среднем (простейшая ситуация в общей теореме). Этим изложением я часто пользуюсь. Сама теорема о среднем в таком изложении – одна из красивейших теорем математики.

¹²⁹ Имеется в виду работа: Г. И. Архипов, “Теорема о среднем значении модуля кратной тригонометрической суммы”, *Матем. заметки*, 17:1 (1975), 143–153.

¹³⁰ Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков.

¹³¹ Имеется в виду статья: Г. И. Архипов, В. Н. Чубариков, “Кратные тригонометрические суммы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 40:1 (1976), 209–220.

¹³² Ольга Васильевна Тырина.

2.15. “Точная оценка числа решений одной системы диофантовых уравнений” (совместно с Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым), *Известия АН СССР. Серия математическая*, т. 42, № 6 (1978), с. 1187–1226. Продолжение 2.10 и одна из самых полных (по теореме о среднем для КТС) работ. Если теорема о среднем для тригонометрических сумм – одна из лучших теорем, то теорема 1 этой статьи – сверхлучшая; ее доказательство, доказательство основной леммы и леммы о полной системе сравнений – блеск. Все уже мы отработали (сидели на кафедре¹³³ и предложение за предложением, последовательно отработывая, писали статью). В таком виде теорема о среднем вошла в монографию¹³⁴. Теорема 2 – аналог (для кратного случая) теоремы работы 2.1. Здесь же – оценки снизу, которые показывают точность результата. Ничего подобного в мире не было (по сложности и красоте).

2.16. “Асимптотика одной арифметической суммы”, *Математические заметки*, т. 24, № 6 (1978), с. 737–740. Работа родилась из работ 1.29 и 2.12. Придумал задачу я, написал. Хотя и любопытная работа, но продолжений пока нет. Стоило бы подумать о продолжении!

2.17. “Распределение дробных долей многочленов от нескольких переменных” (совместно с Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым), *Математические заметки*, т. 25, № 1 (1979), с. 3–14. Приложение нашей теории КТС. Оригинальной является теорема 1 о совместном распределении и теорема 3 о дробных долях при условии, что переменные еще где-то лежат¹³⁵. Вся статья – плод раздумий над задачами, которые есть в теории КТС и которых нет в теории сумм Г. Вейля (однократных).

Это направление еще получит свое развитие. К простым числам все это уже применено В. Н. Чубариковым¹³⁶. Но много здесь еще не додумано и не сделано.

2.18. “Показатель сходимости особого интеграла проблемы Терри” (совместно с Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым), *Доклады АН СССР*, т. 248, № 2 (1979), с. 268–272. В МИАНе (≈ 1978 г.) ко мне неоднократно подходил сотрудник Ю. В. Прохорова¹³⁷ Резо Гамкрелидзе¹³⁸ с вопросами об оценке тригонометрических интегралов – простых и кратных. К тому времени имел свои оригинальные оценки В. Н. Чубариков. Я стал снова думать об интегралах, “завел” Г. И. Архипова и В. Н. Чубарикова на решение старой задачи Хуа Ло-кена о показателе сходимости. Вроде, все должно было получиться, но не получалось до конца. Неоднократно втроем сидели на кафедре и думали над задачей. Выход (и решение) нашел Г. И. Архипов, который понял, что для решения нужно (см. лемму¹³⁹), и это сразу же было сделано.

Теорема, а также лемма – очень хорошие утверждения, которые еще найдут применения, и не только в аналитической теории чисел. Ю. В. Прохоров неоднократно (в разных докладах) упоминал об этих исследованиях (им все это надо для статистики и вероятности).

¹³³На механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, где все они преподавали.

¹³⁴См. [5], см. также [7], [11].

¹³⁵То есть при условии, что переменные $x_1, \dots, x_r$ принимают значения, принадлежащие некоторой области Ω_r .

¹³⁶См., например, статью: В. Н. Чубариков, “Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 49:5 (1985), 1031–1067.

¹³⁷Юрий Васильевич Прохоров.

¹³⁸Николай Георгиевич Гамкрелидзе.

¹³⁹ЛЕММА. Пусть $n \geq 1$, $f(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x$,

$$\beta_r(x) = \frac{1}{r!} f^{(r)}(x), \quad r = 1, \dots, n, \quad H = H(\alpha_n, \dots, \alpha_1) = \min_{0 \leq x \leq 1} \sum_{r=1}^n |\beta_r(x)|^{1/r}.$$

Тогда для интеграла $J = \int_0^1 \exp[2\pi i f(x)] dx$ справедлива оценка

$$|J| \leq \min(1; 6en^3 H^{-1}).$$

Сейчас (1997 г.) Д. А. Попов¹⁴⁰ применил наши оценки в томографии и кратных рядах Фурье.

2.19. “Тригонометрические интегралы” (совместно с Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым), Известия АН СССР. Серия математическая, т. 43, № 5 (1979), с. 971–1003. Полное изложение работы 2.18 и еще перенесение на кратный случай. Кратный случай не сделан полностью. Остались нерешенными задачи о показателе сходимости для кратных интегралов. Здесь должна быть своя красивая и стройная теория (может оказаться очень сложной), она еще не создана. Наша статья – первый шаг здесь. Мы ставили общую задачу (в статье), но пока нет никаких сдвигов (принципиальных). Думаю, что эта теория найдет применения в приложениях. Выяснилось, что подобные, но более слабые и “сырые” результаты были получены статистиками С. М. Садиковой¹⁴¹, В. В. Юринским¹⁴²; они опирались на Ван дер Корпута¹⁴³. Наши же соображения – аналог Виноградовской идеи о попаданиях¹⁴⁴ (или Эйлеровской – об u -числах в проблеме Варинга) – линейная система уравнений с большим определителем (см. лемма 1).

В статье много идей, которые стоило бы развивать дальше!

2.20. “Об одной системе диофантовых уравнений” (совместно с Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым), Доклады АН СССР, т. 252, № 2 (1980), с. 275–276. Развитие теории КТС. Сформулирована теорема о среднем, которая учитывает длину изменения каждой переменной по существу. Здесь – оригинальная идея “выбирать” неизвестные в количестве, пропорциональном длине его изменения¹⁴⁵. Идею, вроде, предложил я; техническое осуществление сделано Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым.

2.21. “Равномерные оценки кратных тригонометрических сумм” (совместно с Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым), Доклады АН СССР, т. 252, № 6 (1980), с. 1289–1291. Приложение работы 2.20 к оценкам соответствующих сумм. Оригинальной является лемма о кратности пересечений, доказанная Г. И. Архиповым.

2.22. “Кратные тригонометрические суммы и их приложения” (совместно с Г. И. Архиповым и В. Н. Чубариковым), Известия АН СССР. Серия математическая, т. 44, № 4 (1980), с. 723–781. Полное изложение работ 2.20, 2.21 и еще многое другое. Задачу поставили мы сами в своей монографии¹⁴⁶ (Тр. МИАН, 151 (1980)). В статье даем ее решение. Много интересных находок: лемма 2 (Г. И. Архипов) и все другие леммы (над каждой стоит еще подумать и посмотреть ее дальнейшее развитие), теорема 1, оценки снизу, леммы о кратности пересечений и леммы 7 и 8 (Г. И. Архипов), лемма 10 (Г. И. Архипов и В. Н. Чубариков). Есть также здесь и приложения. Статью следует внимательнейшим образом еще раз посмотреть, обдумать и развивать дальше. Много еще здесь можно сделать.

Том 3

3.1. “О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой”, Труды МИАН СССР, т. 157 (1981), с. 49–63. Был

¹⁴⁰Дмитрий Александрович Попов. См., например, статью: Д. А. Попов, “Восстановление характеристических функций в двумерной радоновской томографии”, УМН, 53:1(319) (1998), 115–198.

¹⁴¹Светлана Михайловна Садикова.

¹⁴²Вадим Владимирович Юринский.

¹⁴³Johannes van der Corput. Имеется в виду “лемма Ван дер Корпута”, см. статью: J. G. Van der Corput, “Zahlentheoretische Abschätzungen”, Math. Ann., 84 (1921), 53–79.

¹⁴⁴О лемме “о попаданиях” см., например, [7; с. 87], см. также [11; с. 85].

¹⁴⁵Чтобы правильно учесть вклад каждой переменной в общее число решений системы уравнений, каждая переменная разбивается на арифметические прогрессии с разностью, равной степени простого числа и пропорциональной длине интервала изменения этой переменной.

¹⁴⁶См. [5].

первый раз в Чехословакии (1975 г.); поехал в Братиславу; Бржетислав Новак¹⁴⁷ советовал обратить внимание на оригинального математика там – Я. Мозера¹⁴⁸. Познакомился с Яном Мозером. Затем появилась его работа¹⁴⁹ (1976 г., 1979 г.) о существенном улучшении результата Харди–Литтлвуда (нуль $\zeta(1/2 + it)$ на $(T, T + H)$, $H = T^{1/6+\varepsilon}$ вместо $H = T^{1/4+\varepsilon}$). В ней была неточность; обнаружил ее С. М. Воронин на моем семинаре. Затем делал доклад Г. И. Архипов. Мы поняли, как исправить работу, оставаясь в круге тех же идей. Написал Я. Мозеру. Исправляя его работу, увидел, как ее уточнить ($H = T^{5/32+\varepsilon}$), но не хотел публиковать, хотя была в этой работе одна оригинальная мысль (специальные тригонометрические суммы $\rightarrow$ переверот $\rightarrow$ оценка).

Издавали юбилейный сборник Трудов (90-летие И. М. Виноградова). Решил поместить эту оценку и придумал (и решил) задачу о нулях $Z^{(k)}(t)$. Получил (обнаружил) эффект “сближения” нулей, или эффект “осцилляции” $Z(t)$. Позднее (с подачи, по-видимому, Х. Монтгомери¹⁵⁰) нулями $\zeta^{(k)}(1/2 + it)$ занялся его ученик Б. Конри¹⁵¹... Потом улучшениями (без дополнительных идей) занимался А. Ивич (со своей версией истории этого вопроса).

Эта работа научила меня дзете; она – первая моя работа по дзете.

Идея Я. Мозера об использовании оценок тригонометрических сумм (недиагональные члены) является основной в этом круге проблем.

3.2. “Об одной задаче с простыми числами”, Доклады АН СССР, т. 259, № 6 (1981), с. 1291–1293. Вдруг увидел, что задача И. И. Пятецкого–Шапиро $[n^c] = p$ порождает целый круг задач типа $[n^c] = m^2$ и т.п.; однако обнаружил, что этой темой уже занимались (в частности, Б. И. Сегал¹⁵² рассмотрел $[n^c] + [m^c] = N$). Тем не менее сделал теорему $p^r = [n^c]$, $r \geq 1$, и аддитивную задачу $p^r + [n^c] = N$. Эти теоремы самые малые по плотности. В настоящее время этим будет заниматься С. Гриценко¹⁵³.

3.3. “О локальном представлении нуля формой” (совместно с Г. И. Архиповым), Известия АН СССР. Серия математическая, т. 45, № 5 (1981), с. 948–961. Г. И. Архипов сделал¹⁵⁴ проблему Гильберта–Камке (1980 г.). Я обратил его внимание на схожесть с гипотезой Артина¹⁵⁵ о локальном представлении нуля формой. Он сказал, что думал на эту тему, но ничего не вышло. Предложил подумать вместе. Этим занимались майские праздники (1981 г.). Узнали, что гипотеза Артина уже опровергнута. Через три дня после упорных усилий (тыканий и блужданий) придумали свое (было это в Ленинке¹⁵⁶). Сразу поняли, что все дело в “выщербленных” системах сравнений, долго не могли доказать (2 дня) основную лемму, а потом придумали¹⁵⁷.

В Минске ученик В. Г. Спринджука¹⁵⁸ занялся и сделал то, что мы не доделали, но могли сразу сделать. Поняв, что эта “доделка” нам “выйдет боком”, послали заметку в УМН¹⁵⁹ (1982 г.).

*** **

¹⁴⁷Bretislav Novak, профессор Карлова университета в Праге, один из самых близких друзей А. А. Карацубы на протяжении всей жизни, со времени их совместного обучения в аспирантуре мехмата МГУ.

¹⁴⁸Ján Mózger.

¹⁴⁹Имеется в виду работа: Ян Мозер, “Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана”, *Acta Arith.*, **31** (1976), 45–51; Добавление, *Acta Arith.*, **35** (1979), 403–404.

¹⁵⁰Hugh Lowell Montgomery.

¹⁵¹John Brian Conrey.

¹⁵²Бенцион Израилевич Сегал.

¹⁵³Сергей Александрович Гриценко, ученик А. А. Карацубы.

¹⁵⁴См., например, статью: Г. И. Архипов, “О проблеме Гильберта–Камке”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48:1** (1984), 3–52.

¹⁵⁵Emil Artin. О гипотезе Артина см., например, [7; с. 338], см. также [11; с. 361].

¹⁵⁶Российская государственная библиотека, с 1925 г. по 1992 г. Государственная библиотека СССР им. В. И. Ленина.

¹⁵⁷Результаты были опубликованы в работе [22].

¹⁵⁸Владимир Геннадьевич Спринджук.

¹⁵⁹См. [23].

Потом еще были публикации на Западе на эту тему... З.И. Борович¹⁶⁰ и И.Р. Шафаревич¹⁶¹ поместили нашу теорему в 3-е издание¹⁶² своей “Теории чисел”, 1985 г.

*** **

3.4. “О представлении нуля формой в поле p -адических чисел” (совместно с Г.И. Архиповым), Доклады АН СССР, т. 262, № 1 (1982), с. 11–13. Краткое изложение результатов работы 3.3.

3.5. “Об одной задаче теории сравнений” (совместно с Г.И. Архиповым), Успехи математических наук, т. 37, № 5(227) (1982), с. 161–162. Статья написана вдогонку к работе 3.4. Опубликовали быстро, и этому помог А.А. Мальцев¹⁶³. Тем не менее, на Западе стараются эту работу не заметить... Остались нерешенными наши задачи (гипотезы). Стоило бы заняться ими!

3.6. “Особые случаи теории кратных тригонометрических сумм” (совместно с Г.И. Архиповым и В.Н. Чубариковым), Известия АН СССР. Серия математическая, т. 47, № 4 (1983), с. 707–784. Принципиально новая тема теории КТС (в однократных ничего похожего нет). Переменные могут существенно отличаться друг от друга (сильно отличаются длины промежутков их изменения). Например, двукратная сумма по существу может быть однократной. И все это надо уловить. Этому и посвящена работа. “Перераспределение”, т.е. переход от точек первого класса к точкам второго, полностью проделано Г.И. Архиповым; это его идея, и в основном вся работа сделана Г.И. Архиповым и В.Н. Чубариковым. Я – руководитель и “шлифовальщик” изложения, доказательств.

Одна из самых могучих работ теории КТС.

3.7. “Новые равномерные оценки кратных тригонометрических сумм” (совместно с Г.И. Архиповым и В.Н. Чубариковым), Доклады АН СССР, т. 272, № 1 (1983), с. 11–12. Краткое изложение результатов статьи 3.6. В конце статьи говорится о нерешенной проблеме Гильберта–Камке для многомерной системы.

Ее уже сделали Г.И. Архипов и В.Н. Чубариков¹⁶⁴.

3.8. “О нулях дзета-функции Римана на коротких промежутках критической прямой”, Доклады АН СССР, т. 272, № 6 (1983), с. 1312–1314. Усиливается соответствующий результат Я. Мозера (у него $H = T^{5/12+\varepsilon}$, у меня $H = T^{27/82+\varepsilon}$). Сама теорема Мозера – это первый сдвиг в направлении доказательства гипотезы А. Сельберга¹⁶⁵. Его идея – недиагональные члены оценивать, используя оценки тригонометрических сумм. В моей работе более искусно осуществляется эта идея, что и привело к усилению. Она помогла мне также разобраться в вопросах о нулях $\zeta(s)$.

3.9. “Метод тригонометрических сумм в теории чисел” (совместно с И.М. Виноградовым), Труды МИАН СССР, т. 168 (1984), с. 4–30. Обзорная статья. Предложил ее написать Е.Ф. Мищенко¹⁶⁶. Я взял предыдущие сочинения И.М. на эту тему, объединил их, добавил последние достижения, прочитал И.М. (он был уже в Узком¹⁶⁷). Получилась статья. Это последняя¹⁶⁸ статья И.М.

¹⁶⁰Зенон Иванович Борович.

¹⁶¹Игорь Ростиславович Шафаревич.

¹⁶²См. [24].

¹⁶³Аркадий Анатольевич Мальцев.

¹⁶⁴См., например, статью: Г.И. Архипов, В.Н. Чубариков, “Об арифметических условиях разрешимости нелинейных систем диофантовых уравнений”, *Докл. АН СССР*, **284**:1 (1985), 16–21.

¹⁶⁵Atle Selberg.

¹⁶⁶Евгений Фролович Мищенко.

¹⁶⁷Подмосковный санаторий, в котором заболевший И.М. Виноградов жил последние месяцы своей жизни.

¹⁶⁸Иван Матвеевич Виноградов умер 20 марта 1983 г.

3.10. “О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 48, № 3 (1984), с. 569–584. Доказана гипотеза А. Сельберга, высказанная¹⁶⁹ им в 1942 г. Основу доказательства составили соображения, о которых говорил в работе 3.8. Сначала думал, что нужны будут оценки сумм с простыми числами и квазириманова гипотеза. Потом понял, что ничего этого не надо и получил доказательство. Большое значение имело также то обстоятельство, что я упростил само доказательство А. Сельберга его теоремы; оно стало прямым и понятным (достаточно сравнить с тем, которое есть у Титчмарша в книге¹⁷⁰).

3.11. “О нулях дзета-функции Римана”, Доклады АН СССР, т. 276, № 3 (1984), с. 535–539. Короткое сообщение по работе 3.10, хотя и по нему можно восстановить все доказательство.

3.12. “Квадратичные вычеты и невычеты в редких последовательностях”, Доклады АН СССР, т. 279, № 5 (1984), с. 1044–1046. “Гибридные” теоремы, продолжающие мои работы 1.21, 1.23, 1.24, 1.25, 1.28; 2.2, 2.9, 2.11, 2.12. Тема – моя.

3.13. “Распределение нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ ”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 48, № 6 (1984), с. 1214–1224. Придумал задачу, которая является вариацией на тему гипотезы А. Сельберга: почти все короткие промежутки ($H = T^\varepsilon$) имеют $\geq cH \ln T$ нулей $\zeta(1/2 + it)$, и решил ее. Хорошая задача.

Дальнейшим результатом (очень интересным) явилась (1986 г.) теорема Л. В. Киселевой¹⁷¹ подобного рода, но осреднение идет не по $(X, 2X)$, а по $(X, X + X^\theta)$, $\theta < 1$ (у нее $\theta = 11/12$). Тем самым, родилось целое новое направление: осреднять на коротких промежутках! (Надо посмотреть все задачи, которые связаны с подобной постановкой.)

3.14. “Метод тригонометрических сумм И. М. Виноградова”, Труды МИАН СССР, т. 163 (1984), с. 97–103. Изложение доклада, который я прочитал на конференции, посвященной 90-летию И. М. Пытался (и, по-моему, получилось) изложить идейную часть метода И. М. (двойные суммы, сглаживание). Потом нашел старые оттиски И. М. (≈ 1934 г., 1935 г.), где он говорил то же самое (близко).

3.15. “О нулях функции $\zeta(1/2 + it)$ ”, Доклады АН СССР, т. 281, № 5 (1985), с. 1038–1041. Короткое сообщение о результатах работы 3.13.

3.16. “О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 49, № 2 (1985), с. 326–333. Был осенью 1984 г. в Праге, в Карловом университете. Приехал ко мне Я. Мозер и говорит: “Вы доказали гипотезу Сельберга о нулях $\zeta(s)$ на критической прямой. Сельберг также ставил задачу о нулях в окрестности критической прямой. Ее надо сделать”. Я попросил Б. Новака найти статью Сельберга. Он быстро сделал мне ксерокопию статьи, а на следующий день я уже написал статью с решением этой задачи. Конечно, после того, что я уже сделал (работы 3.10, 3.13), задача оказалась простой. Возможны дальнейшие развития этой темы в стиле работы 3.13.

3.17. “О вещественных нулях функции $\zeta(1/2 + it)$ ”, Успехи математических наук, т. 40, № 4(244) (1985), с. 171–172. Короткий обзор моих результатов по дзете.

3.18. “Дзета-функция Римана и ее нули”, Успехи математических наук, т. 40, № 5(245) (1985), с. 19–70. Большой обзор (с доказательствами, полными) моих результатов. Нет только работы 3.16. Большую помощь в скорейшей публикации оказал А. А. Мальцев.

*** **

¹⁶⁹См. статью: A. Selberg, “On the zeros of Riemann’s zeta-function”, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I*, **10** (1942), 59 pp.

¹⁷⁰См. [21].

¹⁷¹Лариса Владимировна Киселева.

3.19. “О функции $G(n)$ в проблеме Варинга”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 49, № 5 (1985), с. 935–947. По настоянию Г. И. Архипова написана статья. Дал p -адическое доказательство оценки $G(n)$. Оно не только идейно поясняет суть дела, но и дает лучший результат, чем у И. М. Я его знал давно. Это же будет в нашей книге.

Сейчас (1997 г.) Вон¹⁷² и Вули¹⁷³ написали массу статей, пользуясь работой 3.19.

3.20. “О нулях дзета-функции Римана на критической прямой”, Труды МИАН СССР, т. 167 (1985), с. 167–178. Полное изложение работы 3.8. Долго не выходило из печати (юбилейный сборник к 75-летию Л. С. Понтрягина¹⁷⁴). Все это было мной перекрыто (гипотеза Сельберга) в работе 3.10 и затем.

Том 4

4.1. “Распределение простых чисел”, Успехи математических наук, т. 45, № 5 (275) (1990), с. 81–140. Изучал плотностные теоремы¹⁷⁵ ($\approx$ начало 1974 г.) Монтгомери, Хаксли¹⁷⁶, Ютилы и других, придумал свое доказательство теоремы Хаксли. Долго не публиковал. Затем появился этот мой обзор, и основную его ценность представляет это доказательство. Замечу также, что здесь же помещено мое доказательство теоремы¹⁷⁷ Римана–Мангольда¹⁷⁸ об $N(T)$. Такого доказательства я не встречал раньше.

4.2. “О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой”, Известия АН СССР. Серия математическая, т. 54, № 2 (1990), с. 303–315. Писали с С. М. Ворониным книгу “Дзета-функция Римана”¹⁷⁹. Поместили теорему Воронина о нулях $f(s)$. Доказательство очень сложное, и до конца его никто не разбирал. Стал думать о другом доказательстве. Думал, что высокая степень интеграла даст возможность лучше использовать осцилляцию, но все прикидки показывали, что надо брать малую степень $\alpha \rightarrow 0$. Условное доказательство (при условии, что могу снизу оценивать один интеграл) получил в июле–августе 1989 г. на поляне Москвина¹⁸⁰ (Памир) и в селе Долинка¹⁸¹ (Тянь-Шань, Иссык-Куль). Поехал в октябре в Амальфи¹⁸², дискутировал с Э. Бомбьери (переводил А. Ивич), говорил, что понимаю, как сделать, но не могу пока оценить интеграл. Несколько раз переспрашивал Бомбьери, могут ли они (или он) доказать это, и он каждый раз отвечал, что нет, не могут, только думают, что это так (т.е. гипотеза). Приехал, открыл Титчмарша (дзету¹⁸³), посмотрел неравенство Гэбриэля¹⁸⁴ и сразу же получил доказательство своей теоремы.

¹⁷²Robert Charles Vaughan.

¹⁷³Trevor Wooley.

¹⁷⁴Лев Семенович Понтрягин.

¹⁷⁵См., например, [10; с. 103–104].

¹⁷⁶Martin Neil Huxley.

¹⁷⁷Пусть $N(T)$ – количество нулей $\zeta(s)$ в $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Тогда при $T \geq 2$ справедлива асимптотическая формула

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} - O(\log T).$$

¹⁷⁸Georg Friedrich Bernhard Riemann. Hans Carl Friedrich von Mangoldt. См. статью: H. von Mangoldt, “Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\xi(t)$ ”, *Math. Ann.*, **60** (1905), 1–19.

¹⁷⁹См. [9].

¹⁸⁰Памирская поляна на высоте 4200 м., где находится базовый альпинистский лагерь для восхождений на расположенные поблизости высочайшие вершины Памира – пики Коммунизма (7495 м.) и Корженевской (7105 м.).

¹⁸¹Село на берегу озера Иссык–Куль в Киргизии в горах Тянь-Шаня недалеко от границы с Китаем, где А. А. Карацуба часто отдыхал с семьей.

¹⁸²Курорт в Италии на побережье Тирренского моря южнее г. Сорренто, где в 1989 г. проводилась конференция по теории чисел, посвященная юбилею Энрико Бомбьери.

¹⁸³См. [21].

¹⁸⁴Robert Mark Gabriel, см. статью: R. M. Gabriel, “Some results concerning integrals of moduli of regular functions along certain curves”, *J. London Math. Soc.*, **2** (1927), 111–117.

Позднее уточнил результаты¹⁸⁵ ($\geq T\sqrt{\log T} \exp(-c\sqrt{\log \log T})$), а также доказал этим методом теорему¹⁸⁶ о нулях $\zeta(1/2 + it)$ на почти всех очень коротких промежутках.

Список литературы

- [1] *Теория чисел и анализ*, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, Тр. МИАН, **207**, ред. Е. Ф. Мищенко, А. А. Карацуба, Наука, М., 1994.
- [2] *Список научных публикаций*, <http://www.mi.ras.ru/~karatsuba/list.html>.
- [3] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1975.
- [4] A. A. Karatsuba, *Fundamentos de la teoría analítica de los números*, Mir, Moscow, 1979 (Spanish).
- [5] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, “Кратные тригонометрические суммы”, Тр. МИАН СССР, **151**, 1980, 3–128.
- [6] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, 2-е изд., Наука, М., 1983.
- [7] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, *Теория кратных тригонометрических сумм*, Наука, М., 1987.
- [8] A. A. Karatsuba, *Basic Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [9] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann Zeta-Function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [10] A. A. Karatsuba, *Complex Analysis in Number Theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [11] G. I. Arkhipov, V. N. Chubarikov, A. A. Karatsuba, *Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis*, de Gruyter Exp. Math., **39**, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.
- [12] *Автоматы*, Сборник статей, ред. К. Э. Шеннон, Дж. Маккарти, ИЛ, М., 1956.
- [13] Loo-keng Hua, “On the number of solutions of Tarry’s problem”, *Acta Sci. Sinica*, **1** (1952), 1–76.
- [14] И. М. Виноградов, “Новая оценка функции $\zeta(1 + it)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22:2** (1958), 161–164.
- [15] A. Svoboda, M. Valach, “Operatorov e obvody (Operational circuits)”, *Stroje na Zpracování Informací*, **3**, Nakl. CSZV, Prague, 1955, 247–295.
- [16] V. Strassen, “Gaussian elimination is not optimal”, *J. Numer. Math.*, **13:4** (1969), 354–356.
- [17] Д. Кнут, *Искусство программирования*. Т. 2. *Получисленные алгоритмы*, Мир, М., 2000.
- [18] А. Н. Колмогоров, *Избранные труды*. В 6 т. Т. 3. *Теория информации и теория алгоритмов*, Наука, М., 1987.
- [19] A. Schönhage, V. Strassen, “Schnelle Multiplikation großer Zahlen”, *Computing*, **7:3-4** (1971), 281–292.
- [20] А. А. Карацуба, “Приложение №4”: Хуа Ло-кен, *Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел*, Мир, М., 1964, 180–187.
- [21] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, М., 1953.
- [22] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, “О локальном представлении нуля формой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45:5** (1981), 948–961.
- [23] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, “Об одной задаче теории сравнений”, *УМН*, **37:5** (227) (1982), 161–162.
- [24] З. И. Боревищ, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, 3-е изд., доп., Наука, М., 1985.

¹⁸⁵См. статью: А. А. Карацуба, “Уточнение теорем о количестве нулей, лежащих на отрезках критической прямой, некоторых рядов Дирихле”, *УМН*, **47:2**(284) (1992), 193–194.

¹⁸⁶См. статью: А. А. Карацуба, “О количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих на почти всех коротких промежутках критической прямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56:2** (1992), 372–397.