Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Востоков, И. Л. Климовицкий, Примарные элементы в формальных модулях, *Совр. пробл. матем.*, 2013, выпуск 17, 153–163

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm48>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:50:33

Примарные элементы в формальных модулях

С. В. Востоков, И. Л. Климовицкий

Санкт-Петербургский государственный университет

Замечательному ученому и человеку посвящается

В арифметике формальных модулей, построенных на идеалах полных дискретно нормированных полей с помощью формальных групповых законов, существенную роль играют так называемые примарные элементы, которые дают неразветвленные расширения. В настоящей работе мы получаем примарные элементы в произвольном формальном модуле локального поля с совершенным полем вычетов. При этом в качестве формальных групповых законов мы рассматриваем так называемые формальные O_0 -модульные группы.

В разделе 1 строятся примарные элементы типа Хассе, в определение которых входит элемент из кольца целых пополнения максимального неразветвленного расширения данного поля.

В разделе 2 конструируются примарные элементы, аналогичные тем, которые впервые были найдены в работах [1], [2] и в определение которых входят лишь элементы исходного поля. Для этого излагается теория Хонды для формальных O_0 -модулей, а затем на основании этой теории доказывается теорема о представлении логарифма формального O_0 -модуля в виде произведения двух множителей. Далее строятся функции Артина–Хассе для универсальных формальных O_0 -модулей и, наконец, доказываются основные теоремы.

1. Формальные модули

1.1. Формальные O_0 -модульные группы. Пусть K_0 – локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$) с кольцом целых O_0 и простым элементом π_0 . Пусть, далее, K – конечное расширение поля K_0 , $O := O_K$ – кольцо целых поля K и π – простой элемент в K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формальную группу $F(X, Y)$ над кольцом O с логарифмом $\lambda(X) \in K[[X]]$ назовем *формальной O_0 -модульной группой*, если определен кольцевой гомоморфизм

$$\begin{aligned} [\cdot]_F: O_0 &\rightarrow \text{End}_O(F), \\ a &\mapsto [a]_F(X) = \lambda^{-1}(a\lambda(X)). \end{aligned}$$

Заметим, что если $f: F \rightarrow G$ – гомоморфизм формальных O_0 -модульных групп F и G над O , то

$$f(X) \circ [a]_F(X) = [a]_G(X) \circ f(X)$$

(подробнее см. [3; гл. IV, § 27]).

1.2. Высота формальной O_0 -модульной группы. Пусть $F(X, Y)$ – формальная O_0 -модульная группа над O высоты h и $m = (K_0 : \mathbb{Q}_p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Формальной O_0 -высотой группы F над O* назовем число

$$h_0 = \frac{h}{m}.$$

Можно проверить, что h_0 является натуральным числом или бесконечностью. При этом $h_0 = \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\pi_0^e \lambda(X) \equiv 0 \pmod{\pi_0 O},$$

где $e = e(K/K_0)$ (см. [3]).

1.3. Функция Артина–Хассе формальной O_0 -модульной группы. Пусть $F(X, Y)$ – формальная O_0 -модульная группа над O конечной формальной O_0 -высоты h_0 . Пусть L – некоторое полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов $\bar{L}$. Считаем, что L содержит K и, тем самым, K_0 . Пусть T – максимальное абсолютно неразветвленное над K_0 подполе в L/K_0 с кольцом целых O_T . Пусть $\widetilde{T^{nr}}$ – пополнение максимального неразветвленного расширения поля T , φ – автоморфизм Фробениуса в $\widetilde{T^{nr}}/K_0$; таким образом,

$$\varphi(\alpha) = \alpha^\varphi \equiv \alpha^q \pmod{\pi_0}$$

для всех $\alpha \in O_{\widetilde{T^{nr}}}$ (здесь q – число элементов поля вычетов $\bar{K}_0$).

Пусть $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_L$ – максимальный идеал кольца целых поля L и $F(\mathfrak{M})$ – формальный O_0 -модуль, натянутый на идеал $\mathfrak{M}$:

$$\begin{aligned} \alpha, \beta \in F(\mathfrak{M}) &\mapsto \alpha +_F \beta = F(\alpha, \beta) \in F(\mathfrak{M}), \\ a \in O_0, \alpha \in F(\mathfrak{M}) &\mapsto [a]_F(\alpha) \in F(\mathfrak{M}). \end{aligned}$$

Пусть $\lambda(X)$ – логарифм F и $\lambda_q(X)$ – логарифм O_0 -типической формальной группы F_q , изоморфной F . Заметим, что F_q определена не однозначно. Например, в качестве $\lambda_q(X)$ можно брать ряд

$$\lambda_q(X) = X + c_q X^q + c_{q^2} X^{q^2} + \dots,$$

где

$$\lambda(X) = X + c_1 X + c_2 X^2 + \dots,$$

или ряд $\lambda_q(X) = v(\Delta)u(\Delta)^{-1}(X)$ из теории Хонды. Тогда ряд $(\lambda^{-1} \circ \lambda_q)(X) \in O[[X]]$ и задает изоморфизм из F в F_q (см. [3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для любого элемента $\alpha \in O_{\widetilde{T^{nr}}}$ определим ряд, который назовем *функцией Артина–Хассе*:

$$E_F(\alpha X) = \lambda^{-1}(\alpha X + c_q \varphi(\alpha) X^q + c_{q^2} \varphi^2(\alpha) X^{q^2} + \dots)$$

(в мультипликативном случае ряд $E(X)$ определен в работе [4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого элемента $\mathfrak{z} \in F(\mathfrak{M})$ элемент $E_F(\alpha \mathfrak{z})$ корректно определен и задает элемент из $F(\widetilde{\mathfrak{M}})$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}$ – максимальный идеал в кольце целых поля $L\widetilde{T^{nr}}$. При этом

$$\begin{aligned} E_F((\alpha + \beta)\mathfrak{z}) &= E_F(\alpha \mathfrak{z}) +_F E_F(\beta \mathfrak{z}), & \alpha, \beta \in O_{\widetilde{T^{nr}}}, \\ E_F(a\alpha \mathfrak{z}) &= [a]_F(E_F(\alpha \mathfrak{z})), & a \in O_0, \alpha \in O_{\widetilde{T^{nr}}}, \\ E_F(\alpha \mathfrak{z}) &\equiv \alpha \mathfrak{z} \pmod{\alpha \mathfrak{z}^2}, & \alpha \in O_{\widetilde{T^{nr}}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть R – мультипликативная система представителей Тейхмюллера в $\widetilde{T^{nr}}$. Тогда элемент $\alpha \in O_{\widetilde{T^{nr}}}$ представим в виде

$$\alpha = \theta_0 + \theta_1 \pi_0 + \theta_2 \pi_0^2 + \dots = \sum_{i \geq 0} \theta_i \pi_0^i, \quad \theta_i \in R,$$

при этом $\varphi(\theta_i) = \theta_i^q$, где $q = \#\overline{K_0}$ – число элементов поля вычетов $\overline{K_0}$ поля K_0 . Поэтому

$$\begin{aligned} E_F(\alpha\mathfrak{Z}) &= \lambda^{-1} \left(\sum_{i \geq 0} c_{q^i}(\theta_0\mathfrak{Z})^{q^i} + \pi_0 \sum_{i \geq 0} c_{q^i}(\theta_1\mathfrak{Z})^{q^i} + \dots \right) \\ &= \lambda^{-1} \left(\sum_{i \geq 0} c_{q^i}(\theta_0\mathfrak{Z})^{q^i} \right) +_F [\pi_0]_F (\lambda^{-1} \left(\sum_{i \geq 0} c_{q^i}(\theta_1\mathfrak{Z})^{q^i} \right)) +_F \dots \\ &= \sum_{k \geq 0} ({}_F[\pi_0^k]_F (E_F(\theta_k\mathfrak{Z}))) \in F(\widetilde{\mathfrak{M}}). \end{aligned}$$

2) Если $\alpha = \sum_{i \geq 0} \theta_i \pi_0^i$, $\beta = \sum_{i \geq 0} \theta'_i \pi_0^i$, где $\theta_i, \theta'_i \in R$, то из предыдущего равенства в п. 1) имеем

$$E_F((\alpha + \beta)\mathfrak{Z}) = \sum_{k \geq 0} ({}_F[\pi_0^k]_F (E_F((\theta_k + \theta'_k)\mathfrak{Z}))).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} E_F(\alpha\mathfrak{Z}) +_F E_F(\beta\mathfrak{Z}) &= \sum_{k \geq 0} ({}_F[\pi_0^k]_F (E_F(\theta_k\mathfrak{Z}))) +_F \sum_{k \geq 0} ({}_F[\pi_0^k]_F (E_F(\theta'_k\mathfrak{Z}))) \\ &= \sum_{k \geq 0} ({}_F[\pi_0^k]_F (E_F(\theta_k\mathfrak{Z} + \theta'_k\mathfrak{Z}))) = E_F((\alpha + \beta)\mathfrak{Z}). \end{aligned}$$

3) Следует из того, что $\varphi(a) = a$, для $a \in O_0$.

4) Вытекает непосредственно из определения функции

$$E_F(X) = (\lambda^{-1} \circ \lambda_q)(X) \equiv X \pmod{X^2}.$$

1.4. Примарные элементы в формальном O_0 -модуле $F(\mathfrak{M})$. Примем все обозначения п. 1.3. Предположим, что поле L содержит ядро изогении $[\pi_0^n]_F$. Назовем элемент $\omega \in F(\mathfrak{M})$ π_0^n -примарным, если расширение $L(\frac{1}{\pi_0^n}\omega)/L$ неразветвленное, где $\frac{1}{\pi_0^n}$ обозначает решение уравнения $[\pi_0^n]_F(X) = \omega$. Ясно, что из условия $\ker[\pi_0^n]_F \subset L$ следует, что расширение $L(\frac{1}{\pi_0^n}\omega)/L$ абелево. Пусть $\mathfrak{Z}$ – некоторый первообразный элемент из ядра $\ker[\pi_0^n]_F$, т.е. $[\pi_0^n]_F(\mathfrak{Z}) = 0$ и $[\pi_0^{n-1}]_F(\mathfrak{Z}) \neq 0$. Элемент $\mathfrak{Z} \in F(\mathfrak{M})$, и из определения функции E_F следует, что существует такой элемент $\mathfrak{E} \in F(\mathfrak{M})$, что $\mathfrak{Z} = E_F(\mathfrak{E}) = (\lambda^{-1} \circ \lambda_q)(\mathfrak{E})$.

Для любого элемента $\alpha \in O_T$ найдется элемент A из кольца $O_{\widetilde{T}^{nr}}$ такой, что

$$A^\varphi - A = \alpha.$$

Пополнение расширения $T(A)/T$ является, согласно теории Витта, пополнением Γ -расширения, и если σ – образующий элемент группы Галуа этого Γ -расширения, то

$$A^\sigma - A = \varkappa \in O_0.$$

Здесь и далее продолжение σ на $\widetilde{T^{nr}}$ обозначим той же буквой σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Определим $H_3(\alpha) = E_F((\pi_0^n A)\mathfrak{E})$.

ТЕОРЕМА 1. 1. Элемент $H_3(\alpha)$ является π_0^n -примарным в формальном O_0 -модуле $F(\mathfrak{M})$, т.е.

а) $H_3(\alpha) \in L$;

б) расширение $L(\frac{1}{\pi_0^n} H_3(\alpha))/L$ является конечным абелевым неразветвленным расширением.

2. Примарный элемент $H_3(\alpha)$ не зависит от выбора элемента A из уравнения $A^\varphi - A = \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства п. 1 нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. Пусть $x \in \widetilde{T(A)}$ и $\sigma(x) = x$; тогда $x \in T$, где $\widetilde{T(A)}$ – пополнение $T(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T_Γ/T – алгебраическая часть расширения $\widetilde{T(A)}/T$. Как уже было отмечено выше, это Γ -расширение. Теперь пусть θ – некоторый представитель Тейхмюллера в $\widetilde{T(A)}$. Тогда ясно, что θ также будет представителем Тейхмюллера в конечном расширении поля T (с полем вычетов $\overline{T(\theta)}$), которое полно. Таким образом, θ – алгебраический элемент над T , лежащий в T_Γ/T .

Рассмотрим разложение

$$x = \theta_0 + \theta_1 \pi_0 + \theta_2 \pi_0^2 + \dots$$

Тогда

$$\sigma(x) = \sigma(\theta_0) + \sigma(\theta_1) \pi_0 + \sigma(\theta_2) \pi_0^2 + \dots$$

Заметим, что под действием автоморфизма представитель Тейхмюллера перейдет в элемент, из которого также извлекаются все корни p^n степени, т.е. в представитель Тейхмюллера. Таким образом,

$$\sigma(x) = \theta'_0 + \theta'_1 \pi_0 + \theta'_2 \pi_0^2 + \dots$$

Если $x = \sigma(x)$, то $\theta_i = \theta'_i = \sigma(\theta_i)$ для всех $i \geq 0$. Но тогда $\theta_i \in T$ (ведь σ – топологическая образующая $\text{Gal}(T_\Gamma/T)$). Таким образом, x лежит в T .

Ясно, что $\mathfrak{E}$ является корнем изогении $[\pi_0^n]_{F_q}$ (она имеет конечную высоту, равную высоте изогении $[\pi_0^n]_F$), лежащим в $F(\mathfrak{M})$; таким образом, $\mathfrak{E}$ является алгебраическим над K .

По построению $H_3(\alpha)$ лежит в $K(\mathfrak{E}, A)$ (как ряд от $\mathfrak{E}, A, A^\varphi, A^{\varphi^2}, \dots$) и, тем самым, в пополнении композита $KT(\mathfrak{E}, A)$. Заметим, что K/K_0 конечно и $K_0 \subset T$; следовательно, $KT(\mathfrak{E})/T$ конечно. Пусть тогда $KT(\mathfrak{E}) = T(\mathfrak{E}')$.

Заметим теперь, что $T(\mathfrak{E}')/T$ – вполне разветвленное расширение, тогда как $\widetilde{T(A)}/T$ – неразветвленное. Таким образом, их пересечением является в точности T . И мы получаем, что в расширении $T(A, \mathfrak{E}')/T(\mathfrak{E}')$ также действует образующий автоморфизм σ . И для того, чтобы $H_3(\alpha)$ лежал в L (и даже в $T(\mathfrak{E}')$), достаточно согласно лемме, чтобы $H_3(\alpha)^\sigma = H_3(\alpha)$.

Действительно,

$$\begin{aligned} H_3(\alpha)^\sigma &= E_F(\pi_0^n A^\sigma \mathfrak{E}) = E_F(\pi_0^n A \mathfrak{E}) +_F E_F(\pi_0^n \varkappa \mathfrak{E}) \\ &= H_3(\alpha) +_F [\pi_0^n \varkappa]_F (E_F(\mathfrak{E})) = H_3(\alpha) +_F [\varkappa]_F ([\pi_0^n]_F(\mathfrak{Z})) = H_3(\alpha). \end{aligned}$$

Для первого равенства нам необходима коммутативность σ и φ на A . Это так в силу того, что $A^{\sigma\varphi} = A + a + \varkappa = A^{\varphi\sigma}$.

Покажем теперь, что расширение

$$L\left(\frac{1}{\pi_0^n} H_3(\alpha)\right) / L$$

неразветвленное.

Пусть $t = \frac{1}{\pi_0^n} H_3(\alpha) = E_F(A \mathfrak{E})$. Из свойств функции E_F следует, что t лежит в $F(\widetilde{\mathfrak{M}})$. Но при этом t является корнем уравнения $[\pi_0^n]_F(X) - H_3(\alpha) = 0$. Ряд $[\pi_0^n]_F$ имеет конечную высоту в любом расширении K , в частности в $KT(\mathfrak{E})$. Элемент $H_3(\alpha)$, как было установлено выше, лежит в поле $KT(\mathfrak{E})$ и при этом имеет в нем положительное нормирование (так как является значением функции E_F). Таким образом, ряд $[\pi_0^n]_F(X) - H_3(\alpha)$ имеет конечную высоту над полем $KT(\mathfrak{E})$. И, следовательно, t как его корень с положительным нормированием является алгебраическим над $KT(\mathfrak{E})$ (согласно подготовительной лемме Вейерштрасса).

Покажем для начала, что расширение

$$KT(A, \mathfrak{E})/KT(\mathfrak{E})$$

неразветвленное. Пусть, как и раньше $KT(\mathfrak{E}) = T(\mathfrak{E}')$. Элемент π_0 – простой в T , а π' – простой в $T(\mathfrak{E}')$. Так как расширение $T(\mathfrak{E}')/T$ вполне разветвлено, то

$$e = e(T(\mathfrak{E}')/T) = \deg(T(\mathfrak{E}')/T).$$

Таким образом, π'^e/π – единица в $T(\mathfrak{E}')$. Но тогда это отношение является также единицей в $T(A, \mathfrak{E}')$. Теперь рассмотрим π как простой элемент в $T(A)$. Мы получили, что в $T(A, \mathfrak{E}')$ нашелся элемент π' такой, что π'^e/π – единица. Таким образом,

$$e(T(A, \mathfrak{E}')/T(A)) \geq e.$$

Но очевидно, что

$$\deg(T(A, \mathfrak{E}')/T(A)) \leq \deg(T(\mathfrak{E}')/T).$$

Итак, мы получили

$$e(T(A, \mathfrak{E}')/T(A)) \geq e = \deg(T(\mathfrak{E}')/T) \geq \deg(T(A, \mathfrak{E}')/T(A)) \geq e(T(A, \mathfrak{E}')/T(A)).$$

Это возможно тогда и только тогда, когда все неравенства обращаются в равенства. В частности, $e(T(A, \mathfrak{E}')/T(A)) = e$, из чего следует, что π' является простым элементом в $T(A, \mathfrak{E}')$. Таким образом, расширение $T(A, \mathfrak{E}')/T(\mathfrak{E}')$ неразветвленное. Соответственно $KT(A, \mathfrak{E})/KT(\mathfrak{E})$ неразветвленное.

Из доказанного непосредственно следует, что $\widetilde{KT(A, \mathfrak{E})}/KT(\mathfrak{E})$ неразветвленное. По построению функции E_F элемент $t = E_F(A\mathfrak{E})$ лежит в поле $\widetilde{KT(A, \mathfrak{E})}$. Таким образом, расширение $\widetilde{KT(\mathfrak{E}, t)}/KT(\mathfrak{E})$ является подрасширением $\widetilde{KT(A, \mathfrak{E})}/KT(\mathfrak{E})$ и, тем самым, тоже неразветвленное.

Пусть $N = KT(\mathfrak{E})$. Выше мы доказали, что $N(t)/N$ неразветвленное. Пусть f – степень инерции этого расширения (тогда $\deg(N(t)/N) = f$). Ясно, что поле $L(t)$ содержит поле $N(t)$ и, тем самым, $N(t) \subset \overline{L(t)}$. В силу того, что N содержит T , расширение L/N вполне разветвлено и $\overline{L} = \overline{N}$. Итак,

$$\deg(\overline{L(t)}/\overline{L}) \geq f.$$

Осталось заметить, что

$$\deg(N(t)/N) \geq \deg(L(t)/L),$$

и мы получаем

$$f = \deg(N(t)/N) \geq \deg(L(t)/L) \geq \deg(\overline{L(t)}/\overline{L}) \geq f.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда все неравенства обращаются в равенства. В частности, $\deg(L(t)/L) = \deg(\overline{L(t)}/\overline{L})$, что означает неразветвленность расширения $L(t)/L$, т.е. неразветвленность $L(\frac{1}{\pi_0^n} H_3(\alpha))/L$.

Заметим, что утверждения теоремы остаются верны, какой бы из элементов $\frac{1}{\pi_0^n} H_3(\alpha)$ ни был взят. Действительно, очевидно, что любой элемент вида $\frac{1}{\pi_0^n} H_3(\alpha)$ представляется как

$$E_F(A\mathfrak{E}) +_F \psi,$$

где $\psi \in \ker[\pi_0^n]_F$. Откуда мы получаем, что все эти элементы лежат в $F(\mathfrak{M})$, а значит, являются алгебраическими над L . Значит, поле $L(E_F(A\mathfrak{E}) +_F \psi)$ полно и содержит элемент

$$(E_F(A\mathfrak{E}) +_F \psi) -_F \psi = E_F(A\mathfrak{E}).$$

То есть

$$L(E_F(A\mathfrak{E}) +_F \psi) = L(E_F(A\mathfrak{E})).$$

Приступим к доказательству п. 2.

Различные A , удовлетворяющие уравнению $A^\varphi - A = \alpha$, отличаются друг от друга на элемент из кольца O_0 . Поэтому если $H_3(\alpha)$ задается элементом A , а $H_3(\alpha)'$ – элементом A' , причем $A' = A + a$, где $a \in O_0$, то

$$\begin{aligned} H_3(\alpha)' -_F H_3(\alpha) &= E_F(\pi_0^n A' \mathfrak{E}) -_F E_F(\pi_0^n A \mathfrak{E}) = E_F(\pi_0^n (A' - A) \mathfrak{E}) \\ &= E_F(\pi_0^n a \mathfrak{E}) = [a]_F([\pi_0^n]_F(E_F(\mathfrak{E}))) = [a]_F([\pi_0^n]_F(\mathfrak{Z})) = 0. \end{aligned}$$

Итак, $H_3(\alpha)' = H_3(\alpha)$.

2. Применение теории Хонды для формальных модулей

2.1. Теория Хонды для формальных O_0 -модульных групп. Пусть N/K_0 – неразветвленное расширение локального поля K_0 , π_0 – простой элемент в K_0 , φ – автоморфизм Фробениуса в N/K_0 :

$$\varphi(a) \equiv a^q \pmod{\pi_0}$$

для всех $a \in O_N$, где q – число элементов поля вычетов K_0 поля K_0 .

Пусть $O_N[[\Delta]]'$ – некоммутативное кольцо Робба от переменной Δ , которое совпадает с $O_N[[\Delta]]$ как левый O_N -модуль и имеет место соотношение

$$\Delta a = \varphi(a) \Delta$$

для любого $a \in O_N$.

Зададим действие оператора Δ на рядах из $O_N((X))$:

$$\Delta\left(\sum a_i X^i\right) = \sum \varphi(a_i) X^{qi}.$$

ТЕОРЕМА 2 (см. [3], [5], [6]). 1) Пусть $\Lambda(\Delta) = 1 + c_1 \Delta + \dots \in N[[\Delta]]$. Тогда ряд $\lambda(X) = \Lambda(\Delta)(X)$ является логарифмом π_0 -типической формальной O_0 -модульной группы F над O_N тогда и только тогда, когда

$$\Lambda = \pi_0 U^{-1}$$

для некоторого ряда $U = \pi_0 + \alpha_1 \Delta + \alpha_2 \Delta^2 + \dots$ из кольца Робба $O_N[[\Delta]]'$.

2) Для любой формальной O_0 -модульной группы над O_N с логарифмом $\lambda_F(X)$ существуют ряд $h(X) = X + \dots \in O_N[[X]]$ и ряд $U = \pi_0 + \alpha \Delta + \dots$ из кольца $O_N[[\Delta]]'$ такие, что

$$\lambda_F(X) = \pi_0 U^{-1}(h(X)).$$

3) Ряды Λ и Λ' соответствуют строго изоморфным формальным O_0 -модульным группам над O_N тогда и только тогда, когда

$$U' = \varepsilon U,$$

где $\varepsilon = 1 + c_1 \Delta + \dots \in O_N[[\Delta]]'$.

4) Ряд $f(X) \equiv aX \pmod{\deg 2}$ задает гомоморфизм формальных O_0 -модульных групп F и F' над O_N тогда и только тогда, когда существует $c \in O_N[[\Delta]]'$ такой, что

$$CU = U'a.$$

5) Пусть ряды Λ и Λ' из $N[[\Delta]]$ удовлетворяют сравнению $\Lambda \equiv \Lambda' \pmod{\pi_0}$. Тогда Λ' задает логарифм формальной O_0 -модульной группы F' над O_N тогда и только тогда, когда ряд

Λ задает логарифм некоторой формальной O_0 -модульной группы F над O_N . При этом F' строго изоморфна F .

6) В каждом классе изоморфных формальных O_0 -модульных групп формальной O_0 -высоты h_0 имеется канонический представитель F_{can} с логарифмом

$$\lambda_{\text{can}}(X) = \left(1 - \frac{\mathcal{A}(\Delta)}{\pi_0}(X)\right),$$

где $\mathcal{A}(\Delta) = \alpha_1\Delta + \dots + a_{h_0}\Delta^{h_0}$, при этом $\alpha_1, \dots, \alpha_{h_0-1} \equiv 0 \pmod{\pi_0}$, $\alpha_{h_0} \in O_0^*$

2.2. Теорема о представлении логарифма формальной O_0 -модульной группы. Пусть K – конечное расширение K_0 , N – подполе инерции в K/K_0 и σ – автоморфизм Фробениуса в N/K_0 :

$$\sigma(\alpha) \equiv \alpha^q \pmod{\pi_0 O_N}, \quad \alpha \in O_N,$$

где $q = \#\overline{K_0}$.

Пусть Δ – оператор на кольце $O_N((X))$:

$$\Delta\left(\sum a_i x^i\right) = \sum \sigma(a_i) x^{qi},$$

$W = O_N[[\Delta]]'$ – некоммутативное кольцо Робба с оператором $\Delta a = \sigma(a)\Delta$, $W' = N[[\Delta]]'$ – аналогичное кольцо.

Если $f \in K[[\Delta]]$, $g \in N[[\Delta]]$, то

$$f(\Delta)g(\Delta) = \sum c_i \Delta^i (a_j \Delta^j) = \sum c_i \sigma^i(a_j) \Delta^{i+j}.$$

Пусть t – переменная и $\sigma(t) = t^q$. Обозначим $\mathfrak{A} = O_N[[t]]$, и пусть $\mathfrak{A}[[\Delta]]'$ – кольцо Робба, как в п. 2.1.

Пусть $F(X, Y)$ – формальная O_0 -модульная группа над O с логарифмом $\lambda(X) = X + c_1 X^q + c_2 X^{q^2} + \dots$, $c_i \in K$, который запишем в виде

$$\lambda(X) = \Lambda(\Delta)(X),$$

где $\Lambda(\Delta) = 1 + c_1\Delta + c_2\Delta^2 + \dots \in K[[\Delta]]$.

ТЕОРЕМА 3. Ряд $\Lambda(\Delta)$ можно представить в виде

$$\Lambda(\Delta) = v(\Delta)u(\Delta)^{-1},$$

где

$$v(\Delta) = \pi_0 + c_1\Delta + c_2\Delta^2 + \dots \in K[[\Delta]],$$

$$u(\Delta) = \pi_0 + a_1\Delta + a_2\Delta^2 + \dots + a_{h_0}\Delta^{h_0} + \dots \in W = O_N[[\Delta]]',$$

при этом $a_1, \dots, a_{h_0-1} \in \pi_0$, $a_{h_0} \in O_N^*$, h_0 – формальная O_0 -высота F . Кроме того, $\pi_0^l \pi^{q^l} v(\Delta) \in O[[\Delta]]$, $l = [\log_q e/(q-1)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО фактически повторяет доказательство предложения 1.4.1 из работы [6].

2.3. Функция Артина–Хассе формальной O_0 -модульной группы. Пусть K – конечное расширение поля K_0 , N – подполе инерции в K/K_0 , φ – автоморфизм Фробениуса в N/K_0 и $F(X, Y)$ – формальная O_0 -модульная группа над $O = O_K$ формальной O_0 -высоты h . Пусть

$$g: O_N[[t]] \rightarrow O,$$

$$t \mapsto \pi,$$

– кольцевой гомоморфизм (здесь π – простой элемент в K). Тогда из свойств универсального O_0 -формального закона [3] следует, что найдется формальный $O_0[[t]]$ -модульный закон $F_t(X, Y)$ такой, что

$$F(X, Y) = g_*(F_t(X, Y)),$$

где g_* означает применение гомоморфизма g к коэффициентам. При этом логарифм

$$\begin{aligned}\lambda_F(X) &= g_*(\lambda_{F_t}(X)), \\ [a]_F(X) &= g_*([a]_{F_t}(X))\end{aligned}$$

для любого элемента $a \in O_0$.

Для формальной $O_0[[t]]$ -модульной группы $F_t(X, Y)$ согласно теореме 2 из п. 2.1 найдутся ряд $h(X) \in X + X O_N[[t]][[X]]$ и ряд $U(\Delta) = \pi_0 + O_N[[t]][[\Delta]]\Delta$ такие, что

$$\lambda_{F_t}(X) = \pi_0 U(\Delta)^{-1} h(X).$$

Пусть N' – неразветвленное расширение поля N , $O_{N'}$ – кольцо целых. Пусть $f(X) \in O_{N'}[[X]][[t]]X$ и

$$\Delta f = \Delta \left(\sum a_{ij} X^i t^j \right) = \sum \varphi(a_i) X^{qi} t^{qj}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Зададим функцию Артина–Хассе $E_{F_t}(f)$ и обратную к ней $l_{F_t}(f)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}E_{F_t}(f) &= \lambda_{F_t}^{-1}(\pi_0 U(\Delta)^{-1} f), \\ l_{F_t}(f) &= \pi_0^{-1} U(\Delta) \lambda_{F_t}(f).\end{aligned}$$

Проверим основные свойства функций E_{F_t} и l_{F_t} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеем:

- 1) $E_{F_t}(f), l_{F_t}(f) \in O_{N'}[[t]][[X]]$;
- 2) $E_{F_t}(l_{F_t}(f)) = l_{F_t}(E_{F_t}(f)) = f$;
- 3) $E_{F_t}(f_1 + f_2) = E_{F_t}(f_1) +_{F_t} E_{F_t}(f_2)$, $E_{F_t}(af) = [a]_{F_t}(E_{F_t}(f))$, $a \in O_0$;
- 4) $l_{F_t}(f_1 +_{F_t} f_2) = l_{F_t}(f_1) + l_{F_t}(f_2)$, $l_{F_t}([a]_{F_t} f) = al_{F_t}(f)$, $a \in O_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала свойства 3) и 4). Из определения функций получаем

$$\begin{aligned}E_{F_t}(f_1 + f_2) &= \lambda_{F_t}^{-1}(\pi_0 U(\Delta)^{-1}(f_1 + f_2)) \\ &= \lambda_{F_t}^{-1}(\pi_0 U(\Delta)^{-1} f_1) +_{F_t} \lambda_{F_t}^{-1}(\pi_0 U(\Delta)^{-1} f_2) = E_{F_t}(f_1) +_{F_t} E_{F_t}(f_2).\end{aligned}$$

Аналогично из определения проверяется вторая часть свойства 3) и свойство 4).

Непосредственно из определения следует свойство 2).

Осталось проверить свойство 1). Если $f = \theta X^m t^n$, где θ – представитель Тейхмюллера в $O_{N'}$, тогда $\Delta f = (\theta X^m t^n)^q = f^q$, и свойство 1) для f вытекает из свойства 1) для X . Заметим, что ряд $\lambda_{F_t q} = \pi_0 U(\Delta)^{-1} X$ является логарифмом формальной группы, изоморфной F_t . Теперь из определения E_{F_t} ясно, что $E_{F_t}(X) \in O_{N'}$ равносильно тому, что $E_{F_t q}(X) \in O_{N'}$. Но $E_{F_t q}(X) = X$, поэтому в данном случае свойство 1) проверено.

Если $f = \pi_0^k \theta X^m$, то свойство 1) следует из свойства 3).

Если $f = \alpha X^m$, где $\alpha = \sum \pi_0^k \theta_k$, то

$$E_{F_t}(\alpha X^m) = \sum_{F_t} [\pi_0^k]_{F_t} (E_{F_t}(\theta_k X^m)) \in O_{N'}.$$

Если $f = \sum_{m \geq 1} \sum_{i \geq 0} \alpha_{mi} t^i X^m$, то свойство 1) следует из свойства 3).

Для проверки свойства 1) функции l_{F_t} достаточно заметить, что E_{F_t} сюръективно. Действительно, аналогично уже проведенным шагам можно увидеть, что

$$E_{F_t} \left(\sum_{m \geq S} \sum_{i \geq 0} \alpha_{mi} t^i X^m \right) = \sum_{i \geq 0} \alpha_{Si} t^i X^S + \dots,$$

т.е. коэффициент при наименьшей степени X сохраняется.

Итак, мы получили, что в образе E_{F_t} есть набор рядов со всеми возможными минимальными степенями X и коэффициентами при них. Тогда, очевидно, из них мы можем получить операций $+_{F_t}$ любой ряд из $O_{N'}[[X]][[t]]X$.

2.4. Примарные элементы для формальных O_0 -модульных групп. В п. 1 были построены примарные элементы, в определение которых входит элемент A из пополнения максимального неразветвленного расширения поля N . Для использования примарных элементов в явной конструкции теории полей классов и законов взаимности требуются примарные элементы, в определение которых входят только элементы исходного поля. Построение таких примарных элементов и является целью настоящего пункта.

Пусть K – конечное расширение поля K_0 с кольцом целых $O = O_K$ и $F(X, Y)$ – формальная O_0 -модульная группа над O . Пусть, как и ранее, F_t – соответствующий группе F формальный O_0 -модульный закон, полученный с помощью гомоморфизма g из п. 2.3.

Пусть L – расширение поля K , содержащее все корни изогении $[\pi_0^n]_F(X)$ и $\mathfrak{z}$ – один из первообразных корней: $[\pi_0^n]_F(\mathfrak{z}) = 0$, $[\pi_0^{n-1}]_F(\mathfrak{z}) \neq 0$.

Пусть T – подполе инерции в L/K_0 , $N \subset T$ и Π – простой элемент в L ; тогда разложению $\mathfrak{z} := \sum_{i \geq 1} \alpha_i \Pi^i$, $\alpha_i \in O_T$, соответствует ряд $\mathfrak{z}(X) = \sum_{i \geq 1} \alpha_i X^i \in O_T[[X]]$. Таким образом, определен ряд $l_{F_t}(\mathfrak{z}(X)) \in O_T[[t]][[X]]$.

Пусть φ – автоморфизм Фробениуса в пополнении $\tilde{T}$ максимального неразветвленного расширения поля T , т.е.

$$\varphi(\alpha) \equiv \alpha^q \pmod{\pi_0}, \quad \alpha \in O_{\tilde{T}},$$

где $q = \#K_0$. Тогда для любого $a \in O_T$ найдется элемент A из $O_{\tilde{T}}$, удовлетворяющий условию

$$A^\varphi - A = a.$$

Определим сначала π_0^n -примарный элемент для формальной O_0 -модульной группы F_t :

$$H_t(a) = E_{F_t}(\pi_0^n A l_{F_t}(\mathfrak{z}(X))).$$

Для формальной O_0 -модульной группы F определим π_0^n -примарный элемент следующим образом:

$$H_F(a) = H_t(a) \Big|_{\substack{t=\pi \\ X=\Pi}}.$$

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_L$ – максимальный идеал кольца целых поля L и $F(\mathfrak{M})$ – формальный модуль, натянутый на $\mathfrak{M}$.

Пусть, как и раньше, σ – образующий элемент группы Галуа расширения $T(A)/T$; тогда

$$A^\sigma - A = \varkappa \in O_0.$$

Продолжение σ на $\tilde{T}$ обозначим той же буквой σ .

ТЕОРЕМА 4. 1) Элемент $H_F(a)$ является π_0^n -примарным в модуле $F(\mathfrak{M})$, т.е. $H_F(a) \in L$ и $L(\frac{1}{\pi_0^n} H_F(a))/L$ – конечное абелево неразветвленное расширение.

2) Примарный элемент $H_F(a)$ не зависит от выбора элемента A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству теоремы 1 (приведем лишь набросок).

С помощью действия автоморфизма σ мы убеждаемся в том, что коэффициенты ряда $H_t(a)$ лежат в поле L .

Затем мы замечаем, что

$$\frac{1}{[\pi_0^n]} H_F(a) = E_{F_t}(Al_{F_t}(\mathfrak{Z}(X))) \Big|_{\substack{t=\pi \\ X=\Pi}}$$

лежит в поле $\widetilde{L(A)}$, которое, в свою очередь, является неразветвленным над L (так как $\widetilde{T(A)}$ неразветвленное над T).

Далее, наша задача – получить примарный элемент, в определение которого входят только элементы исходного поля.

Итак, пусть $H_t(a) - \pi_0^n$ -примарный элемент группы F_t . Логарифм λ_{F_t} группы F_t задается рядом $U(\Delta) = \pi_0 - A(\Delta)$, где $A(\Delta) = \alpha_1\Delta + \alpha_2\Delta^2 + \dots$, $\alpha_i \in O_N[[X]]$.

ЛЕММА 2. *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{\pi_0^n} H_t(a) = E_{F_t}(Al_{F_t}(\mathfrak{Z}(X))) = E_{F_t} \left(\sum_{i \geq 1} \frac{\alpha_i a_i \Delta^i}{\pi_0} \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X)) \right) +_{F_t} \lambda_{F_t}^{-1}(A \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X))),$$

где $a_i = a + a^\varphi + \dots + a^{\varphi^{i-1}}$, φ – автоморфизм Фробениуса в N/K_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции E_{F_t} следует, что

$$E_{F_t} \left(\left(1 - \frac{A(\Delta)}{\pi_0} \right) A \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X)) \right) = \lambda_{F_t}^{-1}(A \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X))).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} E_{F_t}(Al_{F_t}(\mathfrak{Z}(X))) &= E_{F_t} \left(A \left(1 - \frac{A(\Delta)}{\pi_0} \right) \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X)) \right) \\ &\quad +_{F_t} \lambda_{F_t}^{-1}(Al_{F_t}(\mathfrak{Z}(X))) -_{F_t} E_{F_t} \left(\left(1 - \frac{A(\Delta)}{\pi_0} \right) A \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X)) \right) \\ &= E_{F_t} \left(\sum \frac{\alpha_i (A^{\varphi^i} - A)}{\pi_0} \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X)) \right) +_{F_t} \lambda_{F_t}^{-1}(A \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X))). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что из равенства $A^\varphi - A = a$ следует, что $A^{\varphi^i} - A = a_i$.

Пусть теперь

$$P_F(a) = E_{F_t} \left(\pi_0^{n-1} \left(\sum_{i \geq 1} \alpha_i a_i \Delta^i \right) \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X)) \right) \Big|_{\substack{t=\pi \\ X=\Pi}}.$$

Тогда имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Выполнено $H_F(a) = P_F(a)$. И, тем самым, мы дали определение примарного элемента, под которое подходят только элементы исходного поля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме нам надо проверить только следующее равенство:

$$\lambda_{F_t}^{-1}(\pi_0^n A \lambda_{F_t}(\mathfrak{Z}(X))) \Big|_{\substack{t=\pi \\ X=\Pi}} = 0.$$

После подстановки получим необходимое равенство

$$\lambda_F(\pi_0^n A \lambda_F(\mathfrak{Z})) = 0,$$

которое в свою очередь следует из того, что $\mathfrak{Z}$ как корень изогении $[\pi_0^n]_F$ является также корнем логарифма.

Список литературы

- [1] С. В. Востоков, “Явная форма закона взаимности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:6 (1978), 1288–1321.
- [2] С. В. Востоков, “Норменное спаривание в формальных модулях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 765–794.
- [3] M. Hazewinkel, *Formal Groups and Applications*, Pure Appl. Math., **78**, Academic Press, New York, 1978.
- [4] E. Artin, H. Hasse, “Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n -ten Potenzreste im Körper der l^n -ten Einheitswurzeln”, *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, **6** (1928), 146–162.
- [5] T. Honda, “On the theory of commutative formal groups”, *J. Math. Soc. Japan*, **22**:2 (1970), 213–246.
- [6] М. В. Бондарко, С. В. Востоков, “Явная классификация формальных групп над локальными полями”, *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, **241**, Наука, М., 2003, 43–67.