Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, Д. Б. Демидов, О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с L -функциями Гекке мнимых квадратичных полей, лежащих на коротких промежутках, *Совр. пробл. матем.*, 2013, выпуск 17, 164–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm49>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:16:47

О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с L -функциями Гекке мнимых квадратичных полей, лежащих на коротких промежутках

С. А. Гриценко, Б. Д. Демидов

Белгородский государственный университет

*Посвящается светлой памяти
Анатолия Алексеевича Карацубы*

1. Введение

Пусть $N_0(T)$ – число нулей $\zeta(1/2 + it)$ на промежутке $(0, T]$.

В 1921 г. Харди и Литтлвуд [1] доказали, что

$$N_0(T) \geq c_1 T, \quad c_1 > 0 \text{ – абсолютная постоянная.}$$

В 1942 г. Сельберг [2] получил правильную по порядку оценку $N_0(T)$:

$$N_0(T) \geq c_2 T \log T, \quad c_2 > 0 \text{ – абсолютная постоянная.}$$

Для арифметических рядов Дирихле, удовлетворяющих функциональному уравнению риманова типа, но не имеющих эйлерова произведения, правильные по порядку нижние оценки для числа их нулей на отрезках критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ пока не получены.

Первым, кто показал, что на критической прямой лежит аномально много нулей арифметического ряда Дирихле без эйлерова произведения, был Воронин, который в 1980 г. доказал [3], что

$$N_0(T, f) > c_3 T \exp\left(\frac{1}{20} \sqrt{\log \log \log \log T}\right), \quad (1)$$

где $N_0(T, f)$ – число нулей ρ функции Дэвенпорта–Хейльбронна $f(s)$ таких, что $\operatorname{Re} \rho = 1/2$, $0 < \operatorname{Im} \rho \leq T$, $c_3 > 0$ – абсолютная постоянная.

В 1989 г. А. А. Карацуба [4] разработал новый метод оценок снизу числа нулей некоторых рядов Дирихле на отрезках критической прямой, с помощью которого доказал следующее неравенство, существенно усилив тем самым результат Воронина (1):

$$N_0(T, f) \geq T \sqrt{\log T} (\log T)^{-\varepsilon}, \quad (2)$$

где ε – сколь угодно малое положительное число, $T > T_0(\varepsilon) > 1$.

Пусть $Z(t, \chi) = e^{i\theta(t, \chi)} L(1/2 + it)$, где функция $\theta(t, \chi)$ подобрана так, что $Z(t, \chi)$ вещественна при вещественных t . Тогда $Z(t, \chi)$ представляет собой аналог функции Харди (см., например, [5; гл. 2]).

Пусть

$$G(t) = a_1 Z(t, \chi_1) + \dots + a_N Z(t, \chi_N),$$

где $a_1, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа.

В 1991 г. А. А. Карацуба [6] поставил и решил своим методом 1989 г. задачу о нижней оценке числа нулей $G(t)$ на отрезке $(0, T]$.

Эту задачу мы называем *задачей А. А. Карацубы*.

В 1991 г. Сельберг [7] определил класс S рядов Дирихле и высказал ряд гипотез о свойствах функций из S .

В класс S помимо дзета-функции Римана, L -функций Дирихле входят и другие арифметические ряды Дирихле, в частности, такие ряды $F(s)$, приближенные функциональные уравнения которых содержат порядка $|\operatorname{Im} s|$ слагаемых. В соответствии с классификацией, предложенной в [8], такие ряды из класса Сельберга имеют степень 2.

В 1996 г. Гриценко рассмотрел вопрос о числе $N_0(T, f)$ нулей на отрезке $[0, T]$ функции

$$f(t) = \sum_{j=1}^N a_j Z(t, F_j), \quad (3)$$

где a_j – произвольные вещественные числа, а $Z(t, F_j)$ – аналоги функции Харди, соответствующие функциям $F_j(s)$ из класса Сельберга степени 2, $j = 1, \dots, N$.

В [9] доказано, что при условии справедливости некоторых гипотез, являющихся гипотезами Сельберга и их слегка усиленными вариантами, справедлива оценка

$$N_0(T, f) \gg T \exp\{\sqrt{\log \log \log T}\}. \quad (4)$$

Определим подкласс класса Сельберга, состоящий из рядов Дирихле степени 2. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – мнимое квадратичное поле, $\mathbb{Z}_K$ – кольцо целых алгебраических чисел K . Следуя терминологии книги [5], будем называть характерами Гекке групповые характеры группы классов идеалов кольца $\mathbb{Z}_K$. Пусть ψ – характер Гекке. L -функцией Гекке назовем ряд Дирихле

$$L(s, \psi) = \sum_{\mathfrak{a}} \psi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

где суммирование ведется по целым ненулевым идеалам $\mathfrak{a}$ кольца $\mathbb{Z}_K$, $N(\mathfrak{a})$ – норма идеала $\mathfrak{a}$. Наш подкласс класса Сельберга состоит из L -функций Гекке мнимых квадратичных полей.

L -функции Гекке, соответствующие неглавным характерам Гекке, аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость и удовлетворяют функциональному уравнению вида

$$L(s, \psi) = \rho(s, \psi) L(1-s, \psi), \quad \rho(s, \psi) = \frac{1}{\theta_\psi} \left(\frac{\sqrt{\delta_K}}{2\pi} \right)^{1-2s} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)},$$

где δ_K – дискриминант поля K , θ_ψ – комплексная константа, зависящая только от ψ , модуль которой равен 1 (см., например, [10; гл. 7]).

Определим функции $\theta(t, \psi)$ и $Z(t, \psi)$:

$$\exp(i\theta(t, \psi)) = \left(\rho\left(\frac{1}{2} + it\right) \right)^{-1/2}, \quad (5)$$

$$Z(t, \psi) = \exp(i\theta(t, \psi)) L\left(\frac{1}{2} + it, \psi\right). \quad (6)$$

Легко видеть, что при вещественных t функции $\theta(t, \psi)$ и $Z(t, \psi)$ принимают вещественные значения.

В 1997 г. Гриценко [11] доказал неравенство (4) безусловно в случае, когда $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – L -функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля.

В 2010 г. Резвякова [12] применила к последней задаче метод А. А. Карацубы [4] и получила оценку

$$N_0(T, f) \gg T(\log T)^{2/h(-D)} \exp\{-c\sqrt{\log \log T}\},$$

где $h(-D)$ – порядок группы классов идеалов, $c > 0$.

В настоящей статье решается задача о нулях функции $f(t)$, определяемой равенствами (3), (6), лежащих на коротких промежутках.

Для того чтобы свести к минимуму трудности, доставляемые арифметикой квадратичного поля, мы ограничиваемся частным случаем, когда $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – L -функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля вида $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$, где p_0 – простое число, сравнимое с 3 по модулю 4.

Отметим, что поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$ многоклассны при p_0 больших некоторой константы. Таблица чисел классов идеалов для некоторых из них приводится в монографии [13].

Сформулируем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, $T^{15/16+5\varepsilon} \leq H \leq T$.

Пусть $F_1(s), \dots, F_N(s)$ – L -функции Гекке, отвечающие комплексным характерам Гекке одного и того же мнимого квадратичного поля вида $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$, где p_0 – простое число, сравнимое с 3 по модулю 4, а функция $f(t)$ определена равенством (3), в котором $a_1, a_2, \dots, a_N$ – произвольные вещественные числа.

Пусть $N_0(T, f)$ – число нулей функции $f(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Тогда существует $c > 0$ такое, что

$$N_0(T + H, f) - N_0(T, f) \gg H(\ln T)^{2/h} e^{-c\sqrt{\ln \ln T}},$$

где $h(p_0)$ – число классов идеалов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

- p_0 – простое число, сравнимое с 3 по модулю 4;
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-p_0})$ – мнимое квадратичное поле, $\mathbb{Z}_K$ – соответствующее кольцо целых алгебраических чисел;
- $\delta_K = -p_0$ – дискриминант поля K ;
- $h(\delta_K)$ – число классов идеалов поля K ;
- $L(s, \psi)$ – L -функция Гекке,

$$L(s, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1;$$

- $\bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2$;
- A, A_1, A_2 – симметричные матрицы размера 2×2 с целыми коэффициентами;
- $Q(\bar{n}), Q_1(\bar{n}), Q_2(\bar{n})$ – бинарные примитивные квадратичные формы дискриминанта δ_K , связанные с матрицами A, A_1, A_2 формулами

$$Q(\bar{n}) = \frac{1}{2} \bar{n}^t A \bar{n}, \quad Q_1(\bar{n}) = \frac{1}{2} \bar{n}^t A_1 \bar{n}, \quad Q_2(\bar{n}) = \frac{1}{2} \bar{n}^t A_2 \bar{n};$$

- $Q'(\bar{n}), Q'_1(\bar{n}), Q'_2(\bar{n})$ – квадратичные формы с матрицами $p_0 A^{-1}, p_0 A_1^{-1}, p_0 A_2^{-1}$;
- $G(q, u, \bar{m})$ – сумма Гаусса, отвечающая квадратичной форме $Q(\bar{n})$,

$$G(q, u, \bar{m}) = \sum_{\bar{g} \pmod{q}} \exp\left(2\pi i \frac{uQ(\bar{g}) + \bar{m}^t \bar{g}}{q}\right),$$

$G_1(q, u, \bar{m}), G_2(q, u, \bar{m})$ – суммы Гаусса, отвечающие квадратичным формам $Q_1(\bar{n}), Q_2(\bar{n})$.

2. Вспомогательные утверждения

В методе А. А. Карацубы [6] важную роль играют приближенные функциональные уравнения рядов Дирихле. Для L -функций Гекке известно, например, приближенное функциональное уравнение Лаврика [14]. Однако наличие в его формуле остаточного члена, который при $s = 1/2 + it$ может расти как $\log^2 |t|$, когда $|t| \rightarrow \infty$, не дает возможности применить ее к нашей задаче. Мы выведем приближенное функциональное уравнение L -функции Гекке несколько иного вида, чем у Лаврика. Его преимущество состоит в малости остаточного члена.

ЛЕММА 1. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно малое число, ψ – комплексный характер Гекке, $L(s, \psi)$ – соответствующая L -функция Гекке. Пусть $T > T_0 > 2$, $H = T^{15/16+\varepsilon}$, $X = T^{0.001\varepsilon}$, $T - 1 \leq t \leq T + H + 1$, $P = P(t) = t\sqrt{|\delta_K|}/2\pi$. Пусть ν_1 и ν_2 – натуральные числа, меньшие X , $s = 1/2 + it$.

Тогда справедливо равенство

$$L(s, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} \exp\left(-\frac{n\nu_1}{P\nu_2}\right) + \rho(s, \psi) \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{s-1} \left(1 - \exp\left(-\frac{P\nu_2}{n\nu_1}\right)\right) + O(T^{(\varepsilon-1)/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с равенства Меллина

$$\exp\left(-\frac{n\nu_1}{P\nu_2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(w) \left(\frac{P\nu_2}{n\nu_1}\right)^w dw.$$

Умножим обе его части на $a(n)n^{-s}$ и просуммируем получившееся равенство по n от 1 до ∞ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} \exp\left(-\frac{n\nu_1}{P\nu_2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(w) \left(\frac{P\nu_2}{\nu_1}\right)^w L(s+w, \psi) dw.$$

Будем преобразовывать интеграл, стоящий в правой части, который обозначим через I . Пользуясь следствием из формулы Стирлинга

$$\Gamma(2+iv) \ll (2+|v|)^{3/2} e^{-\pi|v|/2},$$

получаем

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\log^2 T}^{2+i\log^2 T} \Gamma(w) \left(\frac{P\nu_2}{\nu_1}\right)^w L(s+w, \psi) dw + O(T^{-1}).$$

Пользуясь неравенством

$$L(\sigma + it, \psi) = O((|t| + 2)^{1-\sigma} \log^3(|t| + 2)),$$

выполняющимся при $-1/\log(|t| + 2) \leq \sigma \leq 1 + \log(|t| + 2)$ и прямо следующим из приближенного функционального уравнения Лаврика, перенесем отрезок интегрирования на

$$\operatorname{Re} w = -\beta_0, \quad -\log^2 T \leq \operatorname{Im} w \leq \log^2 T,$$

где $\beta_0 = 1/2 + 1/2 \log T$. При этом “пройдем” через простой полюс в точке $w = 0$ с вычетом $L(s, \psi)$; по теореме Коши имеем

$$I = L(s, \psi) + I_1 + O(T^{-1}),$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_0-i\log^2 T}^{-\beta_0+i\log^2 T} \Gamma(w) \left(\frac{P\nu_2}{\nu_1}\right)^w L(s+w, \psi) dw.$$

Воспользуемся функциональным уравнением L -функции Гекке

$$L(s+w, \psi) = \rho(s+w, \psi)L(1-s-w, \psi),$$

где

$$\rho(s+w, \psi) = \frac{1}{\theta_\psi} \left(\frac{\delta_K}{2\pi} \right)^{1-2s-2w} \frac{\Gamma(1-s-w)}{\Gamma(s+w)}.$$

Из формулы Стирлинга следует, что

$$\rho(s+w, \psi) = \rho(s, \psi)P^{-2w}(1 + O(T^{-1}) + O(|w|^2T^{-1})).$$

Отсюда имеем

$$I_1 = \rho(s, \psi) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_0-i\log^2 T}^{-\beta_0+i\log^2 T} \Gamma(w) \left(\frac{\nu_2}{P\nu_1} \right)^w L(s+w, \psi) dw + O(T^{(\varepsilon-1)/2}).$$

Далее, распространяем отрезок интегрирования на всю прямую $\operatorname{Re} w = -\beta_0$, представляем $L(1-s-w, \psi)$ в виде суммы ряда Дирихле (учитывая неравенство $\operatorname{Re}(1-s-w) > 1$) и меняем порядок суммирования и интегрирования:

$$I_1 = \rho(s, \psi) \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_0-i\infty}^{-\beta_0+i\infty} \Gamma(w) \left(\frac{n\nu_2}{P\nu_1} \right)^w dw + O(T^{(\varepsilon-1)/2}).$$

Теперь утверждение леммы следует из равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta_0-i\infty}^{-\beta_0+i\infty} \Gamma(w) \left(\frac{n\nu_2}{P\nu_1} \right)^w dw = -1 + \exp\left(-\frac{P\nu_2}{n\nu_1}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $|u| \leq 1$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} Z(t+u, \psi) &= \theta_\psi^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{P}{n} \right)^{i(t+u)} e^{-it} \exp\left(-\frac{n\nu_1}{P\nu_2}\right) \\ &+ \theta_\psi^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{\sqrt{n}} \left(\frac{P}{n} \right)^{-i(t+u)} e^{it} \left(1 - \exp\left(-\frac{P\nu_2}{n\nu_1}\right) \right) + O(T^{(2\varepsilon-1)/2}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в равенстве леммы 1 $t+u$ вместо t , воспользуемся формулой Стирлинга и неравенством $|a(n)| \leq \tau(n)$ (см., например, [11]).

Следствие 1 представляет собой приближенное функциональное уравнение для аналога функции Харди. Нам потребуется приближенное функциональное уравнение для аналога функции, названной А. А. Карацубой функцией Харди–Сельберга.

Пусть $\beta(\nu)$ – вещественные числа, не превосходящие $\tau(\nu)$, значения которых будут уточнены позже. Пусть $\phi_X(s) = \sum_{\nu < X} \beta(\nu)\nu^{-s}$, где X – параметр, определенный в лемме 1. Пусть

$$F(t, \psi) = Z(t, \psi) \left| \phi_X\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2.$$

ЛЕММА 2. В условиях леммы 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} F(t+u, \psi) &= \theta_\psi^{1/2} \sum_{\lambda} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{i(t+u)} e^{-it} \exp\left(-\frac{\lambda}{P}\right) \\ &+ \theta_\psi^{-1/2} \sum_{\lambda} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{-i(t+u)} e^{it} \left(1 - \exp\left(-\frac{P}{\lambda}\right) \right) + O(T^{(3\varepsilon-1)/2}), \end{aligned}$$

где

$$A(\lambda) = \sum_{n\nu_1/\nu_2=\lambda} \frac{a(n)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\nu_2}$$

(суммирование ведется по натуральным ν_1 и ν_2 , меньшим X , и произвольным натуральным n).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части равенства из следствия 1 на

$$\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{-i(t+u)}$$

и просуммируем получившееся равенство по натуральным ν_1 и ν_2 , меньшим X .

В следствии 2 формула леммы 2 приводится к виду, более удобному для приложений.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $P_0 = T\sqrt{|\delta_K|}/2\pi$. В условиях леммы 2 справедливо равенство

$$\begin{aligned} F(t+u, \psi) &= \theta_\psi^{1/2} W_1(t+u, \psi) + \theta_\psi^{-1/2} W_2(t+u, \psi) + \theta_\psi^{-1/2} W_3(t+u, \psi) \\ &+ \theta_\psi^{-1/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} W_4(t+u, \psi, \nu) + \theta_\psi^{1/2} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+\nu>0}}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} W_1(t+u, \psi, \mu, \nu) \\ &+ \theta_\psi^{-1/2} \sum_{\mu=1}^{\infty} W_2(t+u, \psi, \mu) + \theta_\psi^{-1/2} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu+\nu>0}}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} W_3(t+u, \psi, \mu, \nu) \\ &+ \theta_\psi^{-1/2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} W_4(t+u, \psi, \mu, \nu) + O(T^{(3\varepsilon-1)/2}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_1(t+u, \psi) &= \sum_{\lambda \leq P_0 \log^2 T} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} \left(\frac{P_0}{\lambda}\right)^{iu} e^{-it} \exp\left(-\frac{\lambda}{P_0}\right), \\ W_2(t+u, \psi) &= \sum_{\lambda \leq P_0} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} \left(\frac{P_0}{\lambda}\right)^{-iu} e^{it}, \\ W_3(t+u, \psi) &= \sum_{P_0 \log^{-2} T < \lambda \leq P_0} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} \left(\frac{P_0}{\lambda}\right)^{-iu} e^{it} \exp\left(-\frac{P_0}{\lambda}\right), \\ W_4(t+u, \psi, \nu) &= \sum_{P_0 < \lambda} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} \left(\frac{P_0}{\lambda}\right)^{-iu} e^{it} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^\nu, \\ W_1(t+u, \psi, \mu, \nu) &= \sum_{\lambda \leq P_0 \log^2 T} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{it} \left(\frac{P_0}{\lambda}\right)^{iu} e^{-it} \exp\left(-\frac{\lambda}{P_0}\right) \\ &\quad \times \frac{1}{\nu!} \left(\frac{iu}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{P_0}\right)^\nu \left(\frac{P-P_0}{P_0}\right)^\nu \left(\frac{P-P_0}{P}\right)^\mu, \\ W_2(t+u, \psi, \mu) &= \sum_{\lambda \leq P_0} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} \left(\frac{P_0}{\lambda}\right)^{-iu} e^{it} \left(\frac{-iu}{\mu}\right) \left(\frac{P-P_0}{P}\right)^\mu, \end{aligned}$$

$$W_3(t+u, \psi, \mu, \nu) = \sum_{P_0 \log^{-2} T < \lambda \leq P_0} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} \left(\frac{P_0}{\lambda}\right)^{-iu} e^{it} \exp\left(-\frac{P_0}{\lambda}\right) \\ \times \frac{1}{\nu!} \left(\frac{-iu}{\mu}\right) \left(\frac{P-P_0}{P}\right)^\mu \left(\frac{P-P_0}{\lambda}\right)^\nu,$$

$$W_4(t+u, \psi, \mu, \nu) = \sum_{P_0 < \lambda} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-it} \left(\frac{P_0}{\lambda}\right)^{-iu} e^{it} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^\nu \left(\frac{-iu}{\mu}\right) \left(\frac{P-P_0}{P_0}\right)^\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 имеем

$$F(t+u, \psi) = \theta_\psi^{1/2} \sum_{\lambda \leq P_0 \log^2 T} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{i(t+u)} e^{-it} \exp\left(-\frac{\lambda}{P}\right) + \theta_\psi^{-1/2} \sum_{\lambda \leq P_0} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-i(t+u)} e^{it} \\ + \theta_\psi^{-1/2} \sum_{P_0 \log^{-2} T < \lambda \leq P_0} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-i(t+u)} e^{it} \exp\left(-\frac{P}{\lambda}\right) \\ + \theta_\psi^{-1/2} \sum_{P_0 < \lambda} \frac{A(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^{-i(t+u)} e^{it} \left(1 - \exp\left(-\frac{P}{\lambda}\right)\right) + O(T^{(3\varepsilon-1)/2}).$$

Теперь утверждение следствия прямо следует из равенств

$$P^{\pm iu} = P_0^{\pm iu} \left(1 + \frac{P-P_0}{P_0}\right)^{\pm iu} = P_0^{\pm iu} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\pm iu}{\mu} \left(\frac{P-P_0}{P_0}\right)^\mu, \\ \exp\left(-\frac{\lambda}{P}\right) = \exp\left(-\frac{\lambda}{P_0}\right) \exp\left(\frac{\lambda}{P_0} \frac{P-P_0}{P}\right) \\ = \exp\left(-\frac{\lambda}{P_0}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\lambda}{P_0}\right)^\nu \left(\frac{P-P_0}{P}\right)^\nu \quad (\lambda \leq P_0 \log^2 T), \\ 1 - \exp\left(-\frac{P}{\lambda}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} \left(\frac{P}{\lambda}\right)^\nu \quad (P_0 < \lambda).$$

3. Аддитивная задача

ЛЕММА 3. Пусть $\text{Im } \tau > 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $Q(\bar{n})$ – положительно определенная квадратичная форма дискриминанта δ_F с матрицей A ,

$$\theta_Q(\tau, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i \tau Q(\bar{n} + \bar{x})}.$$

Тогда справедливо тождество

$$\theta_Q(\tau, \bar{x}) = \frac{i}{\tau \sqrt{|\delta_F|}} \sum_{\bar{m} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{\pi i}{\tau} \bar{m}^t A^{-1} \bar{m} + 2\pi i \bar{m}^t \bar{x}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см., например, в [15; гл. 7].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\text{Im } \tau > 0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$, $Q(\bar{n})$, $Q'(\bar{n})$ – положительно определенные квадратичные формы с матрицами A и $p_0 A^{-1}$ соответственно, $\det A = p_0$.

Тогда справедливо тождество

$$\sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\{2\pi i \tau Q(\bar{n} + \bar{x}) + 2\pi i \bar{y}^t (\bar{n} + \bar{x})\} = \frac{i}{\tau \sqrt{p_0}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left\{-\frac{2\pi i}{\tau p_0} Q'(\bar{n} - \bar{y}) + 2\pi i \bar{x}^t \bar{n}\right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем

$$Q'(\bar{n} - \bar{y}) = (\bar{n} - \bar{y})^t \frac{1}{2} p_0 A^{-1} (\bar{n} - \bar{y}) = Q'(\bar{n}) + Q'(\bar{y}) - p_0 \bar{y}^t A^{-1} \bar{n},$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\tau \sqrt{p_0}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\tau p_0} Q'(\bar{n} - \bar{y}) + 2\pi i \bar{x}^t \bar{n} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\tau p_0} Q'(\bar{y}) \right\} \frac{i}{\tau \sqrt{p_0}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\tau p_0} Q'(\bar{n}) + 2\pi i \left(\bar{x}^t + \frac{\bar{y}^t A^{-1}}{\tau} \right) \bar{n} \right\}. \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 3:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\tau \sqrt{p_0}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\tau p_0} Q'(\bar{n} - \bar{y}) + 2\pi i \bar{x}^t \bar{n} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\tau p_0} Q'(\bar{y}) \right\} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left\{ 2\pi i \tau Q \left(\bar{n} + \bar{x} + \frac{A^{-1} \bar{y}}{\tau} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Далее,

$$Q \left(\bar{n} + \bar{x} + \frac{A^{-1} \bar{y}}{\tau} \right) = Q(\bar{n} + \bar{x}) + \frac{Q'(\bar{y})}{\tau^2 p_0} + \frac{1}{\tau} \bar{y}^t (\bar{n} + \bar{x}),$$

поэтому

$$\frac{i}{\tau \sqrt{p_0}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\tau p_0} Q'(\bar{n} - \bar{y}) + 2\pi i \bar{x}^t \bar{n} \right\} = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp \left\{ 2\pi i \tau Q(\bar{n} + \bar{x}) + 2\pi i \bar{y}^t (\bar{n} + \bar{x}) \right\}.$$

Следствие доказано.

ЛЕММА 4. Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, a и b – натуральные взаимно простые числа, $1 \leq a, b \leq y^\varepsilon$, $k < y$ – натуральное число. Пусть ψ – комплексный характер группы классов идеалов кольца $\mathbb{Z}_K$,

$$J_k(y, a, b) = \sum_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b} \\ aN(\mathbf{a}) - bN(\mathbf{b}) = k}} \psi(\mathbf{a}) \overline{\psi}(\mathbf{b}) e^{-(aN(\mathbf{a}) + bN(\mathbf{b}))/y},$$

где суммирование ведется по целым ненулевым идеалам кольца $\mathbb{Z}_F$.

Тогда справедлива оценка $J_k(y, a, b) = O(y^{3/4+5\varepsilon})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [16].

Пусть $X_2 - X_1 > 1$. Определим функцию $g(x, X_1, X_2)$:

$$g(x, X_1, X_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq X_1 \text{ или } x \geq X_2 + 1, \\ 1, & \text{если } X_1 + 1 \leq x \leq X_2, \\ x - X_1, & \text{если } X_1 \leq x \leq X_1 + 1, \\ X_2 + 1 - x, & \text{если } X_2 \leq x \leq X_2 + 1. \end{cases}$$

ЛЕММА 5 (функциональное уравнение неполной тэта-функции). Пусть $Y > 10$, $x \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$,

$$\tau = \left(-\frac{l}{q} - x + \frac{i}{2\pi Y} \right) bq^2.$$

Пусть N_1, N_2, N_3, N_4 – целые числа, P – прямоугольник вида $(N_1, N_2] \times (N_3, N_4]$.

Тогда справедливо тождество

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{n} \in P} \exp\left(2\pi i \left(-\frac{l}{q} - x + \frac{i}{2\pi Y}\right) bQ_2(\bar{n})\right) \\ = \frac{i}{2\pi\sqrt{p_0}\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(v_1, N_1, N_2) \widehat{g}(v_2, N_3, N_4) \\ \times \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{2\pi i}{p_0\tau} Q_2\left(\bar{n} - \frac{q\bar{v}}{2\pi}\right)\right) G_2(q, -bl, \bar{n}) dv_1 dv_2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем тождество

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{n} \in P} \exp\left(-2\pi i \left(\frac{l}{q} - x + \frac{i}{2\pi Y}\right) bQ_2(\bar{n})\right) \\ = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} g(n_1, N_1, N_2) g(n_2, N_3, N_4) \exp\left(2\pi i \left(-\frac{l}{q} - x + \frac{i}{2\pi Y}\right) bQ_2(\bar{n})\right). \end{aligned}$$

Выразим функцию $g(x, X_1, X_2)$ через ее преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} g(n_1, N_1, N_2) g(n_2, N_3, N_4) \exp\left(2\pi i \left(-\frac{l}{q} - x + \frac{i}{2\pi Y}\right) bQ_2(n_1, n_2)\right) \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(v_1, N_1, N_2) \widehat{g}(v_2, N_3, N_4) \\ \times \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(2\pi i \left(-\frac{l}{q} - x + \frac{i}{2\pi Y}\right) bQ_2(\bar{n})\right) \exp\left(2\pi i \frac{\bar{v}^t \bar{n}}{2\pi}\right) dv_1 dv_2, \end{aligned}$$

где $\bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Последнюю сумму разобьем по арифметической прогрессии с разностью q :

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(2\pi i \left(-\frac{l}{q} - x + \frac{i}{2\pi Y}\right) bQ_2(\bar{n})\right) \exp\left(2\pi i \frac{\bar{v}^t \bar{n}}{2\pi}\right) dv_1 dv_2 \\ = \sum_{\bar{s} \bmod q} \exp\left(-2\pi i \frac{lbQ_2(\bar{s})}{q}\right) \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(2\pi i \tau Q_2\left(\bar{n} + \frac{\bar{s}}{q}\right)\right) \exp\left(2\pi i \frac{q\bar{v}^t(\bar{n} + \bar{s}/q)}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Воспользуемся следствием 3:

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(2\pi i \tau Q_2\left(\bar{n} + \frac{\bar{s}}{q}\right)\right) \exp\left(2\pi i \frac{q\bar{v}^t(\bar{n} + \bar{s}/q)}{2\pi}\right) \\ = \frac{i}{\tau\sqrt{p_0}} \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^2} \exp\left(-\frac{2\pi i}{\tau p_0} Q_2\left(\bar{n} - \frac{q\bar{v}}{2\pi}\right)\right) \exp\left(\frac{2\pi i \bar{n}^t \bar{s}}{q}\right). \end{aligned}$$

Утверждение прямо следует из приведенных выше тождеств.

ЛЕММА 6. Пусть $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, $y > 10$, a и b – натуральные числа, $1 \leq a, b \leq y^\varepsilon$, $(a, b) = 1$, k – натуральное число, меньшее y ,

$$W(y, a, b, k) = \sum_{\substack{am - bn = k \\ m \leq y}} a(m) a(n).$$

Тогда справедлива оценка

$$W(y, a, b, k) \ll y^{7/8+6\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y = y^{1+\varepsilon}$. Определим

$$a\left(\frac{bn+k}{a}\right) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{bn+k}{a} \notin \mathbb{N}.$$

Пользуясь преобразованием Абеля, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{am-bn=k, \\ n \leq y}} a(m)a(n) &= \sum_{m \leq y} a\left(\frac{bn+k}{a}\right) a(n) \exp\left(-\frac{2bn+k}{Y}\right) \exp\left(\frac{2bn+k}{Y}\right) \\ &= -\int_1^y \left(\sum_{\substack{am-bn=k, \\ m \leq R}} a(m)a(n) \exp\left(-\frac{am+bn}{Y}\right) \right) d \exp\left(\frac{2bR+k}{Y}\right) \\ &\quad + \sum_{\substack{am-bn=k, \\ m \leq y}} a(m)a(n) \exp\left(-\frac{am+bn}{Y}\right) \exp\left(\frac{2by+k}{Y}\right). \end{aligned}$$

Теперь достаточно оценить сумму

$$\sum_{\substack{am-bn=k, \\ m \leq R}} a(m)a(n) \exp\left(-\frac{am+bn}{Y}\right)$$

при $R \leq y$.

Как и при доказательстве леммы 4, сводим задачу к вычислению асимптотики суммы

$$I_k(R, a, b, \mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sum_{\substack{aQ_1(\overline{m})-bQ_2(\overline{n})=k \\ Q_2(\overline{n}) \leq R}} \exp\left(-\frac{aQ_1(\overline{m})+bQ_2(\overline{n})}{Y}\right),$$

где $Q_1(\overline{m})$ и $Q_2(\overline{n})$ – те положительно определенные бинарные квадратичные формы, которые представляют нормы идеалов из классов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно.

Если вместо условия $Q_2(\overline{n}) \leq R$ мы бы имели условие $Q_2(\overline{n}) \in P$, где $P = (N_1, N_2] \times (N_3, N_4]$, то, по существу повторяя доказательство леммы 4, пришли бы к оценке

$$\sum_{\mathcal{A}} \sum_{\mathcal{B}} \psi(\mathcal{A})\psi(\mathcal{B}) I_k(R, a, b, \mathcal{A}, \mathcal{B}) = O(Y^{3/4+6\varepsilon}). \quad (7)$$

Единственное отличие состоит здесь в том, что одна из тригонометрических сумм, возникающих при применении кругового метода, выражается через неполную тэта-функцию из леммы 5. Применяя к ней преобразование из леммы 5, а затем дословно повторяя рассуждения из доказательства леммы 4 и пользуясь неравенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(v, N_1, N_2)| dv \ll \log(N_2 - N_1 + 2),$$

приходим к (7).

Если доказать, что внутренность эллипса $Q_2(\overline{n}) \leq R$ может быть представлена в виде объединения $O(Y^{1/8})$ прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, и некоторого количества криволинейных треугольников, общая площадь которых есть $O(Y^{7/8})$, лемма 6 будет доказана.

Внутренность эллипса можно разбить на конечное число прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям, и криволинейных треугольников. Эти фигуры попарно не пересекаются.

Без ограничения общности считаем, что криволинейный треугольник имеет вид

$$\alpha \leq m_1 \leq \beta, \quad \omega \leq m_2 \leq f(m_1),$$

где

$$-\text{const} \cdot \sqrt{R} \leq \alpha < \beta \leq \text{const} \cdot \sqrt{R}, \quad |\omega| \leq \text{const} \cdot \sqrt{R},$$

а $f(x)$ – монотонно возрастающая дифференцируемая функция, производная которой ограничена на $[\alpha, \beta]$.

Если $\beta - \alpha \leq R^{3/8}$, то площадь криволинейного треугольника есть $O(R^{3/4})$.

Пусть $\beta - \alpha > R^{3/8}$. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезки длины $R^{3/8}$ и рассмотрим нижнюю интегральную сумму Дарбу функции $f(x)$, соответствующую этому разбиению. Нижняя сумма Дарбу равна сумме площадей прямоугольников, число которых не превосходит $\text{const} \cdot R^{1/8}$. Разность между $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ и нижней суммой Дарбу равна сумме площадей криволинейных треугольников, общая площадь которых не превосходит $\text{const} \cdot R^{7/8}$.

Тем самым, нужный факт доказан, а вместе с ним доказана и лемма 6.

4. Доказательство основной теоремы

Следуем схеме рассуждений работы [17], внося в нее необходимые изменения.

Пусть P_1 – множество простых чисел, являющихся нормами простых главных идеалов, причем $p_0 \notin P_1$.

Хорошо известно, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi(x))^{-1} \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in P_1}} 1 = \frac{1}{2h(-p_0)}$$

(см., например, [18]).

Все функции, сумма которых стоит в правой части (3), имеют общий множитель

$$\prod_{p \in P_1} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Определим последовательности $\alpha(\nu)$ и $\beta(\nu)$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha(\nu) \nu^{-s} = \prod_{p \in P_1} (1 - p^{-s}), \quad \text{Re } s > 1,$$

$$\beta(\nu) = \begin{cases} \alpha(\nu) \left(1 - \frac{\log \nu}{\log X}\right), & \text{если } 1 \leq \nu \leq X, \\ 0, & \text{если } X < \nu, \end{cases}$$

где $X = T^{0.001\varepsilon}$.

Положим $\phi_X(s) = \sum_{\nu < X} \beta(\nu) \nu^{-s}$. Тогда нули нечетного порядка функций

$$F(t) = \sum_{j=1}^N a_j Z(t, \psi_j) \left| \phi_X \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2$$

являются нулями нечетного порядка функции

$$\sum_{j=1}^N a_j Z(t, \psi_j).$$

Введем параметры c_4, h, h_1, α :

$$\frac{1}{c_4} = (\log T)^{1-2/h(-p_0)} \exp(\sqrt{\log \log T}), \quad h = \frac{1}{c_4 \log T} \sqrt{\log \frac{1}{c_4}},$$

$$h_1 = h \sqrt{\log \frac{1}{c_4}}, \quad \alpha = \frac{c_5}{\sqrt{\log \log T}}, \quad c_5 > 0.$$

Пусть

$$I_1(t) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} |F(t+u)| du, \quad I_2(t) = \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{-(u/h)^2} F(t+u) du \right|.$$

Пусть E – множество точек t интервала $(T, T+H)$ таких, что $I_1(t) > I_2(t)$.

Из определений следует неравенство

$$I_3 \leq I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int_E I_1^\alpha(t) dt, \quad I_2 = \int_T^{T+H} I_2^\alpha(t) dt, \quad I_3 = \int_T^{T+H} I_1^\alpha(t) dt.$$

Дословно повторяя соответствующее рассуждение из [17], приходим к неравенству

$$I_3 \geq c_6 H h^\alpha, \quad c_6 > 0.$$

Оценим I_1 сверху. Применим неравенство Гёльдера:

$$I_1^{2/\alpha} \ll h^2 (\mu(E))^{2/\alpha-1} \int_T^{T+H} |F(t)|^2 dt.$$

Пользуясь следствием 2 и неравенством

$$\int_T^{T+H} |F(t)|^2 dt \leq e \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2\right) |F(t)|^2 dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_T^{T+H} |F(t)|^2 dt \\ & \ll H \sum_{\lambda_1 \leq P_0} \sum_{\lambda_2 \leq P_0} \frac{A(\lambda_1)}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{-iT} \exp\left(-\frac{1}{4} \left(H \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1}\right)^2\right) \\ & + H P_0^2 \sum_{P_0 < \lambda_1} \sum_{P_0 < \lambda_2} \frac{A(\lambda_1)}{\lambda_1^{3/2}} \frac{A(\lambda_2)}{\lambda_2^{3/2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{-iT} \exp\left(-\frac{1}{4} \left(H \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1}\right)^2\right) + O(HT^{(3\varepsilon-1)/2}). \end{aligned}$$

Выделим “диагональные” слагаемые из сумм, стоящих в правой части:

$$\begin{aligned} & \int_T^{T+H} |F(t)|^2 dt \\ & \ll H \sum_{\lambda \leq P_0} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} + H \left| \sum_{\lambda_1 < \lambda_2 \leq P_0} \frac{A(\lambda_1)}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{A(\lambda_2)}{\sqrt{\lambda_2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{-iT} \exp\left(-\frac{1}{4} \left(H \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1}\right)^2\right) \right| \\ & + H P_0^2 \left| \sum_{P_0 < \lambda_1 < \lambda_2} \frac{A(\lambda_1)}{\lambda_1^{3/2}} \frac{A(\lambda_2)}{\lambda_2^{3/2}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{-iT} \exp\left(-\frac{1}{4} \left(H \frac{\log \lambda_2}{\log \lambda_1}\right)^2\right) \right| + O(HT^{(3\varepsilon-1)/2}). \end{aligned}$$

Оценим первую сумму “недиагональных” слагаемых. Пусть r – рациональное число, большее $1/X^2$, $\lambda = \lambda_1 = n\nu_3/\nu_4$, $\lambda + r = \lambda_2 = m\nu_1/\nu_2$. Зафиксируем $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, r$ и рассмотрим сумму

$$S_1(U, r) = \sum_{U/2 < n\nu_1/\nu_2 \leq U} \frac{A(n\nu_3/\nu_4)}{\sqrt{n\nu_3/\nu_4}} \frac{A(n\nu_3/\nu_4 + r)}{\sqrt{n\nu_3/\nu_4 + r}} \left(\frac{n\nu_3/\nu_4 + r}{n\nu_3/\nu_4} \right)^{-iT} \\ \times \exp\left(-\frac{1}{4} \left(H \log\left(1 + \frac{r\nu_4}{n\nu_3}\right) \right)^2\right),$$

где $U \leq P_0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$HX^{-2} \log^{-2} T < U, \quad \frac{1}{X^2} \leq r \leq \frac{U}{H} \log^2 T.$$

Пусть $q = (\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)$, $\nu_1\nu_4 = aq$, $\nu_2\nu_3 = bq$, $k = r\nu_2\nu_4/q$. Считаем, что $k \in \mathbb{N}$, иначе равенство $m\nu_1/\nu_2 - n\nu_3/\nu_4 = r$ не выполняется. Применяя преобразование Абеля и пользуясь неравенством

$$\left| \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\sqrt{n\nu_3/\nu_4}} \frac{1}{\sqrt{n\nu_3/\nu_4 + r}} \left(\frac{n\nu_3/\nu_4 + r}{n\nu_3/\nu_4} \right)^{-iT} \exp\left(-\frac{1}{4} \left(H \log\left(1 + \frac{r\nu_4}{n\nu_3}\right) \right)^2\right) \right) \right| \\ \ll \left(\frac{Tr}{U^3} + \frac{1}{U^2} \right) X^5,$$

получаем

$$|S_1(U, r)| \ll \left(\frac{Tr}{U^2} + \frac{1}{U} \right) X^5 \left| \sum_{\substack{am-bn=k \\ U/2 < n \leq U_1}} a(m)a(n) \right|,$$

где $U_1 \leq U$. Теперь из леммы 6 следует, что

$$\sum_U^{\log T} \sum_r^{(U/H) \log^2 T} |S_1(U, r)| \ll \frac{T^{15/8+8\varepsilon}}{H^2} + \frac{T^{7/8+8\varepsilon}}{H} \ll T^{-\varepsilon},$$

так как по условию $H \geq T^{15/16+5\varepsilon}$.

Таким образом, первая сумма “недиагональных” слагаемых оценена. Оценим вторую. Пусть $P_0 < U$,

$$S_2(U, r) = \sum_{U/2 < n\nu_1/\nu_2 \leq U} \frac{A(n\nu_3/\nu_4)}{(n\nu_3/\nu_4)^{3/2}} \frac{A(n\nu_3/\nu_4 + r)}{(n\nu_3/\nu_4 + r)^{3/2}} \left(\frac{n\nu_3/\nu_4 + r}{n\nu_3/\nu_4} \right)^{-iT} \\ \times \exp\left(-\frac{1}{4} \left(H \log\left(1 + \frac{r\nu_4}{n\nu_3}\right) \right)^2\right).$$

Рассуждая так же, как при оценке $S_1(U, r)$, приходим к неравенству

$$\sum_r^{(U/H) \log^2 T} |S_2(U, r)| \ll \frac{U^{15/8+7\varepsilon}}{H^2 U^2} + \frac{U^{7/8+7\varepsilon}}{H U^2},$$

из которого имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_r^{(2^{l-1}P_0/H) \log^2 T} |S_2(2^{l-1}P_0, r)| \ll \frac{T^{15/8+8\varepsilon}}{H^2 T^2} \ll T^{-2-\varepsilon}.$$

Итак,

$$\int_T^{T+H} |F(t)|^2 dt \ll H \sum_{\lambda \leq P_0} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} + HT^{-\varepsilon}.$$

Сумма “диагональных” слагаемых оценивается по существу тем же способом, что и в [6], [17]. Оценка имеет вид

$$\sum_{\lambda \leq P_0} \frac{A^2(\lambda)}{\lambda} \ll (\log T)^{1-2/h(-p_0)}. \quad (8)$$

Подробные вычисления содержатся в [12]. Доказано, что

$$I_1 \ll (\mu(E))^{1-\alpha/2} h^\alpha H^{\alpha/2} (\log T)^{(1-2/h(-p_0))\alpha/2}.$$

Для I_2 справедливо неравенство

$$I_2^{2/\alpha} \ll H^{2/\alpha-1} \int_T^{T+H} \left| \int_{-h_1}^{h_1} e^{(u/h)^2} F(t+u) du \right|^2 dt.$$

И здесь интеграл состоит из “диагональной” и “недиагональной” частей. Сумма “недиагональных” слагаемых оценивается так же, как это сделано при оценке I_1 . Поэтому

$$I_2^{2/\alpha} \ll H^{2/\alpha} \sum_{\lambda \leq P_0} \frac{A^2(\lambda) d^2(\lambda)}{\lambda} + H^{2/\alpha-\varepsilon},$$

где

$$d(\lambda) = \int_{-h_1}^{h_1} e^{(u/h)^2} \left(\frac{P_0}{\lambda} \right)^{iu} du.$$

Повторяя рассуждения статьи [17] с учетом (8), получаем

$$I_2 \leq \frac{1}{2} I_3, \quad \mu(E) \geq c_7 H (\log T)^{-(1-2/h(-p_0))\alpha/2},$$

где c_7 – абсолютная постоянная.

Утверждение теоремы прямо следует из оценки $\mu(E)$.

Список литературы

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “The zeros of Riemann’s zeta-function on the critical line”, *Math. Z.*, **10**:3-4 (1921), 283–317.
- [2] A. Selberg, “On the zeros of Riemann’s zeta-function”, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I*, **10** (1942), 59 pp.
- [3] С. М. Воронин, “О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:1 (1980), 63–91.
- [4] А. А. Карацуба, “О нулях функции Дзвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 303–315.
- [5] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [6] А. А. Карацуба, “О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:3 (1991), 483–514.
- [7] A. Selberg, “Old and new conjectures about class of Dirichlet series”, *Collected Papers*, Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 47–63.
- [8] J. B. Conrey, A. Ghosh, “On the Selberg class of Dirichlet series: small degrees”, *Duke Math. J.*, **72**:3 (1993), 673–693.

- [9] С. А. Гриценко, “О нулях линейных комбинаций специального вида функций, связанных с рядами Дирихле из класса Сельберга”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:4 (1996), 3–42.
- [10] С. Ленг, *Алгебраические числа*, Мир, М., 1966.
- [11] С. А. Гриценко, “О нулях специального вида функций, связанных с L -функциями Гекке мнимых квадратичных полей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:1 (1997), 45–68.
- [12] И. С. Резвякова, “О нулях линейных комбинаций L -функций Гекке на критической прямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:6 (2010), 183–222.
- [13] З. И. Бореви́ч, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985.
- [14] А. Ф. Лаврик, “Приближенное функциональное уравнение дзета-функции Гекке мнимого квадратичного поля”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 475–482.
- [15] A. Ogg, *Modular Forms and Dirichlet Series*, New York, W. A. Benjamin, 1969.
- [16] С. А. Гриценко, “Об одной аддитивной задаче и ее приложении к проблеме распределения нулей линейных комбинаций L -функций Гекке на критической прямой”, *Теория чисел, алгебра и анализ*, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, **276**, МАИК, М., 2012, 96–108.
- [17] А. А. Карацуба, “Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле”, *Теория чисел и анализ*, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 180–196.
- [18] С. А. Гриценко, “О распределении норм простых идеалов из заданного класса в арифметических прогрессиях”, *Труды по теории чисел*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 45–62.