Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Владимиров, Таблицы интегралов комплекснозначных функций p -адических аргументов, *Совр. пробл. матем.*, 2003, выпуск 2, 3–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm5>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:22:36

Часть I. Краткие сведения из p -адического анализа

Всюду впредь, если это не оговорено особо, будем предполагать, что p пробегает все простые числа, $p = 2, 3, 5, \dots, 137, \dots$, а γ пробегает все целые (рациональные) числа, $\gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\gamma \in \mathbb{Z}$; через $\mathbb{Z}_+$ будем обозначать множество натуральных чисел $\gamma = 1, 2, \dots$. Если $\mathbb{K}$ – некоторое поле (или кольцо), то через $\mathbb{K}^\times$ будем обозначать его мультипликативную группу.

§ 1. Поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$

Обозначим: $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел.

Пусть p – простое число. Любое рациональное число $x \neq 0$ однозначно представляется в виде

$$x = \pm p^\gamma \frac{a}{b},$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$ и a, b – натуральные числа, не делящиеся на p и не имеющие общих множителей. p -Адическая норма $|x|_p$ числа $x \in \mathbb{Q}$ определяется равенствами

$$|x|_p = p^{-\gamma}, \quad x \neq 0, \quad |0|_p = 0.$$

Пополнение поля $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p$ дает поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Каноническая форма произвольного p -адического числа $x \neq 0$ есть

$$x = p^\gamma (x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots), \quad (1.1)$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, $x_j = 0, 1, \dots, p-1$, $x_0 \neq 0$, $j = 0, 1, \dots$; при этом $|x|_p = p^{-\gamma}$. Число $-\gamma$ называется порядком числа x и обозначается $\text{ord } x$, $\text{ord } x = -\gamma(x)$, $\text{ord } 0 = -\infty$.

Норма $|\cdot|_p$ обладает следующими характерными свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \quad & |x|_p \geq 0, \quad |x|_p = 0 \leftrightarrow x = 0, \\ 2) \quad & |xy|_p = |x|_p |y|_p, \\ 3) \quad & |x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 3') \quad & |x + y|_p = \max(|x|_p, |y|_p), \quad |x|_p \neq |y|_p, \\ 3'') \quad & |x + y|_p \leq |2x|_p, \quad |x|_p = |y|_p. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (1.2), норма $|\cdot|_p$ *неархимедова*, а пространство $\mathbb{Q}_p$ – *ультраметрическое*.

Обозначим:

$$B_\gamma(a) = [x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^\gamma]$$

– *диск* с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$ радиуса p^γ , $B_\gamma = B_\gamma(0)$;

$$S_\gamma(a) = [x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = p^\gamma]$$

– *окружность* с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$ радиуса p^γ , $S_\gamma = S_\gamma(0)$.

Очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} B_\gamma(a) &= \bigcup_{\gamma' \leq \gamma} S_{\gamma'}(a), & S_\gamma(a) &= B_\gamma(a) \setminus B_{\gamma-1}(a), \\ \mathbb{Q}_p &= \bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}} B_\gamma(a), & \mathbb{Q}_p^\times &= \bigcup_{\gamma \in \mathbb{Z}} S_\gamma(a). \end{aligned}$$

Геометрия пространства $\mathbb{Q}_p$ весьма необычна: все треугольники в нем равнобедренные; всякая точка диска является его центром, диск не имеет границы, диск есть объединение конечного числа непересекающихся дисков меньшего радиуса; если два диска пересекаются, то один из них содержится в другом; диск есть открытый компакт.

Множество поля $\mathbb{Q}_p$, которое является открытым и замкнутым, называется *клопен* (clopen).

Обозначим: $Z_p = B_0$ – максимальное компактное подкольцо поля $\mathbb{Q}_p$ (кольцо целых p -адических чисел); мультипликативная группа $Z_p^\times = S_0$ кольца Z_p – это группа единиц поля $\mathbb{Q}_p$; $I_p = pZ_p = B_{-1}$ – максимальный идеал кольца Z_p .

Классы вычетов Z_p/I_p образуют конечное поле, изоморфное классу вычетов по модулю p : $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

Введем специальные множества:

$$G_p = [x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq |2p|_p];$$

$$J_p = [x \in Z_p^\times : 1 - x \in G_p],$$

J_p – мультипликативная группа;

$$S_{\gamma, k_0 k_1 \dots k_n} = [x \in S_\gamma : x_0 = k_0, x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n],$$

$$S_\gamma^{k_0 k_1 \dots k_n} = [x \in S_\gamma : x_0 \neq k_0, x_1 \neq k_1, \dots, x_n \neq k_n],$$

где $k_j = 0, 1, \dots, p-1$, $k_0 \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Введенные множества – открытые компакты в $\mathbb{Q}_p$.

Дробная часть $\{x\}_p$ числа $x \in \mathbb{Q}_p$:

$$\{x\}_p = 0, \quad \text{если} \quad \gamma(x) \geq 0,$$

и

$$\{x\}_p = p^\gamma (x_0 + x_1 p + \dots + x_{-\gamma-1} p^{-\gamma-1}), \quad \text{если} \quad \gamma(x) \leq -1. \quad (1.3)$$

Мультипликативную *группу квадратов* p -адических чисел обозначим через $\mathbb{Q}_p^{\times 2}$.

Для того чтобы число $x \in \mathbb{Q}_p^\times$ принадлежало $\mathbb{Q}_p^{\times 2}$, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(x)$ было четным и

$$\begin{cases} \left(\frac{x_0}{p}\right) = 1, & p \neq 2; \\ x_1 = x_2 = 0, & p = 2. \end{cases}$$

Здесь

$$\left(\frac{a}{p}\right), \quad a \in Z, \quad a \not\equiv 0 \pmod{p},$$

– символ Лежандра, равный 1 или -1 в зависимости от того, является ли число x квадратичным вычетом или невычетом по модулю p .

Таким образом, группа $\mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ состоит из четырех элементов $(1, \epsilon, -p, \epsilon p)$, где ϵ – любая единица поля $\mathbb{Q}_p$, не являющаяся квадратом в $\mathbb{Q}_p$, при $p \neq 2$, и из восьми элементов $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14\}$ при $p = 2$.

§ 2. Некоторые функции на $\mathbb{Q}_p$

Характеры поля $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\chi(x)$ – аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$:

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y), \quad |\chi(x)| = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p. \quad (2.1)$$

Стандартный аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$ имеет вид

$$\chi_p(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p), \quad (2.2)$$

где $\{x\}_p$ – дробная часть $x \in \mathbb{Q}_p$, определенная формулой (1.3).

Общий вид аддитивного характера поля $\mathbb{Q}_p$:

$$\chi(x) = \chi_p(\xi x) = \exp(2\pi i \{\xi x\}_p) \quad (2.3)$$

при некотором $\xi \in \mathbb{Q}_p$.

Пусть $\pi(x)$ – мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$:

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad |\pi(x)| = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p^\times. \quad (2.4)$$

Общий вид мультипликативного характера поля $\mathbb{Q}_p$:

$$\pi(x) = \pi_{i\alpha, \theta}(x) = |x|_p^{i\alpha} \theta(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad (2.5)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ определяется равенством $\pi(p) = p^{-i\alpha}$ и $\theta(t)$, $t \in Z_p^\times$, – характер компактной группы $Z_p^\times$, нормированный условием $\theta(p) = 1$. (Множество последних счетно и дискретно.)

Если условие унитарности $|\pi(x)| = 1$ в (2.4) не выполнено, то функция $\pi(x)$ есть *представление* группы $\mathbb{Q}_p^\times$ в $\mathbb{C}$, и ее общий вид дается формулой (2.5), в которой $i\alpha$ – уже любое комплексное число,

$$\pi_{\alpha, \theta}(x) = |x|_p^{\alpha-1} \theta(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (2.5')$$

Такие функции называются *квазихарактерами*. Квазихарактер $\pi(x) = |x|_p^{\alpha-1}$, для которого $\theta = 1$, называется *главным*.

Пусть $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$. Без ограничения общности можно считать, что d свободно от квадратов p -адических чисел, т. е. имеет один из перечисленных в § 1 видов: $p, \epsilon, p\epsilon$, $|\epsilon|_p = 1$, $\epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ при $p \neq 2$ и $2, 3, 5, 6, 7, 10, 14$ при $p = 2$.

Множество p -адических чисел из $\mathbb{Q}_p^\times$, представимых в виде $\alpha^2 - d\beta^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_p$, обозначим $\mathbb{Q}_p^\times(d)$; $\mathbb{Q}_p^\times(d)$ – мультипликативная группа.

Символ Гильберта $\left(\frac{x, y}{p}\right)$, $x, y \in \mathbb{Q}_p^\times$, по определению равен 1 или -1 в зависимости от того, представляет ли форма $x\alpha^2 + y\beta^2 - \gamma^2$ нетривиально нуль в $\mathbb{Q}_p$ или нет.

Символ Гильберта обладает следующими очевидными свойствами [12]:

$$\left(\frac{x, y}{p}\right) = \left(\frac{y, x}{p}\right), \quad \left(\frac{x, -x}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{x, yz}{p}\right) = \left(\frac{x, y}{p}\right) \left(\frac{x, z}{p}\right)$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \left(\frac{p, \epsilon}{p}\right) &= \left(\frac{\epsilon_0}{p}\right), & \left(\frac{\epsilon, \eta}{p}\right) &= 1, & p &\neq 2; \\ \left(\frac{2, \epsilon}{2}\right) &= (-1)^{(\epsilon^2-1)/2}, & \left(\frac{\epsilon, \eta}{2}\right) &= (-1)^{(\epsilon-1)(\eta-1)/4}, & p &= 2. \end{aligned}$$

Здесь ϵ и η – любые единицы поля $\mathbb{Q}_p$.

Отсюда следует критерий того, что p -адическое число x принадлежит $\mathbb{Q}_p^\times(d)$ при $p \neq 2$: для того чтобы $x \in \mathbb{Q}_p^\times(d)$, необходимо и достаточно: при $d = \epsilon$ $\gamma(x)$ – четное; при $d = p$ $\gamma(x)$ – четное и $(x_0/p) = 1$ или $\gamma(x)$ – нечетное и $(-x_0/p) = 1$; при $D = p\epsilon$ $\gamma(x)$ – четное и $(x_0/p) = 1$ или $\gamma(x)$ – нечетное и $(-x_0/p) = -1$. (Аналогичный критерий имеет место и при $p = 2$.)

Отсюда выводим: группа $\mathbb{Q}_p^\times/\mathbb{Q}_p^\times(d)$ изоморфна группе $(1, -1)$ и функция

$$\text{sgn}_{p,d}x = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}_p^\times(d), \\ -1, & x \notin \mathbb{Q}_p^\times(d) \end{cases} \quad (2.6)$$

есть мультипликативный характер группы $\mathbb{Q}_p^\times$ (поля $\mathbb{Q}_p$).

Непосредственно из определений следует

$$\text{sgn}_{p,d}x = \left(\frac{x, -dx}{p}\right), \quad x \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}.$$

(Отметим, что всегда $\left(\frac{x, -dx}{p}\right) = 1$, если $d \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$.)

λ_p -функция поля $\mathbb{Q}_p$ определяется следующим образом [1], [2], [13], [14]:

$$\lambda_p(x) = \begin{cases} 1, & \gamma(x) = 2k, \quad p \neq 2, \\ \sqrt{\left(\frac{-1}{p}\right)} \left(\frac{x_0}{p}\right), & \gamma(x) = 2k+1, \quad p \neq 2, \\ \exp[\pi i(1/4 + x_1)], & \gamma(x) = 2k, \quad p = 2, \\ \exp[\pi i(1/4 + x_1/2 + x_2)], & \gamma(x) = 2k+1, \quad p = 2. \end{cases}$$

Свойства функции $\lambda_p: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} |\lambda_p(x)| &= 1, \\ \lambda_p(x)\lambda_p(-x) &= 1, \\ \lambda_p(x) &= \lambda_p(y), \quad xy \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \\ \frac{\lambda_p(x)\lambda_p(y)}{\lambda_p(x+y)} &= \lambda_p\left(\frac{xy}{x+y}\right), \\ \lambda_p(x)\lambda_p(y) &= \left(\frac{x, y}{p}\right)\lambda_p(xy)\lambda_p(1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Полагая в (2.7) $y = -dx$ и пользуясь формулой (2.6), получим соотношение [13]

$$\operatorname{sgn}_{p,d}x = \lambda_p(x)\lambda_p(-dx)\lambda_p(d)\lambda_p(-1), \quad x \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}. \quad (2.8)$$

Отметим следующую формулу [13]:

$$\operatorname{sgn}_{p,d}x = \begin{cases} \left(\frac{x_0}{p}\right)^{\gamma(d)} \left(\frac{d_0}{p}\right)^{\gamma(x)} \left(\frac{-1}{p}\right)^{\gamma(x)\gamma(d)}, & p \neq 2, \\ (-1)^{d_1x_1 + (d_1+d_2)\gamma(x) + (x_1+x_2)\gamma(d)}, & p = 2. \end{cases} \quad (2.9)$$

В частности, при $d \equiv 3 \pmod{4}$ имеем [14]:

$$\operatorname{sgn}_{p,d}x = \begin{cases} 1, & \left(\frac{d}{p}\right) = 1, \quad p \neq d, \quad p \neq 2, \\ (-1)^{\gamma(x)}, & \left(\frac{d}{p}\right) = -1, \quad p \neq d, \quad p \neq 2, \\ \left(\frac{x_0}{p}\right)(-1)^{\gamma(x)}, & p = d, \\ (-1)^{x_1}, & p = 2, \quad d \equiv 7 \pmod{8}, \\ (-1)^{x_1 + \gamma(x)}, & p = 2, \quad d \equiv 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства при $x, y \in \mathbb{Q}_p^\times$:

$$|x|_\infty \prod_{p=2}^{\infty} |x|_p = 1, \quad |x|_\infty = |x|, \quad (2.10)$$

$$\chi_\infty(x) \prod_{p=2}^{\infty} \chi_p(x) = 1, \quad \chi_\infty(x) = \exp(-2\pi i x), \quad (2.11)$$

$$\lambda_\infty(x) \prod_{p=2}^{\infty} \lambda_p(x) = 1, \quad \lambda_\infty(x) = \exp(-i\pi/4 \operatorname{sgn} x), \quad (2.12)$$

$$\left(\frac{x, y}{\infty}\right) \prod_{p=2}^{\infty} \left(\frac{x, y}{p}\right) = 1, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{x, y}{\infty}\right) &= \begin{cases} -1, & x < 0, \quad y < 0, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \operatorname{sgn}_{\infty, d} x \prod_{p=2}^{\infty} \operatorname{sgn}_{p, d} x &= 1, \\ \operatorname{sgn}_{\infty, d} x &= \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & d < 0, \\ 1, & d > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Бесконечные произведения в формулах (2.10)–(2.14) сходятся для всех рациональных значений x и y , поскольку лишь конечное число множителей в них отлично от 1. Такого типа формулы называются *адельными*.

Обозначаем: $\Omega(|x|_p)$ – характеристическую функцию диска B_0 (так что $\Omega(t) = 1$, если $0 \leq t \leq 1$ и $\Omega(t) = 0$, если $t > 1$); $\delta(|x|_p - p^\gamma)$ – характеристическую функцию окружности S_γ ; $\delta(x_\ell - k)$ – характеристическую функцию множества $[x \in \mathbb{Q}_p : x_\ell = k]$, $k = 1, 2, \dots, p-1$ при $\ell = 0$ и $k = 0, 1, \dots, p-1$ при $\ell = 1, 2, \dots$.

§ 3. Аналитические функции

Пусть $\mathcal{O}$ – открытое множество в $\mathbb{Q}_p$. Функция $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется *аналитической* в $\mathcal{O}$, если для любой точки $a \in \mathcal{O}$ существует такое $\gamma \in \mathbb{Z}$, что в диске $B_\gamma(a)$ она представляется сходящимся

степенным рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k. \quad (3.1)$$

Радиус сходимости $r = r(f)$ ряда (3.1) есть

$$r = p^{\sigma},$$

$$\sigma = -\frac{1}{\ln p} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |f_n|_p,$$

где

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k.$$

Ряд (3.1) сходится тогда, и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| p^{\gamma k}, \quad \gamma = \gamma(x-a),$$

и его можно дифференцировать почленно в $B_{\gamma}(a)$ бесконечное число раз

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) c_k (x-a)^{k-n}, \quad (3.2)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

причем

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (3.3)$$

При каждом дифференцировании ряда (3.1) радиус сходимости продифференцированного ряда (3.2) может разве лишь увеличиться.

Функции e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ аналитические, они определяются следующими рядами:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in G_p, \quad (3.4)$$

$$\ln x = \ln[1 - (1 - x)], \quad x \in J_p, \quad (3.5)$$

$$\ln x = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x \in G_p,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in G_p, \quad (3.6)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in G_p, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \in G_p, \quad (3.8)$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1}, \quad x \in G_p, \quad (3.9)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}, \quad x \in G_p. \quad (3.10)$$

Справедливы соотношения:

$$(e^x)' = e^x, \quad e^x e^y = e^{x+y}, \quad x, y \in G_p, \quad (3.11)$$

$$|e^x|_p = 1, \quad |e^x - 1|_p = |x|_p, \quad x \in G_p, \quad (3.12)$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x, y \in G_p, \quad (3.13)$$

$$|\ln(1+x)|_p = |x|_p, \quad x \in G_p, \quad (3.14)$$

$$\ln e^x = x, \quad x \in G_p; \quad e^{\ln x} = x, \quad x \in J_p. \quad (3.15)$$

Функция e^x реализует аналитический диффеоморфизм аддитивной группы G_p на мультипликативную группу J_p . Обратное отображение осуществляется функцией $\ln x$.

Справедливы все формулы классической тригонометрии. Их доказательство легко следует из формального соотношения

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in G_p, \quad (3.16)$$

где символ e^{ix} определяется рядом (3.3) при условии, что $i^2 = -1$.

В частности,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad x \in G_p, \quad (3.17)$$

$$e^{\theta x} = \cos x + \theta \sin x, \quad x \in G_p, \quad \theta^2 = -1, \quad \theta \in \mathbb{Q}_p \quad (3.18)$$

(последнее возможно лишь при $p \equiv 1 \pmod{4}$).

Функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ реализуют аналитические изоморфизмы группы G_p на G_p ; обратные отображения даются функциями $\arcsin x$ и $\arctg x$ соответственно.

§ 4. Мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$

Так как $\mathbb{Q}_p$ есть коммутативная группа по сложению, то на ней существует единственная (с точностью до множителя) инвариантная мера, – мера Хаара, – которую мы обозначим через $d_p x$:

$$d_p(x + a) = d_p x, \quad a \in \mathbb{Q}_p; \quad d_p(ax) = |a|_p d_p x, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times.$$

Нормируем меру dx условием

$$\int_{Z_p} d_p x = 1. \quad (4.1)$$

Нормированная мера Хаара $d_p^\times x$ на $\mathbb{Q}_p^\times$ есть

$$d_p^\times x = (1 - p^{-1})^{-1} \frac{d_p x}{|x|_p}, \quad d_p^\times(ax) = d_p^\times x, \quad a, x \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad (4.2)$$

так что

$$\int_{Z_p^\times} d_p^\times x = 1.$$

Пусть $M \subset \mathbb{Q}_p$ – измеримое по мере Хаара множество. Интеграл функции $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ по множеству M будем записывать в виде

$$\int_M f(x) d_p x, \quad \int f(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) d_p x.$$

Пусть $1 \leq q \leq \infty$. Множество функций $f: \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $f(x) = 0$, $x \notin M$, и

$$\|f\|_q = \left[\int_M |f(x)|^q d_p x \right]^{1/q} < \infty, \quad \text{если } q < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in M} |f(x)| < \infty, \quad \text{если } q = \infty,$$

обозначим через $\mathcal{L}(M)$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{Q}_p)$. Если $\mathcal{O}$ – открытое множество в $\mathbb{Q}_p$, то множество функций $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых для любого компакта $K \subset \mathcal{O}$ $f \in \mathcal{L}(K)$, обозначим через $\mathcal{L}_{\text{loc}}^q(\mathcal{O})$, $\mathcal{L}_{\text{loc}}^q = \mathcal{L}_{\text{loc}}^q(\mathbb{Q}_p)$.

Функции из множества $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$ называются *локально-интегрируемыми в $\mathcal{O}$* .

Пусть функция $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{Q}_p^\times)$. (Несобственным) интегралом функции f по $\mathbb{Q}_p$,

$$\int f(x) d_p x = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \int_{S_\gamma} f(x) d_p x,$$

называется предел (если он существует)

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \int_{B_N \setminus B_{-M-1}} = \lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{\gamma=-M}^N \int_{S_\gamma} f(x) dx.$$

ПРИМЕР. Интеграл

$$\int_{Z_p} |x|^{\alpha-1} d_p x = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} \quad (4.3)$$

существует при $\text{Re } \alpha > 0$.

Формула замены переменных в интеграле: если $x(y)$ – аналитический диффеоморфизм открыто-замкнутого множества $D' \subset \mathbb{Q}_p$ на $D \subset \mathbb{Q}_p$, причем $x'(y) \neq 0$, $y \in D'$, то для любой $f \in \mathcal{L}^1(D)$ справедлива формула

$$\int_D f(x) dx_p = \int_{D'} f(x(y)) |x'(y)|_p d_p y. \quad (4.4)$$

ПРИМЕР. Пусть $x = (py)^{-1}$, $d_p x = p|y|_p^{-2} d_p y$. Тогда в силу (3.4) имеем

$$\int_{|x|_p > 1} |x|_p^{\alpha-1} d_p x = p^\alpha \int_{Z_p} |y|_p^{-\alpha-1} d_p y = \frac{1-p^{-1}}{p^{-\alpha}-1}, \quad \text{Re } \alpha < 0.$$

ПРИМЕР. Для дробно-линейного преобразования

$$x = \frac{ay+b}{cy+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{Q}_p, 2),$$

$$d_p x = \frac{|ad-dc|_p}{|cx+d|_p^2} d_p y.$$

§ 5. n -мерное пространство $\mathbb{Q}_p^n$

Пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \times \cdots \times \mathbb{Q}_p$ (n раз) состоит из точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \dots, n$, снабженных нормой

$$|x|_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p. \quad (5.1)$$

Эта норма обладает свойствами 1)–3) § 1, так что пространство $\mathbb{Q}_p^n$ ультраметрическое (неархимедово).

Скалярное произведение

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p^n,$$

удовлетворяет неравенству

$$|(x, y)|_p \leq |x|_p |y|_p, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Меру Хаара на $\mathbb{Q}_p^n$ обозначаем $d_p^n x = d_p x_1 d_p x_2 \cdots d_p x_n$, $d_p^1 x_1 = d_p x$,

$$d_p^n(x + a) = d_p^n x, \quad a \in \mathbb{Q}_p^n, \quad d_p^n(Ax) = |\det A|_p d_p^n x,$$

где $x \rightarrow Ax$ – линейный изоморфизм $\mathbb{Q}_p^n$ на $\mathbb{Q}_p^n$ ($\det A \neq 0$).

Впредь условимся в интегралах по всему пространству $\mathbb{Q}_p^n$ опускать область интегрирования,

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x) d_p^n x = \int f(x) d_p^n x.$$

Пространства функций $\mathcal{L}^q(M)$ и $\mathcal{L}_{\text{loc}}^q(\mathcal{O})$, $M, \mathcal{O} \in \mathbb{Q}_p^n$, определяются аналогично случаю $n = 1$ (см. § 4).

Как и в случае $n = 1$, с помощью введенной нормы, определяем: $B_\gamma^n(a)$ – шар радиуса p^γ с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p^n$ и $S_\gamma^n(a)$ – сфера радиуса p^γ с центром в точке a ; $B_\gamma^n(0) = B_\gamma^n$, $B_\gamma^1(a) = B_\gamma(a)$, $S_\gamma^n(0) = S_\gamma^n$, $S_\gamma^1(a) = S_\gamma(a)$,

$$B_\gamma^n(a) = B_\gamma(a_1) \times B_\gamma(a_2) \times \cdots \times B_\gamma(a_n).$$

ТЕОРЕМА ФУБИНИ. Если функция $f: \mathbb{Q}_p^{n+m} \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что повторный интеграл

$$\int \left[\int |f(x, y)| d_p^m y \right] d_p^n x$$

существует, то $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_p^{n+m})$ и справедливы равенства

$$\begin{aligned} \int \left[\int f(x, y) d_p^m y \right] d_p^n x &= \int f(x, y) d_p^n x d_p^m y \\ &= \int \left[\int f(x, y) d_p^n x \right] d_p^m y. \end{aligned} \quad (5.2)$$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ. Если $x = x(y)$ – аналитический диффеоморфизм открыто-замкнутого множества $D' \subset \mathbb{Q}_p^n$ на множество $D \subset \mathbb{Q}_p^n$, причем

$$\det \frac{\partial x(y)}{\partial y} = \det \left(\frac{\partial x_k}{\partial y_j} \right) \neq 0, \quad y \in D',$$

то для любой $f \in \mathcal{L}^1(D)$ справедливо равенство

$$\int_D f(x) d_p^n x = \int_{D'} f(x(y)) \left| \det \frac{\partial x(y)}{\partial y} \right|_p d_p^n y. \quad (5.3)$$

ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА (о предельном переходе под знаком интеграла). Если последовательность f_k , $k \rightarrow \infty$, функций $f_k \in \mathcal{L}^1$ сходится почти всюду к функции $f(x)$ и существует функция $\psi \in \mathcal{L}^1$ такая, что

$$|f_k(x)| \leq \psi(x) \quad \text{при почти всех } x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

то справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) d_p^n x = \int f(x) d_p^n x.$$

§ 6. Обобщенные функции на $\mathbb{Q}_p^n$

Пусть $\mathcal{O}$ – открытое множество в $\mathbb{Q}_p^n$. Функция $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *локально-постоянной* в $\mathcal{O}$, если для любой точки $x \in \mathcal{O}$ существует такое $\gamma \in \mathbb{Z}$, что

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), \quad x' \in B_\gamma^n, \quad x \in \mathcal{O}.$$

Множество локально-постоянных функций в $\mathcal{O}$ обозначим через $\mathcal{E}(\mathcal{O})$; $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$. Всякая функция $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{O})$ непрерывна в $\mathcal{O}$. Ее носитель, – замыкание множества тех точек $x \in \mathcal{O}$, для которых $\varphi(x) \neq 0$, – будем обозначать $\text{spt } \varphi$.

ПРИМЕРЫ.

$$|x|_p \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\}),$$

$$\chi_p((\xi, x)) \in \mathcal{E}, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Функция $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{O})$ называется *основной* в $\mathcal{O}$ (функцией Брюа–Шварца), если ее носитель есть компакт в $\mathcal{O}$. Множество основных функций в $\mathcal{O}$ обозначим $\mathcal{S}(\mathcal{O})$; $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^n)$. Всякая функция $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O})$ равномерно локально-постоянна в $\mathcal{O}$.

ПРИМЕРЫ.

$$\Omega_k(x) = \Omega(p^{-k}|x|_p) \in \mathcal{S}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.1)$$

$$\Delta_k(x) = p^k \Omega(p^k|x|_p) \in \mathcal{S}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.2)$$

$$|x|_p \Omega(|x|_p) \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\}),$$

$$\chi_p((\xi, x)) \Omega(|x|_p) \in \mathcal{S}, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n,$$

$$\delta(|x|_p - p^\gamma) \in \mathcal{S}(S_\gamma), \quad \gamma \in \mathbb{Z},$$

$$\delta(|x|_p - p^\gamma) \delta(x_0 - k) \in \mathcal{S}(S_\gamma), \quad k = 1, 2, \dots, p-1, \quad \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Если K – открытый компакт в $\mathbb{Q}_p^n$, то $\theta_K \in \mathcal{S}(K)$. Здесь θ_M – характеристическая функция множества $M \subset \mathbb{Q}_p^n$: $\theta_M(x) = 1$, $x \in M$, $\theta_M(x) = 0$, $x \notin M$.

Сходимость в $\mathcal{S}(\mathcal{O})$,

$$\varphi_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S}(\mathcal{O}),$$

обозначает:

(i) существует компакт $K \subset \mathcal{O}$, не зависящий от k и такой, что $\text{spt } \varphi_k \subset K$ при всех k ;

(ii) существует $\gamma \in \mathbb{Z}$, не зависящее ни от k , ни от x , такое что

$$\varphi_k(x + x') = \varphi_k(x), \quad x' \in B_\gamma^n, \quad x \in K;$$

(iii) $\varphi_k(x) \Rightarrow 0$, $x \in K$, $k \rightarrow \infty$.

Обобщенной функцией в $\mathcal{O}$ называется всякий линейный непрерывный функционал $f: \varphi \rightarrow (f, \varphi)$ на $\mathcal{S}(\mathcal{O})$. Множество всех обобщенных функций в $\mathcal{O}$ обозначим $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$; $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{Q}_p^n)$.

Сходимость в $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$,

$$f_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathcal{O}),$$

определяется как слабая сходимость функционалов из $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$, т. е.

$$(f_k, \varphi) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}).$$

Всякий линейный на $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ функционал f непрерывен на $\mathcal{S}(\mathcal{O})$, т. е. $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O})$.

В открытом множестве $\mathcal{O}$ существует “разложение единицы” с функциями из $\mathcal{S}(\mathcal{O})$, а именно: если

$$\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k, \quad G_k \cap G_j = \emptyset, \quad k \neq j,$$

где G_k , $k = 1, 2, \dots$, — клопен компакты, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \theta_{G_k}(x) = 1, \quad x \in \mathcal{O}. \quad (6.3)$$

Обобщенная функция f из $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$ обращается в нуль в открытом множестве $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, если $(f, \varphi) = 0$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}')$; при этом пишем: $f(x) = 0$, $x \in \mathcal{O}'$. Обобщенные функции f и g из $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$ совпадают (равны) в $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, $f = g$ в $\mathcal{O}'$, если $f(x) - g(x) = 0$, $x \in \mathcal{O}'$. Наибольшее открытое множество, в котором обращается в нуль $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O})$, называется нулевым множеством f и оно обозначается $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}$. Замкнутое в $\mathcal{O}$ множество $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_f$ называется носителем f и обозначается $\text{spt } f$, $\text{spt } f = \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}_f$.

Множество обобщенных функций с компактным носителем в $\mathcal{O}$ обозначим через $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$, $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{Q}_p^n)$; $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ — сильно сопряженное пространство к $\mathcal{E}(\mathcal{O})$.

ПРИМЕР. δ -Функция

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \text{spt } \delta = \{0\}. \quad (6.4)$$

Обратно, всякая $f \in \mathcal{S}'$, $\text{spt } f = \{0\}$, имеет вид

$$f = C\delta, \quad (6.5)$$

где $C \neq 0$ — произвольная постоянная.

Последовательность $\{\delta_k, k \rightarrow \infty\}$ функций $\delta_k(x)$ из $\mathcal{S}$ называется δ -образной, если она ограничена в $\mathcal{L}^1$ и для любого $\gamma \in Z$

$$\int_{B_\gamma^n} \delta_k(x) d_p^n x \rightarrow 1, \quad \int_{\mathbb{Q}_p^n \setminus B_\gamma^n} |\delta_k(x)| d_p^n x \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\delta_k \rightarrow \delta, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S}. \quad (6.6)$$

Последовательность $\{\omega_k, k \rightarrow \infty\}$ функций $\omega_k(x)$ из $\mathcal{S}$ называется 1-образной, если она есть преобразование Фурье (см. ниже § 7) некоторой δ -образной последовательности $\{\delta_k, k \rightarrow \infty\}$.

1-Образная последовательность обладает свойствами: ограничена в $\mathcal{L}^\infty$ и для любого $\gamma \in Z$

$$\omega_k(x) \Rightarrow 1, \quad x \in B_\gamma^n, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\omega_k \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S}'. \quad (6.7)$$

Если $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$, то $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O})$, причем

$$(f, \varphi) = \int f(x) \varphi(x) d_p^n x, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}). \quad (6.8)$$

Обобщенные функции типа (6.8) называются *регулярными* в $\mathcal{O}$; остальные обобщенные функции называются *сингулярными*. δ -Функция сингулярна в $\mathbb{Q}_p^n$ и регулярна в $\mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\}$.

Пусть $0 \in \mathcal{O}$. Если $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O} \setminus \{0\})$, то она допускает *продолжение* (*регуляризацию*) $f_1 \in \mathcal{S}'(\mathcal{O})$ на $\mathcal{O}$, и все ее регуляризации, $\text{reg } f$, задаются формулой

$$\text{reg } f = f_1 + C\delta, \quad (6.9)$$

где C – произвольная постоянная, а f_1 можно взять в виде

$$(f_1, \varphi) = (f, \varphi - \Omega_\gamma \varphi(0)), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}),$$

причем $\gamma \in Z$ таково, что $B_\gamma^n \subset \mathcal{O}$. Заметим, что этот факт не имеет места для обобщенных функций вещественных аргументов! Примером такой f является функция $f(x) = \exp(x^{-1})$.

Для $f = |x|_p^{-1}$ в качестве регуляризации можно взять функционал

$$(\operatorname{reg} |x|_p^{-1}, \varphi) = \int |x|_p^{-1} [\varphi(x) - \Omega(|x|_p) \varphi(0)] d_p^n x, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Обобщенная функция $\operatorname{reg} |x|_p^{-1}$ является другим примером сингулярной обобщенной функции в $\mathbb{Q}_p^n$.

Произведение обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O})$ на функцию $a \in \mathcal{E}(\mathcal{O})$ определяется формулой

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}), \quad af \in \mathcal{S}'(\mathcal{O}). \quad (6.10)$$

ПРИМЕРЫ. Если $a \in \mathcal{E}$, то

$$a(x) \delta(x) = a(0) \delta(x).$$

Если $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathcal{O})$, то af совпадает с обычным произведением функций $a(x)$ и $f(x)$.

Если $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O})$ и $\operatorname{spt} f$ – открыто-замкнутое множество в $\mathcal{O}$, то

$$f(x) = \theta_{\operatorname{spt} f}(x) f(x). \quad (6.11)$$

Наконец, если $f \in \mathcal{S}'$, то

$$\omega_k f \rightarrow f, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S}', \quad (6.12)$$

где $\{\omega_k, k \rightarrow \infty\}$ – любая 1-образная последовательность.

В $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$ справедлива теорема о “кусочном склеивании”. Пусть задан набор обобщенных функций $f_k \in \mathcal{S}'(G_k)$, $k = 1, 2, \dots$, где G_k – открыто-замкнутые компакты, причем $G_k \cap G_j = \emptyset$, $k \neq j$. Тогда существует (единственная) обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O} = \bigcup_{k \geq 1} G_k$, такая что $f = f_k$ в G_k , $k = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА О “ЯДРЕ”. Пусть $\varphi \rightarrow A(\varphi)$ – линейное отображение $\mathcal{S}(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \in \mathbb{Q}_p^n$, в $\mathcal{S}'(\mathcal{O}')$, $\mathcal{O}' \in \mathbb{Q}_p^m$. Тогда существует (единственная) обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O} \times \mathcal{O}')$ такая, что

$$(A(\varphi), \psi) = (f, \varphi(x) \psi(y)), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}), \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}').$$

Пространства $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ и $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$ – полные, рефлексивные и ядерные; $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ плотно в $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$.

Линейная замена переменных $y = Ax + b$, $\det A \neq 0$, переводит обобщенную функцию $f(y)$ из $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$ в обобщенную функцию $f(Ax + b)$ из $\mathcal{S}'(\mathcal{O})$ по формуле

$$(f(Ax + b), \varphi) = \frac{1}{|\det A|_p} (f(y), \varphi(A^{-1}(y - b))), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}). \quad (6.13)$$

ПРИМЕРЫ. $\delta(x) = \delta(-x)$, $(\delta(x - x_0), \varphi) = \varphi(x_0)$.

Прямое произведение $f(x) \times g(y)$ обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O}_1)$, $\mathcal{O}_1 \subset \mathbb{Q}_p^n$, и $g \in \mathcal{S}'(\mathcal{O}_2)$, $\mathcal{O}_2 \subset \mathbb{Q}_p^m$, определяется формулой

$$(f(x) \times g(y), \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2).$$

Прямое произведение коммутативно, так что

$$f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x) \in \mathcal{S}'(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2). \quad (6.14)$$

При $g = 1$ формула (6.14) принимает вид

$$(f(x), \int_{\mathcal{O}_2} \varphi(x, y) d^m y) = \int_{\mathcal{O}_2} (f(x), \varphi(x, y)) d^m y, \quad (6.15)$$

$$f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O}_1), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$$

(обобщение теоремы Фубини, см. § 5).

Свертка $f * g$ обобщенных функций $f \in \mathcal{E}$, $\text{spt } f \in B_N^n$, и $g \in \mathcal{S}'$ определяется равенством

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \times g(y), \Omega_N(x) \varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (6.16)$$

На основе этого определяется свертка обобщенных функций f и g из $\mathcal{S}'$

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \times g(y), \Omega_k(x) \varphi(x + y)) = \lim_{k \rightarrow \infty} ((\Omega_k f) * g, \varphi),$$

если предел существует для любых $\varphi \in \mathcal{S}$, так что $f * g \in \mathcal{S}'$.

Если свертка $f * g$ существует, то существует и свертка $g * f$, и они равны (коммутативность свертки),

$$f * g = g * f. \quad (6.17)$$

ПРИМЕРЫ. Если $f \in \mathcal{S}'$, то

$$f * \delta = \delta * f = f. \quad (6.18)$$

Если $f \in \mathcal{S}'$ и $\psi \in \mathcal{S}$, то свертка $f * \psi$ – локально-постоянная функция в $\mathbb{Q}_p^n$, причем

$$(f * \psi)(x) = (f(y), \psi(x - y)), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (6.19)$$

Если $\{\delta_k, k \rightarrow \infty\}$ – δ -образная последовательность, то

$$f * \delta_k \rightarrow f, \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S}', \quad f \in \mathcal{S}'. \quad (6.20)$$

Если $f, g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ и существует функция $q \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ такая, что

$$\int_{B_k} f(x - y)g(y) d_p^n y \rightarrow q(x), \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S}',$$

то

$$f * g = q(x). \quad (6.21)$$

Если $f \in \mathcal{S}'$ и свертка $f * 1$ существует, то она постоянная. Эту постоянную назовем *интегралом* обобщенной функции f по всему пространству $\mathbb{Q}_p^n$, и обозначим

$$G \int f(x) d_p^n x = f * 1. \quad (6.22)$$

Это определение эквивалентно следующему:

$$G \int f(x) d_p^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} (f, \Omega_k), \quad (6.23)$$

если предел существует.

Если $f \in \mathcal{S}'$ и $\text{spt } f \subset D$, где D – открыто-замкнутое множество в $\mathbb{Q}_p^n$, то $f = \theta_D f$, и интеграл (6.22) будем обозначать так:

$$G \int_D f(x) d_p^n x.$$

В частности, если $f \in \mathcal{S}'$ и $\varphi \in \mathcal{S}$, $\text{spt } \varphi \subset B_\gamma^n$, то

$$G \int_{B_\gamma^n} f(x) \varphi(x) d_p^n x = (f, \varphi). \quad (6.24)$$

Если $f \in \mathcal{S}'$, $\text{spt } f \subset B_\gamma^n$, то

$$G \int_{B_\gamma^n} f(x) d_p^n x = (f, \Omega_\gamma). \quad (6.25)$$

Введенное понятие интеграла обобщенной функции является расширением понятия интеграла по мере Хаара (см. §§ 1 и 4).

ПРИМЕР.

$$G \int \delta(x) d_p x = 1.$$

Умножение обобщенных функций. Пусть $f, g \in \mathcal{S}'$. Произведением $f \cdot g$ назовем функционал, определяемый равенством

$$f \cdot g = \lim_{k \rightarrow \infty} (f * \Delta_k)g,$$

если предел существует в $\mathcal{S}'$, и тогда $f \cdot g \in \mathcal{S}'$.

Если произведение $f \cdot g$ существует, то существует и произведение $g \cdot f$, и они равны (*коммутативность произведения*):

$$f \cdot g = g \cdot f. \quad (6.26)$$

ПРИМЕРЫ. Если $a \in \mathcal{E}$, то

$$a \cdot f = af, \quad a \in \mathcal{E}, \quad f \in \mathcal{S}'.$$

В частности,

$$\begin{aligned} f \cdot 1 &= 1 \cdot f = f, & f \in \mathcal{S}', \\ a(x) \cdot \delta(x) &= a(0) \delta(x), \\ |x|_p^\alpha \cdot \delta(x) &= 0, \quad \alpha > 0, & |x|_p \cdot \operatorname{reg} |x|_p^{-1} = 1. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Как и в вещественном случае возникает вопрос: нельзя ли определить произведение любых обобщенных функций так, чтобы оно было ассоциативным и коммутативным? Ответ отрицательный. Известный пример Л. Шварца в p -адическом случае выглядит так: если бы такое произведение существовало, то в силу (6.27) мы имели бы следующую противоречивую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot \operatorname{reg} |x|_p^{-1} = (|x|_p \cdot \delta(x)) \cdot \operatorname{reg} |x|_p^{-1} \\ &= \delta(x) \cdot (|x|_p \cdot \operatorname{reg} |x|_p^{-1}) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x). \end{aligned}$$

§ 7. Преобразование Фурье

Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Преобразование Фурье $\tilde{\varphi} = F[\varphi]$ определяется формулой

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x) \chi_p((\xi, x)) d_p^n x, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Преобразование Фурье – линейный изоморфизм $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$, справедлива формула обращения преобразования Фурье

$$\varphi(x) = \int \tilde{\varphi}(\xi) \chi_p(-(x, \xi)) d_p^n \xi, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

ПРИМЕР.

$$\tilde{\Omega}_k = \Delta_k, \quad \tilde{\Delta}_k = \Omega_k, \quad k \in Z. \quad (7.1)$$

Преобразование Фурье $\tilde{f} = F[f]$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ определяется формулой

$$(\tilde{f}, \varphi) = (f, \tilde{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

так что $\tilde{\tilde{f}} \in \mathcal{S}'$.

Преобразование Фурье $f \rightarrow \tilde{f}$ – линейный изоморфизм $\mathcal{S}'$ на $\mathcal{S}'$, и справедлива формула обращения

$$f = F^{-1}[\tilde{f}] = F[\tilde{\tilde{f}}], \quad f \in \mathcal{S}',$$

где $\check{f}(x) = f(-x)$.

ПРИМЕРЫ.

$$\tilde{\delta} = 1, \quad \tilde{1} = \delta; \quad (7.2)$$

$$F[f(Ax + b)] = |\det A|_p^{-1} \chi_p(-(A^{-1}b, \xi)) F[f(A^{-1}\xi)], \quad \det A \neq 0. \quad (7.3)$$

В частности,

$$F[f(x - b)] = \chi_p((b, \xi)) F[f(\xi)]; \quad (7.4)$$

$$\tilde{\tilde{f}} = f. \quad (7.5)$$

Если $f \in \mathcal{L}^1$, то

$$\tilde{f}(\xi) = \int f(x) \chi_p((\xi, x)) d^n x, \quad (7.6)$$

причем $\tilde{f}$ непрерывна в $\mathbb{Q}_p^n$ и $\tilde{f}(\xi) \rightarrow 0$, $|\xi|_p \rightarrow \infty$ (аналог *теоремы Римана-Лебега*).

Если $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ и существует такая $q \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$, что

$$\int_{B_k^n} f(x) \chi_p((\xi, x)) d_p^n x \rightarrow q(\xi), \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{S},$$

то

$$\tilde{f} = q. \quad (7.7)$$

Если $f \in \mathcal{S}$, $\text{spt } f \subset B_\gamma^n$, то

$$\tilde{f}(\xi) = (f(x), \Omega_\gamma(x) \chi_p((\xi, x))). \quad (7.8)$$

Если $f \in \mathcal{L}^2$, то

$$\int_{B_k^n} f(x) \chi_p((\xi, x)) d_p^n x \rightarrow \tilde{f}(\xi), \quad k \rightarrow \infty \quad \text{в } \mathcal{L}^2. \quad (7.9)$$

Оператор $f \rightarrow \tilde{f}$ – унитарный в $\mathcal{L}^2$, так что справедливо равенство *Парсеваля–Стеклова*

$$\|f\| = \|\tilde{f}\|, \quad f \in \mathcal{L}^2, \quad (7.10)$$

где норма $\|f\| = \|f\|_2 = (f, f)^{1/2}$ определена в § 4 и *скалярное произведение* (f, g) в $\mathcal{L}^2$ равно

$$(f, g) = \int f(x) \bar{g}(x) d_p^n x, \quad f, g \in \mathcal{L}^2.$$

Справедливо *неравенство Коши–Буняковского*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|, \quad f, g \in \mathcal{L}^2.$$

Если $f \in \mathcal{L}^2$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^{-k/2} \int_{B_k} |f(x)| d_p^n x = 0. \quad (7.11)$$

ТЕОРЕМА. Пусть $f, g \in \mathcal{S}$. Свертка $f * g$ существует тогда и только тогда, когда существует произведение $\widetilde{f \cdot g}$, и справедливо равенство

$$\widetilde{f * g} = \widetilde{f \cdot g}, \quad \widetilde{f \cdot g} = \widetilde{f} * \widetilde{g}. \quad (7.12)$$

Отметим следующие полезные формулы

$$\int_{S_\gamma^n} \chi_p((x, \xi)) d_p^n x = (1 - p^{-n}) p^{\gamma n} \Omega(p^\gamma |\xi|_p) - q^{(k-1)n} \delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}), \quad (7.13)$$

откуда

$$\int_{B_\gamma^n} \chi_p((x, \xi)) d_p^n x = p^{\gamma n} \Omega(p^\gamma |\xi|_p). \quad (7.14)$$

Гауссовым интегралом $G_p(a; \xi)$ называется преобразование Фурье функции $\chi_p(ax^2)$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, $p = \infty, 2, 3, 5, \dots$,

$$G_p(a, \xi) = \int \chi_p(ax^2 + \xi x) d_p x = \lambda_p(a) |2a|_p^{-1/2} \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right). \quad (7.15)$$

Справедлива следующая адельная формула

$$G_\infty(a; \xi) \prod_{p=2}^{\infty} G_p(a; \xi) = 1, \quad a \in \mathbb{Q}^\times, \quad \xi \in \mathbb{Q}, \quad (7.16)$$

вытекающая из адельных формул (2.10)–(2.12).

§ 8. Однородные обобщенные функции

Пусть $\pi(x) = \pi_{\alpha, \theta}(x) = |x|_p^{\alpha-1} \theta(x)$ – квазихарактер поля $\mathbb{Q}_p$ (см. (2.5')). Обобщенная функция $f \in \mathcal{S}$ называется *однородной* относительно $\pi_{\alpha, \theta}$, если

$$f(tx) = \pi_{\alpha, \theta}(t) f(x), \quad t \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad x \in \mathbb{Q}_p^\times. \quad (8.1)$$

Однородные обобщенные функции относительно главного квазихарактера

$$\pi_{\alpha, 1}(x) = |x|_p^{\alpha-1}$$

называются *однородными степенями однородности* $\alpha - 1$.

Квазихарактер $\pi_{\alpha,\theta}(x)$ определяет однородную относительно себя обобщенную функцию $\pi_{\alpha,\theta}$ по формуле

$$(\pi_{\alpha,\theta}, \varphi) = \int |x|_p^{\alpha-1} \theta(x) \varphi(x) d_p x, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (8.2)$$

Обобщенная функция $\pi_{\alpha,\theta}$ при $\theta \neq 1$ – целая по α ; при $\theta = 1$ она голоморфна по α всюду за исключением простых полюсов

$$\alpha_k = \frac{2k\pi i}{\ln p}, \quad k \in Z,$$

с вычетом $((1 - p^{-1})/\ln p) \delta(x)$.

Отметим, что обобщенная функция $|x|_p^{\alpha-1}$, заданная в области $\operatorname{Re} \alpha > 0$ формулой (8.2), аналитически продолжается из этой области в область $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$, $\alpha \neq \alpha_k$, $k \in Z$ по формуле

$$\begin{aligned} (|x|_p^{\alpha-1}, \varphi) &= (1 - p^{-\alpha})^{-1} \int |x|_p^{\alpha-1} \left[\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{p}\right) \right] d_p x \\ &= \int |x|_p^{\alpha-1} [\varphi(x) - \varphi(0)] d_p x, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

поскольку

$$\int |x|_p^{\alpha-1} = 0, \quad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z. \quad (8.3')$$

При $\alpha = \alpha_k$, $k \in Z$, квазихарактеру $\pi_{0,1}(x) = |x|_p^{-1}$ соответствует обобщенная функция $\delta(x)$ степени однородности -1 ; обратно, всякая однородная обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'$ степени однородности -1 имеет вид $f(x) = C\delta(x)$, где C – некоторая постоянная.

Преобразование Фурье $\pi_{\alpha,\theta}$ есть однородная обобщенная функция $\tilde{\pi}_{\alpha,\theta}$ относительно квазихарактера

$$\pi_{\alpha,\theta}^{-1}(\xi) |\xi|_p^{-1} = |\xi|_p^{-\alpha} \bar{\theta}(\xi) = \pi_{1-\alpha, \bar{\theta}}(\xi), \quad (8.4)$$

так что

$$\tilde{\pi}_{\alpha,\theta} = \Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) \pi_{1-\alpha, \bar{\theta}}. \quad (8.5)$$

Здесь $\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta})$ – гамма-функция поля $\mathbb{Q}_p$, соответствующая квазихарактеру $\pi_{\alpha,\theta}(x)$,

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) = \tilde{\pi}_{\alpha,\theta}(1) = \int |x|_p^{\alpha-1} \theta(x) \chi_p(x) d_p x. \quad (8.6)$$

В частности, при $\theta = 1$, обозначая

$$\Gamma_p(\alpha) = \Gamma_p(|x|_p^{\alpha-1}),$$

для гамма-функции $\Gamma_p(\alpha)$ главного квазихарактера $|x|_p^{\alpha-1}$ получим представление

$$\Gamma_p(\alpha) = \int |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(x) d_px = \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^{-\alpha}}, \quad (8.7)$$

$$\alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z.$$

Для $\epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$, $|\epsilon|_p = 1$, $p \neq 2$

$$\theta(x) = \text{sgn}_\epsilon x = |x|_p^{\pi i / \ln p} = (-1)^{\gamma(x)},$$

и обозначим

$$\tilde{\Gamma}_p(\alpha) = \Gamma_p(|x|_p^{\alpha-1} \text{sgn}_\epsilon x).$$

Для $\tilde{\Gamma}_p$ -функции из (8.7) следует выражение

$$\tilde{\Gamma}_p(\alpha) = \Gamma_p\left(\alpha + \frac{\pi i}{\ln p}\right) = \frac{1 + p^{\alpha-1}}{1 + p^{-\alpha}}, \quad (8.8)$$

$$\alpha \neq \alpha_k + \frac{\pi i}{\ln p}, \quad k \in Z.$$

Отметим, в частности, формулы для гамма-функций при $d = -1$ (ср. § 3),

$$\Gamma_p(\text{sgn}_{p,-1} x |x|_p^{\alpha-1}) = \begin{cases} \Gamma_p(\alpha) = \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^{-\alpha}}, & p \equiv 1 \pmod{4}, \\ \tilde{\Gamma}_p(\alpha) = \frac{1 + p^{\alpha-1}}{1 + p^{-\alpha}}, & p \equiv 3 \pmod{4}, \\ 2i4^{\alpha-1}, & p = 2. \end{cases}$$

Справедливо равенство

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) \Gamma_p(\pi_{1-\alpha,\bar{\theta}}) = \theta(-1). \quad (8.9)$$

В частности,

$$\Gamma_p(\alpha) \Gamma_p(1 - \alpha) = 1. \quad (8.10)$$

Свертка однородных обобщенных функций $\pi_{\alpha,\theta}$ и $\pi_{\beta,\theta'}$ существует и является однородной обобщенной функцией относительно квазихарактера

$$\pi_{\alpha,\theta}(x) \pi_{\beta,\theta'}(x) |x|_p^{-1} = \pi_{\alpha+\beta,\theta\theta'}(x)$$

и стало быть

$$\pi_{\alpha,\theta} * \pi_{\beta,\theta'} = B_p(\pi_{\alpha,\theta}, \pi_{\beta,\theta'}) \pi_{\alpha+\beta,\theta\theta'}. \quad (8.11)$$

Здесь $B_p(\pi_{\alpha,\theta}, \pi_{\beta,\theta'})$ – бета-функция поля $\mathbb{Q}_p$, соответствующая квазихарактерам $\pi_{\alpha,\theta}$ и $\pi_{\beta,\theta'}$,

$$\begin{aligned} B_p(\pi_{\alpha,\theta}, \pi_{\beta,\theta'}) &= (\pi_{\alpha,\theta} * \pi_{\beta,\theta'})(1) = \frac{\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) \Gamma_p(\pi_{\beta,\theta'})}{\Gamma_p(\pi_{\alpha+\beta,\theta\theta'})} \\ &= \Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) \Gamma_p(\pi_{\beta,\theta'}) \Gamma_p(\pi_{\gamma,\theta''}) \theta''(-1), \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1, \quad \theta\theta'\theta'' = 1. \end{aligned} \quad (8.12)$$

В частности, для главных квазихарактеров (при $\theta = \theta' = 1$) формула (8.12) превращается в такую

$$B_p(\alpha, \beta) = \Gamma_p(\alpha) \Gamma_p(\beta) \Gamma_p(\gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (8.13)$$

где обозначено

$$B_p(\alpha, \beta) = B_p(|x|_p^{\alpha-1}, |x|_p^{\beta-1}).$$

Отметим другое симметричное выражение для бета-функции $B_p(\alpha, \beta)$ [27]:

$$\begin{aligned} B_p(\alpha, \beta) &= (1 - p^{-1}) [(1 - p^{-\alpha})^{-1} + (1 - p^{-\beta})^{-1} \\ &\quad + (1 - p^{-\gamma})^{-1} - 1], \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Если ввести аналоги гамма- и бета-функций Эйлера:

$$\begin{aligned} \gamma_p(\alpha) &= \int_{Z_p} |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(x) d_p x = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}}, \\ b_p(\alpha, \beta) &= \int_{Z_p} |x|_p^{\alpha-1} |1 - x|_p^{\beta-1} d_p x = \gamma_p(\alpha) + \gamma_p(\beta) - 1, \end{aligned}$$

то равенство (8.14) примет вид

$$\begin{aligned} B_p(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} b_p(\alpha, \beta) + \frac{1}{2} b_p(\alpha, \gamma) + \frac{1}{2} b_p(\beta, \gamma) + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \\ \alpha + \beta + \gamma &= 1. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Рангом $\rho(\theta)$ характера θ называется такое целое число $k \geq 0$, что $\theta(t) = 1$ при $|1-t|_p \leq p^{-k}$, $t \in Z_p$, и $\theta(t) \neq 1$ при $|1-t|_p = p^{1-k}$,

$t \in Z_p$. Ясно, что нулевой ранг имеет только главный характер $\theta(x) \equiv 1$.

Для характеров ранга $k \geq 1$ справедливы формулы [11]:

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) = p^{\alpha k} a_{p,k}(\theta), \quad (8.16)$$

$$a_{p,\gamma}(\theta) = \int_{S_0} \theta(t) \chi_p(p^{-\gamma} t) d_p t, \quad \gamma \geq 1, \quad (8.17)$$

$$a_{p,\gamma}(\theta) = 0, \quad \gamma \neq k, \quad |a_{p,k}(\theta)| = p^{-k/2}, \quad (8.18)$$

$$a_{p,k}(\theta) a_{p,k}(\bar{\theta}) = p^{-k} \theta(-1), \quad (8.19)$$

$$\int_{S_k} \theta(p^k x) \chi_p(\xi x) d_p x = p^k a_{p,k}(\theta) \bar{\theta}(\xi) \delta(|\xi|_p - 1), \quad (8.20)$$

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) \Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}^{-1}) = p^k \theta(-1), \quad (8.21)$$

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha+1,\theta}) = p^k \Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}). \quad (8.22)$$

ПРИМЕРЫ. Ранг характера

$$\operatorname{sgn}_{p,d} x, \quad |d|_p = \frac{1}{p}, \quad p \neq 2, \quad (8.23)$$

равен 1. Поэтому в силу (8.16) и (8.19)

$$\Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) = \pm p^{\alpha-1/2} \sqrt{\operatorname{sgn}_{p,d}(-1)}. \quad (8.24)$$

Например:

$$\begin{aligned} \Gamma_3(|x|_3^{\alpha-1} \operatorname{sgn}_{3,3} x) &= -i 3^{\alpha-1/2}, \\ \Gamma_2(|x|_2^{\alpha-1} \operatorname{sgn}_{2,-1} x) &= 2i 4^{\alpha-1}, \\ \Gamma_2(|x|_2^{\alpha-1} \operatorname{sgn}_{2,7} x) &= 2i 4^{\alpha-1}, \\ \Gamma_2(|x|_2^{\alpha-1} \operatorname{sgn}_{2,3} x) &= 2i 4^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Оператор (8.2)

$$\varphi \rightarrow (\pi_{\alpha,\theta}, \varphi) \equiv M^\pi[\varphi]$$

называется *преобразованием Меллина функции* $\varphi \in \mathcal{S}$ *относительно квазихарактера* $\pi_{\alpha,\theta}(x)$. При $\theta = 1$ функция $M^{|x|_p^{\alpha-1}}[\varphi] \equiv$

$M^\alpha[\varphi]$ называется просто преобразованием Меллина функции $\varphi \in \mathcal{S}$. В силу (8.3) его можно записать в следующем виде

$$M^\alpha[\varphi] = (1 - p^{-\alpha})^{-1} \int |x|_p^{\alpha-1} \left[\varphi(x) - \varphi\left(\frac{x}{p}\right) \right] d_p x, \\ \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

В силу (8.2) и (8.5) имеет место следующее равенство

$$M^\pi[\tilde{\varphi}] = \Gamma_p(\pi_{\alpha,\theta}) M^{\tilde{\pi}}[\varphi], \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (8.25)$$

При $\theta = 1$ формула (8.25) принимает вид

$$M^\alpha[\tilde{\varphi}] = \Gamma_p(\alpha) M^{1-\alpha}[\varphi]. \quad (8.25')$$

Преобразование Меллина $Z_p^\times$ -инвариантных (обобщенных) функций и его обращение. Функция $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$ называется $Z_p^\times$ -инвариантной, если $\varphi(x) = \varphi(t|x|_p)$, $t \in Z_p^\times$, $x \in \mathbb{Q}_p^\times$, или, другими словами,

$$\varphi(x) = (1 - p^{-1})^{-1} \int_{Z_p^\times} \varphi(t|x|_p) d_p t \equiv S[\varphi](|x|_p).$$

Всякая $Z_p^\times$ -инвариантная функция $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$ однозначно представляется в виде

$$\varphi(x) = \sum_{\gamma} \varphi_{\gamma} \delta(|x|_p - p^{\gamma}), \quad \varphi_{\gamma} = \varphi(p^{\gamma}) = S[\varphi](p^{\gamma}).$$

Поэтому подпространство пространства $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$, состоящее из $Z_p^\times$ -инвариантных функций, изоморфно пространству финитных последовательностей $\{\varphi_{\gamma}, \gamma \in N\}$, где N – ограниченное подмножество $\mathbb{Z}$.

Обобщенная функция $f \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$ называется $Z_p^\times$ -инвариантной, если

$$(f, \varphi) = (f(x), S[\varphi](|x|_p)), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times).$$

Всякая $Z_p^\times$ -инвариантная обобщенная функция $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{Q}_p^\times)$ однозначно представляется в виде

$$f(x) = \sum_{\gamma} f_{\gamma} \delta(|x|_p - p^{\gamma}), \quad f_{\gamma} = (1 - p^{-1})^{-1} p^{-\gamma} (f(x), \delta(|x|_p - p^{\gamma})),$$

так что подпространство пространства $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$, состоящее из $Z_p^\times$ -инвариантных обобщенных функций, изоморфно пространству последовательностей $\{f_\gamma, \gamma \in Z\}$.

Если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$ есть $Z_p^\times$ -инвариантная функция, то ее преобразование Меллина

$$M^\alpha[\varphi] = \int |x|^{\alpha-1} S[\varphi](|x|_p) d_p x = (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma \in M} \varphi_\gamma p^{\alpha\gamma}$$

есть целая функция α и справедлива формула обращения [30]

$$\varphi(x) = \frac{\ln p}{2\pi i(1 - p^{-1})} \int_{\sigma - i\pi/\ln p}^{\sigma + i\pi/\ln p} M^\alpha[\varphi] |x|_p^{-\alpha} d\alpha. \quad (8.26)$$

Формула (8.26) распространяется и на $Z_p^\times$ -инвариантные обобщенные функции f из $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^\times)$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{\gamma \in Z} |f_\gamma| p^{c\gamma} < \infty$$

при некотором c . Ее преобразование Меллина

$$M^\alpha[f] = (f(x), |x|_p^{\alpha-1}) = (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma \in Z} f_\gamma p^{\gamma\alpha}$$

есть голоморфная функция α в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha < c$ и справедлива формула обращения (8.26) для f , причем интеграл (8.26) не зависит от $\sigma < c$.

Пространство $\mathbb{Q}_p^n$. Ограничимся случаем главного квазихарактера $|x|_p^\alpha$. Обобщенная функция $|x|_p^{\alpha-n}$ — однородная степени однородности $\alpha - n$, голоморфна по α всюду за исключением простых полюсов $\alpha_k = 2k\pi i/\ln p$, $k \in Z$, с вычетом $((1 - p^{-n})/(\ln p)) \delta(x)$; справедлива формула преобразования Фурье [17], [18]

$$\widetilde{|x|_p^{\alpha-n}} = \Gamma_p^{(n)}(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha}, \quad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z, \quad (8.27)$$

где $\Gamma_p^{(n)}$ – гамма-функция векторного пространства $\mathbb{Q}_p^n$ ($\Gamma_p^{(1)} = \Gamma_p$),

$$\Gamma_p^{(n)}(\alpha) = \int |x|_p^{\alpha-n} \chi_p(x_1) d_p^n x = \frac{1 - p^{\alpha-n}}{1 - p^{-\alpha}}, \quad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z, \quad (8.28)$$

$$\Gamma_p^{(n)}(\alpha) \Gamma_p^{(n)}(n - \alpha) = 1, \quad (8.29)$$

$$\Gamma_p^{(n)}(\alpha) = (-1)^{n-1} p^{(n-1)(n/2-\alpha)} \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma_p(\alpha - k). \quad (8.30)$$

Бета-функция $B_p^{(n)}$ пространства $\mathbb{Q}_p^n$ определяется аналогично (8.11) ($B_p^{(1)} = B_p$) равенством

$$|x|_p^{\alpha-n} * |x|_p^{\beta-n} = B_p^{(n)}(\alpha, \beta) |x|_p^{\alpha+\beta-n}, \quad (8.31)$$

$$B_p^{(n)}(\alpha, \beta) = \Gamma_p^{(n)}(\alpha) \Gamma_p^{(n)}(\beta) \Gamma_p^{(n)}(\gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = n. \quad (8.32)$$

Адельные формулы для гамма- и бета-функций. Для гамма-функций справедлива следующая адельная формула [1], [7]

$$\Gamma_\infty(\alpha) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_p(\alpha) = 1, \quad \alpha \neq 0, 1, \quad (8.33)$$

где Γ_∞ – гамма-функция поля $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty(\alpha) &= \int |x|_p^{\alpha-1} \exp(-2\pi i x) dx \\ &= 2(2\pi)^{-\alpha} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma(\alpha) = \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)}, \end{aligned} \quad (8.34)$$

где Γ – гамма-функция Эйлера и ζ – дзета-функция Римана,

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \prod_{p=2}^{\infty} (1 - p^{-\alpha})^{-1}. \quad (8.34')$$

Регуляризация расходящегося бесконечного произведения в (8.33) определяется с помощью формулы

$$\begin{aligned} \prod_{p=2}^P \Gamma_p(\alpha) \operatorname{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} \frac{1}{(1 - p^{-\alpha})} &= \frac{\zeta(\alpha)}{\zeta(1-\alpha)} \operatorname{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} \frac{1}{(1 - p^{\alpha-1})}, \\ P &= \infty, 2, 3, 5, \dots, \end{aligned} \quad (8.35)$$

вытекающей из общей формулы Тейта. Здесь P_1 – простое число, следующее за простым числом P ; $\text{AC } f(\alpha)$ – аналитическое продолжение по α функции $f(\alpha)$, голоморфной в некоторой области комплексной плоскости переменной α .

Переходя в (8.35) к пределу при $P \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\text{Re } \alpha < 0$, обозначая

$$\text{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_p(\alpha) = \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \Gamma_p(\alpha) \text{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} \frac{1}{(1 - p^{-\alpha})}$$

и пользуясь равенством (8.34), получим адельную формулу (8.33). При $\text{Re } \alpha \leq 0$ $\text{reg} \prod \Gamma_p(\alpha)$ определяется из формулы (8.33) как аналитическое (мероморфное) продолжение по α .

Аналогичная адельная формула справедлива и для бета-функций:

$$B_{\infty}(\alpha, \beta) \text{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_p(\alpha, \beta) = 1, \quad (8.36)$$

где

$$B_{\infty}(\alpha, \beta) = \Gamma_{\infty}(\alpha) \Gamma_{\infty}(\beta) \Gamma_{\infty}(\gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (8.37)$$

– бета-функция поля $\mathbb{R}$ и, в соответствии с (8.13),

$$\text{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_p(\alpha, \beta) = \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \text{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_p(x). \quad (8.38)$$

Отметим другие симметричные выражения для B_{∞} :

$$\begin{aligned} B_{\infty}(\alpha, \beta) &= B(\alpha, \beta) + B(\alpha, \gamma) + B(\beta, \gamma) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} + \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \gamma)} + \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta + \gamma)} \\ &= \frac{4}{\pi} \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \Gamma(x) \cos \frac{\pi x}{2} = \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \frac{\zeta(1-x)}{\zeta(x)}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Адельная формула для дзета-функции Римана $\zeta(\alpha)$ (см. (8.34')). Функция $\zeta(\alpha)$ удовлетворяет функциональному соотношению

$$\pi^{-\alpha/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \zeta(\alpha) = \pi^{-(\alpha-1)/2} \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \zeta(1-\alpha). \quad (8.40)$$

Обозначим:

$$\zeta_\infty(\alpha) = \int e^{-\pi x^2} |x|^{\alpha-1} dx = \pi^{-\alpha/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (8.41)$$

$$\zeta_p(\alpha) = \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{Z_p} |x|_p^{\alpha-1} d_p x = \frac{1}{1-p^{-\alpha}}, \quad (8.42)$$

$$\zeta_A(\alpha) = \zeta_\infty(\alpha) \zeta(\alpha). \quad (8.43)$$

Тогда будут справедливы следующие формулы:

$$\zeta_A(\alpha) = \zeta_A(1-\alpha), \quad (\text{ср. (8.40)}), \quad (8.44)$$

$$\Gamma_\infty(\alpha) = \frac{\zeta_\infty(\alpha)}{\zeta_\infty(1-\alpha)} = \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)}, \quad (\text{ср. (8.34)}), \quad (8.45)$$

$$\zeta_\infty(\alpha) \prod_{p=2}^{\infty} \zeta_p(\alpha) = \zeta_A(\alpha), \quad (\text{ср. (8.43)}). \quad (8.46)$$

Формула (8.46) по существу есть адельная формула для дзета-функции Римана.

§ 9. Квадратичные расширения поля $\mathbb{Q}_p$

Пусть p -адическое число $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$. *Квадратичным расширением* поля $\mathbb{Q}_p$ является поле $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}_p + \sqrt{d} \mathbb{Q}_p$. Опишем все неизоморфные поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$. В силу сказанного в § 1, достаточно рассмотреть целые рациональные числа d , свободные от квадратов, т. е. $d = \pm p_1 p_2 \cdots p_n$, $d \neq 1$, где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — различные простые числа.

Возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned} p \neq 2, p_1, \dots, p_n, \quad \left(\frac{d}{p}\right) &= 1, & \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) &\sim \mathbb{Q}_p; \\ p \neq 2, p_1, \dots, p_n, \quad \left(\frac{d}{p}\right) &= -1, & \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) &\sim \mathbb{Q}_p(\sqrt{\epsilon}), \\ & & \epsilon &\notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1; \\ p \neq 2, p = p_i, \quad \left(\frac{d/p_i}{p}\right) &= 1, & \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) &\sim \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}); \\ p \neq 2, p = p_i, \quad \left(\frac{d/p_i}{p}\right) &= -1, & \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) &\sim \mathbb{Q}_p(\sqrt{p\epsilon}), \\ & & \epsilon &\notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p = 2, \quad d \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}, \quad \mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) &\sim \mathbb{Q}_2(\sqrt{\epsilon}), \\
&\epsilon = 3, 5, 7 \text{ соотв.}; \\
p = 2, \quad d/2 \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}, \quad \mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) &\sim \mathbb{Q}_2(\sqrt{2\epsilon}), \\
&\epsilon = 1, 3, 5, 7 \text{ соотв.}
\end{aligned}$$

Отметим, что $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ есть замыкание поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q} + \sqrt{d}\mathbb{Q}$ по метрике $\sqrt{|z\bar{z}|_p}$, где $z = x + \sqrt{d}y$, $\bar{z} = x - \sqrt{d}y$, $z\bar{z} = x^2 - dy^2$, $x, y \in \mathbb{Q}$.

Меру Хаара $d_p z$ поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ выберем в виде

$$d_p z = \frac{1}{\delta} d_p x d_p y, \quad z = x + \sqrt{d}y, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p, \quad (9.1)$$

где $\delta = \delta_{p,d} = 2$, если $p = 2$, $d \equiv 5 \pmod{8}$ и $\delta = 1$ в остальных случаях. Мера $d_p z$ нормирована условием (см. [6])

$$\int_{B_0^2} d_p z = 1, \quad B_0^2 = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) : |z\bar{z}|_p \leq 1]. \quad (9.2)$$

Имеет место равенство

$$d_p(az) = |a\bar{a}|_p d_p z, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times(\sqrt{d}). \quad (9.3)$$

Величина $|a\bar{a}|_p$ называется *модулем автоморфизма* $z \rightarrow az$ поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$.

Максимальное компактное подкольцо $Z_p(\sqrt{d})$ поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ есть

$$Z_p(\sqrt{d}) = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) : |z\bar{z}|_p \leq 1], \quad Z_p(\sqrt{d}) = B_0^2;$$

его мультипликативная подгруппа есть

$$Z_p^\times(\sqrt{d}) = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) : |z\bar{z}|_p = 1];$$

его максимальный идеал есть

$$I_p(\sqrt{d}) = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) : |z\bar{z}|_p < 1].$$

Классы вычетов $Z_p(\sqrt{d})/I_p(\sqrt{d})$ образуют конечное поле характеристики p , называемое *полем вычетов*; число его элементов $q = q_{p,d}$ (равное p или p^2) называется *модулем поля* $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$. Для

конкретных случаев имеем: при $p = 2$, $d \equiv 5 \pmod{8}$, $q = 4$, поле вычетов $\{0, 1, 1/2 \pm \sqrt{5}/2\}$; при $d \not\equiv 5 \pmod{8}$, $q = 2$ поле вычетов $\{0, 1\}$; при $p \neq 2$, $|d|_p = 1$, $q = p^2$ поля вычетов $\{k + \sqrt{d}j, k, j = 0, 1, \dots, p-1\}$; при $|d|_p = 1/p$, $q = p$ поле вычетов $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

Ранг аддитивного характера $\chi_p(z + \bar{z})$ есть наибольшее целое число $r \geq 0$, для которого

$$\chi_p(z + \bar{z}) \equiv 1, \quad |z\bar{z}|_p \leq q^r \quad \left(q^{-r/2} = \delta \sqrt{|4d|_p} \right). \quad (9.4)$$

В частности,

$$\begin{cases} r = 0, & |d|_p = 1, \quad p \neq 2 \text{ или } d \equiv 5 \pmod{8}, \quad p = 2; \\ r = 1, & |d|_p = \frac{1}{p}, \quad p \neq 2; \\ r = 2, & d \equiv 3, 7 \pmod{8}, \quad p = 2; \\ r = 3, & |d|_2 = \frac{1}{2}, \quad p = 2. \end{cases}$$

Преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(\zeta)$, $\zeta = \xi + \sqrt{d}\eta$, основной функции $\varphi(z) \equiv \varphi(x, y)$ из $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})) \sim \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^2)$ определим формулой

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\zeta) &= \delta \sqrt{|4d|_p} \int \varphi(z) \chi_p(z\zeta + \bar{z}\bar{\zeta}) d_p z \\ &= \sqrt{|4d|_p} \int \varphi(x, y) \chi_p(2x\xi + 2dy\eta) d_p x d_p y. \end{aligned}$$

Обратное преобразование Фурье выражается равенством

$$\varphi(z) = \delta \sqrt{|4d|_p} \int \tilde{\varphi}(\zeta) \xi_p(-z\zeta - \bar{z}\bar{\zeta}) d_p \zeta.$$

Таким образом, мера $\delta \sqrt{|4d|_p} d_p z$ самодвойственна относительно характера $\chi_p(z + \bar{z})$.

Обобщенная функция

$$|z\bar{z}|_p^{\alpha-1} = |x^2 - dy^2|_p^{\alpha-1}$$

определяется равенством (см. § 8)

$$\begin{aligned} (|z\bar{z}|_p^{\alpha-1}, \varphi) &= \int_{|z\bar{z}|_p \leq 1} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} [\varphi(z) - \varphi(0)] d_p z + \int_{|z\bar{z}|_p > 1} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} d_p z \\ &\quad + \varphi(0) \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-\alpha}}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})), \end{aligned}$$

или эквивалентно,

$$(|z\bar{z}|_p^{\alpha-1}, \varphi) = \int |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} [\varphi(z) - \varphi(0)] d_p z, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})).$$

Здесь мы использовали формулы:

$$\int_{B_0^2} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} d_p z = \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-\alpha}}, \quad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z, \quad (9.5)$$

$$\int |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} d_p z = 0, \quad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z, \quad (9.6)$$

где

$$\alpha_k = \frac{2k\pi i}{\ln q}, \quad k \in Z. \quad (9.7)$$

Обобщенная функция $|z\bar{z}|_p^{\alpha-1}$ (степени однородности $2\alpha - 2$) голоморфна по α всюду за исключением простых полюсов $\alpha = \alpha_k$, $k \in Z$ (см. (9.6)), с вычетом $((q - 1)/(q \ln q))\delta(x, y)$.

Справедлива формула преобразования Фурье [6]

$$F[|z\bar{z}|_p^{\alpha-1}] = \Gamma_{p,d}(\alpha) |\zeta\bar{\zeta}|_p^{-\alpha}, \quad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z, \quad (9.8)$$

где

$$\Gamma_{p,d}(\alpha) = \delta\sqrt{|4d|_p} \int |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} \xi_p(z + \bar{z}) d_p z = \rho_{p,d}(\alpha) \Gamma_q(\alpha) \quad (9.9)$$

– гамма-функция поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$,

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{1 - q^{\alpha-1}}{1 - q^{-\alpha}} \quad (9.10)$$

– приведенная гамма-функция поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$.

Из (9.8)–(9.10) вытекает следующее соотношение для гамма-функции поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$:

$$\Gamma_{p,d}(\alpha) \Gamma_{p,d}(1 - \alpha) = 1. \quad (9.11)$$

Бета-функция поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ вводится аналогично § 8. Свертка $|z\bar{z}|_p^{\alpha-1} * |z\bar{z}|_p^{\beta-1}$ существует для всех комплексных (α, β) из трубчатой области $\operatorname{Re} \alpha > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1$ и выражается интегралом

$$\begin{aligned} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} * |z\bar{z}|_p^{\beta-1} &= \int |\zeta\bar{\zeta}|_p^{\alpha-1} |(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})|_p^{\beta-1} d_p \zeta \\ &= B_{p,d}(\alpha, \beta) |z\bar{z}|_p^{\alpha+\beta-1}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

где $B_{p,d}$ – бета-функция поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ [11]:

$$\begin{aligned} B_{p,d}(\alpha, \beta) &= \int |\zeta \bar{\zeta}|_p^{\alpha-1} |(1-\zeta)(1-\bar{\zeta})|_p^{\beta-1} d_p \zeta \\ &= \frac{\Gamma_{p,d}(\alpha) \Gamma_{p,d}(\beta)}{\delta \sqrt{|4d|_p} \Gamma_{p,d}(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Из равенств (9.9)–(9.13) следуют такие симметричные выражения для бета-функции:

$$\begin{aligned} B_{p,d}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\delta \sqrt{|4d|_p}} \Gamma_{p,d}(\alpha) \Gamma_{p,d}(\beta) \Gamma_{p,d}(\gamma) \\ &= B_q(\alpha, \beta) = \Gamma_q(\alpha) \Gamma_q(\beta) \Gamma_q(\gamma), \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad (\alpha, \beta) \neq (\alpha_k, \alpha_j), \quad (k, j) \in Z^2.$$

Отметим, что равенства (9.12)–(9.14) справедливы при всех (α, β) таких, что $(\alpha, \beta) \neq (\alpha_k, \alpha_j)$, $(k, j) \in Z^2$.

Назовем *верхней (нижней) полуплоскостью* поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$ совокупность точек $z = x + \sqrt{d}y$, для которых $\text{sgn}_{p,d} y = 1$ (соответственно $\text{sgn}_{p,d} y = -1$).

Введем обобщенные функции $(x \pm \sqrt{d}0)^{-1}$ как преобразование Фурье функций

$$\theta_d^\pm(\xi) = \frac{1}{2} (1 \pm \text{sgn}_{p,d} \xi), \quad (x \pm \sqrt{d}0)^{-1} = \tilde{\theta}_d^\pm(x). \quad (9.15)$$

Справедливы равенства [11]

$$F[\theta_d^\pm](x) = (x \pm \sqrt{d}0)^{-1} = \frac{1}{2} \delta(x) + C_{p,d} \frac{\text{sgn}_{p,d} x}{|x|_p}, \quad p \neq 2, \quad (9.16)$$

аналогичные формулам Сохоцкого (для поля $\mathbb{R}$). Здесь обобщенная функция $(\text{sgn}_{p,d} x)/|x|_p$ и число $C_{p,d}$ определяются равенствами

$$\left(\frac{\text{sgn}_{p,d} x}{|x|_p}, \varphi \right) = \int \frac{\text{sgn}_{p,d} x}{|x|_p} \varphi(x) d_p x, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \quad (9.17)$$

$$C_{p,d} = \begin{cases} \sqrt{\frac{p}{p+1}}, & \text{если } |d|_p = 1, \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{p \text{sgn}_{p,d}(-1)}, & \text{если } |d|_p = \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Для Γ_q -функций справедливы следующие адельные формулы [6]

$$\Gamma_\infty^2(\alpha) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_q^\nu(\alpha) = D^{1/2-\alpha}, \quad d > 0, \quad (9.18)$$

$$\Gamma_\omega(\alpha) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_q^\nu(\alpha) = |D|^{1/2-\alpha}, \quad d < 0, \quad (9.18')$$

где Γ_∞ и Γ_ω – гамма-функции полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно;

$$\begin{aligned} \Gamma_\omega(\alpha) &= 2 \int |z\bar{z}|^{\alpha-1} \exp(-4\pi i x) dx dy = (2\pi)^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= 2(2\pi)^{-2\alpha} \Gamma^2(\alpha) \sin \pi\alpha = i\Gamma_\infty(\alpha) \tilde{\Gamma}(\alpha), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\Gamma}(\alpha) = \int \operatorname{sgn} x |x|^{\alpha-1} \exp(-2\pi i x) dx = -2i(2\pi)^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2};$$

$\nu = 2$, если $d \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ и $\nu = 1$, если $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$; D – дискриминант поля $Q(\sqrt{d})$, равный d , если $d \equiv 1 \pmod{4}$ и равный $4d$, если $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$. (Мера Хаара поля $\mathbb{C}$ выбрана самодвойственной: $|dz \wedge \bar{z}| = 2 dx dy$, $z = x + iy$.)

Регуляризация расходящегося бесконечного произведения в (9.18) определяется с помощью формулы (ср. (8.35))

$$\begin{aligned} \prod_{p=2}^P \Gamma_q^\nu(\alpha) \operatorname{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} (1 - q^{-\alpha})^{-\nu} &= \frac{\zeta_d(\alpha)}{\zeta_d(1-\alpha)} \operatorname{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} (1 - q^{-\alpha})^{-\nu}, \\ P &= \infty, 2, 3, 5, \dots, \end{aligned} \quad (9.19)$$

вытекающей из общей формулы Тейта. Здесь ζ_d – дзета-функция Дедекинда поля $Q(\sqrt{d})$,

$$\zeta_d(\alpha) = \prod_{p=2}^{\infty} (1 - q^{-\alpha})^{-\nu}.$$

Дзета-функция Дедекинда удовлетворяет соотношению (ср. (8.40))

$$(2\pi)^{1-\alpha} \Gamma(\alpha) \zeta_d(\alpha) = (2\pi)^\alpha \Gamma(1-\alpha) \zeta_d(1-\alpha) |D|^{1/2-\alpha},$$

которое эквивалентно соотношению (ср. (8.46))

$$\zeta_{A_d}(\alpha) = \zeta_{A_d}(1 - \alpha)|D|^{1/2-\alpha},$$

где обозначено

$$\zeta_{A_d}(\alpha) = (2\pi)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\zeta_d(\alpha).$$

Переходя в (9.19) к пределу при $P \rightarrow \infty$, обозначая

$$\operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_q^{\nu}(\alpha) = \lim_{P \rightarrow \infty} \prod_{p=2}^P \Gamma_q^{\nu}(\alpha) \operatorname{AC} \prod_{p=P_1}^{\infty} (1 - q^{-\alpha})^{-\nu}$$

и пользуясь равенствами

$$\Gamma_{\infty}^2(\alpha) = D^{1/2-\alpha} \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)}, \quad d > 0, \quad (9.20)$$

$$\Gamma_{\omega}(\alpha) = |D|^{1/2-\alpha} \frac{\zeta(1-\alpha)}{\zeta(\alpha)}, \quad d < 0, \quad (9.20')$$

в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha < 0$ получим адельные формулы (9.18). При остальных α $\operatorname{reg} \prod \Gamma_q^{-\nu}(\alpha)$ определяется из формул (9.18) как аналитическое (мероморфное) продолжение по α .

Аналогичные адельные формулы справедливы и для бета-функций

$$B_{\infty}^2(\alpha, \beta) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_q^{\nu}(\alpha, \beta) = \sqrt{D}, \quad d > 0, \quad (9.21)$$

$$B_{\omega}(\alpha, \beta) \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_q^{\nu}(\alpha, \beta) = \sqrt{|D|}, \quad d < 0, \quad (9.21')$$

где B_{∞} и B_{ω} – бета-функции полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно.

$$B_{\omega}(\alpha, \beta) = \Gamma_{\omega}(\alpha) \Gamma_{\omega}(\beta) \Gamma_{\omega}(\gamma), \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (9.22)$$

и в соответствии с формулой (9.14) (ср. (8.36))

$$\operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} B_q^{\nu}(\alpha, \beta) = \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \operatorname{reg} \prod_{p=2}^{\infty} \Gamma_q^{\nu}(x).$$

Отметим другие симметричные выражения для $B_{-\omega}$:

$$B_{\omega}(\alpha, \beta) = 2\pi \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} = \frac{2}{\pi^2} \prod_{x=\alpha, \beta, \gamma} \Gamma^2(x) \sin \pi x. \quad (9.23)$$

§ 10. Оператор D^α

Обобщенная функция

$$f_\alpha(x) = \frac{|x|_p^{\alpha-1}}{\Gamma_p(\alpha)}$$

голоморфна по α всюду за исключением простых полюсов $1 + \alpha_k$, $\alpha_k = 2k\pi i / \ln p$, $k \in \mathbb{Z}$, с вычетом $(1-p)/(p \ln p) \delta(x)$, причем $f_{\alpha_k} = \delta$ и

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta},$$

$$\alpha \neq 1 + \alpha_k, \quad \beta \neq 1 + \alpha_j, \quad \alpha + \beta \neq 1 + \alpha_i, \quad (k, j, i) \in \mathbb{Z}^3.$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ и $f \in \mathcal{S}'$ таковы, что свертка $f_{-\alpha} * f$ существует в $\mathcal{S}'$. Оператор $D^\alpha f = f_{-\alpha} * f$ называется при $\alpha > 0$ оператором (дробного) *дифференцирования порядка α* , а при $\alpha < 0$ – оператором (дробного) *интегрирования порядка $-\alpha$* ; при $\alpha = 0$ $D^0 f = \delta * f = f$ – тождественный оператор. Таким образом, оператор D^α – гиперсингулярный псевдодифференциальный (РДО) с символом $|\xi|_p$.

ПРИМЕР. Если $\alpha = 1$ и $\varphi \in \mathcal{S}$, то

$$(D\varphi)(x) = \frac{p^2}{p+1} \int \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|_p^2} d_p y = \int |\xi|_p \tilde{\varphi}(\xi) \chi_p(-\xi x) d_p \xi. \quad (10.1)$$

Пусть $\alpha = 1$. Рассмотрим локально-интегрируемую в $\mathbb{Q}_p$ функцию

$$f_1(x) = -\frac{1-p^{-1}}{\ln p} \ln |x|_p. \quad (10.2)$$

Она обладает следующими свойствами:

$$\int f_\alpha(x) \varphi(x) d_p x \rightarrow \int f_1(x) \varphi(x) d_p x, \quad \alpha \rightarrow 1, \quad (10.3)$$

если $\varphi \in \mathcal{S}$ удовлетворяет условию

$$\int \varphi(x) d_p x = 0; \quad (10.4)$$

$$\tilde{f}_1(\xi) = \operatorname{reg} |\xi|_p^{-1} + \frac{1}{p} \delta(\xi), \quad (10.5)$$

где обобщенная функция $\text{reg } |\xi|_p^{-1}$ определена в § 6;

$$f_1 * f_\alpha = f_{1-\alpha}, \quad \alpha \geq 1. \quad (10.6)$$

Введем оператор интегрирования порядка 1, соответствующий значению $\alpha = -1$,

$$D^{-1}f = f_1 * f, \quad f \in \mathcal{S}', \quad (10.7)$$

если свертка $f_1 * f$ существует. Тогда

$$D^{-\alpha}f \rightarrow D^{-1}f, \quad \alpha \rightarrow 1 \quad \text{в } \mathcal{S}', \quad (10.8)$$

если $f \in \mathcal{E}'$ и

$$\oint f(x) dx = 0. \quad (10.9)$$

Резюмируя, получаем следующие свойства оператора D^α , $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f = D^\beta D^\alpha f, \quad f \in \mathcal{S}', \quad (10.10)$$

если $\alpha \neq -1$, $\beta \neq -1$, $\alpha + \beta \neq -1$, или $\alpha \leq 0$, $\beta = -1$, или $\alpha = -1$, $\beta \leq 0$; если f удовлетворяет условию (10.9), то равенства (10.10) справедливы при всех вещественных α и β , и $D^\alpha f$ непрерывно зависит от α в $\mathcal{S}'$.

ПРИМЕР.

$$D^\alpha \chi_p(ax) = |a|_p^\alpha \chi_p(ax), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times. \quad (10.11)$$

Уравнение

$$D^\alpha \psi = g, \quad g \in \mathcal{E}', \quad (10.12)$$

разрешимо при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, причем при $\alpha > 0$ его общее решение выражается формулой

$$\psi = D^{-\alpha}g + C, \quad (10.13)$$

где C – произвольная постоянная; при $\alpha \leq 0$ его решение единственно и выражается формулой (10.13) при $C = 0$.

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ оператора D^α ,

$$D^\alpha \mathcal{E}(x) = \delta(x), \quad \mathcal{E} \in \mathcal{S}', \quad (10.14)$$

вычислено в [3]. Оно равно

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \Gamma_p^{-1}(\alpha)|x|_p^{\alpha-1}, & \alpha \neq -1, \\ -\frac{1-p^{-1}}{\ln p} \ln |x|_p, & \alpha = -1. \end{cases} \quad (10.15)$$

Отметим, что фундаментальное решение существует в $\mathcal{S}$ не для любого РДО. Например, для оператора $D_t^\alpha - D_x^\alpha$ оно не существует. Действительно, если бы решение $\mathcal{E}$ уравнения

$$(D_t^\alpha - D_x^\alpha) \mathcal{E}(t, x) = \delta(t, x)$$

существовало в $\mathcal{S}$, то мы имели бы противоречивое равенство

$$(|\eta|_p^\alpha - |\xi|_p^\alpha) F[\mathcal{E}](\eta, \xi) = 1, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{Q}_p^2,$$

в котором левая часть обращается в нуль в открытом множестве $|\eta|_p = |\xi|_p$ пространства $\mathbb{Q}_p^2$.

Оператор D^α при $\alpha > 0$ в открыто-замкнутом множестве G определен на тех $\psi \in \mathcal{L}^2(G)$ (см. § 4), для которых $|\xi|_p^\alpha \tilde{\psi} \in \mathcal{L}^2$. Это множество функций называется *областью определения* оператора D^α в области G и обозначается $\mathcal{D}(D^\alpha, G)$; $\mathcal{D}(D^\alpha, \mathbb{Q}_p) = \mathcal{D}(D^\alpha)$. Справедливо равенство

$$(D^\alpha \psi, \varphi) = \int |\xi|_p^\alpha \tilde{\psi}(\xi) \tilde{\varphi}(\xi) d_p \xi, \quad \psi, \varphi \in \mathcal{D}(D^\alpha, G). \quad (10.16)$$

Оператор D^α в G – самосопряженный положительно-определенный, причем в силу (10.16) при всех $\psi \in \mathcal{D}(D^\alpha, G)$ имеем

$$(D^\alpha \psi, \psi) = (D^{\alpha/2} \psi, D^{\alpha/2} \psi) = \int |\xi|_p^\alpha |\psi(\xi)|^2 d_p \xi \geq 0, \quad (10.17)$$

так что его спектр лежит на полуоси $\lambda \geq 0$.

Для оператора D^α , $\alpha > 0$, рассмотрим задачу на собственные значения

$$D^\alpha \psi = \lambda \psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(D^\alpha, G). \quad (10.18)$$

ТЕОРЕМА [1], [2]. *Спектр оператора D^α в $\mathbb{Q}_p$ состоит из счетного числа собственных значений $\lambda_N = p^{\alpha N}$, $N \in \mathbb{Z}$, каждое из которых бесконечной кратности, и точки 0. Существует ортонормальный базис собственных функций в $\mathcal{L}^2(\mathbb{Q}_p)$ оператора D^α следующего вида:*

при $p \neq 2$

$$\psi_{N,j,\epsilon}^\ell(x) = p^{\frac{N+1-\ell}{2}} \delta(|x|_p - p^{\ell-N}) \delta(x_0 - j) \chi_p(\epsilon_\ell p^{\ell-2N} x^2), \quad (10.19)$$

$$\begin{aligned} \ell &= 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad \epsilon_\ell = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{\ell-2} p^{\ell-2}, \\ \varepsilon_s &= 0, 1, \dots, p-1, \quad \varepsilon_0 \neq 0, \quad s = 0, 1, \dots, \ell-2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{N,j,0}^1(x) &= p^{\frac{N-1}{2}} \Omega(p^{N-1} |x|_p) \chi_p(j p^{-N} x), \\ \ell &= 1, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad \epsilon_\ell = 0; \end{aligned} \quad (10.19')$$

при $p = 2$

$$\psi_{N,j,\epsilon_\ell}^\ell(x) = 2^{\frac{N-\ell}{2}} \delta(|x|_2 - 2^{\ell+1-N}) \chi_2(\epsilon_\ell 2^{\ell-2N} x^2 + 2^{\ell-N+j} x), \quad (10.20)$$

$$\begin{aligned} \ell &= 2, 3, \dots, \quad j = 0, 1, \quad \epsilon_\ell = 1 + \varepsilon_1 2 + \dots + \varepsilon_{\ell-2} 2^{\ell-2}, \\ \varepsilon_s &= 0, 1, \quad s = 1, 2, \dots, \ell-2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{N,j,0}^1(x) &= 2^{\frac{N-1}{2}} [\Omega(2^N |x - j 2^{N-2}|_2) - \delta(|x - j 2^{N-2}|_2 - 2^{1-N})], \\ \ell &= 1, \quad j = 0, 1, \quad \epsilon_\ell = 0. \end{aligned} \quad (10.20')$$

В [33] был найден новый, более простой, ортонормальный базис собственных функций оператора D^α , эквивалентный (10.19)–(10.20):

$$\begin{aligned} \psi_{Njn}(x) &= p^{(N-1)/2} \chi_p(p-njx) \Omega(|p^{N-1}x - n|_p), \\ N &\in \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \quad n \in \mathbb{Q}_p/Z_p, \end{aligned} \quad (10.21)$$

соответствующих собственному значению $p^{\alpha N}$.

ТЕОРЕМА [4], [5]. Если G – открыто-замкнутый компакт, то собственные значения λ_k , $k = 0, 1, \dots$, оператора D^α , $\alpha > 0$, в G – конечной кратности, а собственные функции $\psi_k(x)$ образуют ортонормальный базис в $\mathcal{L}^2(G)$.

ПРИМЕР. Собственные значения и ортонормальный базис собственных функций оператора D^α в B_γ , $\gamma \in \mathbb{Z}$ [4].

При $p \neq 2$:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1} p^{\alpha(1-\gamma)}, & \psi_0(x) &= p^{-\gamma/2}, & \text{кратность } 1; \\ \lambda_k &= p^{\alpha(k-\gamma)}, & \psi_k(x) &= \psi_{k-\gamma, j, \epsilon_\ell}^\ell(x), \\ \ell &= 1, 2, \dots, k, & j &= 1, 2, \dots, p-1, & \epsilon_\ell, \\ & & \text{кратность } &(p-1)p^{k-1}, & k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

При $p = 2$:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{2^{\alpha(1-\gamma)}}{2^{\alpha+1}-1}, & \psi_0(x) &= 2^{-\gamma/2}, & \text{кратность } 1; \\ \lambda_1 &= 2^{\alpha(1-\gamma)}, & \psi_1(x) &= \psi_{1-\gamma, 0, 0}^1(x), & \text{кратность } 1; \\ \lambda_k &= 2^{\alpha(k-\gamma)}, & \psi_k(x) &= \psi_{k-\gamma, j, \epsilon_\ell}^\ell(x), \\ \ell &= 1, 2, \dots, k-1, & j &= 0, 1, \\ & & \text{кратность } &2^{k-1}, & k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

ПРИМЕР. Собственные значения и нормированный базис собственных функций оператора D^α в S_γ , $\gamma \in Z$ [4].

При $p \neq 2$:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{p^\alpha + p - 2}{p^{\alpha+1} - 1} p^{\alpha(1-\gamma)}, & \psi_0(x) &= p^{\frac{1-\gamma}{2}} (p-1)^{1/2}, & \text{кратность } 1; \\ \lambda_1 &= p^{\alpha(1-\gamma)}, & \psi_1(x) &= 2^{-1/2} [\psi_{1-\gamma, j, 0}^1(x) - \psi_{1-\gamma, j+1, 0}^1(x)], \\ & & \text{кратность } &p-2; \\ \lambda_k &= p^{\alpha(k-\gamma)}, & \psi_k(x) &= \psi_{k-\gamma, j, \epsilon_k}^k(x), \\ j &= 1, 2, \dots, p-1, & \epsilon_k, \\ & & \text{кратность } &(p-1)^2 p^{k-2}, & k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

При $p = 2$:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{2^{\alpha(2-\gamma)}}{2^{\alpha+1}-1}, & \psi_0(x) &= 2^{\frac{1-\gamma}{2}}, & \text{кратность } 1; \\ \lambda_1 &= 2^{\alpha(2-\gamma)}, & \psi_1(x) &= \psi_{1-\gamma, 1, 0}^1(x), & \text{кратность } 1; \\ \lambda_k &= 2^{\alpha(k+1-\gamma)}, & \psi_k(x) &= \psi_{k+1-\gamma, j, \epsilon_k}^k(x), \\ j &= 0, 1, & \epsilon_k, \\ & & \text{кратность } &2^{k-1}, & k = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Следует отметить, что мультипликативные характеры ранга k группы $Z_p^\times$ являются собственными функциями оператора D^α в S_0 , соответствующие собственному значению λ_k [21]. С другой стороны, число линейно-независимых мультипликативных характеров ранга k группы $Z_p^\times$ вычислено (см. [30]) и оно совпадает с кратностью n_k собственного значения λ_k оператора D^α , $\alpha > 0$, в S_0 [4]. Отсюда следует такой результат:

существует ортонормальный базис собственных функций оператора D^α , $\alpha > 0$, в S_0 , состоящий из всех мультипликативных характеров группы $Z_p^\times$.

С другой стороны, любой мультипликативный характер группы $Z_p^\times$ ранга k разлагается по собственным функциям $\psi_{a_k+j}(x)$, $j = 1, 2, \dots, n_k$ (при надлежащем выборе a_k [4]), т. е. разлагается по аддитивным характерам поля $\mathbb{Q}_p$.

Приведем конкретные значения для λ_k и n_k . Полагая $\gamma = 0$, получим [4]:
при $p \neq 2$

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{p^\alpha + p - 2}{p^{\alpha+1} - 1} p^\alpha, & n_0 &= 1; \\ \lambda_1 &= p^\alpha, & n_1 &= p - 2; \\ \lambda_k &= p^{\alpha k}, & n_k &= (p - 1)^2 p^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots;\end{aligned}$$

при $p = 2$

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{2^{2\alpha}}{2^{\alpha+1} - 1}, & n_0 &= 1; \\ \lambda_k &= 2^{\alpha(k+1)}, & n_k &= 2^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots.\end{aligned}$$

Часть II. Таблицы интегралов

§ 11. Простейшие интегралы, одна переменная

$$\int_{B_0} d_p x = 1. \quad (11.1)$$

$$\int_{B_\gamma} d_p x = p^\gamma. \quad (11.2)$$

$$\int_{S_\gamma} d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^\gamma. \quad (11.3)$$

$$\int f(x) d_p x = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \int_{S_\gamma} f(x) d_p x. \quad (11.4)$$

$$\int_{B_\gamma} f(|x|_p) d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=-\infty}^{\gamma} p^k f(p^k). \quad (11.5)$$

$$\int f(|x|_p) d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^k f(p^k). \quad (11.6)$$

$$\int_D f(x) d_p x = |a|_p \int_{\frac{D-b}{a}} f(ay+b) d_p y, \quad a \neq 0. \quad (11.7)$$

$$\int_{S_\gamma} f(x) d_p x = p^{2\gamma} \int_{S_{-\gamma}} f\left(\frac{1}{y}\right) d_p y. \quad (11.8)$$

$$\int_{B_\gamma} f(x) d_p x = \int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_{1-\gamma}} f\left(\frac{1}{y}\right) |y|_p^{-2} d_p y. \quad (11.9)$$

$$\int f(x) d_p x = \int f\left(\frac{1}{y}\right) |y|_p^{-2} d_p y. \quad (11.10)$$

$$\int f(|x|_p) d_p x = \int f\left(\frac{1}{|y|_p}\right) |y|_p^{-2} d_p y. \quad (11.11)$$

$$\int_{G_p} f(x) d_p x = \int_{G_p} f(\sin y) d_p y. \quad (11.12)$$

$$\int_{G_p} f(x) d_p x = \int_{G_p} f(\arcsin y) d_p y. \quad (11.13)$$

$$\int_{G_p} f(x) d_p x = \int_{G_p} f(\operatorname{tg} y) d_p y. \quad (11.14)$$

$$\int_{G_p} f(x) d_p x = \int_{G_p} f(\arctg y) d_p y. \quad (11.15)$$

$$\int_{G_p} f(x) d_p x = \int_{J_p} f(\ln y) d_p y. \quad (11.16)$$

$$\int_{J_p} f(x) d_p x = \int_{G_p} f(\exp y) d_p y. \quad (11.17)$$

$$\int_{B_\gamma} |x|_p^{\alpha-1} d_p x = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (11.18)$$

$$\int_{S_0} |x-1|_p^{\alpha-1} d_p x = \frac{p-2+p^{-\alpha}}{p(1-p^{-\alpha})}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0 \text{ [3]}. \quad (11.19)$$

$$\int_{S_\gamma} |x-a|_p^{\alpha-1} d_p x = \frac{p-2+p^{-\alpha}}{p(1-p^{-\alpha})} |a|_p^\alpha, \quad |a|_p = p^\gamma, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (11.20)$$

$$\int_{B_\gamma} \ln |x|_p d_p x = \left(\gamma - \frac{1}{p-1} \right) p^\gamma \ln p. \quad (11.21)$$

$$\int_{S_0} \ln |x-1|_p d_p x = -\frac{\ln p}{p-1} \text{ [3]}. \quad (11.22)$$

$$\int_{S_\gamma} \ln |x-a|_p d_p x = \left[\left(1 - \frac{1}{p} \right) \ln |a|_p - \frac{\ln p}{p-1} \right] |a|_p, \quad |a|_p = p^\gamma. \quad (11.23)$$

$$\int_{S_\gamma} \ln |x|_p d_p x = \gamma \left(1 - \frac{1}{p} \right) p^\gamma \ln p. \quad (11.24)$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1} |1-x|_p^{\beta-1} d_p x = B_p(\alpha, \beta), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1 \text{ [11]}. \quad (11.25)$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1} |y - x|_p^{\beta-1} d_p x = B_p(\alpha, \beta) |y|_p^{\alpha+\beta-1},$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1. \quad (11.26)$$

$$\int_{B_\gamma} |x^2 + a^2|_p^{(\alpha-1)/2} d_p x$$

$$= p^\gamma |a|_p^{\alpha-1}, \quad p^\gamma < |a|_p. \quad (11.27)$$

$$= \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^\alpha} |a|_p^\alpha + \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma},$$

$$p^\gamma \geq |a|_p \neq 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \text{ [9]}. \quad (11.28)$$

$$= \left[1 - \frac{2}{p} + \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{2}{p^{(\alpha+1)/2} - 1} - \frac{1}{1 - p^{-\alpha}} \right) \right] |a|_p^\alpha$$

$$- \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma}, \quad p^\gamma \geq |a|_p \neq 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \text{ [9]}. \quad (11.29)$$

$$\int |x^2 + a^2|_p^{(\alpha-1)/2} d_p x, \quad a \neq 0,$$

$$= \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^\alpha} |a|_p^\alpha \quad \operatorname{Re} \alpha < 0, \quad p \equiv 3 \pmod{4}. \quad (11.30)$$

$$= \left[1 - \frac{2}{p} + \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{2}{p^{(\alpha+1)/2} - 1} - \frac{1}{1 - p^{-\alpha}} \right) \right] |a|_p^\alpha,$$

$$\operatorname{Re} \alpha < 0, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (11.31)$$

$$\int_{S_0} |1 + x^2|_p^{\alpha-1} d_p x = 1 - \frac{3}{p} - 2 \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^\alpha},$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (11.32)$$

$$\int_{S_{\gamma, k_0}} d_p x = p^{\gamma-1}, \quad k_0 = 1, 2, \dots, p-1 \text{ [3]}. \quad (11.33)$$

$$\int_{S_{\gamma}^{k_0}} d_p x = \left(1 - \frac{2}{p} \right) p^\gamma, \quad k_0 = 1, 2, \dots, p-1 \text{ [3]}. \quad (11.34)$$

$$\int_{S_{\gamma, k_n}} d_p x = \left(1 - \frac{1}{p} \right) p^{\gamma-1}, \quad k_n = 0, 1, \dots, p-1, \quad n \in \mathbb{Z}_+ \text{ [3]}. \quad (11.35)$$

$$\int_{S_\gamma^{k_n}} d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 p^\gamma, \quad k_n = 0, 1, \dots, p-1, \quad n \in Z_+ [3]. \quad (11.36)$$

$$\int_{S_{\gamma, k_0 k_1 \dots k_n}} d_p x = p^{\gamma-n-1}, \quad k_j = 0, 1, \dots, p-1, \quad k_0 \neq 0, \quad n \in Z_+ [3]. \quad (11.37)$$

$$\int_{S_\gamma^{k_0 k_1 \dots k_n}} d_p x = (1 - p^{-1} - p^{-n-1}) p^\gamma, \quad k_j = 0, 1, \dots, p-1, \quad k_0 \neq 0, \quad n \in Z_+ [3]. \quad (11.38)$$

$$\int_{\bigcap_{1 \leq i \leq k} [|x - x_i|_p = 1]} d_p x = 1 - \frac{k}{p}, \quad 1 \leq k \leq p, \quad |x_j - x_j|_p = 1,$$

$$i, j = 1, 2, \dots, k, \quad i \neq j [17]. \quad (11.39)$$

Пусть π – мультипликативный характер поля $\mathbb{Q}_p$ ранга $k \geq 1$.

$$\int_{S_\gamma} \pi(x) d_p x = 0 [11]. \quad (11.40)$$

Обозначим: $V_0 = S_0$, $V_j = [x \in S_0 : |1 - x|_p \leq p^{-j}]$, $j \in Z_+$.

$$\begin{aligned} \int_{V_j \setminus V_{j+1}} \pi(x) d_p x \\ = 0, \quad 0 \leq j < k-1. \end{aligned} \quad (11.41)$$

$$= -p^{-k}, \quad j = k-1. \quad (11.42)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{-j}, \quad j \geq k [21]. \quad (11.43)$$

$$\int_{S_0} |1 - x|_p^{\alpha-1} \pi(x) d_p x = \Gamma_p(\alpha) p^{-k\alpha}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0 [21]. \quad (11.44)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_\gamma} \operatorname{sgn}_{p, \epsilon} x d_p x &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) (-p)^\gamma, \\ \epsilon &\notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p \neq 2 [11]. \end{aligned} \quad (11.45)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma} \operatorname{sgn}_{p, \epsilon} x d_p x &= \frac{p-1}{p+1} (-p)^\gamma, \\ \epsilon &\notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p \neq 2 [11]. \end{aligned} \quad (11.46)$$

$$\int_{B_0} \operatorname{sgn}_{p,\epsilon} x d_p x = \frac{p-1}{p+1}, \quad \epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p \neq 2 \text{ [11]}. \quad (11.47)$$

$$= \frac{1}{3}, \quad \epsilon \equiv 5 \pmod{8}, \quad p = 2, \quad (11.48)$$

$$= 0, \quad |\epsilon|_p = \frac{1}{p}, \quad p \neq 2 \quad (11.49)$$

или $\epsilon \not\equiv 1, 5 \pmod{8}, \quad p = 2 \text{ [11]}.$

$$\int_{B_0} \theta_\epsilon^+(x) d_p x = \frac{p}{p+1}, \quad \epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p \neq 2. \quad (11.50)$$

$$= \frac{2}{3}, \quad \epsilon \equiv 5 \pmod{8}, \quad p = 2. \quad (11.51)$$

$$= \frac{1}{2}, \quad |\epsilon|_p = \frac{1}{p}, \quad p \neq 2 \quad (11.52)$$

или $\epsilon \not\equiv 1, 5 \pmod{8}, \quad p = 2 \text{ [11]}.$

$$\int_{B_0} \theta_\epsilon^-(x) d_p x = \frac{1}{p+1}, \quad \epsilon \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}, \quad |\epsilon|_p = 1, \quad p \neq 2. \quad (11.53)$$

$$= \frac{1}{3}, \quad \epsilon \equiv 5 \pmod{8}, \quad p = 2. \quad (11.54)$$

$$= \frac{1}{2}, \quad |\epsilon|_p = \frac{1}{p}, \quad p \neq 2 \quad (11.55)$$

или $\epsilon \not\equiv 1, 5 \pmod{8}, \quad p = 2 \text{ [11]}.$

$$\int_{(B_0)^2} d_p x = \frac{p}{2(p+1)}, \quad p \neq 2. \quad (11.56)$$

$$= \frac{1}{6}, \quad p = 2, \quad (11.57)$$

где $(B_0)^2$ – множество квадратов целых p -адических чисел Z_p .

$$\int_{\gamma(x)=2k \leq 0} d_p x = \frac{p}{p+1}. \quad (11.58)$$

$$\int_{\gamma(x)=2k \leq 0} f(|x|_p) d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma} f(p^{-2\gamma}). \quad (11.59)$$

$$\int_{\gamma(x)-1=2k \leq 0} d_p x = \frac{1}{p+1}. \quad (11.60)$$

$$\int_{\gamma(x)-1=2k \leq 0} f(|x|_p) d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma-1} f(p^{-2\gamma-1}). \quad (11.61)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_0} \lambda_p(x) |x|_p^{-1/2} d_p x \\ = 1, \quad p \neq 2 [2]. \end{aligned} \quad (11.62)$$

$$= 2^{-3/2}, \quad p = 2 [2]. \quad (11.63)$$

Пусть функция f обладает свойством

$$\int_{B_0} f(x+k) d_p x = f(k), \quad k \in I_p,$$

где I_p множество индексов,

$$\begin{aligned} I_p &= [k \in \mathbb{Q}_p : k = p^{-\gamma}(k_0 + k_1 + \dots + k_{\gamma-1}p^{\gamma-1}), \\ k_j &= 0, 1, \dots, p-1, \quad k_0 \neq 0, \quad j = 0, 1, \dots, \gamma-1, \quad \gamma \in Z_+. \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p \setminus B_0} f(x) d_p x = \sum_{k \in I_p} f(k) [28]. \quad (11.64)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_{-1} \setminus B_{-2n}} \lambda_p^2(x) |x|_p^{-1} d_p x, \quad n \in Z_+, \\ = 1 - \frac{1}{p}, \quad p \equiv 3 \pmod{4} [2]. \end{aligned} \quad (11.65)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right)(2n-1), \quad p \equiv 1 \pmod{4} [2]. \quad (11.66)$$

$$\int_{B_{-2} \setminus B_{-2n}} \lambda_p^2(x) |x|_2^{-1} d_2 x = 0, \quad p = 2, \quad n \geq 2 [2]. \quad (11.67)$$

Обозначим $|(x, m)|_p = \max(|x|_p, |m|_p)$.

$$\begin{aligned}
\int |(y, m)|_p^{\alpha-1} |(x-y, m)|_p^{\beta-1} d_p y &= B_p(\alpha, \beta) |(x, m)|_p^{\alpha+\beta-1} \\
&- \Gamma_p(\alpha) |pm|_p^\alpha |(x, m)|_p^{\beta-1} - \Gamma_p(\beta) |pm|_p^\beta |(x, m)|_p^{\alpha-1}, \\
m &\neq 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1 \quad [17].
\end{aligned} \tag{11.68}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_t(x, y) &= \lambda_p(t) \sqrt{\left| \frac{2}{t} \right|_p} \chi_p \left(\frac{2xy}{\sin t} - \frac{x^2 + y^2}{\operatorname{tg} t} \right), \quad t \in G_p, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p, \\
\mathcal{K}_t(x) &= \lambda_p(t) \sqrt{\left| \frac{2}{t} \right|_p} \chi_p \left(-\frac{x^2}{t} \right), \quad t \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad x \in \mathbb{Q}_p.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{K}_t(x, y') \mathcal{K}_\tau(y', x) d_p y' &= \mathcal{K}_{t+\tau}(x, y), \\
t, \tau &\in G_p, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p \quad [15].
\end{aligned} \tag{11.69}$$

$$\int_{B_0} \mathcal{K}_t(x, y) d_p y = \Omega(|x|_p), \quad t \in G_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p \quad [15]. \tag{11.70}$$

$$\mathcal{K}_t(x, y) \rightarrow \delta(x - y), \quad t \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^2) \quad [15]. \tag{11.71}$$

$$\int \mathcal{K}_t(x - y) \mathcal{K}_\tau(y) d_p y = \mathcal{K}_{t+\tau}(x), \quad t, \tau \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad x \in \mathbb{Q}_p \quad [15]. \tag{11.72}$$

$$\mathcal{K}_t(x) \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{S} \quad [15]. \tag{11.73}$$

$$\int_{|x|_p \neq 1} f(|x|_p) |1 - |x|_p|^{-1} d_p x = (1 - p^{-1}) \sum_{\gamma \neq 0} f(p^\gamma) \min(1, p^\gamma). \tag{11.74}$$

§ 12. Интегралы Фурье

Интегралом Фурье называется интеграл вида

$$\int f(x) \chi_p(\xi x) d_p x, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^\times.$$

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x) d_p x = p^\gamma \Omega(p^\gamma |\xi|_p) \quad [3]. \tag{12.1}$$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x) d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^\gamma \Omega(p^\gamma |\xi|_p) - p^{\gamma-1} \delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}) [3]. \quad (12.2)$$

$$\int \chi_p(\xi x) d_p x = 0, \quad \xi \neq 0 [3]. \quad (12.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma} f(|x|_p) \chi_p(\xi x) d_p x \\ = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=-\gamma}^{\infty} p^{-k} f(p^{-k}), \quad |\xi|_p \leq p^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$\begin{aligned} = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\xi|_p^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k} f(p^{-k} |\xi|_p^{-1}) - |\xi|_p^{-1} f(p |\xi|_p^{-1}), \\ |\xi|_p > p^{-\gamma} [3]. \end{aligned} \quad (12.5)$$

$$= \int f(|x|_p) \chi_p(\xi x) d_p x, \quad |\xi|_p > p^{-\gamma}. \quad (12.6)$$

$$\begin{aligned} \int f(|x|_p) \chi_p(\xi x) d_p x = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\xi|_p^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k} f(p^{-k} |\xi|_p^{-1}) \\ - |\xi|_p^{-1} f(p |\xi|_p^{-1}), \quad \xi \neq 0 [3]. \end{aligned} \quad (12.7)$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(x) d_p x = \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^{-\alpha}} = \Gamma_p(\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0 [11]. \quad (12.8)$$

$$\int |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(\xi x) d_p x = \Gamma_p(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha}, \quad \xi \neq 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0 [11]. \quad (12.9)$$

$$\int \ln |x|_p \chi_p(x) d_p x = -\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \ln p [3]. \quad (12.10)$$

$$\int \ln |x|_p \chi_p(\xi x) d_p x = -\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \ln p |\xi|_p^{-1}, \quad \xi \neq 0 [3]. \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\chi_p(\xi x)}{|x|_p^2 + m^2} d_p x, \quad m \neq 0, \\ = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{p^k}{p^{2k} + m^2}, \quad \xi = 0. \end{aligned} \quad (12.12)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{|\xi|_p}{p^2 + m^2 |\xi|_p^2} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k} \frac{p^2 - p^{-2k}}{p^{-2k} + m^2 |\xi|_p^2}, \quad \xi \neq 0 [3]. \quad (12.13)$$

$$\sim \frac{p^4 + p^3}{p^2 + p + 1} m^{-4} |\xi|_p^{-3} + O(|\xi|_p^{-5}), \quad |\xi|_p \rightarrow \infty [3]. \quad (12.14)$$

$$\begin{aligned} \mu_t^\alpha(x) &= \int \exp(-t|\xi|_p^\alpha) \chi_p(\xi x) d_p \xi, \quad t > 0, \quad \alpha > 0 \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) |x|_p^{-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} \exp(-t|px|_p^{-\alpha}) \\ &\quad \times (\exp[t|px|_p^{-\alpha}(1 - p^{-\alpha\gamma-\alpha})] - 1) > 0 [1], [2]. \end{aligned} \quad (12.15)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} \Gamma_p(\alpha n + 1) |\xi|_p^{-\alpha n - 1} [1]. \quad (12.16)$$

$$\int \mu_t^\alpha(x) d_p x = 1, \quad t > 0. \quad (12.17)$$

$$\mu_t^\alpha(x) \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{S} [1]. \quad (12.18)$$

$$\mu_t^\alpha * \mu_\tau^\alpha = \mu_{t+\tau}^\alpha, \quad t, \tau > 0 [1]. \quad (12.19)$$

$$\int_0^\infty \mu_t^\alpha(x) dt = \Gamma_p^{-1}(\alpha) |x|_p^{\alpha-1} = f_\alpha(x), \quad (12.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_p^\alpha(x)|_{t=0} = \Gamma_p(\alpha + 1) |x|_p^{-\alpha-1}, \quad \alpha > 0. \quad (12.21)$$

$$|x|_p^\alpha = -\Gamma_p^{-1}(-\alpha) \int [1 - \operatorname{Re} \chi_p(x\xi)] |\xi|_p^{-\alpha-1} d_p \xi, \quad (12.22)$$

причем

$$-\Gamma_p^{-1}(-\alpha) |\xi|_p^{-\alpha-1} d_p \xi > 0, \quad \alpha > 0.$$

$$\begin{aligned} &\int_{B_{-1}} \chi_p(a^2 \operatorname{tg} \xi - x\xi) d_p \xi, \quad p \neq 2 [2], \\ &= \frac{1}{2} \Omega(|px|_p), \quad |a|_p \leq 1. \end{aligned} \quad (12.23)$$

$$= \frac{1}{2} \delta(|x|_p - p^2) \delta(x_0 - (a^2)_0), \quad |a|_p = p. \quad (12.24)$$

$$= \frac{1}{2} \delta(|x|_p - |a|_p^2) \delta(x_0 - (a^2)_0) \delta(x_1 - (a^2)_1) \varphi_a(x), \quad |a|_p \geq p^2, \quad (12.25)$$

где $\varphi_a(x)$ – непрерывная функция.

$$\begin{aligned} \int |x|_p^{\alpha-1} |x-a|_p^{\beta-1} \chi_p(x) d_p x, \quad \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1, \\ = B_p(\alpha, \beta) |a|_p^{\alpha+\beta-1} + \Gamma_p(\alpha + \beta - 1), \quad |a|_p \leq 1. \end{aligned} \quad (12.26)$$

$$= \Gamma_p(\alpha) |a|_p^{\beta-1} + \Gamma_p(\beta) |a|_p^{\alpha-1} \chi_p(a), \quad |a|_p \geq p. \quad (12.27)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_\gamma} |x-a|_p^{\alpha-1} \chi_p(x-a) d_p x = \Gamma_p(\alpha), \\ |a|_p = p^\gamma, \quad \gamma \geq 2, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Пусть $n \in Z_+$ не делится на p и P – полином степени n ,

$$\begin{aligned} P(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n, \\ |\alpha_k|_p \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad |\alpha_n|_p = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{S_\gamma} \chi_p[P(x)] d_p x \\ = \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^\gamma, \quad \gamma \leq 0, \quad n \in Z_+ [3]. \end{aligned} \quad (12.29)$$

$$= 0, \quad \gamma = 2, 3, \dots, \quad n \in Z_+ \text{ или } \gamma = 1, \quad n = 2, 3, \dots [3]. \quad (12.30)$$

$$= -1, \quad \gamma = 1, \quad n = 1 [3]. \quad (12.31)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma} \chi_p[P(x)] d_p x \\ = p^\gamma, \quad \gamma \leq 0, \quad n \in Z_+, \end{aligned} \quad (12.32)$$

$$= 1, \quad \gamma = 2, 3, \dots, \quad n \in Z_+ \text{ или } \gamma = 1, \quad n = 2, 3, \dots. \quad (12.33)$$

$$= 0, \quad \gamma \in Z_+, \quad n = 1. \quad (12.34)$$

$$\begin{aligned} \int \chi_p[P(x)] d_p x \\ = 1, \quad n = 2, 3, \dots. \end{aligned} \quad (12.35)$$

$$= 0, \quad n = 1. \quad (12.36)$$

Пусть (комплексные) числа $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p-1}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{p-1} \eta_k = 0, \quad p \neq 2,$$

и числа $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_{p-1}$ взаимны к $\{\eta_k\}$,

$$\eta'_j = \sum_{k=1}^{p-1} \eta_k \exp\left(2\pi i \frac{kj}{p}\right), \quad \sum_{j=1}^{p-1} \eta'_j = 0.$$

Тогда

$$\int_{S_\gamma} \eta_{x_0} \chi_p(\xi x) d_p x = p^{\gamma-1} \eta'_{\xi_0} \delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}) [4]. \quad (12.37)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma} |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(\xi x) d_p x, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ = \frac{1-p-1}{1-p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma}, \quad |\xi|_p \leq p^{-\gamma}. \end{aligned} \quad (12.38)$$

$$= \Gamma_p(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha}, \quad |\xi|_p > p^{-\gamma} \quad [1]. \quad (12.39)$$

$$= \Gamma_p(\alpha), \quad \xi = 1, \quad \gamma \geq 1 \quad [7]. \quad (12.40)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \delta(x_0 - k) \chi_p(\xi x) d_p x = p^{-1} \chi_p(k\xi) \Omega(p\xi|_p), \\ k = 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (12.41)$$

$$\begin{aligned} \int \delta(x_0 - k) \chi_p(\xi x) d_p x = |\xi|_p^{-1} \left(\frac{1}{p-1} + \chi_p(k\xi_0/p) \right), \\ \xi \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (12.42)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \chi_p[(k - \xi)x] d_p x = p \delta(|\xi|_p - 1) \delta(\xi_0 - k), \\ k = 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (12.43)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \delta(x_1 - k) \chi_p(\xi x) d_p x = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \Omega(|\xi|_p) - p^{-2} \delta(|\xi|_p - p) \\ + p^{-2} \frac{\chi_p(\xi) - \chi_p(p\xi)}{1 - \chi_p(\xi)} \chi_p(kp\xi) \delta(|\xi|_p - p^2), \\ k = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (12.44)$$

$$\begin{aligned} \int \delta(x_1 - k) \chi_p(\xi x) d_p x = |\xi|_p^{-1} \frac{\chi_p(p^{-2}|\xi|_p \xi) - \chi_p(p^{-1}\xi_0)}{1 - \chi_p(p^{-1}\xi_0)} \chi_p(kp^{-1}\xi_0), \\ \xi \neq 0, \quad p = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (12.45)$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_0} \delta(x_2 - k) \chi_p(\xi x) d_p x &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \Omega(|\xi|_p) - p^{-2} \delta(|\xi|_p - p) \\
&+ p^{-3} \frac{\chi_p(\xi) - \chi_p(p\xi)}{1 - \chi_p(\xi)} \frac{\chi_p(kp^2\xi) - \chi_p((k+1)p^2\xi)}{1 - \chi_p(p\xi)} \delta(|\xi|_p - p^3), \\
k &= 0, 1, \dots, p-1.
\end{aligned} \tag{12.46}$$

$$\begin{aligned}
\int \delta(x_2 - k) \chi_p(\xi x) d_p x &= |\xi|_p^{-1} \frac{\chi_p(p^{-3}|\xi|_p\xi) - \chi_p(p^{-2}|\xi|_p\xi)}{1 - \chi_p(p^{-3}|\xi|_p\xi)} \\
&\times \frac{\chi_p(kp^{-1}\xi_0) - \chi_p((k+1)p^{-1}\xi_0)}{1 - \chi_p(p^{-2}|\xi|_p\xi)}, \\
\xi &\neq 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-1.
\end{aligned} \tag{12.47}$$

$$\begin{aligned}
\int |x, m|_p^{\alpha-1} \chi_p(\xi x) d_p x &= \Gamma_p(\alpha) (|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^\alpha) \Omega(|m\xi|_p), \\
m &\neq 0, \quad \operatorname{Re} \alpha < 0 \text{ [17]}.
\end{aligned} \tag{12.48}$$

$$\begin{aligned}
\int |x, 1|_p^{-\alpha} \chi_p(\xi x) d_p x &= \Gamma_p(1 - \alpha) (|\xi|_p^{\alpha-1} - p^{\alpha-1}) \Omega(|\xi|_p) \equiv J_p^\alpha(\xi), \\
\operatorname{Re} \alpha &> 0.
\end{aligned} \tag{12.49}$$

$$J_p^1(\xi) = \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 - \frac{\ln |\xi|_p}{\ln p} \right) \Omega(|\xi|_p), \quad \alpha = 1. \tag{12.50}$$

$$\int J_p^\alpha(\xi) J_p^\beta(x - \xi) d_p \xi = J_p^\alpha * J_p^\beta = J_p^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{12.51}$$

$$\begin{aligned}
\ln |x, 1|_p &= \int (1 - \operatorname{Re} \chi_p(x\xi)) d\sigma(\xi) \\
&= \ln p \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^\gamma \Omega(p^\gamma |\xi|_p), \quad d\sigma(\xi) \geq 0.
\end{aligned} \tag{12.52}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{-1} \setminus B_{-2n}} \lambda_p^2(x) |x|_p^{-1} \chi_p(\xi x) d_p x, \quad n \in Z_+, \\
&= \left(1 - \frac{1}{p} \right) (2n - 1), \\
&\quad \xi = 0 \text{ или } \gamma(\xi) \leq 1, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \text{ [2]}.
\end{aligned} \tag{12.53}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{p} \right) (2n - \gamma(\xi)) - \frac{1}{p}, \\
&\quad 2 \leq \gamma(\xi) \leq 2n, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \text{ [2]}.
\end{aligned} \tag{12.54}$$

$$= 1 - \frac{1}{p}, \quad \xi = 0 \text{ или } \gamma(\xi) \leq 1, \quad p \equiv 3 \pmod{4} [2]. \quad (12.55)$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^{\gamma(\xi)} \left(1 + \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right), \\ 2 \leq \gamma(\xi) \leq 2n, \quad p \equiv 3 \pmod{4} [2]. \quad (12.56)$$

$$\int_{B_{-1}} \lambda_p^2(x) |x|_p^{-1} \chi_p(\xi x) d_p x \\ = 1 - \frac{1}{p}, \quad \xi = 0 \text{ или } \gamma(\xi) \leq 1, \quad p \equiv 3 \pmod{4} [2]. \quad (12.57)$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^{\gamma(\xi)} \left(1 + \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right), \\ \gamma(\xi) \geq 2, \quad p \equiv 3 \pmod{4} [2]. \quad (12.58)$$

$$\int_{B_{-2} \setminus B_{-2n}} \lambda_2^2(x) |x|_2^{-1} \chi_2(\xi x) d_2 x, \quad n = 2, 3, \dots, \\ = 0, \quad \gamma(\xi) \leq 3 [2]. \quad (12.59)$$

$$= \frac{1}{4} (-1)^{\xi_1+1}, \quad \gamma(\xi) \geq 4 [2]. \quad (12.60)$$

$$\int_{B_{-2}} \lambda_2^2(x) |x|_2^{-1} \chi_2(\xi x) d_2 x \\ = 0, \quad \xi = 0 \text{ или } \gamma(\xi) \leq 3 [2]. \quad (12.61)$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^{\xi_1+1}, \quad \gamma(\xi) \geq 4 [2]. \quad (12.62)$$

$$\int \operatorname{sgn}_{p,d} x |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(\xi x) d_p x, \quad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2} \\ = \tilde{\Gamma}_p(\alpha) \operatorname{sgn}_{p,d} \xi |\xi|_p^{-\alpha}, \quad |d|_p = 1, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0 [11]. \quad (12.63)$$

$$= \pm p^{\alpha-1/2} \sqrt{\operatorname{sgn}_{p,d} (-1) \operatorname{sgn}_{p,d} \xi} |\xi|_p^{-\alpha}, \quad |d|_p = \frac{1}{p}, \quad \alpha \in \mathbb{C} [11]. \quad (12.64)$$

Пусть $\varepsilon = \pm$.

$$\int_{S_\gamma} \lambda_p(x) \chi_p(\varepsilon \xi x) d_p x [2], [29] \\ = p^\gamma \left(1 - \frac{1}{p} \right), \quad |\xi|_p \leq p^{-\gamma}, \quad \gamma = 2k. \quad (12.65)$$

$$= 0, \quad |\xi|_p \leq p^{-\gamma}, \quad \gamma = 2k + 1. \quad (12.66)$$

$$= -p^{\gamma-1}, \quad |\xi|_p = p^{-\gamma+1}, \quad \gamma = 2k. \quad (12.67)$$

$$= \left(\frac{\xi_0}{p}\right) p^{\gamma-1/2}, \quad |\xi|_p \leq p^{-\gamma+1}, \quad \gamma = 2k+1, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (12.68)$$

$$= -\varepsilon \left(\frac{\xi_0}{p}\right) p^{\gamma-1/2}, \quad |\xi|_p \leq p^{-\gamma+1}, \quad \gamma = 2k+1, \quad p \equiv 3 \pmod{4}. \quad (12.69)$$

$$= 0, \quad |\xi|_p \geq p^{-\gamma+2}. \quad (12.70)$$

$$\int_{S_\gamma} \lambda_2(x) \chi_2(\varepsilon \xi x) d_2 x \quad [20], [29]$$

$$= 2^{\gamma-3/2}, \quad |\xi|_2 \leq 2^{-\gamma}, \quad \gamma = 2k. \quad (12.71)$$

$$= 0, \quad |\xi|_2 \leq 2^{-\gamma}, \quad \gamma = 2k+1. \quad (12.72)$$

$$= -2^{\gamma-3/2}, \quad |\xi|_2 = 2^{-\gamma+1}, \quad \gamma = 2k. \quad (12.73)$$

$$= 0, \quad |\xi|_2 = 2^{-\gamma+1}, \quad \gamma = 2k+1. \quad (12.74)$$

$$= -\varepsilon(-1)^{\xi_1} 2^{\gamma-3/2}, \quad |\xi|_2 = 2^{-\gamma+2}, \quad \gamma = 2k. \quad (12.75)$$

$$= 0, \quad |\xi|_2 = 2^{-\gamma+2}, \quad \gamma = 2k+1. \quad (12.76)$$

$$= 0, \quad |\xi|_2 \geq 2^{-\gamma+3}, \quad \gamma = 2k. \quad (12.77)$$

$$= i^{\xi_1} (-1)^{\xi_2} 2^{\gamma-3} (1+i)(1+i\varepsilon)[1 - \varepsilon(-1)^{\xi_1}],$$

$$|\xi|_2 = 2^{-\gamma+3}, \quad \gamma = 2k+1. \quad (12.78)$$

$$= 0, \quad |\xi|_2 \geq 2^{-\gamma+4}, \quad \gamma = 2k+1. \quad (12.79)$$

$$\int_{|x|_p \geq 1} \lambda_p(x) |x|_p^{\alpha-1} \chi_p(\varepsilon \xi^2 x) d_p x$$

$$= 0, \quad |\xi|_p \geq p, \quad p \neq 2. \quad (12.80)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1 - p^{2\alpha} |\xi|_p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha}} + p^{\alpha-1/2} |\xi|_p^{-2\alpha},$$

$$|\xi|_p \leq 1, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (12.81)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1 - p^{2\alpha} |\xi|_p^{-2\alpha}}{1 - p^{2\alpha}} - \varepsilon p^{\alpha-1/2} |\xi|_p^{-2\alpha},$$

$$|\xi|_p \leq 1, \quad p \equiv 3 \pmod{4}. \quad (12.82)$$

$$\int_{|x|_p \geq 1} \lambda_p(x) |x|_p^{-3/2} \chi_p(-\xi^2 x) d_p x = \Omega(|\xi|_p), \quad p \neq 2 \quad [29]. \quad (12.83)$$

$$\int_{|x|_2 \geq 4} \lambda_2(x) |x|_2^{-3/2} \chi_2(-\xi^2 x) d_2 x = \sqrt{2} \Omega(|\xi|_2), \quad p = 2 \quad [29]. \quad (12.84)$$

§ 13. Гауссовы интегралы

Гауссовым интегралом называется интеграл вида

$$\int f(x) \chi_p(ax^2 + bx) d_p x, \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times, \quad b \in \mathbb{Q}_p.$$

Различные формулы для гауссовых интегралов встречаются в [3], [13]–[16], [20]. Наиболее полные списки их приведены в [1], [2]. Здесь

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 p + \epsilon_2 p^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_\gamma} \chi_p[\epsilon(x-y)^2] d_p y \\ &= p^\gamma \chi_p(\epsilon x^2) \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \Omega(p^\gamma |x|_p) - \frac{1}{p} \delta(|x|_p - p^{1-\gamma}) \right], \\ & \quad \gamma \leq 0, \quad p \neq 2. \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$= \delta(|x|_p - p^\gamma), \quad \gamma \geq 1, \quad p \neq 2. \quad (13.2)$$

$$\begin{aligned} &= 2^{\gamma-1} \chi_2(\epsilon x^2) [\Omega(2^{\gamma-1} |x|_2) - \delta(|x|_2 - 2^{2-\gamma})], \\ & \quad \gamma \leq 0, \quad p = 2. \end{aligned} \quad (13.3)$$

$$= [\sqrt{2} \lambda_2(\epsilon) - 1] \Omega(|x|_2) + \delta(|x|_2 - 2), \quad \gamma = 1, \quad p = 2. \quad (13.4)$$

$$= \sqrt{2} \lambda_2(\epsilon) \delta(|x|_2 - 2^\gamma), \quad \gamma \geq 2, \quad p = 2. \quad (13.5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_\gamma} \chi_p[\epsilon p(x-y)^2] d_p y \\ &= p^\gamma \chi_p(\epsilon p x^2) \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \Omega(p^{1-\gamma} |x|_p) - \frac{1}{p} \delta(|x|_p - p^{2-\gamma}) \right], \\ & \quad \gamma \leq 0, \quad p \neq 2. \end{aligned} \quad (13.6)$$

$$= [\sqrt{p} \lambda_p(\epsilon p) - \chi_p(\epsilon p x^2)] \Omega(|p x|_p), \quad \gamma = 1, \quad p \neq 2. \quad (13.7)$$

$$= \sqrt{p} \lambda_p(\epsilon p) \delta(|x|_p - p^\gamma), \quad \gamma \geq 2, \quad p \neq 2. \quad (13.8)$$

$$\begin{aligned} &= 2^{\gamma-1} \chi_2(2\epsilon x^2) [\Omega(2^{\gamma-2} |x|_2) - \delta(|x|_2 - 2^{3-\gamma})], \\ & \quad \gamma \leq 0, \quad p = 2. \end{aligned} \quad (13.9)$$

$$\begin{aligned} &= -\Omega(|x|_2) + \delta(|x|_2 - 2) + \lambda_2(2\epsilon) \delta(|x|_2 - 4), \\ & \quad \gamma = 1, \quad p = 2. \end{aligned} \quad (13.10)$$

$$= 2\lambda_2(2\epsilon) \Omega(|2x|_2), \quad \gamma = 2, \quad p = 2. \quad (13.11)$$

$$= 2\lambda_2(2\epsilon) \delta(|x|_2 - 2^\gamma), \quad \gamma \geq 3, \quad p = 2. \quad (13.12)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{S_\gamma} \chi_p(ax^2 + \xi x) d_p x \\
&= \lambda_p(a) |2a|_p^{-1/2} \chi_p \left(-\frac{\xi^2}{4a} \right) \delta \left(\left| \frac{\xi}{2a} \right|_p - p^\gamma \right), \quad |4a|_p \geq p^{2-2\gamma}.
\end{aligned} \tag{13.13}$$

$$= |2a|_p^{-1/2} \left[\lambda_p(a) \chi_p \left(-\frac{\xi^2}{4a} \right) - \frac{1}{\sqrt{p}} \right] \Omega(p^{1-\gamma} |\xi|_p), \quad |a|_p = p^{1-2\gamma}. \tag{13.14}$$

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(ax^2 + \xi x) d_p x = p^\gamma \Omega(p^\gamma |\xi|_p), \quad |a|_p p^{2\gamma} \leq 1, \tag{13.15}$$

$$= \lambda_p(a) |2a|_p^{-1/2} \chi_p \left(-\frac{\xi^2}{4a} \right) \Omega \left(p^{-\gamma} \left| \frac{\xi}{2a} \right|_p \right), \quad |4a|_p p^{2\gamma} > 1. \tag{13.16}$$

$$= 2^\gamma \lambda_2(a) \chi_2 \left(-\frac{\xi^2}{4a} \right) \delta(|\xi|_2 - 2^{1-\gamma}), \quad |a|_2 2^{2\gamma} = 2, \quad p = 2. \tag{13.17}$$

$$= 2^{\gamma-1/2} \lambda_2(a) \chi_2 \left(-\frac{\xi^2}{4a} \right) \Omega(2^\gamma |\xi|_2), \quad |a|_2 2^{2\gamma} = 4, \quad p = 2. \tag{13.18}$$

$$\begin{aligned}
& \int \chi_p(ax^2 + \xi x) d_p x, \quad a \neq 0, \\
&= \lambda_p(a) |2a|_p^{-1/2} \chi_p \left(-\frac{\xi^2}{4a} \right).
\end{aligned} \tag{13.19}$$

$$= \chi_p \left(-\frac{\xi^2}{2} \right), \quad a = \frac{1}{2}, \quad p \neq 2. \tag{13.20}$$

$$= \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) \chi_p \left(-\frac{\xi^2}{2} \right), \quad a = \frac{1}{2}, \quad p = 2. \tag{13.21}$$

$$\begin{aligned}
& \int \exp(-|y|_p^2) \chi_p[a(x-y)^2] d_p y, \quad a \neq 0, \quad \gamma = \gamma(a), \\
&= |a|_p^{-1/2} S \left(|a|_p^{-1}, \frac{1}{p} \right), \quad |x|_p \sqrt{|a|_p} \leq 1, \quad \gamma = 2k, \quad p \neq 2.
\end{aligned} \tag{13.22}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{p}} |a|_p^{-1/2} S \left(\frac{1}{p} |a|_p^{-1}, \frac{1}{p} \right) + \left[\lambda_p(a) - \frac{1}{\sqrt{p}} \right] |a|_p^{-1/2} \exp(-|pa|_p^{-1}), \\
&\quad |x|_p \sqrt{p|a|_p} \leq 1, \quad \gamma = 2k+1, \quad p \neq 2.
\end{aligned} \tag{13.23}$$

$$= \lambda_p(a) |a|_p^{-1/2} \exp(-|x|_p^2) + |ax|_p^{-1} \chi_p(ax^2) \left[S\left(|ax|_p^{-2}, \frac{1}{p}\right) - \exp(-|pax|_p^{-2}) \right], \quad |x|_p \sqrt{|a|_p} \geq \sqrt{p}, \quad p \neq 2. \quad (13.24)$$

$$= [\sqrt{2}\lambda_2(a) - 1] |a|_2^{-1/2} \exp(-4|a|_2^{-1}) + |a|_2^{-1/2} S\left(|a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right), \quad |x|_2 \sqrt{|a|_2} \leq 1, \quad \gamma = 2k, \quad p = 2. \quad (13.25)$$

$$= |a|_2^{-1/2} \exp(-4|a|_2^{-1}) + [\sqrt{2}\lambda_2(a) - 1] |a|_2^{-1/2} S\left(|a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right), \quad |x|_2 \sqrt{|a|_2} = 2, \quad \gamma = 2k, \quad p = 2. \quad (13.26)$$

$$= (2|a|_2)^{-1/2} S\left((2|a|_2)^{-1}, \frac{1}{2}\right) - (2|a|_2)^{-1/2} \exp(-2|a|_2^{-1}) + \lambda_2(a) |2a|_2^{-1/2} \exp(-8|a|_2^{-1}), \quad |x|_2 \sqrt{2|a|_2} \leq 1, \quad \gamma = 2k + 1, \quad p = 2. \quad (13.27)$$

$$= |2a|_2^{-1/2} S\left(|2a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right) + \lambda_2(a) |2a|_2^{-1/2} \exp(-8|a|_2^{-1}), \quad |x|_2 \sqrt{|a|_2} = \sqrt{2}, \quad \gamma = 2k + 1, \quad p = 2. \quad (13.28)$$

$$= \lambda_2(a) (2|a|_2)^{-1/2} S\left(|2a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right), \quad |x|_2 \sqrt{|a|_2} = 2\sqrt{2}, \quad \gamma = 2k + 1, \quad p = 2. \quad (13.29)$$

$$= \lambda_2(a) |2a|_2^{-1/2} \exp(-|x|_2^2) + |2ax|_2^{-1} \chi_2(ax^2) \left[S\left(|2ax|_2^{-2}, \frac{1}{2}\right) - 2 \exp(-|4ax|_2^{-2}) \right], \quad |x|_2 \sqrt{|a|_2} > 2, \quad p = 2. \quad (13.30)$$

$$\sim \frac{p^4 + p^3}{p^2 + p + 1} |2ax|_p^{-3} \chi_p(ax^2) + O(|x|_p^{-5}), \quad |x|_p \rightarrow \infty. \quad (13.31)$$

$$\sim |a|_p^{-1/2} S(|a|_p^{-1}, p^{-1}) + O[|a|_p^{-1/2} \exp(-|p^2 a|_p^{-1})], \quad |a|_p \rightarrow 0, \quad \gamma = 2k. \quad (13.32)$$

$$\sim (p|a|_p)^{-1/2} S((p|a|_p)^{-1}, p^{-1}) + O[|a|_p^{-1/2} \exp(-|pa|_p^{-1})], \quad |a|_p \rightarrow 0, \quad \gamma = 2k + 1. \quad (13.33)$$

Здесь

$$S(\alpha, q) = (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{k!(1 - q^{2k+1})}, \quad |q| < 1, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Эта функция удовлетворяет соотношению

$$S(\alpha q^2, q) = \frac{1}{q} S(\alpha, q) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) e^{-\alpha}. \quad (13.34)$$

§ 14. Две переменные

$$\int_{B_0^2} d_p^2 x = 1. \quad (14.1)$$

$$\int_{B_\gamma^2} d_p^2 x = p^{2\gamma}. \quad (14.2)$$

$$\int_{S_\gamma^2} d_p^2 x = (1 - p^{-2}) p^{2\gamma}. \quad (14.3)$$

$$\int_{B_\gamma^2} f(|x|_p) d_p^2 x = (1 - p^{-2}) \sum_{k=-\infty}^{\gamma} p^{2k} f(p^k). \quad (14.4)$$

$$\int f(|x|_p) d_p^2 x = (1 - p^{-2}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^{2k} f(p^k). \quad (14.5)$$

$$\int_{B_\gamma^2} |x|_p^{\alpha-2} d_p^2 x = \frac{1 - p^{-2}}{1 - p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (14.6)$$

$$\int_{S_\gamma^2} |x|_p^{\alpha-2} d_p^2 x = (1 - p^{-2}) p^{\alpha\gamma}. \quad (14.7)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma^2} |(x, x)|_p^{\alpha-1} \chi_p((\xi, x)) d_p^2 x, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad |(\xi, \xi)|_p > p^{-\gamma}. \\ = \Gamma_p^2(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad [9]. \end{aligned} \quad (14.8)$$

$$= \Gamma_p(\alpha) \tilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad [9]. \quad (14.9)$$

$$\begin{aligned} \int |(x, x)|_p^{\alpha-1} \chi_p((\xi, x)) d_p^2 x, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (\xi, \xi) \neq 0, \\ = \Gamma_p^2(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad [9]. \end{aligned} \quad (14.10)$$

$$= \Gamma_p(\alpha) \tilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad [9]. \quad (14.11)$$

$$\int f((x, x)) \chi_p((\xi, x)) d_p^2 x, \quad (\xi, \xi) \neq 0,$$

$$= |(\xi, \xi)|_p^{-1} \left[(1 - p^{-2}) \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma} f(p^{-2\gamma} |(\xi, \xi)|_p^{-1}) - f(p^2 |(\xi, \xi)|_p^{-1}) \right], \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad [1]. \quad (14.12)$$

$$= |(\xi, \xi)|_p^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(\gamma + \frac{p-3}{p-1}\right) p^{-\gamma} f(p^{-\gamma} |(\xi, \xi)|_p^{-1}) - 2 \left(1 - \frac{1}{p}\right) f(p |(\xi, \xi)|_p^{-1}) + f(p^2 |(\xi, \xi)|_p^{-1}) \right], \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad [1]. \quad (14.13)$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{\chi_p((\xi, x))}{|(x, x)|_p + m^2} d_p^2 x, \quad m \neq 0, \quad (\xi, \xi) \neq 0, \\ &= \frac{1 - p^{-2}}{p^2 + m^2 |(\xi, \xi)|_p} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{p^2 - p^{-2\gamma}}{1 + p^\gamma m^2 |(\xi, \xi)|_p} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{1}{1 + p^{2\gamma} m^2 |(\xi, \xi)|_p} - \frac{1}{p^2 + p^{2\gamma} m^2 |(\xi, \xi)|_p}, \\ & \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad [1], [9]. \end{aligned} \quad (14.14)$$

$$\sim \frac{p^4}{p^2 + 1} m^{-4} |(\xi, \xi)|_p^{-2}, \quad |(\xi, \xi)|_p \rightarrow \infty, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad [1], [9]. \quad (14.15)$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(\gamma + \frac{p-3}{p-1}\right) \frac{1}{1 + p^\gamma m^2 |(\xi, \xi)|_p} \\ & \quad - 2 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{p + m^2 |(\xi, \xi)|_p} + \frac{1}{p^2 + m^2 |(\xi, \xi)|_p} \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\infty} (\gamma + 1) \left(\frac{1}{1 + p^\gamma m^2 |(\xi, \xi)|_p} - \frac{2}{p + p^\gamma m^2 |(\xi, \xi)|_p} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{p^2 + p^\gamma m^2 |(\xi, \xi)|_p} \right), \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad [9]. \end{aligned} \quad (14.16)$$

$$\sim -\frac{p^4}{(p+1)^2} m^{-4} |(\xi, \xi)|_p^{-2}, \quad |(\xi, \xi)|_p \rightarrow \infty, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad [9]. \quad (14.17)$$

$$\begin{aligned} & \int |x|_p^{\alpha-1} |1 - x|_p^{\beta-1} |x - y|_p^\gamma |y|_p^{\alpha'-1} |1 - y|_p^{\beta'-1} d_p x d_p y \\ &= \Gamma_p(\gamma) \int |t|_p^{2-\alpha-\beta-\alpha'-\beta'} B_p(t; \alpha, \beta) B_p(-t; \alpha', \beta') d_p t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_p(\alpha, \beta)B_p(\alpha', \beta') + B_p(\alpha, \beta)B_p(\gamma, \alpha' + \beta' - 1) \\
&\quad + B_p(\alpha', \beta')B_p(\gamma, \alpha + \beta - 1) + B_p(\alpha + \beta - 1, \alpha' + \beta' - 1) \\
&\quad \times B_p(\gamma, 3 - \alpha - \beta - \alpha' - \beta') - B_p(\alpha, \alpha')B_p(\gamma, \alpha + \alpha') \\
&\quad - B_p(\beta, \beta')B_p(\gamma, \beta + \beta') \\
&\quad + \Gamma_p(\gamma)p^{-\gamma} \left\{ [\Gamma_p(\alpha + \beta - 1)p^{1-\alpha-\beta} + B_p(\alpha, \beta)] \right. \\
&\quad \times [\Gamma_p(\alpha' + \beta' - 1)p^{1-\alpha'-\beta'} + B_p(\alpha', \beta')] \\
&\quad \left. - [\Gamma_p(\alpha)p^{-\alpha} + \Gamma_p(\beta)p^{-\beta}] [\Gamma_p(\alpha')p^{-\alpha'} + \Gamma_p(\beta')p^{-\beta'}] \right\}, \\
&\quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re} \gamma > 0, \operatorname{Re} \alpha' > 0, \operatorname{Re} \beta' > 0. \quad (14.18)
\end{aligned}$$

Здесь

$$B_p(t; \alpha, \beta) = \int |x|_p^{\alpha-1} |t - x|_p^{\beta-1} \chi_p(x) d_p x.$$

Ниже в формулах (14.19)–(14.29) используются обозначения для поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$, $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ (см. § 9). В частности (см. (9.2) и (9.6)),

$$B_\gamma^2 = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) : |z\bar{z}|_p \leq q^\gamma]; \quad \alpha_k = \frac{2k\pi i}{\ln q}, \quad k \in Z.$$

$$\int_{B_0^2} d_p z = 1. \quad (14.19)$$

$$\int_{B_0^2} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} d_p z = \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-\alpha}}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (14.20)$$

$$\int_{B_\gamma^2} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} d_p z = \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-\alpha}} q^{\alpha\gamma}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (14.21)$$

$$\int_{B_0^2} f(z\bar{z}) d_p z = \frac{1}{C_{p,d}} \int_{B_0} f(x) \theta_d^+(x) d_p x, \quad p \neq 2 \text{ [11]}, \quad (14.22)$$

где величина $C_{p,d}$ определена в (9.16) и (9.17).

$$\begin{aligned}
&\delta \sqrt{|4d|_p} \int |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} \chi_p(z\zeta + \bar{z}\bar{\zeta}) d_p z, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \\
&= \Gamma_{p,d}(\alpha) |\zeta \bar{\zeta}|_p^{-\alpha}, \quad \zeta \neq 0 \text{ [3]}. \quad (14.23)
\end{aligned}$$

$$= \Gamma_{p,d}(\alpha), \quad \zeta = 1. \quad (14.24)$$

$$\delta \sqrt{|4d|_p} \int_{B_\gamma^2} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} \chi_p(z + \bar{z}) d_p z = \Gamma_{p,d}(\alpha),$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \gamma \geq 1 \text{ [3]}. \quad (14.25)$$

$$\int |\zeta \bar{\zeta}|_p^{\alpha-1} |(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})|_p^{\beta-1} d_p \zeta,$$

$$\operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < 1,$$

$$= B_q(\alpha, \beta) |z\bar{z}|_p^{\alpha+\beta-1}, \quad z \neq 0 \text{ [3]}. \quad (14.26)$$

$$= B_q(\alpha, \beta), \quad z = 1. \quad (14.27)$$

$$\int \chi_p(\xi z \bar{z}) d_p z, \quad \xi \neq 0, \quad p \neq 2,$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}_{p,d} \xi}{|\xi|_p}, \quad |d|_p = 1, \quad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2} \text{ [11]}, \quad (14.28)$$

$$= \pm \sqrt{p \operatorname{sgn}_{p,d}(-1)} \frac{\operatorname{sgn}_{p,d} \xi}{|\xi|_p}, \quad |d|_p = \frac{1}{p} \text{ [11]}, \quad (14.29)$$

$$\int_{B_\gamma^2} \chi_p(z\zeta + \bar{z}\bar{\zeta}) = q^\gamma \Omega(q^{\gamma-r} |\zeta \bar{\zeta}|_p) \text{ [8]}. \quad (14.30)$$

§ 15. n -переменных

$$\int_{B_0^n} d_p^n x = 1. \quad (15.1)$$

$$\int_{S_0^n} d_p^n x = 1 - p^{-n}. \quad (15.2)$$

$$\int_{B_\gamma^n} d_p^n x = p^{n\gamma}. \quad (15.3)$$

$$\int_{S_\gamma^n} d_p^n x = (1 - p^{-n}) p^{n\gamma}. \quad (15.4)$$

$$\int_{B_\gamma^n} f(|x|_p) d_p^n x = (1 - p^{-n}) \sum_{k=-\infty}^{\gamma} p^{nk} f(p^k). \quad (15.5)$$

$$\int f(|x|_p) d_p^n x = (1 - p^{-n}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^{nk} f(p^k). \quad (15.6)$$

$$\int_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n} d_p^n x = \frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (15.7)$$

$$\int_{S_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n} d_p^n x = (1-p^{-n}) p^{\alpha\gamma}. \quad (15.8)$$

$$\int_{|x|_p > p^\gamma} |x|_p^{\alpha-n} d_p^n x = -\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-\alpha}} p^{\gamma\alpha}, \quad \operatorname{Re} \alpha < 0. \quad (15.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_\gamma^n} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x &= (1-p^{-n}) p^{\gamma n} \Omega(p^\gamma |\xi|_p) \\ &\quad - p^{(\gamma-1)n} \delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}) [26], [3]. \end{aligned} \quad (15.10)$$

$$\int_{B_\gamma^n} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x = p^{\gamma n} \Omega(p^\gamma |\xi|_p) [26], [3]. \quad (15.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{B_\gamma^n} |(x, x)|_p^{\alpha-n/2} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x, \quad |(\xi, \xi)|_p > p^{-\gamma}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ = \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right) \Gamma_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad n \equiv 0 \pmod{4}, \\ p \neq 2 \text{ или } n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 1 \pmod{4} [10]. \end{aligned} \quad (15.12)$$

$$\begin{aligned} = (-1)^{\gamma((\xi, \xi))} \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right) \tilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \\ n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 3 \pmod{4} [10]. \end{aligned} \quad (15.13)$$

$$\begin{aligned} \int |(x, x)|_p^{\alpha-n/2} \chi_p((\xi, x)) d_p^n, \quad (\xi, \xi) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \\ = \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right) \Gamma_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad n \equiv 0 \pmod{4}, \quad p \neq 2 \\ \text{или } n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 1 \pmod{4} [10]. \end{aligned} \quad (15.14)$$

$$\begin{aligned} = (-1)^{\gamma((\xi, \xi))} \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right) \tilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \\ n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 3 \pmod{4} [10]. \end{aligned} \quad (15.15)$$

$$\int_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n} \chi_p(x_1) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \gamma \geq 1. \quad (15.16)$$

$$\int |x|_p^{\alpha-n} \chi_p(x_1) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (15.17)$$

$$\int |x|_p^{\alpha-n} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \xi \neq 0. \quad (15.18)$$

$$\int |x, m|_p^{\alpha-n} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha) (|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^\alpha) \Omega(|m\xi|_p), \\ m \neq 0 \ [1], [17]. \quad (15.19)$$

$$\int |x, 1|_p^{-\alpha} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(n - \alpha) (|\xi|_p^{\alpha-n} - p^{\alpha-n}) \Omega(|\xi|_p) \\ \equiv J_p^\alpha(\xi), \quad \operatorname{Re} \alpha > n. \quad (15.20)$$

Определим функцию $J_p^\alpha(\xi)$ при $\operatorname{Re} \alpha \leq n$ как мероморфное продолжение с области $\operatorname{Re} \alpha > n$. В частности,

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow n, \\ \alpha > n}} J_p^\alpha(\xi) = J_p^n(\xi) = (1 - p^{-n}) \left(1 - \frac{\ln |\xi|_p}{\ln p}\right) \Omega(|\xi|_p), \quad \alpha = n. \quad (15.21)$$

$$\int J_p^\alpha(\xi) J_p^\beta(x - \xi) d_p^n \xi = J_p^\alpha * J_p^\beta = J_p^{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (15.22)$$

$$\int |x|_p^{\alpha-n} |\varepsilon - x|_p^{\beta-n} d_p^n x = B_p^{(n)}(\alpha, \beta), \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < n, \quad |\varepsilon|_p = 1. \quad (15.23)$$

$$\int |y|_p^{\alpha-n} |x - y|_p^{\beta-n} d_p^n y = B_p^{(n)}(\alpha, \beta) |x|_p^{\alpha+\beta-n}, \\ \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad \operatorname{Re} \beta > 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < n \ [1], [17]. \quad (15.24)$$

$$\int |y, m|_p^{\alpha-n} |x - y, m|_p^{\beta-n} d_p^n y = B_p^{(n)}(\alpha, \beta) |x, m|_p^{\alpha+\beta-n} \\ - \Gamma_p^{(n)}(\alpha) |pm|_p^\alpha |x, m|_p^{\beta-n} - \Gamma_p^{(n)}(\alpha) |pm|_p^\beta |x, m|_p^{\alpha-n}, \\ \operatorname{Re}(\alpha + \beta) < n, \quad m \neq 0 \ [17]. \quad (15.25)$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p^{n-1}} \chi_p \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2x_k x_{k+1}}{\sin t_k} - \frac{x_k^2 + x_{k+1}^2}{\operatorname{tg} t_k} \right) \right\} d_p x_1 d_p x_2 \dots d_p x_{n-1} \\ = \frac{\lambda_p(T_n)}{\sqrt{|T_n|_p}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{|t_k|_p}}{\lambda_p(t_k)} \chi_p \left(\frac{2x_0 x_n}{\sin T_n} - \frac{x^2 + x_n^2}{\operatorname{tg} T_n} \right), \quad n = 2, 3, \dots, \\ p \neq 2, \quad |t_k|_p \leq \frac{1}{p}, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} t_k \ [17]. \quad (15.26)$$

Пусть $x_i \in \mathbb{Q}_p^n$, $|x_i|_p = 1$, $i = 1, 2, \dots, k < p^n$ и $|x_i - x_j|_p = 1$, $i, j = 1, 2, \dots$, $i \neq j$. Обозначим

$$D_k^n = [x \in \mathbb{Q}_p^n : |x - x_i|_p = 1, i = 1, 2, \dots, k].$$

Тогда

$$\int_{D_k^n} d_p^n x = 1 - kp^{-n}, \quad k \leq p^n, \quad p \neq 2 \quad [18]. \quad (15.27)$$

Пусть $G_k^n = [(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{Q}_p^{kn} : |x_i|_p = 1, |x_i - x_j|_p = 1, i, j = 1, 2, \dots, k, i \neq j]$. Тогда

$$\int_{G_k^n} d_p^n x_1 d_p^n x_2 \dots d_p^n x_k = \prod_{\ell=1}^k (1 - \ell p^{-n}) = c_{p,k}^n, \quad k \leq p^n, \quad p \neq 2 \quad [18]. \quad (15.28)$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{Q}_p^n$, $|x_0|_p = 1$ и $G_k^n(x_0) = [(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Q}_p^{kn} : |x_i|_p = 1, i = 0, 1, \dots, k, |x_i - x_j|_p = 1, i, j = 0, 1, \dots, k, i \neq j]$,

$$\int_{G_k^n(x_0)} d_p^n x_1 d_p^n x_2 \dots d_p^n x_k = \frac{1 - (k+1)p^{-n}}{1 - p^{-n}} c_{k,p}^n, \quad k+1 \leq p^n, \quad p \neq 2 \quad [18]. \quad (15.29)$$

Интеграл Миссарова–Лернера [26], [31]. Пусть G – некоторый связный конечный граф, $V = V(G)$ и $L = L(G)$ – множества вершин и ребер его соответственно. Каждой линии $l \in L$ сопоставим комплексное число a_l и обозначим $a = \{a_l, l \in L\}$, и каждой вершине $v \in V$ сопоставим n -мерный p -адический вектор $x_v = (x_{v1}, x_{v2}, \dots, x_{vn}) \in \mathbb{Q}_p^n$. На множестве вершин V введем иерархию A следующим образом. Иерархия A – это семейство подмножеств множества V , таких что: 1) $V \in A$, 2) $v \in A$ для всех $v \in V$ и 3) для любой пары $V' \in A$, $V'' \in A$ либо $V' \cap V'' = \emptyset$, либо $V' \subset V''$, либо $V'' \subset V'$. Для любого $V' \in A$, $V' \neq V$, обозначим через $\theta(V')$ минимальное подмножество в A , содержащее V' , но не совпадающее с ним, и пусть $K(V') = [V'' \in A : \theta(V'') = V']$. Рассматриваются только такие иерархии A , для которых

$$1 < |K(V')| \leq p^n, \quad V' \in A', \quad \text{где } A' = [V' \in A : |V'| > 1].$$

Обозначим

$$a(V') = \sum_{l \in L(G(V'))} a_l, \quad \beta(V') = a(V') + n(|V'| - 1),$$

где $L(G(V'))$ – множество ребер l графа G , начало $i(l)$ и конец $f(l)$ которых лежат в $V' \subset V = V(G)$. При условии $\beta(V') > 0$, $V' \in A'$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} F_G(a) &\equiv \int_{Z_p^{n|V|}} \prod_{l \in L} |x_{i(l)} - x_{f(l)}|_p^{a_l} \prod_{v \in V} d_p^n x_v \\ &= p^{a(V)} \sum_A \prod_{V' \in A'} \frac{1}{p^{\beta(V')} - 1} \frac{(p^n - 1)!}{(p^n - |K(V')|)!}, \end{aligned}$$

где суммирование проводится по всем иерархиям A . (Символ $|V|$ обозначает число элементов множества V .) Вычисление различных фейнмановских интегралов сводится к вычислению интеграла $F_G(a)$ [26].

§ 16. Интегралы и свертки обобщенных функций

Интегралом (см. § 6) *обобщенной функции* $f \in \mathcal{S}'(\mathcal{O})$ по открыто-замкнутому множеству $D \in \mathcal{O} \in \mathbb{Q}_p^n$ называется предел, если он существует,

$$G \int_D f(x) d_p^n x = \lim_{k \rightarrow \infty} (f \theta_D, \Omega_k).$$

Интегралы обобщенных функций содержатся также в §§ 12–15 и § 17.

$$G \int_{B_0^n} d_p^n x = 1. \quad (16.1)$$

$$G \int_{B_\gamma^n} d_p^n x = p^{\gamma n}. \quad (16.2)$$

$$G \int_{S_\gamma^n} d_p^n x = (1 - p^{-n}) p^{\gamma n}. \quad (16.3)$$

$$G \int f(x) d_p^n x = \int f(x) d_p^n x, \quad f \in \mathcal{L}^1. \quad (16.4)$$

$$G \int f(x) d_p^n x = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{B_\gamma^n} f(x) d_p^n x, \quad f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1. \quad (16.5)$$

$$G \int_D f(x) d_p^n x = \int_D f(x) d_p^n x, \quad f \in \mathcal{L}^1(D). \quad (16.6)$$

$$G \int f(x) d_p^n x = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_{B_\gamma^n} f(x) d_p^n x, \quad f \in \mathcal{L}^p. \quad (16.7)$$

$$G \int f(x) d_p^n x = (f, \Omega_N), \quad f \in \mathcal{S}, \quad \text{spt} \in B_N^n. \quad (16.8)$$

$$G \int_D f(x) d_p^n x = (f, \theta_D), \quad f \in \mathcal{S}(\mathcal{O}), \quad (16.9)$$

где D – открытый компакт в $\mathcal{O}$.

$$G \int f(x) d_p^n x = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (f, \Omega_\gamma), \quad f \in \mathcal{S}. \quad (16.10)$$

$$G \int \delta(x) d_p^n x = 1. \quad (16.11)$$

$$G \int_{S_\gamma} \pi(x) d_p x = 0, \quad \pi \neq 1, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{cp. (11.40)}). \quad (16.12)$$

$$G \int_{B_\gamma} |x|_p^{\alpha-1} \pi(x) d_p x = 0, \quad \pi \neq 1, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (16.13)$$

$$G \int |x|_p^{\alpha-1} \pi(x) d_p x = 0, \quad \pi \neq 1, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (16.14)$$

$$G \int_{B_\gamma} |x|_p^{\alpha-1} d_p x = \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma} \quad (\text{cp. (11.18)}). \quad (16.15)$$

$$G \int |x|_p^{\alpha-1} d_p x = 0, \quad \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z \quad (\text{cp. (8.3')}). \quad (16.16)$$

$$G \int_{S_\gamma} |x - a|_p^{\alpha-1} d_p x = \frac{p - 2 + p^{-\alpha}}{p(1 - p^{-\alpha})} |a|_p^\alpha, \\ |a|_p = p^\gamma \quad (\text{cp. (11.20)}). \quad (16.17)$$

$$G \int_{B_\gamma} |x|^2 + a^2 |x|_p^{(\alpha-1)/2} d_p x = \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^\alpha} |a|_p^\alpha + \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma}, \\ 0 \neq |a|_p \leq p^\gamma, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad (\text{cp. (11.28)}). \quad (16.18)$$

$$G \int |x^2 + a^2|_p^{(\alpha-1)/2} d_p x = \frac{1 - p^{\alpha-1}}{1 - p^\alpha} |a|_p^\alpha, \\ a \neq 0, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad (\text{ср. (11.30)}). \quad (16.19)$$

$$G \int_{B_\gamma} |x^2 + a^2|_p^{\alpha-1} d_p x \\ = \left[1 - \frac{2}{p} + \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{2}{p^\alpha - 1} + \frac{1}{p^{1-2\alpha} - 1} \right) \right] |a|_p^{2\alpha-1} \\ - \left(1 - \frac{1}{p} \right) \frac{p^{(2\alpha-1)\gamma}}{1 - p^{2\alpha-1}}, \\ 0 \neq |a|_p \leq p^\gamma, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (16.20)$$

$$G \int |x^2 + a^2|_p^{\alpha-1} d_p x = \left[1 - \frac{2}{p} + \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right. \\ \left. \times \left(\frac{2}{p^\alpha - 1} + \frac{1}{p^{1-2\alpha} - 1} \right) \right] |a|_p^{2\alpha-1}, \\ a \neq 0, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad (\text{ср. (11.31)}). \quad (16.21)$$

$$G \int_{S_0} |x^2 + 1|_p^{\alpha-1} d_p x = 1 - \frac{3}{p} - 2 \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^\alpha}, \\ \alpha \neq \alpha_k, \quad k \in Z, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad (\text{ср. (11.32)}). \quad (16.22)$$

$$|x|_p^{\alpha-1} * |x|_p^{\beta-1} = B_p(\alpha, \beta) |x|_p^{\alpha+\beta-1}. \quad (16.23)$$

$$G \int |x|_p^{\alpha-1} |1 - x|_p^{\beta-1} d_p x = B_p(\alpha, \beta), \\ |x, m|_p^{\alpha-1} * |x, m|_p^{\beta-1} = B_p(\alpha, \beta) |x, m|_p^{\alpha+\beta-1} \\ - \Gamma_p(\alpha) |pm|_p^\alpha |x, m|_p^{\beta-1} - \Gamma_p(\beta) |pm|_p^\beta |x, m|_p^{\alpha-1}, \quad (16.24) \\ m \neq 0 \quad (\text{ср. (11.68)}). \quad (16.25)$$

$$G \int |x, m|_p^{\alpha-1} \chi_p(\xi x) d_p x = \Gamma_p(\alpha) (|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^\alpha) \Omega(|m\xi|_p), \\ m \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{см. (12.48)}). \quad (16.26)$$

$$G \int_{S_\gamma} \delta(x_0 - k) d_p x = p^{\gamma-1}, \quad k = 1, 2, \dots, p-1 \quad (\text{см. (11.33)}). \quad (16.27)$$

$$G \int_{S_\gamma} [1 - \delta(x_0 - k)] d_p x = \left(1 - \frac{2}{p} \right) p^\gamma, \\ k = 1, 2, \dots, p-1 \quad (\text{см. (11.34)}). \quad (16.28)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_\gamma} \delta(x_n - k) d_p x &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{\gamma-1}, \\ k &= 0, 1, \dots, p-1, \quad n \in Z_+ \quad (\text{см. (11.35)}). \end{aligned} \quad (16.29)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_\gamma} [1 - \delta(x_n - k)] d_p x &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 p^\gamma, \\ k &= 0, 1, \dots, p-1, \quad n \in Z_+ \quad (\text{см. (11.36)}). \end{aligned} \quad (16.30)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_\gamma} \delta(x_0 - k_0) \prod_{l=1}^n \delta(x_l - k_l) &= p^{\gamma-n-1}, \quad k_l = 0, 1, \dots, p-1, \\ k_0 &\neq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{см. (11.37)}). \end{aligned} \quad (16.31)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_\gamma} \left[1 - \delta(x_0 - k_0) \prod_{l=1}^n \delta(x_l - k_l)\right] &= (1 - p^{-1} - p^{-n-1}) p^\gamma, \\ k_l &= 0, 1, \dots, p-1, \quad k_0 \neq 0, \\ n &= 0, 1, \dots \quad (\text{см. (11.38)}). \end{aligned} \quad (16.32)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_\gamma} \left(\prod_{l=1}^n \delta(x_l - k_l)\right) d_p x &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{\gamma-n}, \\ k_l &= 0, 1, \dots, p-1, \quad n \in Z_+. \end{aligned} \quad (16.33)$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_\gamma} \left[1 - \prod_{l=1}^n \delta(x_{i_l} - k_{i_l})\right] d_p x &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) (1 - p^{-n}) p^\gamma, \\ k_l &= 0, 1, \dots, p-1, \quad n \in Z_+. \end{aligned} \quad (16.34)$$

$$\oint_{S_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n} d_p^n x = \left(1 - \frac{1}{p^{-n}}\right) p^{\alpha\gamma}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{см. (15.8)}). \quad (16.35)$$

$$\oint_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n} d_p^n x = \frac{1 - p^{-n}}{1 - p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma} \quad (\text{ср. (15.7)}). \quad (16.36)$$

$$\oint |x|_p^{\alpha-n} d_p^n x = 0, \quad n \in Z_+. \quad (16.37)$$

$$\begin{aligned} \oint_{B_\gamma^n} |(x, x)|_p^{\alpha-n/2} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x, \quad |(\xi, \xi)|_p > p^\gamma, \\ = \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right) \Gamma_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad n \equiv 0 \pmod{4}, \quad p \neq 2 \\ \text{или } n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \end{aligned} \quad (16.38)$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\gamma((\xi, \xi))} \Gamma_p \left(\alpha - \frac{n}{2} + 1 \right) \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \\
&\quad \alpha \neq \left\{ \alpha_k - \frac{\pi i}{\ln p}, \alpha_k + \frac{n}{2} - 1, k \in Z \right\}, \\
&\quad n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad (\text{ср. (15.13)}). \quad (16.39)
\end{aligned}$$

$$= \Gamma_p^2(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad n = 2, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (16.40)$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_p(\alpha) \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \\
&\quad n = 2, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad (\text{см. (14.9)}). \quad (16.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&G \int |x, x|_p^{\alpha-n/2} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x, \quad (\xi, \xi) \neq 0, \\
&= \Gamma_p \left(\alpha - \frac{n}{2} + 1 \right) \Gamma_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad n \equiv 0 \pmod{4}, \quad p \neq 2 \\
&\quad \text{или } n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (16.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\gamma((\xi, \xi))} \Gamma_p \left(\alpha - \frac{n}{2} + 1 \right) \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \\
&\quad n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad (\text{см. (15.15)}). \quad (16.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_p^2(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \\
&\quad n = 2, \quad p \equiv 1 \pmod{4} \quad (\text{ср. (14.10)}). \quad (16.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_p(\alpha) \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \\
&\quad n = 2, \quad p \equiv 3 \pmod{4} \quad (\text{ср. (14.11)}). \quad (16.45)
\end{aligned}$$

$$G \int_{B_\gamma^n} |x|_p^{\alpha-n} \chi_p(x_1) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha), \quad \gamma \in Z_+. \quad (16.46)$$

$$G \int |x|_p^{\alpha-n} \chi_p(x_1) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha). \quad (16.47)$$

$$\begin{aligned}
&G \int |x|_p^{\alpha-n} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha}, \quad \xi \neq 0 \quad (\text{ср. (15.18)}). \\
&\quad (16.48)
\end{aligned}$$

$$|x|_p^{\alpha-n} * |x|_p^{\beta-n} = B_p^{(n)}(\alpha, \beta) |x|_p^{\alpha+\beta-n}. \quad (16.49)$$

$$\begin{aligned}
&G \int |x, m|_p^{\alpha-n} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x = \Gamma_p^{(n)}(\alpha) (|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^\alpha) \Omega(|m\xi|_p), \\
&\quad m \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (\text{ср. (15.19)}). \quad (16.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& G \int |x, 1|_p^{-\alpha} \chi_p((\xi, x)) d_p^n x \\
&= \Gamma_p^{(n)}(n - \alpha) (|\xi|_p^{\alpha-n} - p^{\alpha-n}) \Omega(|\xi|_p), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (16.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |x, m|_p^{\alpha-n} * |x, m|_p^{\beta-n} = B_p^{(n)}(\alpha, \beta) |x, m|_p^{\alpha+\beta-n} \\
&= -\Gamma_p^{(n)}(\alpha) |pm|_p^\alpha |x, m|_p^{\beta-n} - \Gamma_p^{(n)}(\beta) |pm|_p^\beta |x, m|_p^{\alpha-n}, \\
& m \neq 0 \quad (\text{ср. (15.25)}). \quad (16.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (D^\alpha \varphi)(x) = (f_{-\alpha} * \varphi)(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}, \\
&= \Gamma_p^{-1}(-\alpha) \int \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{|x - y|_p^{\alpha+1}} d_p y, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0. \quad (16.53)
\end{aligned}$$

$$= (1 - p^{-\alpha-1})^{-1} \int [\varphi(x + y) - \varphi(x + y/p)] |y|_p^{-\alpha-1} d_p y. \quad (16.54)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{p-1}{p \ln p} \int \varphi(y) \ln |x - y|_p d_p y, \quad \int f(y) d_p y = 0, \\
& \alpha = \alpha_k - 1, \quad k \in Z. \quad (16.55)
\end{aligned}$$

$$= \varphi(x), \quad \alpha = \alpha_k, \quad k \in Z. \quad (16.56)$$

$$= \int |\xi|_p^\alpha \tilde{\varphi}(\xi) \chi_p(-\xi x) d_p \xi, \quad \operatorname{Re} \alpha > -1. \quad (16.57)$$

$$= \int |\xi|_p^\alpha [\tilde{\varphi}(\xi) \chi_p(-\xi x) - \tilde{\varphi}(0)] d_p \xi, \quad \operatorname{Re} \alpha < -1. \quad (16.58)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{Z_p} |\xi|_p^{-1} [\tilde{\varphi}(\xi) \chi_p(-\xi x) - \tilde{\varphi}(0)] d_p \xi + \frac{1}{p} \tilde{\varphi}(0) \\
&+ \int_{\mathbb{Q}_p \setminus Z_p} |\xi|_p^{-1} \tilde{\varphi}(\xi) \chi_p(-\xi x) d_p \xi, \quad \alpha = \alpha_k - 1, \quad k \in Z. \quad (16.59)
\end{aligned}$$

$$D^\alpha \chi_p(ax) = |a|_p^\alpha \chi_p(ax), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0. \quad (16.60)$$

$$\begin{aligned}
& D^\alpha \Phi(x) = p^{\gamma\alpha} \Phi(x), \quad \alpha \in \mathbb{R} [1], \\
& \text{если } \Phi(x) = F[\delta(|\xi|_p - p^\gamma) f(\xi)], \quad f \in \mathcal{S}. \quad (16.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D^\alpha [\delta(|x|_p - p^\gamma) \chi_p(ax^2)] = p^{\gamma\alpha} |2a|_p^\alpha \delta(|x|_p - p^\gamma) \chi_p(ax^2), \\
& \alpha \in \mathbb{R}, \quad |2a|_p \leq p^{2-2\gamma} [1]. \quad (16.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D^\alpha [\eta(x_0) \delta(|x|_p - p^\gamma)] = p^{\alpha(1-\gamma)} \eta(x_0) \delta(|x|_p - p^\gamma), \\
& \alpha \in \mathbb{R}, \quad p \neq 2, \quad \sum_{k=1}^{p-1} \eta(k) = 0 [4]. \quad (16.63)
\end{aligned}$$

$$(D^\alpha f)(x), \quad f \in \mathcal{S}, \quad \text{spt } f \in B_N, \quad |x|_p > p^N, \\ = \Gamma_p^{-1}(\alpha) |x|_p^{\alpha-1} (f, \Omega_N), \quad \alpha \neq -1 \text{ [3]}. \quad (16.64)$$

$$= -\frac{p-1}{p \ln p} \ln |x|_p (f, \Omega_N), \quad \alpha = -1 \text{ [3]}. \quad (16.65)$$

$$D^\alpha 1 = 0, \quad \alpha > 0. \quad (16.66)$$

$$D^\alpha \delta(x-a) = f_{-\alpha}(x-a), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{Q}_p. \quad (16.67)$$

$$D^\alpha [\delta(|x|_p - p^{\ell-N}) \delta(x_0 - j) \chi_p(\epsilon_\ell p^{\ell-2N} x^2)] \\ = p^{\alpha N} \delta(|x|_p - p^{\ell-N}) \delta(x_0 - j) \chi_p(\epsilon_\ell p^{\ell-2N} x^2), \quad N \in \mathbb{Z}, \\ p \neq 2, \quad \alpha > 0, \quad \ell = 2, 3, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, \\ \epsilon_\ell = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 p + \dots + \varepsilon_{\ell-2}, \\ \varepsilon_s = 0, 1, \dots, p-1, \quad \varepsilon_0 \neq 0, \quad s = 0, 1, \dots, \ell-2 \text{ [4]}. \quad (16.68)$$

$$D^\alpha [\Omega(p^{N-1} |x|_p) \chi_p(j p^{-N} x)] = p^{\alpha N} \Omega(p^{N-1} |x|_p) \chi_p(j p^{-N} x), \\ N \in \mathbb{Z}, \quad p \neq 2, \quad \alpha > 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1 \text{ [4]}. \quad (16.69)$$

$$D^\alpha [\delta(|x|_2 - 2^{\ell+1-N}) \chi_2(\epsilon_\ell 2^{\ell-2N} x^2 + 2^{\ell-N-j} x)] \\ = 2^{\alpha N} \delta(|x|_2 - 2^{\ell+1-N}) \chi_2(\epsilon_\ell 2^{\ell-2N} x^2 + 2^{\ell-N-j} x), \\ N \in \mathbb{Z}, \quad p = 2, \quad \alpha > 0, \quad \ell = 2, 3, \dots, \quad j = 0, 1, \\ \epsilon_\ell = 1 + \varepsilon_1 2 + \dots + \varepsilon_{\ell-2} 2^{\ell-2}, \\ \varepsilon_s = 0, 1, s = 1, 2, \dots, \ell-2 \text{ [4]}. \quad (16.70)$$

$$D^\alpha [\Omega(2^N |x - j 2^{N-2}|_2) - \delta(|x - j 2^{N-2}|_2 - 2^{1-N})] \\ = 2^{\alpha N} [\Omega(2^N |x - j 2^{N-2}|_2) - \delta(|x - j 2^{N-2}|_2 - 2^{1-N})], \\ N \in \mathbb{Z}, \quad p = 2, \quad \alpha > 0, \quad j = 0, 1 \text{ [4]}. \quad (16.71)$$

$$D^\alpha \Omega(p^{-\gamma} |x|_p) = \frac{p-1}{p^{\alpha+1}-1} p^{\alpha(1-\gamma)}, \quad x \in B_\gamma, \quad \alpha > 0 \text{ [5]}. \quad (16.72)$$

$$D^\alpha \delta(|x|_p - p^\gamma) = \frac{p^\alpha + p - 2}{p^{\alpha+1} - 1} p^{\alpha(1-\gamma)}, \quad x \in S_\gamma, \quad \alpha > 0 \text{ [5]}. \quad (16.73)$$

Пусть $\mathcal{K}(t, \tau)$ – вещественное симметричное ядро

$$\mathcal{K}(t, t) = 0, \quad \mathcal{K}(t, \tau) = \rho \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} t^{-\alpha-1}, \quad \tau < t,$$

$$\sigma = \frac{p^\alpha + p - 2}{p^{\alpha+1} - 1} p^\alpha, \quad \rho = -\Gamma_p^{-1}(-\alpha) \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad \sigma + \rho = p^\alpha,$$

и функция $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ такова, что

$$\int_{|x|_p > 1} |f(x)| |x|_p^{-\alpha-1} d_p x < \infty.$$

Тогда

$$(D^\alpha f)(x) = - \int \mathcal{K}(|x|_p, |y|_p) f(y) d_p y + \sigma |x|_p^{-\alpha} f(x), \quad \alpha > 0 \quad [5]. \quad (16.74)$$

В нижеследующих формулах § 16 все интегралы

$$G \int f(z, \bar{z}) d_p z$$

понимаются по нормированной мере $d_p z = \delta^{-1} d_p x d_p y$, $z = x + \sqrt{d} y$, $\bar{z} = x - \sqrt{d} y$, поля $\mathbb{Q}_p(\sqrt{d})$, $d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ (см. (9.2)). В частности,

$$B_\gamma^2 = [z \in \mathbb{Q}_p(\sqrt{d}) : |z\bar{z}|_p \leq q^\gamma].$$

$$G \int_{B_0^2} d_p z = 1. \quad (16.75)$$

$$G \int_{B_0^2} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} d_p z = \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-\alpha}}. \quad (16.76)$$

$$G \int |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} d_p z = 0. \quad (16.77)$$

$$G \int |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} \chi_p(z + \bar{z}) d_p z = \frac{\Gamma_{p,d}(\alpha)}{\delta \sqrt{|4d|_p}}. \quad (16.78)$$

$$G \int_{B_1^2} |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} \chi_p(z + \bar{z}) d_p z = \frac{\Gamma_{p,d}(\alpha)}{\delta \sqrt{|4d|_p}}, \quad (16.79)$$

$$|z\bar{z}|_p^{\alpha-1} * |z\bar{z}|_p^{\beta-1} = B_q(\alpha, \beta) |z\bar{z}|_p^{\alpha+\beta-1}. \quad (16.80)$$

$$G \int |z\bar{z}|_p^{\alpha-1} |(1-z)(1-\bar{z})|_p^{\beta-1} d_p z = B_q(\alpha, \beta). \quad (16.81)$$

$$G \int \chi_p(\xi z \bar{z}) d_p z = \frac{\text{sgn}_{p,d} \xi}{|\xi|_p} + \frac{1+p}{2p} \delta(\xi),$$

$$p \neq 2, \quad |d|_p = 1, \quad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2} \quad [11]. \quad (16.82)$$

$$G \int \chi_p(\xi z \bar{z}) d_p z = \pm \sqrt{p \operatorname{sgn}_{p,d}(-1)} \frac{\operatorname{sgn}_{p,d} \xi}{|\xi|_p} + \delta(\xi),$$

$$p \neq 2, \quad |d|_p = \frac{1}{p} \quad [11]. \quad (16.83)$$

§ 17. Таблица преобразований Фурье

Для взаимно однозначного соответствия между *прообразом* $f \in \mathcal{S}'$ и его *образом* $\tilde{f} \in \mathcal{S}'$ — преобразованием Фурье f — будем использовать обозначение (см. § 7)

$$f(x) \Longleftrightarrow \tilde{f}(\xi).$$

$$\omega_\gamma(x) \Longleftrightarrow \delta_\gamma(\xi). \quad (17.1)$$

$$\delta(x) \Longleftrightarrow 1(\xi). \quad (17.2)$$

$$f(Ax + b) \Longleftrightarrow |\det A|_p^{-1} \chi_p(-(A^{-1}b, \xi)) \tilde{f}(\bar{A}'\xi),$$

$$\det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (17.3)$$

$$f(x - b) \Longleftrightarrow \chi_p((b, \xi)) \tilde{f}(\xi), \quad b \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (17.4)$$

$$\check{f}(x) \Longleftrightarrow \check{\tilde{f}}(\xi). \quad (17.5)$$

$$f(x) \Longleftrightarrow \int f(x) \chi_p((\xi, x)) d_p^n x, \quad f \in \mathcal{L}^1. \quad (17.6)$$

$$f(x) \Longleftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k^n} f(x) \chi_p((\xi, x)) d_p^n x \quad \text{в } \mathcal{S}', \quad f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1. \quad (17.7)$$

$$f(x) \Longleftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k^n} f(x) \chi_p((\xi, x)) d_p^n x \quad \text{в } \mathcal{L}^2, \quad f \in \mathcal{L}^2. \quad (17.8)$$

$$f(x) \Longleftrightarrow (f(x), \Omega_N(x) \chi_p((\xi, x))), \quad \operatorname{spt} f \in B_N. \quad (17.9)$$

$$f * g \Longleftrightarrow \tilde{f} \cdot \tilde{g}. \quad (17.10)$$

$$f \cdot g \Longleftrightarrow \tilde{f} * \tilde{g}. \quad (17.11)$$

$$\delta(|x|_p - p^\gamma) \Longleftrightarrow \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^\gamma \Omega(p^\gamma |\xi|_p) - p^{\gamma-1} \delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}). \quad (17.12)$$

$$\begin{aligned}
f(|x|_p)\Omega_\gamma(|x|_p) &\Longleftrightarrow \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=-\infty}^{\gamma} p^k f(p^k)\Omega(p^\gamma|\xi|_p) \\
&\quad + |\xi|_p^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} p^{-\gamma} f(p^{-\gamma}|\xi|_p^{-1}) - f(p|\xi|_p^{-1}) \right] \\
&\quad \times [1 - \Omega(p^\gamma|\xi|_p)]. \tag{17.13}
\end{aligned}$$

$$f(|x|_p) \Longleftrightarrow |\xi|_p^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{k=0}^{\infty} p^{-\gamma} f(p^{-\gamma}|\xi|_p^{-1}) - f(p|\xi|_p^{-1}) \right]. \tag{17.14}$$

$$|x|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}. \tag{17.15}$$

$$\ln |x|_p \Longleftrightarrow -\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \ln p \left(\operatorname{reg} |\xi|_p^{-1} + \frac{1}{p} \delta(\xi) \right). \tag{17.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x|_p^2 + m^2} &\Longleftrightarrow \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{|\xi|_p}{p^2 + m^2 |\xi|_p^2} \\
&\quad \times \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-\gamma} \frac{p^2 - p^{-2\gamma}}{p^{-2\gamma} + m^2 |\xi|_p^2}, \quad m \neq 0. \tag{17.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x|_p^{\alpha-1} |1 - x|_p^{\beta-1} &\Longleftrightarrow [\Gamma_p(\alpha + \beta - 1) |\xi|_p^{1-\alpha-\beta} + B_p(\alpha, \beta)] \Omega(|\xi|_p) \\
&\quad + [\Gamma_p(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha} + \Gamma_p(\beta) |\xi|_p^{-\beta} \chi_p(\xi)] [1 - \Omega(|\xi|_p)]. \tag{17.18}
\end{aligned}$$

$$\delta(|x|_p - 1) |1 - x|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p(\alpha) \chi_p(\xi) |\xi|_p^{-\alpha}, \quad \gamma(\xi) \geq 2. \tag{17.19}$$

$$\eta_{x_0} \delta(|x|_p - p^\gamma) \Longleftrightarrow p^{\gamma-1} \eta'_{\xi_0} \delta(|\xi|_p - p^{1-\gamma}), \quad p \neq 2, \tag{17.20}$$

$$\text{где } \sum_{k=1}^{p-1} \eta_k = 0, \quad \eta'_j = \sum_{k=1}^{p-1} \eta_k \exp\left(2\pi i \frac{kj}{p}\right).$$

$$\begin{aligned}
|x|_p^{\alpha-1} \Omega(p^{-\gamma}|x|_p) &\Longleftrightarrow \frac{1 - p^{-1}}{1 - p^{-\alpha}} p^{\alpha\gamma} \Omega(p^\gamma|\xi|_p) \\
&\quad + \Gamma_p(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha} [1 - \Omega(p^\gamma|\xi|_p)]. \tag{17.21}
\end{aligned}$$

$$\delta(|x|_p - 1) \delta(x_0 - p + 1) \Longleftrightarrow p^{-1} \chi_p(-\xi) \Omega(|p\xi|_p). \tag{17.22}$$

$$\chi_p(x) \Omega(|px|_p) \Longleftrightarrow p \delta(|\xi|_p - 1) \delta(\xi_0 - p + 1). \tag{17.23}$$

$$|x, m|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p(\alpha) (|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^\alpha) \Omega(|m\xi|_p),$$

$$m \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (17.24)$$

$$f((x, x)) \Longleftrightarrow |(\xi, \xi)|_p^{-1} \left[(1 - p^{-2}) \sum_{\gamma=0}^{\infty} p^{-2\gamma} f(p^{-2\gamma} |(\xi, \xi)|_p^{-1}) \right. \\ \left. - f(p^2 |(\xi, \xi)|_p^{-1}) \right], \quad n = 2, \quad p \equiv 3 \pmod{4}. \quad (17.25)$$

$$f((x, x)) \Longleftrightarrow |(\xi, \xi)|_p^{-1} \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(\gamma + \frac{p-3}{p-1}\right) \right. \\ \times p^{-\gamma} f(p^{-\gamma} |(\xi, \xi)|_p^{-1}) - 2 \left(1 - \frac{1}{p}\right) f(p |(\xi, \xi)|_p^{-1}) \\ \left. + f(p^2 |(\xi, \xi)|_p^{-1}) \right], \quad n = 2, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (17.26)$$

$$|(x, x)|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p^2(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha}, \quad n = 2, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (17.27)$$

$$|(x, x)|_p^{\alpha-1} \Longleftrightarrow \Gamma_p(\alpha) \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha},$$

$$n = 2, \quad p \equiv 3 \pmod{4}. \quad (17.28)$$

$$\frac{1}{|(x, x)|_p + m^2} \Longleftrightarrow \frac{1 - p^{-2}}{p^2 + m^2 |(\xi, \xi)|_p} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{p^2 - p^{-2\gamma}}{1 + p^\gamma m^2 |(\xi, \xi)|_p},$$

$$n = 2, \quad m \neq 0, \quad p \equiv 3 \pmod{4}. \quad (17.29)$$

$$\frac{1}{|(x, x)|_p + m^2} \Longleftrightarrow \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(\gamma + \frac{p-3}{p-1}\right) \frac{1}{1 + p^\gamma m^2 |(\xi, \xi)|_p} \\ - 2 \frac{1 - 1/p}{p + m^2 |(\xi, \xi)|_p} + \frac{1}{p^2 + m^2 |(\xi, \xi)|_p},$$

$$n = 2, \quad m \neq 0, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (17.30)$$

$$|(x, x)|_p^{\alpha-n/2} \Longleftrightarrow \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right) \Gamma_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha},$$

$$\alpha \neq \left\{ \alpha_k, \alpha_k + \frac{n}{2} - 1, k \in Z \right\}, \quad n \equiv 0 \pmod{4}, \quad p \neq 2$$

$$\text{или } n \equiv 2 \pmod{4}, \quad p \equiv 1 \pmod{4}. \quad (17.31)$$

$$|(x, x)|_p^{\alpha-n/2} \Longleftrightarrow (-1)^{\gamma((\xi, \xi))} \Gamma_p\left(\alpha - \frac{n}{2} + 1\right) \widetilde{\Gamma}_p(\alpha) |(\xi, \xi)|_p^{-\alpha},$$

$$n \equiv 2 \pmod{4}, \quad n \geq 6, \quad p \equiv 3 \pmod{4}. \quad (17.32)$$

$$|x|_p^{\alpha-n} \iff \Gamma_p^{(n)}(\alpha)|\xi|_p^{-\alpha}. \quad (17.33)$$

$$\begin{aligned} |x, m|_p^{\alpha-n} &\iff \Gamma_p^{(n)}(\alpha)(|\xi|_p^{-\alpha} - |pm|_p^\alpha)\Omega(|m\xi|_p), \\ m &\neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (17.34)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|2a|_p} \chi_p(ax^2)\delta(|x|_p - p^\gamma) &\iff \lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \\ &\times \delta(|\xi|_p - |2a|_p p^\gamma), \quad |4a|_p \geq p^{2-2\gamma}. \end{aligned} \quad (17.35)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|2a|_p} \chi_p(ax^2)\delta(|x|_p - p^\gamma) &\iff \left[\lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}} \right] \\ &\times \Omega(p^{1-\gamma}|\xi|_p), \quad p \neq 2, \quad |a|_p = p^{1-2\gamma}. \end{aligned} \quad (17.36)$$

$$\chi_p(ax^2)\Omega(p^{-\gamma}|x|_p) \iff p^\gamma\Omega(p^\gamma|\xi|_p), \quad |a|_p p^{2\gamma} \leq 1. \quad (17.37)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|2a|_p} \chi_p(ax^2)\Omega(p^{-\gamma}|x|_p) &\iff \lambda_p(a)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \\ &\times \Omega(p^{-\gamma}|2a|_p^{-1}|\xi|_p), \quad |4a|_p p^{2\gamma} \geq p. \end{aligned} \quad (17.38)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|2a|_2} \chi_2(ax^2)\Omega(2^{-\gamma}|x|_2) &\iff \lambda_2(a)\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \\ &\times \delta(|\xi|_2 - 2^{1-\gamma}), \quad p = 2, \quad |a|_2 2^{2\gamma} = 2. \end{aligned} \quad (17.39)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|2a|_2} \chi_2(ax^2)\Omega(2^{-\gamma}|x|_2) &\iff \lambda_2(a)\chi_2(-\xi^2/4a)\Omega(2^\gamma|\xi|_2), \\ p = 2, \quad |a|_2 2^{2\gamma} &= 4. \end{aligned} \quad (17.40)$$

$$\chi_p(ax^2) \iff \lambda_p(a)|2a|_p^{-1/2}\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right), \quad a \neq 0. \quad (17.41)$$

$$\chi_p\left(\frac{x^2}{2}\right) \iff \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad p \neq 2. \quad (17.42)$$

$$\chi_2\left(\frac{x^2}{2}\right) \iff \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\chi_2\left(-\frac{\xi^2}{2}\right), \quad p = 2. \quad (17.43)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{|a|_p} \exp(-|x|_p^2) \chi_p(ax^2) &\iff S\left(|a|_p^{-1}, \frac{1}{p}\right)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\Omega(|a|_p^{-1/2}|\xi|_p) \\ &+ \left\{ \lambda_p(a) \exp\left(-\left|\frac{\xi}{a}\right|_p^2\right)\chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) + |a|_p^{1/2}|\xi|_p^{-1} \left[S\left(|\xi|_p^{-2}, \frac{1}{p}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \exp(-|p\xi|_p^{-2}) \Big] \Big\} [1 - \Omega(|a|_p^{-1/2}|\xi|_p)], \\
& p \neq 2, \quad \gamma(a) = 2k.
\end{aligned} \tag{17.44}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{|a|_p} \exp(-|x|_p^2) \chi_p(ax^2) & \Longleftrightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} S\left(p^{-1}|a|_p^{-1}, \frac{1}{p}\right) + \left[\lambda_p(a) - \frac{1}{\sqrt{p}}\right] \right. \\
& \times \exp(-|pa|_p^{-1}) \Big\} \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \Omega(\sqrt{p}|a|_p^{-1/2}|\xi|_p) \\
& + \left\{ \lambda_p(a) \exp\left(-\left|\frac{\xi}{a}\right|_p^2\right) \chi_p\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) + |a|_p^{1/2}|\xi|_p^{-1} \left[S\left(|\xi|_p^{-2}, \frac{1}{p}\right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \exp(-|p\xi|_p^{-2}) \right] \right\} [1 - \Omega(\sqrt{p}|a|_p^{-1/2}|\xi|_p)], \\
& p \neq 2, \quad \gamma(a) = 2k + 1.
\end{aligned} \tag{17.45}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{|a|_2} \exp(-|x|_2^2) \chi_2(ax^2) & \Longleftrightarrow \left\{ [\sqrt{2}\lambda_2(a) - 1] \exp(-|4a|_2^{-1}) \right. \\
& + S\left(|a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right) \Big\} \chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \Omega(|4a|_2^{-1/2}|\xi|_2) + \left\{ \exp(-|4a|_2^{-1}) \right. \\
& + [\sqrt{2}\lambda_2(a) - 1] S\left(|a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right) \Big\} \delta(|\xi|_2 - |a|_2^{1/2}) \chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \\
& + \left\{ \sqrt{2}\lambda_2(a) \exp(-|2a|_2^{-2}|\xi|_2^2) \chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \right. \\
& + |a|_2^{1/2}|\xi|_2^{-1} \left[S\left(|\xi|_2^{-2}, 1/2\right) - 2 \exp(-|2\xi|_2^{-2}) \right] \Big\} \\
& \times [1 - \Omega(|a|_2^{-1/2}|\xi|_2)], \quad p = 2, \quad \gamma(a) = 2k.
\end{aligned} \tag{17.46}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{|a|_2} \exp(-|x|_2^2) \chi_2(ax^2) & \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[S\left(\left|\frac{a}{2}\right|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right) - \exp(-|2a|_2^{-1}) \right. \\
& + 2\lambda_2(a) \exp(-|8a|_2^{-1}) \Big] \chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \Omega(|8a|_2^{-1/2}|\xi|_2) \\
& + \sqrt{2} \left[S\left(|2a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right) + \lambda_2(a) \exp(-|8a|_2^{-1}) \right] \\
& \times \chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \delta(|\xi|_2 - \sqrt{2|a|_2}) \\
& + \sqrt{2}\lambda_2(a) S\left(|2a|_2^{-1}, \frac{1}{2}\right) \chi_2\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \delta(|\xi|_2 - \sqrt{2|a|_2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ |a|_2^{1/2} |\xi|_2^{-1} \left[S \left(|\xi|_2^{-2}, \frac{1}{2} \right) - 2 \exp(-|2\xi|_2^{-2}) \right] \right. \\
& + \sqrt{2} \lambda_2(a) \exp(-|2a|_2^{-2} |\xi|_2^2) \chi_2 \left(-\frac{\xi^2}{4a} \right) \Big\} \\
& \times [1 - \Omega(2^{-1/2} |a|_2^{-1/2} |\xi|_2)], \\
& p = 2, \quad \gamma(a) = 2k + 1.
\end{aligned} \tag{17.47}$$

$$|x|_p^{\alpha-1} \theta(x) \iff \Gamma_p(\pi_{\alpha, \theta}) |\xi|_p^{-\alpha} \theta^{-1}(\xi), \quad \theta \neq 1, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{17.48}$$

$$\begin{aligned}
\theta(p^k x) \delta(|x|_p - p^k) & \iff p^k a_{p,k}(\theta) \theta^{-1}(\xi) \delta(|\xi|_p - 1), \\
k = \rho(\theta), \quad & \text{величина } a_{p,k} \text{ определена в (8.17)}.
\end{aligned} \tag{17.49}$$

$$|z\bar{z}|_p^{\alpha-1} \iff \Gamma_{p,d}(\alpha) |\zeta\bar{\zeta}|_p^{-\alpha}, \quad d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2} \quad (\text{см. (9.7)}). \tag{17.50}$$

$$\begin{aligned}
|x|_p^{\alpha-1} \operatorname{sgn}_{p,d} x & \iff \tilde{\Gamma}_p(\alpha) |\xi|_p^{-\alpha} \operatorname{sgn}_{p,d} \xi, \\
p \neq 2, \quad |d|_p = 1, \quad & d \notin \mathbb{Q}_p^{\times 2} \quad (\text{см. (8.8)}).
\end{aligned} \tag{17.51}$$

$$\begin{aligned}
|x|_p^{\alpha-1} \operatorname{sgn}_{p,d} x & \iff \pm p^{\alpha-1/2} \sqrt{\operatorname{sgn}_{p,d}(-1)} |\xi|_p^{-\alpha} \operatorname{sgn}_{p,d} \xi, \\
p \neq 2, \quad |d|_p = \frac{1}{p} \quad & (\text{см. (8.24)}).
\end{aligned} \tag{17.52}$$

Литература

- [1] Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленев Е. И., *p-Адитический анализ и математическая физика*. – М.: Наука, 1994. То же на англ. яз. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I., *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*. – Singapore: World Scientific, 1994, XVIII
- [2] Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленев Е. И., “Спектральная теория в *p*-адической квантовой механике и теория представлений” // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1990. **54**(2), 275–302.
- [3] Владимиров В. С., “Обобщенные функции над полем *p*-адических чисел” // *УМН*, 1988. **43**(5), 17–53.
- [4] Владимиров В. С., “О спектре некоторых псевдо-дифференциальных операторов над полем *p*-адических чисел” // *Алгебра и анализ*, 1990. **2**(6), 107–124.

- [5] Владимиров В. С., “О спектральных свойствах p -адических псевдо-дифференциальных операторов типа Шредингера” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1992. **56**(4), 770–789.
- [6] Владимиров В. С., “Адельные формулы Фрейнда–Виттена для амплитуд Венециано и Вирасоро–Шапиро” // *УМН*, 1993. **48**(6), 3–38.
- [7] Vladimirov V. S., “On the Freund–Witten adelic formula for Veneziano amplitudes” // *Lett. Math. Phys.*, 1993. **27**, 123–131.
- [8] Vladimirov V. S., “Adelic formulas for gamma- and beta-functions in algebraic number fields” // *p -Adic Functional Analysis. Lect. Notes Pure and Appl. Math.* – New York: M. Dekker, 1997. **192**, 383–395.
- [9] Бикулов А. Х., “Исследование p -адической функции Грина” // *ТМФ*, 1991. **87**(3), 376–390.
- [10] Бикулов А. Х., *Частное сообщение.*
- [11] Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И., *Теория представлений и автоморфные функции.* – М.: Наука, 1966.
- [12] Борович З. И., Шафаревич И. Р., *Теория чисел.* – М.: Наука, 1985.
- [13] Ruelle Ph., Thiran E., Verstegen D., Weyers J., “Quantum mechanics on p -adic fields” // *J. Math. Phys.*, 1989. **30**(12), 2854–2874.
- [14] Ruelle Ph., Thiran E., Verstegen D., Weyers J., “Adelic string and superstring amplitudes” // *Mod. Phys. Lett. A*, 1989. **4**(18), 1745–1752.
- [15] Vladimirov V. S., Volovich I. V., “ p -Adic quantum mechanics” // *Commun. Math. Phys.*, 1989. **123**, 659–676.
- [16] Meurice Y., “Quantum mechanics with p -adic numbers” // *Int. J. Modern Phys. A*, 1989. **4**(19), 5133–5147.
- [17] Smirnov V. A., “Renormalization in p -adic quantum mechanics” // *Modern Phys. Lett. A*, 1991. **6**(15), 1421–1427.

- [18] Smirnov V. A., “Calculation of general p -adic Feynmann amplitude” // *Commun. Math Phys.*, 1992. **149**, 623–636.
- [19] Zelenov E. I., “ p -adic path integrals” // *J. Math. Phys.*, 1991. **32**, 147–152.
- [20] Зеленов Е. И., “ p -Адическая квантовая механика при $p = 2$ ” // *ТМФ*, 1989. **80**(2), 253–264.
- [21] Kochubei A. N., “Additive and multiplicative fractional differentiations over the field of p -adic numbers” // *p-Adic Functional Analysis, Lect. Notes Pure and Appl. Math.* – New York: M. Dekker, 1997. **192**, 275–280.
- [22] Kochubei A. N., “A Schrödinger-type equation over the field of p -adic numbers” // *J. Math. Phys.*, 1993. **34**(8), 3420–3428.
- [23] Кочубей А. Н., “Параболические уравнения над полем p -адических чисел” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1991. **55**(6), 1312–1330.
- [24] Кочубей А. Н., “Гауссовы интегралы и спектральная теория над локальным полем” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1994. **58**(6), 69–78.
- [25] Кочубей А. Н., “Об асимптотике p -адических функций Грина” // *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*. 1994. **203**, 116–125.
- [26] Missarov M. D., “Renormalization group and renormalization theory in p -adic and adelic scalar models” // *Adv. Soviet Math.*, 1991. **3**, 143–164.
- [27] Frampton P. H., “Retrospective on p -adic string theory” // *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*. 1994. **203**, 287–291.
- [28] Бикулов А. Х., Волович И. В., “ p -Адическое броуновское движение” // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1997. **61**(3), 75–90.
- [29] Dragović B. G., *Частное сообщение*.
- [30] Taibleson M. H., *Fourier Analysis on Local Fields*. – Princeton: Princeton Univ. Press and Univ. of Tokio Press, 1975.

- [31] Lerner E. Yu., Missarov M. D., “ p -Adic Feynman and string amplitudes” // *Commun. Math. Phys.*, 1989. **121**, 35–48.
- [32] Brekke L., Freund P. G. O., “ p -Adic numbers in physics” // *Physics Reports (Rev. Sect. of Phys. Lett.)*, 1993. **233**(1), 1–66.
- [33] Козырев С. В., Теория всплесков как p -адический спектральный анализ // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2002. **66**(2), 149–158.
- [34] Хренников А. Ю., *Неархимедов анализ и его приложения*. – М.: Физматлит, 2003.

Оглавление

Часть I. Краткие сведения из p-адического анализа .	3
§ 1. Поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$	3
§ 2. Некоторые функции на $\mathbb{Q}_p$	6
§ 3. Аналитические функции	9
§ 4. Мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$	12
§ 5. n -мерное пространство $\mathbb{Q}_p^n$	14
§ 6. Обобщенные функции на $\mathbb{Q}_p^n$	15
§ 7. Преобразование Фурье	23
§ 8. Однородные обобщенные функции	25
§ 9. Квадратичные расширения поля $\mathbb{Q}_p$	34
§ 10. Оператор D^α	41
Часть II. Таблицы интегралов	47
§ 11. Простейшие интегралы, одна переменная	47
§ 12. Интегралы Фурье	53
§ 13. Гауссовы интегралы	61
§ 14. Две переменные	64
§ 15. n -переменных	67
§ 16. Интегралы и свертки обобщенных функций	71
§ 17. Таблица преобразований Фурье	79
Литература	84