Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Темиргалиев, К. Е. Шерниязов, М. Е. Берикханова,
Точные порядки компьютерных (вычислительных) попере-
речников в задачах восстановления функций и дискрети-
зации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффици-
ентам Фурье, *Совр. пробл. матем.*, 2013, выпуск 17, 179–
207

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm50>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:18:46

Точные порядки компьютерных (вычислительных) перечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье

Н. Темиргалиев ^a, К. Е. Шерниязов ^b, М. Е. Берикханова ^b

^a *Институт теоретической математики и научных вычислений,*

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева

^b *Казахский национальный университет им. аль-Фараби*

Посвящается памяти А. А. Карацубы,
созданием первого быстрого метода вычислений
разрушившего 4-тысячелетнее заблуждение человечества
об умножении чисел

1. Введение

Исследования явлений действительного мира математическими методами проводятся по схеме: от наблюдений и экспериментов к построению математической модели с последующим изучением математическими средствами, завершающихся выводами в рамках модели и сравнением их с реальными фактами (см., например, [1]–[6] и имеющуюся в них библиографию).

В данной проблематике необходимо исходить из того, что компьютер дает возможность запомнить и оперировать с большими конечными массивами чисел и производит над ними четыре арифметические операции.

Вычисление функционалов – основных носителей числовой информации – как правило, не может быть математически точным, и, одновременно, излишняя точность вычислений при реализации алгоритма приводит к неоправданному увеличению объема памяти и количества арифметических операций, поскольку не улучшает заложенного в алгоритме порядка точности.

Математическим эквивалентом этих положений является предложенный в [7]–[13] (см. также [14]–[24] и имеющуюся в них библиографию) в 1996–2003 гг. *компьютерный (вычислительный) перечень*, смысл которого состоит в нахождении наилучшего среди данного класса вычислительных средств в условиях искаженных исходных данных.

Если обратиться к существующей литературе, то имеются по крайней мере три варианта общей постановки задачи оптимального восстановления по неточной информации.

Общим в этих трех постановках является промежуточная задача восстановления оператора $Tf(\cdot)$ вычислительным агрегатом

$$\varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot) \equiv \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)} \varepsilon_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)} \varepsilon_N^{(N)}; \cdot), \quad (1.1)$$

$$|\gamma_N^{(j)}| \leq 1, \quad j = 1, \dots, N,$$

определяемым парой $(l^{(N)}, \varphi_N)$ и построенным по ε – неточной информации об f (пояснения обозначений даны ниже).

Итак, пусть даны нормированные пространства X и Y числовых функций, определенных на множествах Ω и Ω_1 соответственно. Пусть $F \subset X$ и отображение $Tf = u(y, f)$ действует из F в Y .

Для каждого целого $N \geq 1$ через $\{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$, состоящих из набора N функционалов

$$l^{(N)} = (l_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}), \quad l_N^{(j)}(\cdot): F \mapsto C, \quad j = 1, \dots, N$$

(в случае требования линейности $l_N^{(j)}$ речь будет идти о линейности на линейной оболочке F) и функции

$$\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y): C^N \times \Omega_1 \mapsto C$$

– алгоритма переработки числовой информации объема N . При этом предполагается, что при фиксированных $\tau_1, \dots, \tau_N$ функция $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)$ как функция от $y \in \Omega_1$ принадлежит Y . Также полагаем $\varphi_N(0, \dots, 0; \cdot) \equiv 0$, т.е. тождественно равной нулю информации соответствующей такой же агрегат восстановления.

Пусть также дана числовая неотрицательная конечная последовательность $\varepsilon^{(N)} \equiv \{\varepsilon_N^{(j)}\}_{j=1}^N$. Для данной пары $(l^{(N)}, \varphi_N)$ положим

$$\begin{aligned} \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); T; F; \varepsilon^{(N)})_Y &= \sup_{\substack{f \in F \\ (z_1, \dots, z_N): |l_N^{(j)}(f) - z_j| \leq \varepsilon_N^{(j)}, j=1, \dots, N}} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)\|_Y \\ &\equiv \sup_{\substack{f \in F \\ |\gamma_N^{(j)}| \leq 1, j=1, \dots, N}} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(l_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)}, \dots, l_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)}; \cdot)\|_Y. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пусть теперь $\{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ есть множество всевозможных пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$, и пусть $D_N \subset \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$, т.е. D_N есть некоторое множество вычислительных агрегатов $(l^{(N)}, \varphi_N)$.

В условиях приведенных определений и обозначений основной объект исследования в данной статье (в более общем понимании – в тематике) есть величина

$$\delta_N(\varepsilon^{(N)}) \equiv \delta_N(D_N; T, F; \varepsilon^{(N)})_Y = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); T; F; \varepsilon^{(N)})_Y \quad (1.3)$$

– погрешность восстановления оператора Tf в метрике Y по всем вычислительным агрегатам из D_N по информации об f из F , полученной с $\varepsilon^{(N)}$ -точностью. В случае

$$\varepsilon_N \equiv \varepsilon_N^{(1)} = \varepsilon_N^{(2)} = \dots = \varepsilon_N^{(N)}$$

величину (1.3) будем обозначать также $\delta_N(\varepsilon_N) \equiv \delta_N(D_N; T, F; \varepsilon_N)_Y$.

При $\varepsilon^{(N)} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{(N)}$ величины (1.1)–(1.3) определяют погрешность восстановления по точной информации.

Определимся с терминологией данной статьи: в случае $Tf = f$ речь будет идти о восстановлении функций, если же $Tf = u(y, f)$ есть решения дифференциальных уравнений с теми или иными начальными и граничными условиями, то – о дискретизации этих решений.

Теперь сформулируем задачу нахождения предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении (записи $A \ll B$ и $A \asymp B$ соответственно означают $|A| \leq cB$ и одновременное выполнение $A \ll B$ и $B \ll A$).

В случае, если известен точный порядок восстановления по точной информации $\{\psi(N)\}$, заключающийся в выполнении соотношения $\delta_N(D_N; T; F; 0)_Y \asymp \psi(N)$, $N \rightarrow +\infty$, задача нахождения последовательности $\tilde{\varepsilon}_N = (\tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, \dots, \tilde{\varepsilon}_N^{(N)})$, $N = 1, 2, \dots$, – предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении, состоит в следующем: выполнено

$\delta_N(D_N; T; F; \tilde{\varepsilon}_N)_Y \asymp \psi(N)$, $N \rightarrow +\infty$, и, одновременно, для всяких возрастающих $N \rightarrow +\infty$ при возрастании N при каждом t последовательностей $\{\eta_N^{(t)}\}$, $N = 1, 2, \dots$, $t = 1, 2, \dots, N$, имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(D_N; T; F; (\eta_N^{(1)} \tilde{\varepsilon}_N^{(1)}, \dots, \eta_N^{(N)} \tilde{\varepsilon}_N^{(N)}))_Y}{\delta_N(D_N; T; F; 0)_Y} = +\infty. \quad (1.4)$$

При этом требуемая нечувствительность к восстановлению по неточной информации $\tilde{\varepsilon}_N$ (в сравнении с восстановлением по точной информации) следует из неравенств

$$c_1 \psi(N) \leq \delta_N(D_N; T; F; 0)_Y \leq \delta_N(D_N; T; F; \tilde{\varepsilon}_N)_Y \leq c_2 \psi(N).$$

Еще раз подчеркнем, что чем с большей погрешностью мы имеем возможность вычислять величины, формирующие вычислительный агрегат, тем лучше. Поэтому представляет особый интерес нахождение предельной величины погрешности, еще сохраняющей порядок восстановления по точной информации.

В итоге приходим к задаче оптимального восстановления по неточной информации, оформленного под названием *компьютерный (вычислительный) поперечник* (коротко – К(В)П), заключающегося в последовательном выполнении трех действий:

К(В)П-1°: находится $\asymp \delta_N(0)$,

К(В)П-2°: находится $\{\tilde{\varepsilon}_N\}$ такое, что $\delta_N(0) \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N)$, (1.5)

К(В)П-3°: $\forall \eta_N \uparrow +\infty \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N)}{\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N)} = +\infty$.

В самом коротком изложении речь будет идти о нахождении $\asymp \delta_N(0)$ и $\tilde{\varepsilon}_N$.

2. Краткий сравнительный анализ известных результатов в задачах восстановления

Обращаясь к общей теме восстановления по неточной информации, одна из постановок которой в (1.5) приведена в виде К(В)П-1°–К(В)П-3°, отметим следующее.

Публикации по этой теме, если разбить их на группы, отнеся в первую – [7]–[13], во вторую – [25]–[30] и в третью группу – [31]–[35], различаются как по постановкам, так и, что интересно, по употребляемым названиям по сути одних и тех же математических объектов, и, конечно, по формулировкам результатов.

Большая серия работ на данную тему выполнена Траубом, Вожняковским, Пласскотой (см. [31]–[35] и имеющуюся в них библиографию), их соавторами и последователями, где в центр исследований была поставлена задача минимизации суммарной *стоимости* $c(\varepsilon^{(N)}) = \sum_{j=1}^N c(\varepsilon_N^{(j)})$ по стоимости $c(\varepsilon_N^{(j)})$ нахождения приближенных значений z_j (информационного “шума”) в постановках типа (1.1)–(1.3), где $c(\varepsilon)$ – заданная неотрицательная функция ε ($\varepsilon \geq 0$).

Заметим, что данная оптимизация и оптимизация (1.5) представляют собой *различные* задачи. Действительно, при одних и тех же исходных данных в (1.1)–(1.3) постановка задачи в [31]–[35] существенно зависит от выбора функции стоимости $c(\varepsilon)$, и в этом смысле получаемые решения достаточно произвольны, в то время как решения задачи К(В)П-1°–К(В)П-3° однозначны.

Другое направление исследований представлено в работах Тихомирова, Магарил-Ильяева, Осипенко и Марчука (см. [25]–[30] и имеющуюся в них библиографию), их соавторов и последователей, где даны точные решения задачи (1.1)–(1.3).

При этом задачи формулируются в следующих названиях составляющих объектов (в обозначениях (1.1)–(1.3)). Согласно [25]–[30] для каждого $f \in F$ множество

$$I_\varepsilon^N f \equiv \{(z_1, \dots, z_N) : |l_j(f) - z_j| \leq \varepsilon_j, j = 1, \dots, N\}$$

называют *информацией*, а отображение

$$I \equiv l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N) : F \mapsto C^N$$

– *информационным*. Отображение

$$\varphi_N(z_1, \dots, z_N; y) : C^N \times \Omega_Y \mapsto Y$$

называют *методом восстановления*, а ее *погрешностью* – величину

$$\sup\{\|Tf(\cdot) - \varphi_N(z_1, \dots, z_N; \cdot)\|_Y : f \in F, (z_1, \dots, z_N) \in I_\varepsilon^N f\}. \quad (2.1)$$

Далее, инфимум от (2.1) по всем φ_N называют *погрешностью оптимального восстановления* и обозначают через $E(T, F, I_\varepsilon^N)$, а метод $\bar{\varphi}_N$, на котором достигается эта нижняя грань (если таковая существует), называют *оптимальным методом* восстановления (оператора T на классе F по информации I_ε^N).

Приведем два случая точного решения задачи восстановления.

Задача оптимального восстановления функций по тригонометрическим коэффициентам Фурье имеет следующее точное решение (см. [25]).

Пусть $I = \{\hat{f}(m)\}_{|m| \leq N}$; тогда

$$E(Tf = f; W_2^r(0, 1); I_\varepsilon^{2N+1}) = \sqrt{\varepsilon^2 + (N+1)^{-2r}} \equiv A, \quad (2.2)$$

что в обозначениях (1.1)–(1.3) означает

$$\delta_N(D_N^{(T)}; Tf = f; W_2^r(0, 1); \tilde{\varepsilon}_N = \varepsilon)_{L^2} = A, \quad (2.3)$$

где

$$D_N^{(T)} = \{l_m(f) = \hat{f}(m) : m \in Z, |m| \leq N\} \times \{\varphi_N\}.$$

То же самое имеет место в отношении волнового уравнения с ненулевыми граничными условиями и нулевой начальной скоростью (см. [26])

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (2.4)$$

Как известно, точное решение этой задачи имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) \cos mt \sin mx, \quad a_m(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin mx \, dx.$$

Ставится задача поиска оптимального метода восстановления решения задачи (2.4) в момент времени τ на классе $W_2^r(0, \pi)$ при $n = 1, 2, \dots$

$$\delta_n = \delta_n(\tau) \equiv \inf_{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2(0, \pi)} \sup_{\substack{f \in W_2^r(0, \pi) \\ y = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{m=1}^n |a_m(f) - z_m|^2 \leq \varepsilon^2}} \|u(\cdot, \tau) - \varphi(z_1, \dots, z_n; \tau)\|_{L^2(0, \pi)}$$

по неточной информации о тригонометрических коэффициентах Фурье $a_m(f)$.

Точное значение $\delta_n(\tau)$, в зависимости от соотношений между основными n , τ , ε и вспомогательными p , q , s_k параметрами задачи (которые здесь приводить не будем, отсылая к самой статье [26]), имеет различный вид (ради чего мы позволили себе обширное цитирование):

$$\delta_n = \frac{|\cos q\tau|}{q^n}, \quad \delta_n = \frac{|\cos p\tau|}{p^n}, \quad \delta_n = \sqrt{\frac{s_{k+1}^{2n} \varepsilon^2 - 1}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \cos^2 s_k \tau + \frac{1 - \varepsilon^2 s_k^{2n}}{s_{k+1}^{2n} - s_k^{2n}} \cos^2 s_{k+1} \tau}.$$

3. Конкретизация общей задачи, формулировки теорем и комментарии к ним

Данная статья посвящена следующим двум конкретизациям сформулированной общей задачи (1.1)–(1.3) восстановления по неточной информации и получения предельных погрешностей.

Первая конкретизация состоит в восстановлении функций $Tf = f$ из классов $F = E_s^r$ Коробова и $F = SW_2^r(0, 1)^s$ Соболева с доминирующей смешанной производной (определения классов даны ниже раздел 4) в метрике $Y = L^2(0, 1)^s$.

Вторая конкретизация состоит в дискретизации решений задачи Коши для уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - u, \quad u = u(x, t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad s = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = f_1(x) \in F^{(1)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in F^{(2)}, \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad (3.2)$$

решение которой описывает, в частности, свободную релятивистскую (псевдо)скалярную частицу массы 1, в случае классов Соболева $F^{(1)} = W_2^{r_1}(0, 1)^s$ и $F^{(2)} = W_2^{r_2}(0, 1)^s$, в метрике класса $Y = L^{2, \infty}$,

$$\|g\|_{L^{p, \infty}} = \sup_{t \geq 0} \text{vrai} \left(\int_{[0, 1]^s} |g(x, t)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (3.3)$$

В изучаемом здесь случае задача (3.1)–(3.2) имеет явное решение в виде суммы абсолютно сходящегося кратного функционального ряда, который полностью определяется наборами $\{\hat{f}_1(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$ и $\{\hat{f}_2(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$ тригонометрических коэффициентов Фурье. Поэтому возникает проблема приближения решения (объекта бесконечного) по конечной числовой информации заданного объема N , полученной от функций f_1 и f_2 , математическая формулировка которой содержится в общей задаче восстановления.

Во всех случаях в этой статье восстановление производится по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье с произвольным конечным спектром, с дальнейшей переработкой по произвольным алгоритмам φ_N :

$$D_N = \{l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)}) : m^{(1)} \in \mathbb{Z}^s, \dots, m^{(N)} \in \mathbb{Z}^s\} \times \{\varphi_N\}, \quad (3.4)$$

где

$$\hat{f}(m) = \int_{[0, 1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m, x)} dx,$$

причем $\varphi_N \equiv \varphi(z_1, \dots, z_N; x)$ в случае восстановления функций, $\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1, \dots, z_N; x, t)$ в случае дискретизации решений задачи (3.1)–(3.2).

Справедливы следующие пять теорем. Первые две из них посвящены восстановлению функций из классов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны числа $s, s = 1, 2, \dots$, и $r > 1/2$. Тогда для D_N из (3.4) и для числовой последовательности $\tilde{\varepsilon}_N = (\ln N)^{r(s-1)}/N^r$, $N = 2, 3, \dots$, верны соотношения

$$\begin{aligned} \text{К(В)II-1}^\circ: \quad \delta_N(0) &\equiv \delta_N(D_N; Tf = f; E_s^r; 0)_{L^2} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}, \\ \text{К(В)II-2}^\circ: \quad \delta_N(0) &\asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \equiv \delta_N(D_N; Tf = f; E_s^r; \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \asymp \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N} = \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

причем для всякой возрастающей $\kappa + \infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ имеет место равенство

$$K(B)II-3^\circ: \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(D_N; Tf = f; E_s^r; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N = \eta_N((\ln N)^{r(s-1)}/N^r))_{L^2}}{\delta_N(D_N; Tf = f; E_s^r; \tilde{\varepsilon}_N = (\ln N)^{r(s-1)}/N^r)_{L^2}} = +\infty. \quad (3.6)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны числа $s, s = 1, 2, \dots$, и $r > 1/2$. Тогда для числовой последовательности $\tilde{\varepsilon}_N = (\ln N)^{r(s-1)}/N^{r+1/2}$, $N = 2, 3, \dots$, верны соотношения (D_N определены согласно (3.4))

$$K(B)II-1^\circ: \delta_N(0) \equiv \delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0, 1)^s; 0)_{L^2} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}, \quad (3.7)$$

$$K(B)II-2^\circ: \delta_N(0) \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \equiv \delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0, 1)^s; \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \asymp \tilde{\varepsilon}_N \cdot \sqrt{N}$$

причем для всякой возрастающей $\kappa + \infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ имеет место равенство

$$K(B)II-3^\circ: \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N = \eta_N((\ln N)^{r(s-1)}/N^{r+1/2}))_{L^2}}{\delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0, 1)^s; \tilde{\varepsilon}_N = (\ln N)^{r(s-1)}/N^{r+1/2})_{L^2}} = +\infty. \quad (3.8)$$

Остальные три теоремы относятся к дискретизации уравнения Клейна–Гордона.

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны числа $s, s = 1, 2, \dots$, и $r_1 > 2 + s/2$. Тогда для числовой последовательности $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-r_1/s-1/2}$, $N = 1, 2, 3, \dots$, верны соотношения (D_N определено в (3.4))

$K(B)II-1^\circ:$

$$\delta_N(0) \equiv \delta_N\left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; 0\right)_{L^{2,\infty}} \asymp N^{-r_1/s},$$

$K(B)II-2^\circ:$ (3.9)

$$\delta_N(0) \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \equiv \delta_N\left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \tilde{\varepsilon}_N = N^{-r_1/s-1/2}\right)_{L^{2,\infty}} \asymp \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N},$$

причем для всякой возрастающей $\kappa + \infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ имеет место равенство

$K(B)II-3^\circ:$

$$\delta_N\left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N = \eta_N N^{-r_1/s-1/2}\right)_{L^{2,\infty}} \asymp \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N},$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N\left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \tilde{\varepsilon}_N\right)_{L^{2,\infty}}}{\delta_N\left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \tilde{\varepsilon}_N\right)_{L^{2,\infty}}} = +\infty. \quad (3.10)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть даны числа $s, s = 1, 2, \dots$, и $r_2 > 1 + s/2$. Тогда для числовой последовательности

$$\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(s) = \begin{cases} N^{-(r_2+1)/s} & \text{при } s = 1, \\ N^{-(r_2+1)/s} (\ln N)^{-1/2} & \text{при } s = 2, \\ N^{-(r_2+1/s-(1/2-1/s))} = N^{-r_2/s-1/2} & \text{при } s > 2, \end{cases} \quad N = 2, 3, \dots,$$

верны следующие соотношения (D_N из (3.4))

K(B)П-1°:

$$\delta_N(0) \equiv \delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; 0 \right)_{L^2, \infty} \asymp N^{-(r_2+1)/s}, \quad (3.11)$$

K(B)П-2°:

$$\delta_N(0) \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N(s)) \equiv \delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \tilde{\varepsilon}_N(s) \right)_{L^2, \infty},$$

причем для всякой возрастающей $k \rightarrow \infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ имеет место равенство

K(B)П-3°:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N(s) \right)_{L^2, \infty}}{\delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \tilde{\varepsilon}_N(s) \right)_{L^2, \infty}} = +\infty. \quad (3.12)$$

Из теорем 3 и 4 следует

ТЕОРЕМА 5. Пусть заданы целое положительное число s и числа r_1 и r_2 такие, что $r_1 > 2 + s/2$, $r_2 > 1 + s/2$. Тогда имеют место соотношения

K(B)П-1°:

$$\delta_N(\bar{0}_N) \equiv \delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \bar{0}_N \right)_{L^2, \infty} \asymp N^{-\min\{r_1; r_2+1\}/s}, \quad (3.13)$$

где $\bar{0}_N$ – нулевой N -мерный вектор,

K(B)П-2°:

$$\begin{aligned} \delta_N(\bar{0}_N) &\asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}}) \\ &\equiv \delta_N \left(D_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}} = (\tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}}, \tilde{\varepsilon}_{N_2^{(0)}}) \right)_{L^2, \infty} \\ &\equiv \min_{\substack{N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+ \\ N_1 + N_2 = N}} \inf_{\substack{m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)} \\ n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)} \\ \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s; f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s \\ |\gamma_{N_1^{(j_1)}}^{(j_1)}| \leq 1, j_1 = 1, \dots, N_1 \\ |\gamma_{N_2^{(j_2)}}^{(j_2)}| \leq 1, j_2 = 1, \dots, N_2}} \\ &\quad \left\| u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(\hat{f}_1(m^{(1)}) + \gamma_{N_1^{(1)}}^{(1)} \tilde{\varepsilon}_{N_1^{(1)}}, \dots, \hat{f}_1(m^{(N_1)}) + \gamma_{N_1^{(N_1)}}^{(N_1)} \tilde{\varepsilon}_{N_1^{(N_1)}}, \right. \\ &\quad \left. \hat{f}_2(n^{(1)}) + \gamma_{N_2^{(1)}}^{(1)} \tilde{\varepsilon}_{N_2^{(1)}}, \dots, \hat{f}_2(n^{(N_2)}) + \gamma_{N_2^{(N_2)}}^{(N_2)} \tilde{\varepsilon}_{N_2^{(N_2)}}; \cdot) \right\|_{L^2, \infty([0, 1]^s \times [0, +\infty))}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где для N_1 и N_2 ($N_1 + N_2 = N$)

$$\tilde{\varepsilon}_{N_1, N_2} \equiv (\tilde{\varepsilon}_{N_1}, \tilde{\varepsilon}_{N_2}) = (\tilde{\varepsilon}_{N_1}^{(1)}, \tilde{\varepsilon}_{N_1}^{(2)}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{N_1}^{(N_1)}, \tilde{\varepsilon}_{N_2}^{(1)}, \tilde{\varepsilon}_{N_2}^{(2)}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{N_2}^{(N_2)})$$

есть N -мерный вектор с компонентами

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)} &= N_1^{-r_1/s-1/2}, \quad j_1 = 1, 2, \dots, N_1, \\ \tilde{\varepsilon}_{N_2}^{(j_2)} &= \begin{cases} N_2^{-(r_2+1)/s} & \text{при } s = 1, \\ N_2^{-(r_2+1)/s} (\ln N_2)^{-1/2} & \text{при } s = 2, j_2 = 1, 2, \dots, N_2, \\ N_2^{-(r_2+1)/s-(1/2-1/s)} = N_2^{-r_2/s-1/2} & \text{при } s > 2, \end{cases} \end{aligned}$$

пара $N_1^{(0)}$ и $N_2^{(0)}$ ($N_1^{(0)} + N_2^{(0)} = N$) – одна из пар, реализующих минимум погрешности восстановления, причем для всякой возрастающей $k + \infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^\infty$ имеет место равенство

$K(B)П-3^\circ$:

$$\begin{aligned} \delta_N \left(D_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}} = \eta_N (\tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}}, \tilde{\varepsilon}_{N_2^{(0)}}) \right)_{L^{2, \infty}} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \bar{0}_N \right)_{L^{2, \infty}}}{\delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \bar{0}_N \right)_{L^{2, \infty}}} = +\infty. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Выводы и комментарии. Изучается задача оптимального восстановления в гильбертовой метрике функций из классов Коробова E_s^r , $2r > 1$, по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье и переработанной по произвольному алгоритму φ_N .

Сначала исследуется задача оптимального восстановления по точной информации $\asymp \delta_N(0)$. Затем находится такая величина $\tilde{\varepsilon}_N$ погрешности вычисления тригонометрических коэффициентов Фурье, что порядок $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N)$ оптимального восстановления по точным коэффициентам Фурье $\tilde{\varepsilon}_N$ будет тот же, что и по их точным значениям. Но не только, на последовательность $\tilde{\varepsilon}_N$ налагается еще одно требование: замена $\tilde{\varepsilon}_N$ на $\eta_N \tilde{\varepsilon}_N$ со сколь угодно медленно растущими $k + \infty$ членами последовательности η_N имеет последствием потерю точности восстановления $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \asymp \delta_N(0)$.

Сами же полученные в теореме 1 величины следующие: $\delta_N(0) \asymp (\ln N)^{r(s-1)}/N^{r-1/2}$ и $\tilde{\varepsilon}_N \asymp (\ln N)^{r(s-1)}/N^r$, последняя величина $\asymp \delta_N(0)/\sqrt{N}$ есть “предельная погрешность”, и именно с ней связано дальнейшее развитие тематики восстановления.

То же самое в классах $SW_2^r(0, 1)^s$: $\delta_N(0) \asymp (\ln N)^{r(s-1)}/N^r$ с предельной погрешностью $\tilde{\varepsilon}_N \asymp (\ln N)^{r(s-1)}/N^{r+1/2}$ (теорема 2).

Тем самым, задачи восстановления функций по тригонометрическим коэффициентам Фурье из классов Коробова и из классов Соболева функций с доминирующей смешанной производной в исследуемом модельном случае решены в полном объеме.

Оставшиеся три теоремы посвящены полному решению в постановке (1.1)–(1.5) с конкретизацией (3.1)–(3.4) задачи дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона, в силу ее линейности разбитой на два случая (это теоремы 3 и 4) с последующим их объединением (в теореме 5).

Формулировки теорем из статей [25]–[30] и теорем 1–5 отражают различие в постановках задач восстановления.

Если в [25] точное восстановление функций из одномерного класса Соболева производится по первым $2N + 1$ коэффициентам Фурье, то в многомерных теоремах 1 и 2 – по N коэффициентам с произвольными гармониками с последующим установлением предельной погрешности вычисления коэффициентов Фурье, еще сохраняющих порядок восстановления по точной информации.

Отметим также, что в порядковом отношении результаты (2.2)–(2.3) из [25] и (3.7) при $s = 1$ из теоремы 2 совпадают.

И здесь то же, если в [26] дискретизация решений дифференциального уравнения (в данном случае одномерного волнового) производится в фиксированный момент времени τ , то в многомерных теоремах 3–5 оптимизация производится по всему промежутку времени, с одновременным установлением предельной погрешности вычисления коэффициентов Фурье, опять же сохраняющих порядок восстановления по точной информации.

В целом в данной работе в постановках (1.5) даны полные решения исследуемых задач в случае, когда числовая информация снимается с одного из важнейших источников – тригонометрических коэффициентов Фурье (отметим также, что в работах [7]–[19] решены задачи восстановления в частях $\succ \delta_N(0)$ и $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \succ \delta_N(0)$ с нетривиальными $\tilde{\varepsilon}_N$, но без установления их неувлучшаемости).

4. Необходимые определения и вспомогательные утверждения

Все рассматриваемые функции будем считать определенными на всем пространстве $\mathbb{R}^s$, 1-периодическими по каждой из своих s переменных и суммируемыми на кубе периодов $[0, 1]^s$. Для положительного R под $\Gamma_R \equiv \Gamma_R^{(s)}$ будем понимать множество (так называемый *гиперболический крест*)

$$\Gamma_R = \left\{ m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : \bar{m} = \prod_{j=1}^s \bar{m}_j \leq R \right\}, \quad (4.1)$$

где (как и всюду далее)

$$\bar{m}_j = \max\{1, |m_j|\}, \quad \bar{m} = \bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s.$$

Пусть s – целое положительное число, $2r > 1$. Через E_s^r обозначают множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ из класса $L(0, 1)^s$, тригонометрические коэффициенты Фурье–Лебега которых для всех $m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$ удовлетворяют условию

$$|\hat{f}(m)| \leq (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{-r} = (\bar{m})^{-r}.$$

Пусть s – целое положительное число, $r > 0$. Класс $SW_2^r(0, 1)^s$ Соболева с доминирующей смешанной производной есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, представимых в виде

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)}, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}(m)|^2 (\bar{m})^{2r} \leq 1.$$

Пусть s – целое положительное число, $r > 0$. Класс Соболева $W_2^r(0, 1)^s$ есть множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ таких, что

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}(m)|^2 (\bar{m}_1^2 + \cdots + \bar{m}_s^2)^r \leq 1.$$

Норму пространства $L^q \equiv L^q(0, 1)^s$, $1 \leq q < \infty$, как обычно, будем обозначать через $\|\cdot\|_{L^q}$ или $\|\cdot\|_q$, а под $L^\infty[0, 1]^s$ будем всюду понимать $C[0, 1]^s$

Справедливы следующие пять лемм.

ЛЕММА 1 (см. [5]). При любых действительных $\alpha > 1$ и $t \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum \frac{1}{(m_1 \cdots m_s)^\alpha} \leq C \frac{(1 + \ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}},$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1, \dots, m_s$, для которых произведение $m_1 \cdots m_s$ больше или равно t .

ЛЕММА 2 (см. [5], [6]). Пусть даны числа $s, s = 1, 2, \dots$, и $R > 1$. Тогда

$$\sum_{\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s \leq R} 1 \asymp R(\ln R)^{s-1}.$$

В следующих двух леммах более общие утверждения приведены в формулировках, удобных для применений в доказательствах теорем 1–4, в частности, D_N определено, как в (3.4).

ЛЕММА 3 (см. [20]). Пусть даны числа $s, s = 1, 2, \dots$, и $2r > 1$. Тогда выполнено соотношение

$$\delta_N(D_N; Tf = f; E_s^r; 0)_{L^2} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}, \quad N = 2, 3, \dots$$

ЛЕММА 4 (см. [14]). Пусть даны числа $s, s = 1, 2, \dots$, и $2r > 1$. Тогда выполнено соотношение

$$\delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0, 1)^s; 0)_{L^2} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}, \quad N = 2, 3, \dots$$

ЛЕММА 5. Пусть заданы целое положительное число s и положительные числа r_1 и r_2 такие, что

$$r_1 > 2 + \frac{s}{2}, \quad r_2 > 1 + \frac{s}{2}.$$

Тогда для каждой пары (f_1, f_2) : $f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s$, $f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^2$, задача (3.1), (3.2) имеет классическое решение $u(x, t; f_1, f_2)$, представимое в виде абсолютно сходящегося ряда

$$u(x, t; f_1, f_2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \left[\widehat{f}_1(m) \cos(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) + \widehat{f}_2(m) \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} \right] \cdot e^{2\pi i(m, x)}. \quad (4.2)$$

Действительно, условия $r_1 > s/2 + 2$ и $r_2 > s/2 + 1$ обеспечивают сходимость кратного числового ряда

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} [|\widehat{f}_1(m)|(m, m) + |\widehat{f}_2(m)|\sqrt{(m, m)}],$$

откуда следует возможность почленного дифференцирования ряда в (4.2) и дважды непрерывная дифференцируемость его суммы по каждой из переменных t и x_j . После этого почленным дифференцированием также легко проверить, что (4.2) является решением уравнения (3.1), удовлетворяющим начальным условиям (3.2).

5. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала докажем (3.5). Напомним, что всюду ниже

$$\widetilde{\varepsilon}_N = \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}. \quad (5.1)$$

Начнем с оценки сверху. Пусть функция f принадлежит классу E_s^r . Тогда поскольку $2r > 1$, из определения класса E_s^r следует $f \in L^2(0, 1)^s$. Тем самым, задача восстановления функций $f \in E_s^r$ в $L^2(0, 1)^s$ -норме поставлена корректно.

Очевидно, соотношение (3.5) достаточно доказать для всех N вида $N = |\Gamma_R|$ при произвольных $R > 1$, где гиперболический крест Γ_R определен в (4.1) (здесь и всюду ниже через $|E|$ обозначено количество точек конечного множества E).

Итак, пусть дано $R > 1$, положим (см. также лемму 2)

$$N = N(R) = |\Gamma_R|, \quad N \asymp R(\ln R)^{s-1}. \quad (5.2)$$

Тогда $\ln R \asymp \ln N$ (чем ниже будем неоднократно пользоваться), и потому $R \asymp N/(\ln N)^{s-1}$.

Согласно определению D_N положим (с учетом $N = |\Gamma_R|$ и очевидным взаимным переобозначением переменных z_j , $j = 1, \dots, N$, и z_m , $m \in \Gamma_R$)

$$\begin{aligned} B_N &= \{m^{(1)}; \dots; m^{(N)}\}, \quad B_N = \Gamma_R, \\ \bar{l}_m(f) &= \hat{f}(m), \quad z_m = \bar{l}_m(f) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}, \quad |\gamma_N^{(m)}| \leq 1, \quad m \in \Gamma_R, \\ \bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x) &= \bar{\varphi}_N(\{\bar{l}_m(f) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}\}_{m \in \Gamma_R}; x) = \sum_{m \in \Gamma_R} z_m e^{2\pi i(m, x)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Тогда

$$\|f(x) - \bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x)\|_{L^2} = \left\| f(x) - \sum_{m \in \Gamma_R} (\hat{f}(m) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}) \cdot e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2} \leq I_1 + \tilde{\varepsilon}_N I_2, \quad (5.4)$$

где

$$I_1 = \left\| f(x) - \sum_{m \in \Gamma_R} \hat{f}(m) \cdot e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2}, \quad I_2 = \left\| \sum_{m \in \Gamma_R} \gamma_N^{(m)} \cdot e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2}. \quad (5.5)$$

Далее, в силу определения класса E_s^r , леммы 1 и соотношений (5.2) имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\| f(x) - \sum_{m \in \Gamma_R} \hat{f}(m) \cdot e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2} = \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus \Gamma_R} \hat{f}(m) \cdot e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2} = \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus \Gamma_R} |\hat{f}(m)|^2 \right)^{1/2} \\ &\ll \left(\sum_{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s > R} \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{2r}} \right)^{1/2} \ll \left(\frac{(\ln R)^{s-1}}{R^{2r-1}} \right)^{1/2} \ll \frac{(\ln R)^{(s-1)/2}}{R^{r-1/2}} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}. \end{aligned}$$

В силу равенства Парсеваля, неравенств $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$ и леммы 2 для I_2 имеем

$$I_2 = \left\| \sum_{m \in \Gamma_R} \gamma_N^{(m)} \cdot e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2} = \left(\sum_{m \in \Gamma_R} |\gamma_N^{(m)}|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{m \in \Gamma_R} 1 \right)^{1/2} = N^{1/2}. \quad (5.6)$$

В итоге (см. также (5.1))

$$\begin{aligned} &\|f(x) - \bar{\varphi}_N(\{\bar{l}_m(f) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}\}_{m \in \Gamma_R}; x)\|_{L^2} \\ &\leq I_1 + \tilde{\varepsilon}_N I_2 \ll \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}} + \tilde{\varepsilon}_N N^{1/2} \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу произвольности условий в (5.3) в отношении $f \in E_s^r$ и $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$, $m \in \Gamma_R$, получаем

$$\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \leq \delta_N(\{\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N\}; Tf = f; E_s^r; \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \ll \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}. \quad (5.7)$$

Далее, из неравенства $\delta_N(0) \leq \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N)$ и леммы 3 следует

$$\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}} \ll \delta_N(0) \ll \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \ll \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}},$$

или, что то же самое,

$$\delta_N(0) \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}, \quad (5.8)$$

т.е. соотношение (3.5) доказано.

Осталось доказать соотношение (3.6). Пусть даны целое положительное число N и произвольное множество B_N ,

$$B_N = \{m^{(1)}; \dots; m^{(N)}\} \subset \mathbb{Z}^s. \quad (5.9)$$

Согласно выбору D_N в (3.4) определим функционалы (набор $l^{(N)}$)

$$l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \quad \dots, \quad l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)}). \quad (5.10)$$

Пусть также дана функция $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; x)$ – произвольный алгоритм переработки информации.

Пусть дана возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность $\{\eta_N\}$. Для фиксированной возрастающей к $+\infty$ неотрицательной последовательности $\{t_N\}$, например $t_N = \ln N$ (что и будем предполагать в дальнейшем), такой, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} t_N \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N} = 0, \quad (5.11)$$

положим

$$\eta_N^* = C \cdot \min\{\eta_N; t_N\}, \quad (5.12)$$

где постоянная $C = C(r, s) \in (0, 1]$ подобрана такой, что для каждого $N \geq 2$ выполняется неравенство

$$0 \leq \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \leq 1. \quad (5.13)$$

Докажем, что для всех $N \geq 2$ имеет место неравенство

$$\delta_N(D_N; Tf = f; E_s^r; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \gg (\eta_N^*)^{1-1/2r} \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}. \quad (5.14)$$

Для этого положим

$$g_N(x) = \sum_{m \in \Gamma_R} \tau_N^{(m)} e^{2\pi i(m, x)}, \quad (5.15)$$

где для каждого целого $N \geq 2$ соответствующее $R = R(N) > 1$ выбрано так, чтобы $N \leq |\Gamma_R|$, $R(\ln R)^{s-1} \asymp N$ и числа $\tau_N^{(m)} (m \in \Gamma_R)$ определены равенствами

$$\tau_N^{(m)} = \min \left\{ \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N; \frac{1}{(\bar{m})^r} \right\} = \min \left\{ \left(\bar{\eta}_N \frac{(\ln N)^{s-1}}{N} \right)^r; \frac{1}{(\bar{m})^r} \right\}, \quad \text{где } (\bar{\eta}_N)^r = \eta_N^*. \quad (5.16)$$

Сначала покажем, что для (5.15) выполняются следующие соотношения:

$$|\widehat{g}_N(m)| \leq \frac{1}{(\bar{m})^r}, \quad m \in \mathbb{Z}^s, \quad (5.17)$$

и

$$\|g_N\|_{L^2(0,1)^s} \gg (\bar{\eta}_N)^{r-1/2} \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}. \quad (5.18)$$

Соотношение (5.17) следует из (5.16), откуда $g_N \in E_s^r$.

Далее, согласно (5.16)

$$\tau_N^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{(\overline{m})^r}, & \text{если } \frac{1}{(\overline{m})^r} < \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N = \left(\bar{\eta}_N \frac{(\ln N)^{(s-1)}}{N} \right)^r, \\ \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N, & \text{если } \frac{1}{(\overline{m})^r} \geq \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N. \end{cases}$$

Обращаясь здесь к случаю $1/(\overline{m})^r \geq \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N$, последовательно имеем при $N \geq 2$

$$\begin{aligned} (\overline{m})^r &\leq (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1}, \quad 1 \leq \overline{m} \leq (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r}, \\ (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r} &= \left(\eta_N^* \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r} \right)^{-1/r} = \left(\frac{N^r}{\bar{\eta}_N^r (\ln N)^{r(s-1)}} \right)^{1/r} = \frac{N}{\bar{\eta}_N (\ln N)^{(s-1)}}. \end{aligned}$$

Откуда с учетом $t_N = \ln N$ и $\bar{\eta}_N = (\eta_N^*)^{1/r} \leq (t_N)^{1/r} = (\ln N)^{1/r}$ имеем

$$\ln[(\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r}] = \ln N - \ln((\ln N)^{(s-1)} \bar{\eta}_N) \asymp \ln N.$$

В итоге (см. также лемму 2)

$$\begin{aligned} \|g_N\|_{L^2(0,1)^s}^2 &= \sum_{m \in \Gamma_R} (\tau_N^{(m)})^2 \geq \sum_{1 \leq \overline{m} \leq (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r}} (\tau_N^{(m)})^2 \gg (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^2 (\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r} [\ln(\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{-1/r}]^{s-1} \\ &\asymp ((\eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N)^{1/r})^{2r-1} (\ln N)^{s-1} \asymp \left(\bar{\eta}_N \frac{(\ln N)^{(s-1)}}{N} \right)^{2r-1} (\ln N)^{s-1} \\ &\asymp (\bar{\eta})^{2r-1} \frac{(\ln N)^{2r(s-1)}}{(N)^{2r-1}}, \end{aligned}$$

т.е. (5.18) доказано.

Согласно (5.15) и (5.16) имеем при $k = 1, \dots, N$

$$l_k(g_N) = \widehat{g}_N(m^{(k)}) = \tau_N^{(m^{(k)})} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{1}{(\overline{m})^r}; \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \right\}, & \text{если } m^{(k)} \in \Gamma_R, \\ 0, & \text{если } m^{(k)} \notin \Gamma_R. \end{cases}$$

Тогда для $m^{(k)} \in \Gamma_R$ имеют место неравенства

$$|l_k(g_N)| \leq \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \leq \eta_N \tilde{\varepsilon}_N.$$

Отсюда, полагая для $k, k = 1, \dots, N$,

$$\bar{\gamma}_N^{(k)} = \begin{cases} -\frac{l_k(g_N)}{\eta_N \tilde{\varepsilon}_N}, & \text{если } m^{(k)} \in \Gamma_R, \\ 0, & \text{если } m^{(k)} \notin \Gamma_R, \end{cases}$$

имеем

$$|\bar{\gamma}_N^{(k)}| \leq 1, \quad l_k(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(k)} = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Стало быть,

$$\varphi_N(l_1(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(1)}, \dots, l_N(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(N)}; x) \equiv 0.$$

Поэтому в силу (5.16) и (5.18) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &\|g_N(\cdot) - \varphi_N(l_1(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(1)}, \dots, l_N(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(N)}; \cdot)\|_{L^2(0,1)^s} \\ &= \|g_N\|_{L^2(0,1)^s} \gg (\bar{\eta}_N)^{r-1/2} \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для всякой пары $(l^{(N)}, \varphi_N)$ из D_N имеем

$$\begin{aligned} & \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); Tf = f; E_s^r; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \\ &= \sup_{\substack{f \in E_r^s \\ |\gamma_N^{(k)}| \leq 1, k=1, \dots, N}} \|f(\cdot) - \varphi_N(l_1(f) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(1)}, \dots, l_N(f) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(N)}; \cdot)\|_{L^2(0,1)^s} \\ &\geq \|g_N(\cdot) - \varphi_N(l_1(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(1)}, \dots, l_N(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(N)}; \cdot)\|_{L^2(0,1)^s} \\ &\gg (\bar{\eta}_N)^{r-1/2} \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}. \end{aligned}$$

Наконец, в силу произвольности $m^{(1)}, \dots, m^{(N)}$ и φ_N отсюда следует

$$\begin{aligned} & \delta_N\left(D_N; Tf = f; E_s^r; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N = \eta_N \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}\right)_{L^2} \\ &= \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); Tf = f; E_s^r; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \gg (\bar{\eta}_N)^{r-1/2} \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-1/2}}, \end{aligned}$$

т.е. (5.14) доказано.

В итоге согласно (5.8), (5.14) для всякого N выполнено неравенство

$$\frac{\delta_N(D_N; Tf = f; E_s^r; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2}}{\delta_N(D_N; Tf = f; E_s^r; 0)_{L^2}} \gg \frac{(\bar{\eta}_N)^{r-1/2} (\ln N)^{r(s-1)} / N^{r-1/2}}{(\ln N)^{r(s-1)} / N^{r-1/2}} = (\bar{\eta}_N)^{r-1/2},$$

что с учетом (см. (5.12) и (5.16)) $\bar{\eta}_N \rightarrow +\infty$ и неравенства $r > 1/2$ приводит к соотношению (3.6). Теорема 1 доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 повторяет рассуждения предыдущей теоремы 1 с изменениями, соответствующими обсуждаемому случаю.

Опять же, соотношение (3.7) достаточно доказать для целых положительных N вида $N = |\Gamma_R|$, $N \asymp R(\ln R)^{s-1}$ при произвольных $R > 1$.

В соответствии с определением D_N множество B_N , функционалы $\bar{l}^{(N)}$ и вычислительный агрегат $\bar{\varphi}_N$ определим так же, как в (5.3) из доказательства теоремы 1 (с учетом $N = |\Gamma_R|$ и очевидным взаимным переобозначением переменных z_j , $j = 1, \dots, N$, и z_m , $m \in \Gamma_R$).

Напомним, что здесь и всюду ниже

$$\tilde{\varepsilon}_N = \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r+1/2}}. \quad (5.19)$$

Пусть $f \in SW_2^r(0, 1)^s$. Тогда в обозначениях (5.3) и (5.4) имеем

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \left\| f(x) - \sum_{m \in \Gamma_R} \hat{f}(m) \cdot e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{m \notin \Gamma_R} \hat{f}(m) \cdot e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s : \bar{m} > R} |\hat{f}(m)|^2 \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s : \bar{m} > R} |\hat{f}(m)|^2 (\bar{m})^{2r} (\bar{m})^{-2r} \leq \frac{1}{R^{2r}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}(m)|^2 (\bar{m})^{2r} \ll \frac{1}{R^{2r}} \ll \left(\frac{(\ln N)^{(s-1)}}{N} \right)^{2r}, \end{aligned}$$

откуда в силу (5.3)–(5.6) и (5.19) получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in SW_2^r(0, 1)^s \\ |\gamma_N^{(m)}| \leq 1, m \in \Gamma_R}} \|f(x) - \bar{\varphi}_N\{\bar{l}_m(f) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}\}_{m \in \Gamma_R}; x\|_{L^2} \ll \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r} + \tilde{\varepsilon}_N \cdot N^{1/2} \\ & \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу произвольности $f \in SW_2^r(0,1)^s$ и $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$, $m \in \Gamma_R$, аналогично доказательству (5.7) имеем

$$\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \equiv \delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \ll \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}.$$

Пользуясь неравенством $\delta_N(0) \leq \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N)$ и леммой 4, отсюда получим

$$\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r} \ll \delta_N(0) \ll \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \ll \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r},$$

тем самым,

$$\delta_N(0) \asymp \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \asymp \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}. \quad (5.20)$$

Осталось доказать соотношение (3.8). Пусть опять же, как и в доказательстве соотношения (3.6) теоремы 1, для всякого целого положительного числа N даны произвольное множество B_N , $B_N = \{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\} \subset \mathbb{Z}^s$, набор функционалов $l^{(N)}$: $l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)})$, $\dots$, $l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)})$, и произвольный алгоритм переработки информации $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; x)$ (см. (5.9)–(5.10)).

Пусть дана возрастающая к $+\infty$ положительная последовательность $\{\eta_N\}$. В соответствии с (5.19) определим последовательность $\eta_N^* = C \cdot \min\{\eta_N; t_N\}$, $0 < C < 1$, для которой выполнены (5.11)–(5.13).

Докажем, что имеет место неравенство

$$\delta_N(D_N; Tf = f; SW_2^r(0,1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \gg \eta_N^* \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}, \quad N = 2, 3, \dots \quad (5.21)$$

Пусть дано целое $N \geq 2$, и пусть $R \equiv R(N)$ такое, что $|\Gamma_R| \leq N$ и $R \equiv R(N) \asymp N/(\ln N)^{s-1}$, где Γ_R – гиперболический крест (см. лемму 2).

Положим

$$g_N(x) = \sum_{m \in \Gamma_R} \tau_N^{(m)} e^{2\pi i(m, x)},$$

где

$$\begin{aligned} \tau_N^{(m)} &= \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}(\overline{m})^r}; \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \right\} = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{1}{\overline{m}} \right)^r; \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\overline{\eta}_N \frac{(\ln N)^{(s-1)}}{N} \right)^r \right\} \\ &\asymp \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{1}{\overline{m}} \right)^r; \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\overline{\eta}_N \frac{1}{R(N)} \right)^r \right\} \end{aligned}$$

и $\overline{\eta}_N^r = \eta_N^*$. Аналогично доказательствам (5.17), (5.18) из теоремы 1 можно показать, что

$$\|g_N\|_{SW_2^r(0,1)^s} = \left(\sum_{m \in \Gamma_R} (\tau_N^{(m)})^2 (\overline{m})^{2r} \right)^{1/2} \leq 1, \quad (5.22)$$

$$|\hat{g}_N(m)| \leq \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \leq \eta_N \tilde{\varepsilon}_N, \quad (5.23)$$

$$\|g_N\|_{L^2(0,1)^s} = \left(\sum_{m \in \Gamma_R} (\tau_N^{(m)})^2 \right)^{1/2} \gg \overline{\eta}_N^r \left(\frac{1}{R(N)} \right)^r \asymp \overline{\eta}_N^r \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N}. \quad (5.24)$$

Из (5.22) следует, что $g_N \in SW_2^r(0,1)^s$. Далее, определяя $\overline{\gamma}_N^{(k)}$, $|\overline{\gamma}_N^{(k)}| \leq 1$, $k = 1, \dots, N$, из условия

$$l_k(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \overline{\gamma}_N^{(k)} = \hat{g}_N(m^{(k)}) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \overline{\gamma}_N^{(k)} = 0,$$

что возможно в силу (5.23), получим

$$\varphi_N(l_1(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(1)}, \dots, l_N(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(N)}; x) \equiv 0.$$

Отсюда с учетом (5.24) имеем

$$\|g_N - \varphi_N(l_1(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(1)}, \dots, l_N(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(N)}; x)\|_{L^2} = \|g_N\|_{L^2} \geq (\bar{\eta}_N)^r \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}.$$

Таким образом, для всякой пары $(l^{(N)}, \varphi_N)$ из D_N выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); Tf = f; SW_2^r(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \\ = \sup_{\substack{f \in SW_2^r(0, 1)^s \\ |\gamma_N^{(k)}| \leq 1, k=1, \dots, N}} \|f - \varphi_N(l_1(f) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(1)}, \dots, l_N(f) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(N)}; x)\|_{L^2} \\ \geq \|g_N - \varphi_N(l_1(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(1)}, \dots, l_N(g_N) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(N)}; x)\|_{L^2} \gg (\bar{\eta}_N)^r \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}. \end{aligned}$$

Наконец, в силу произвольности $m^{(1)}, \dots, m^{(N)}$ и φ_N , отсюда имеем

$$\begin{aligned} \delta_N\left(D_N; Tf = f; SW_2^r(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N = \eta_N \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r+1/2}}\right)_{L^2} \\ = \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N)}, \varphi_N); Tf = f; SW_2^r(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N)_{L^2} \\ \gg (\bar{\eta}_N)^r \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r} \asymp \eta_N^* \frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}, \end{aligned}$$

т.е. (5.21) доказано.

В итоге из (5.20) и (5.21) следует соотношение (3.8). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Начнем с доказательства оценки сверху

$$\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \ll \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N} = N^{-r_1/s}, \quad (5.25)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_N = N^{-r_1/s-1/2}. \quad (5.26)$$

Пусть функция f_1 принадлежит классу $W_2^{r_1}(0, 1)^s$. Тогда в силу условия $2r_1 > 4 + s$ согласно лемме 5 решение уравнения Клейна–Гордона (3.1), (3.2) имеет вид (сходимость абсолютная поточечная, равномерная при любом способе суммирования)

$$u(x, t; f_1, 0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}_1(m) \cos(t \sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) e^{2\pi i(m, x)}.$$

Пусть дано целое положительное число n . Положим

$$N = N(n) = |I_n| = (2^{n+1} + 1)^s,$$

где

$$I_n = \mathbb{Z}^s \cap [-2^n, 2^n]^s = \left\{ m \in \mathbb{Z}^s : \|m\| = \max_{j=1, \dots, s} |m_j| \leq 2^n \right\}. \quad (5.27)$$

Положим (с учетом $N = |I_n|$ и очевидным взаимным переобозначением переменных z_j , $j = 1, \dots, N$, и z_m , $m \in I_n$)

$$B_N = I_n = \{m^{(1)}; \dots; m^{(N)}\} \subset \mathbb{Z}^s, \quad (5.28)$$

$$\bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x, t) = \sum_{m \in I_n} z_m \cos(t \sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) e^{2\pi i(m, x)}. \quad (5.29)$$

Далее, в соответствии с определением D_N зададим соответствующий набор функционалов $\bar{l}^{(N)}$:

$$\bar{l}_m(f) = \hat{f}(m), \quad m \in I_n. \quad (5.30)$$

Тогда для всякого $f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s$ и всякого набора $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$, $m \in I_n$, при $z_m = \bar{l}_m(f_1) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}$ имеем

$$\begin{aligned} & \|u(x, t; f_1, 0) - \bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x, t)\|_{L^{2,\infty}} \\ &= \left\| u(x, t; f_1, 0) - \sum_{m \in I_n} (\hat{f}_1(m) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}) \cos(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2,\infty}} \leq J_1 + \tilde{\varepsilon}_N J_2, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus I_n} \hat{f}_1(m) \cdot \cos(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2,\infty}}, \\ J_2 &= \left\| \sum_{m \in I_n} \gamma_N^{(m)} \cos(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2,\infty}}. \end{aligned}$$

Оценим сверху J_1 . В силу определения класса $W_2^{r_1}(0, 1)^s$ имеем (см. (5.27))

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\| \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus I_n} \hat{f}_1(m) \cdot \cos(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2,\infty}} \leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus I_n} |\hat{f}_1(m)|^2 \right)^{1/2} \\ &\ll \frac{1}{N^{r_1/s}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus I_n} |\hat{f}_1(m)|^2 (\bar{m}_1^{2r_1} + \dots + \bar{m}_s^{2r_1}) \right)^{1/2} \ll \frac{1}{N^{r_1/s}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Далее, в силу равенства Парсеваля и неравенств $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} J_2 &= \sup_{t \geq 0} \left(\sum_{m \in I_n} |\gamma_N^{(m)} \cos(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{m \in I_n} |\gamma_N^{(m)}|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{m \in I_n} 1 \right)^{1/2} = |I_n|^{1/2} = N^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Итак, в силу (5.26), (5.31), (5.32) и (5.33) для всякой функции $f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s$ и всякого набора $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$, $m \in I_n$, имеем

$$\begin{aligned} & \|u(x, t; f_1, 0) - \sum_{m \in I_n} (\hat{f}_1(m) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}) \cos(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) e^{2\pi i(m, x)}\|_{L^{2,\infty}} \\ &\leq J_1 + \tilde{\varepsilon}_N J_2 \ll N^{-r_1/s} + \tilde{\varepsilon}_N N^{1/2} \ll N^{-r_1/s}. \end{aligned}$$

В итоге согласно выбору множества B_N в (5.28) и, соответственно, функционалов (5.30) и вычислительного алгоритма (5.29), в силу произвольности функции $f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s$ и набора чисел $\gamma_N^{(m)}$, $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$, $m \in I_n$, получим

$$\begin{aligned} & \delta_N \left((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \tilde{\varepsilon}_N = N^{-r_1/s-1/2} \right)_{L^{2,\infty}} \\ &= \sup_{\substack{f \in W_2^{r_1}(0, 1)^s \\ |\gamma_N^{(m)}| \leq 1, m \in I_n}} \left\| u(x, t; f_1, 0) - \sum_{m \in I_n} (\hat{f}_1(m) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}) \cos(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2,\infty}} \\ &\ll N^{-r_1/s}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) &\equiv \delta_N\left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \tilde{\varepsilon}_N = N^{-r_1/s-1/2}\right)_{L^{2,\infty}} \\ &\leq \delta_N\left((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \tilde{\varepsilon}_N = N^{-r_1/s-1/2}\right)_{L^{2,\infty}} \\ &\ll N^{-r_1/s}. \end{aligned}$$

Тем самым, неравенство (5.25) доказано.

Теперь докажем оценку снизу в случае восстановления по точной информации:

$$\delta_N(0) \gg N^{-r_1/s}. \quad (5.34)$$

Пусть заданы целое $N \geq 2^s$, произвольное конечное множество $B_N = \{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\} \subset \mathbb{Z}^s$, соответствующий набор функционалов $l^{(N)}$,

$$l_1(f) = \widehat{f}(m^{(1)}), \quad \dots, \quad l_N(f) = \widehat{f}(m^{(N)})$$

и функция $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; x, t)$ – алгоритм переработки числовой информации объема N . Положим

$$A_n = (2^n, 2^{n+3}]^s,$$

где $n = [\log_2 \sqrt[s]{N}]$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

Учитывая очевидные соотношения

$$(m_1^2 + \dots + m_s^2)^{r_1} \asymp 2^{2nr_1}, \quad m \in A_n, \quad |I_n| \asymp |A_n \setminus B_N| \asymp N \asymp 2^{ns},$$

легко убедиться, что при некотором положительном $C = C(r, s)$ функция, определяемая равенством

$$g_1(x) = C 2^{-n(s/2+r_1)} \sum_{m \in A_n \setminus B_N} e^{2\pi i(m, x)},$$

принадлежит классу $W_2^{r_1}(0, 1)^s$. Как это непосредственно следует из определения g_1 и (5.26),

$$l_1(g_1) = \widehat{g}_1(m^{(1)}) = 0, \quad \dots, \quad l_N(g_1) = \widehat{g}_1(m^{(N)}) = 0 \quad (5.35)$$

и

$$\|g_1\|_{L^2(0,1)^s} \asymp \tilde{\varepsilon}_N \left(\sum_{m \in A_n \setminus B_N} 1 \right)^{1/2} \asymp \tilde{\varepsilon}_N |A_n \setminus B_N|^{1/2} \asymp N^{-r_1/s-1/2} \cdot N^{1/2} \asymp N^{-r_1/s}. \quad (5.36)$$

После проведенной подготовки для всякой пары $(l^{(N)}, \varphi_N)$ из D_N имеем (см. (5.35) и (5.36))

$$\begin{aligned} \delta_N\left((l^{(N)}, \varphi_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; 0\right)_{L^{2,\infty}} \\ = \sup_{f_1 \in W_2^{r_1}(0,1)^s} \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; f_1, 0) - \varphi_N(\widehat{f}_1(m^{(1)}), \dots, \widehat{f}_1(m^{(N)}); x, t)\|_{L^2(0,1)^s} \\ \geq \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; g_1, 0) - \varphi_N(\widehat{g}_1(m^{(1)}), \dots, \widehat{g}_1(m^{(N)}); x, t)\|_{L^2(0,1)^s} \\ \geq \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; g_1, 0) - \varphi_N(0, \dots, 0; x, t)\|_{L^2(0,1)^s} \\ = \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; g_1, 0)\|_{L^2(0,1)^s} \geq \|u(x, 0; g_1, 0)\|_{L^2(0,1)^s} = \|g_1(x)\|_{L^2(0,1)^s} \asymp N^{-r_1/s}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Наконец, в силу произвольности множества B_N , набора функционалов $l^{(N)}$ и функции φ_N из (5.37) заключаем, что

$$\begin{aligned} \delta_N(0) &\equiv \delta_N\left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; 0\right)_{L^2, \infty} \\ &= \inf_{(l^{(N)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N\left(l^{(N)}, \varphi_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; 0\right)_{L^2, \infty} \\ &\gg N^{-r_1/s}, \end{aligned}$$

т.е. (5.34) действительно выполнено.

Из (5.25) и (5.34) следует выполнение следующих условий из определения компьютерного (вычислительного) поперечника:

$$\text{K(B)II-1}^\circ: \quad \delta_N(0) \asymp N^{-r_1/s},$$

$$\text{K(B)II-2}^\circ: \quad \delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \asymp \delta_N(0).$$

Осталось доказать выполнение условия K(B)II-3^o (см. (1.5)), т.е. справедливость равенства (3.10).

Пусть дана положительная последовательность $\eta = \{\eta_N\}$, возрастающая к $+\infty$, и пусть

$$\eta_N^* = \min\{\eta_N; t_N\}, \quad t_N = \ln N.$$

Для целого положительного n положим

$$A_n = [1, 2^n]^s \cap \mathbb{Z}^s, \quad N = N(n) = |A_n| = 2^{ns}.$$

Повторяя предыдущие аналогичные рассуждения, а именно, считая наперед заданными множество B_N из $\mathbb{Z}^s$ и функцию φ_N , определим функцию $g(x) = \sum_{m \in A_n} \tau_N^{(m)} e^{2\pi i(m, x)}$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} \tau_N^{(m)} &= \min\left\{\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2}}\right)^{r_1}; \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N\right\} \\ &= \min\left\{\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2}}\right)^{r_1}; \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\bar{\eta}_N \frac{1}{2^n}\right)^{r_1}\right\}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

где $\bar{\eta}_N = (\eta_N^*)^{1/r_1}$. Тогда имеют место неравенства

$$\|g\|_{W_2^{r_1}(0,1)^s} = \sqrt{\sum_{m \in A_n} (\tau_N^{(m)})^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)^{r_1}} \leq 1, \quad (5.39)$$

$$|\widehat{g}(m)| \leq \eta_N \tilde{\varepsilon}_N, \quad m \in A_n, \quad (5.40)$$

$$\|g\|_{L^2(0,1)^2} = \left(\sum_{m \in A_n} (\tau_N^{(m)})^2\right)^{1/2} \gg (\bar{\eta}_N)^{r_1-s/2} \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N}. \quad (5.41)$$

Соотношения (5.39) и (5.40) очевидны, а для доказательства (5.41) заметим, что из (5.38) следует

$$\tau_N^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\bar{\eta}_N \frac{1}{2^n}\right)^{r_1}, \quad \text{если} \quad \sqrt{s} \leq \sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2} < \frac{1}{\bar{\eta}_N} 2^n.$$

Тогда

$$\|g\|_{L^2(0,1)^s}^2 = \sum_{m \in A_n} (\tau_N^{(m)})^2 \geq \sum_{\sqrt{s} \leq \sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2} < 2^n / \bar{\eta}_N} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\bar{\eta}_N \frac{1}{2^n}\right)^{r_1}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2^{ns}} \left(\bar{\eta}_N \frac{1}{2^n} \right)^{2r_1} \sum_{\sqrt{s} \leq \sqrt{m_1^2 + \dots + m_s^2} < (1/\bar{\eta}_N) 2^n} 1 \gg \frac{1}{2^{ns}} \left(\bar{\eta}_N \frac{1}{2^n} \right)^{2r_1} \left(\frac{1}{\bar{\eta}_N} 2^n \right)^s \\
&\asymp \bar{\eta}_N^{2r_1-s} \cdot 2^{-2nr_1} \asymp \bar{\eta}_N^{2r_1-s} \cdot N^{-2r_1/s},
\end{aligned}$$

поскольку s -мерный объем шара радиуса R равен числу $\pi^{s/2} R^s / \Gamma(s/2 + 1)$.

Стало быть (напомним, что $2r_1 - s > 4$),

$$\|g\|_{L^2(0,1)^s} \gg (\bar{\eta}_N)^{r_1-s/2} \cdot N^{-r_1/s} = \bar{\eta}_N \tilde{\varepsilon}_N \sqrt{N},$$

где $\bar{\eta}_N = \bar{\eta}_N^{r_1-s/2}$. Неравенство (5.41) доказано.

Далее, аналогично (5.36), (5.37) для всякой пары $(l^{(N)}, \varphi_N)$ из D_N с учетом (5.39)–(5.41) имеем

$$\begin{aligned}
&\delta_N \left((l^{(N)}, \varphi_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N = \eta_N N^{-r_1/s-1/2} \right)_{L^2, \infty} \\
&= \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s \\ |\gamma_N^{(k)}| \leq 1, k=1, \dots, N}} \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; f_1, 0) - \varphi_N(l_1(f_1) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(1)}, \dots, \\
&\quad l_N(f_1) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(N)}; x, t)\|_{L^2(0,1)^s} \\
&\geq \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; g, 0) - \varphi_N(l_1(g) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(1)}, \dots, l_N(g) + \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \bar{\gamma}_N^{(N)}; x, t)\|_{L^2(0,1)^s} \\
&= \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; g, 0)\|_{L^2(0,1)^s} \geq \|u(x, 0; g, 0)\|_{L^2(0,1)^s} = \|g\|_{L^2} \gg \bar{\eta}_N N^{-r_1/s}.
\end{aligned}$$

Наконец, в силу произвольности пар $(l^{(N)}, \varphi_N)$ из D_N получим оценку снизу

$$\begin{aligned}
&\delta_N(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N) \equiv \delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \eta_N \tilde{\varepsilon}_N \right)_{L^2, \infty} \\
&\gg \bar{\eta}_N N^{-r_1/s}.
\end{aligned}$$

В итоге, отсюда и из доказанного выше соотношения $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \asymp \delta_N(0) \asymp N^{-r_1/s}$ следует (3.10). Теорема 3 доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Докажем (3.11). Начнем с оценки сверху

$$\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N) \ll N^{-(r_2+1)/s}. \quad (5.42)$$

Напомним, что здесь и всюду ниже

$$\tilde{\varepsilon}_N \equiv \tilde{\varepsilon}_N(s) = \begin{cases} N^{-(r_2+1)/s} & \text{при } s = 1, \\ N^{-(r_2+1)/s} (\ln N)^{-1/2} & \text{при } s = 2, \\ N^{-r_2/s-1/2} & \text{при } s > 2. \end{cases} \quad (5.43)$$

Пусть функция f_2 принадлежит классу $W_2^{r_2}(0, 1)^s$. Тогда в силу леммы 5 при условии $r_2 > 1 + s/2$ решение уравнения Клейна–Гордона (3.1), (3.2) имеет вид

$$u(x, t; 0, f_2) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}_2(m) \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} e^{2\pi i(m, x)}.$$

Пусть дано целое положительное число n . Положим $I_n = [-2^n, 2^n]^s \cap \mathbb{Z}^s$, $|I_n| = (2^{n+1} + 1)^s = N(n) = N$. Тогда по аналогии с обозначениями и определениями из доказательства теоремы 3 положим (с учетом $N = |I_n|$ и очевидным взаимным переобозначением переменных z_j , $j = 1, \dots, N$, и z_m , $m \in I_n$, здесь и далее)

$$B_N = \{m^{(1)}; \dots; m^{(N)}\} = I_n \subset \mathbb{Z}^s, \quad N \asymp 2^{ns}, \quad (5.44)$$

$$\bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x, t) = \sum_{m \in I_n} z_m \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} e^{2\pi i(m, x)}. \quad (5.45)$$

Далее, в соответствии с определением D_N зададим соответствующий набор функционалов $\bar{l}^{(N)}$ в виде

$$\bar{l}_m(f) = \hat{f}(m), \quad m \in I_n. \quad (5.46)$$

Тогда для всякого $f_2 \in SW_2^{r_2}(0, 1)^s$ и всякого набора $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$, $m \in I_n$, при $z_m = \bar{l}_m(f_2) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}$ имеем

$$\left\| u(x, t; 0, f_2) - \sum_{m \in I_n} (\hat{f}_2(m) + \tilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}) \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2, \infty}} \leq J_3 + \tilde{\varepsilon}_N J_4, \quad (5.47)$$

где

$$J_3 = \left\| u(x, t; 0, f_2) - \sum_{m \in I_n} \hat{f}_2(m) \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2, \infty}},$$

$$J_4 = \left\| \sum_{m \in I_n} \gamma_m^{(N)} \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2, \infty}}.$$

В силу определения класса $W_2^{T_2}(0, 1)^s$ имеем

$$\begin{aligned} J_3 &= \sup_{t \geq 0} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus I_n} \left| \hat{f}_2(m) \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus I_n} |\hat{f}_2(m)|^2 \frac{1}{4\pi^2(m, m) + 1} \right)^{1/2} \\ &\asymp \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus I_n} |\hat{f}_2(m)|^2 (\bar{m}_1^{2r_2} + \dots + \bar{m}_s^{2r_2}) \frac{1}{\bar{m}_1^{2r_2} + \dots + \bar{m}_s^{2r_2}} \cdot \frac{1}{(\bar{m}_1^2 + \dots + \bar{m}_s^2)} \right)^{1/2} \\ &\ll \frac{1}{N^{r_2/s+1/s}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}_2(m)|^2 (\bar{m}_1^{2r_2} + \dots + \bar{m}_s^{2r_2}) \right)^{1/2} \ll N^{-(r_2+1)/s}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Далее, в силу равенства Парсеваля и неравенства $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$ получаем

$$\begin{aligned} J_4 &= \left\| \sum_{m \in I_n} \gamma_N^{(m)} \frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^{2, \infty}} \\ &\ll \left(\sum_{(m_1^2 + \dots + m_s^2)^{1/2} \leq \sqrt{s} 2^n} \frac{1}{m_1^2 + \dots + m_s^2 + 1} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{(m_1^2 + \dots + m_s^2)^{1/2} \leq \sqrt{s} 2^n} \frac{1}{m_1^2 + \dots + m_s^2 + 1} \right)^{1/2} \\ &\asymp \int \dots \int_{(x_1^2 + \dots + x_s^2)^{1/2} \leq \sqrt{s} 2^n = R} \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_s^2 + 1} dx_1 \dots dx_s \end{aligned}$$

$$\asymp \int_1^R r^{s-1} \frac{1}{r^2} dr \asymp \begin{cases} 1 & \text{при } s = 1, \\ \ln R & \text{при } s = 2, \\ R^{s-2} & \text{при } s > 2, \end{cases}$$

откуда

$$J_4 \ll \begin{cases} 1 & \text{при } s = 1, \\ \sqrt{\ln 2^n} \asymp \sqrt{n} \asymp \sqrt{\ln N} & \text{при } s = 2, \\ 2^{n(s-2)/2} \asymp N^{(s-2)/2s} = N^{1/2-1/s} & \text{при } s > 2. \end{cases} \quad (5.49)$$

Тем самым, в силу (5.43), (5.47), (5.48), (5.49) для всякой функции $f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s$ и всякого набора $|\gamma_N^{(m)}| \leq 1$, $m \in I_n$, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| u(x, t; 0, f_2) - \sum_{m \in I_n} (\widehat{f}_2(m) + \widetilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(m)}) \frac{\sin(t \sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{\sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^2, \infty} \\ & \leq J_3 + \widetilde{\varepsilon}_N J_4 \ll N^{-(r_2+1)/s}. \end{aligned}$$

В итоге, согласно выбору множества $B_n = I_n$ в (5.44) и, соответственно, функционалов (5.46) и вычислительного алгоритма (5.45) в силу произвольности функции $f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s$ и набора чисел $\gamma_N^{(m)}$, $m \in I_n$, имеем

$$\begin{aligned} & \delta_N \left((\bar{l}^{(N)}, \bar{\varphi}_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \widetilde{\varepsilon}_N \right)_{L^2, \infty} \\ & = \sup_{\substack{f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s \\ z_k - \bar{l}_k(f_1) = \widetilde{\varepsilon}_N \gamma_N^{(k)} \\ |\gamma_N^{(k)}| \leq 1, k=1, \dots, N}} \|u(x, t; 0, f_2) - \bar{\varphi}_N(z_1, \dots, z_N; x, t)\|_{L^2, \infty} \ll N^{-(r_2+1)/s}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (5.42).

Теперь докажем неравенство

$$\delta_N(0) \gg N^{-(r_2+1)/s}, \quad (5.50)$$

– оценку снизу в случае восстановления по точной информации.

Пусть заданы целое $N \geq 2^s$, произвольное множество $B_N = \{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\} \subset \mathbb{Z}^s$, соответствующий набор функционалов $l^{(N)}: l_1(f) = \widehat{f}(m^{(1)}), \dots, l_N(f) = \widehat{f}(m^{(N)})$, и функция $\varphi_N(z_1, \dots, z_N; x, t)$ – алгоритм переработки числовой информации объема N . Положим

$$\begin{aligned} A_n &= (2^{n+1}, 2^{n+3}]^s \cap \mathbb{Z}^s, \\ g_2(x) &= \sum_{m \in A_n \setminus B_N} \tau_N^{(m)} e^{2\pi i(m, x)}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

где $n = \lfloor \log_2 \sqrt[s]{N} \rfloor$ и

$$\tau_N^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_s^2)^{r_2/2}}, \quad m \in A_n \setminus B_N.$$

Очевидно, что

$$\|g_2\|_{W_2^{r_2}(0, 1)^s} = \sqrt{\sum_{m \in A_n \setminus B_N} (\tau_N^{(m)})^2 (m_1^2 + \dots + m_s^2)^{r_2}} \ll 1.$$

Кроме того, учитывая вытекающие из (5.51) неравенства

$$\frac{1}{8} \leq t_n \sqrt{4\pi^2(m_1^2 + \dots + m_s^2) + 1} < 1, \quad m \in A_n,$$

в точке

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 s 2^{2n+8}}} = \frac{1}{2\pi 2^{n+4} \sqrt{s}}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \|u(x, t_n; 0, g_2)\|_{L^2} &= \left(\sum_{m \in A_n \setminus B_N} (\tau_N^{(m)})^2 \frac{\sin^2(t_n \sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{4\pi^2(m, m) + 1} \right)^{1/2} \\ &\gg \sin \frac{1}{8} \left(\sum_{m \in A_n \setminus B_N} \frac{1}{N} \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_s^2)^{r_2}} \frac{1}{4\pi^2(m_1^2 + \dots + m_s^2) + 1} \right)^{1/2} \\ &\asymp \left(\frac{1}{N} \sum_{m \in A_n \setminus B_N} \frac{1}{(m_1^2 + \dots + m_s^2)^{r_2+1}} \right)^{1/2} \asymp \left(\frac{1}{N 2^{2n(r_2+1)}} \sum_{m \in A_n \setminus B_N} 1 \right)^{1/2} \\ &\asymp \left(\frac{1}{N \cdot N^{2(r_2+1)/s}} |A_n \setminus B_N| \right)^{1/2} \asymp \left(\frac{1}{N \cdot N^{2(r_2+1)/s}} N \right)^{1/2} \asymp \frac{1}{N^{(r_2+1)/s}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_N \left((l^{(N)}, \varphi_N); \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; 0 \right)_{L^2, \infty} \\ = \sup_{f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s} \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; 0, f_2) - \varphi_N(l_1(f_2), \dots, l_N(f_2); x, t)\|_{L^2(0, 1)^s} \\ \geq \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; 0, g_2) - \varphi_N(\widehat{g}_2(m^{(1)}), \dots, \widehat{g}_2(m^{(N)}); x, t)\|_{L^2(0, 1)^s} \\ = \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; 0, g_2) - \varphi_N(0, \dots, 0; x, t)\|_{L^2(0, 1)^s} \\ = \sup_{t \geq 0} \|u(x, t; 0, g_2)\|_{L^2(0, 1)^s} \geq \|u(x, t_n; 0, g_2)\|_{L^2(0, 1)^s} \gg N^{-(r_2+1)/s}. \end{aligned}$$

Наконец, в силу произвольности множества B_N , набора функционалов $l^{(N)}$ и функции φ_N отсюда следует (5.50).

Из (5.42) и (5.50) следует выполнение первых двух условий из определения (1.5) компьютерного (вычислительного) поперечника:

$$\text{К(В)П-1}^\circ: \quad \delta_N(0) \asymp N^{-(r_2+1)/s},$$

$$\text{К(В)П-2}^\circ: \quad \delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N) \asymp \delta_N(0).$$

Осталось доказать выполнение К(В)П-3 $^\circ$, т.е. справедливость равенства (3.12). Для этого рассмотрим множества

$$S_k = \{m \in \mathbb{Z}^s : 8k + 1 < \sqrt{(m, m)} \leq 8k + 2\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для количества точек в множестве S_k имеет место оценка

$$|S_k| \asymp (8k + 2)^s - (8k + 1)^s \asymp k^{s-1}. \quad (5.52)$$

Далее, в силу соотношений

$$2\pi \sqrt{(m, m)} < \sqrt{4\pi^2(m, m) + 1} < 2\pi \sqrt{(m, m)} + \frac{1}{4\pi}, \quad m \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\},$$

для $t_0 = 1/8$ при любом $k = 0, 1, 2, \dots$ для любого $m \in S_k$ имеет место

$$\sin(t_0 \sqrt{4\pi^2(m, m) + 1}) \geq \sin\left(\frac{1}{32\pi}\right). \quad (5.53)$$

Пусть дана положительная последовательность $\eta = \{\eta_N\}$, возрастающая к $+\infty$. Положим

$$\eta_N^* = \min\{\eta_N; (\ln N)^{1/2}\}. \quad (5.54)$$

Пусть далее $N \geq 2$ – фиксированное целое число. Определим функцию

$$g_N(x) = \tilde{\varepsilon}_N \eta_N^* \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m \in S_k} e^{2\pi i(m, x)}, \quad (5.55)$$

где n подберем так, чтобы функция принадлежала $W_2^{r_2}(0, 1)^s$. Имеем

$$\begin{aligned} \|g_N\|_{W_2^{r_2}(0, 1)^s} &\asymp \tilde{\varepsilon}_N \eta_N^* \sqrt{\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m \in S_k} (m, m)^{r_2}} \ll \tilde{\varepsilon}_N \eta_N^* \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s : 1 \leq \sqrt{(m, m)} \leq 8(n-2)+2} (m, m)^{r_2} \right)^{1/2} \\ &\asymp \tilde{\varepsilon}_N \eta_N^* \left(\int_0^{8n} \rho^{2r_2} \cdot \rho^{s-1} d\rho \right)^{1/2} \asymp \tilde{\varepsilon}_N \eta_N^* n^{(2r_2+s)/2}, \end{aligned}$$

а

$$\tilde{\varepsilon}_N \eta_N^* n^{(2r_2+s)/2} \asymp 1,$$

и, наконец,

$$n = n(N) \asymp (\tilde{\varepsilon}_N \eta_N^*)^{-2/(2r_2+s)}. \quad (5.56)$$

Поскольку для всех $s = 1, 2, \dots$ выполнено $\tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^* = \tilde{\varepsilon}_N \eta_N^* \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ (см. (5.43) и (5.54)), то $(\tilde{\varepsilon}_N \eta_N^*)^{-2/(2r_2+s)} \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, т.е. начиная с некоторого $N_0(s, r_2)$ для всех $N \geq N_0(s, r_2)$ в (5.56) выполняется $n = n(N) > 2$. Тем самым, определение (5.55) с $n = n(N)$ для всех $N \geq N_0(s, r_2)$ корректно и $g_N(x)$ принадлежит классу $W_2^{r_2}(0, 1)^s$.

Рассмотрим соответствующее решение $u(x, t; 0, g_N)$ уравнения Клейна–Гордона. Из (5.53), (5.52) и (5.56) следует, что

$$\begin{aligned} &\|u(\cdot, t_0; 0, g_N)\|_{L^2(0, 1)^s} \\ &= \tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^* \left(\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m \in S_k} \frac{\sin^2(t_0 \sqrt{4\pi^2(m, m) + 1})}{4\pi^2(m, m) + 1} \right)^{1/2} \\ &\gg \tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^* \left(\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m \in S_k} \frac{1}{(m, m) + 1} \right)^{1/2} \geq \tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^* \left(\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m \in S_k} \frac{1}{(8k+2)^2} \right)^{1/2} \\ &\asymp \tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^* \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{(8k+2)^2} \cdot |S_k| \right)^{1/2} \gg \tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^* \left(\sum_{k=1}^{n-2} k^{s-3} \right)^{1/2} \\ &\gg \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_N(1) \eta_N^* = N^{-(r_2+1)/s} \eta_N^* & \text{при } s = 1, \\ \tilde{\varepsilon}_N(2) \eta_N^* (\ln n)^{1/2} \asymp \tilde{\varepsilon}_N(2) \eta_N^* (\ln N)^{1/2} = N^{-(r_2+1)/s} \eta_N^* & \text{при } s = 2, \\ \tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^* (n)^{(s-2)/2} \asymp \tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^* (\tilde{\varepsilon}_N(s) \eta_N^*)^{-(s-2)/(2r_2+s)} \\ \quad = N^{-(r_2+1)/s} (\eta_N^*)^{(2r_2+2)/(2r_2+s)} & \text{при } s > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда с учетом

$$|\widehat{g}(m)| \leq \eta_N^* \tilde{\varepsilon}_N \leq \eta_N \tilde{\varepsilon}_N,$$

что имеет следствием

$$\varphi_N(\widehat{g}_N(m^{(1)}) + \eta_N \widetilde{\varepsilon}_N \overline{\gamma}_N^{(1)}, \dots, \widehat{g}_N(m^{(N)}) + \eta_N \widetilde{\varepsilon}_N \overline{\gamma}_N^{(N)}; x, t) \equiv 0$$

при некоторых $\overline{\gamma}_N^{(k)}, |\overline{\gamma}_N^{(k)}| \leq 1, k = 1, \dots, N$, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \widetilde{\varepsilon}_N \right)_{L^{2, \infty}}}{\delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; 0 \right)_{L^{2, \infty}}} \\ & \asymp \frac{N^{-(r_2+1)/s} (\eta_N^*)^{\alpha(s)}}{N^{-(r_2+1)/s}} = (\eta_N^*)^{\alpha(s)}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s = 1 \text{ и } s = 2, \\ \frac{2r_2 + 2}{2r_2 + s} & \text{при } s > 2, \end{cases}$$

откуда следует (3.12). Теорема 4 доказана полностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Оценка снизу. Пусть даны целые $N \geq 2, 1 \leq N_1 \leq N - 1$, и пусть $N_2 = N - N_1$. Тогда для любых фиксированных $\eta_N \geq 0, m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)}, n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)}$ и φ_N выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s \\ |z_{j_1}^{(1)} - \widehat{f}_1(m^{(j_1)})| \leq \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)}, j_1 = 1, 2, \dots, N_1 \\ |z_{j_2}^{(2)} - \widehat{f}_2(m^{(j_2)})| \leq \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_2}^{(j_2)}, j_2 = 1, 2, \dots, N_2}} \|u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1}^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_{N_2}^{(2)})\|_{L^{2, \infty}([0, 1]^s \times [0, +\infty))} \\ & \geq \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, f_2 \equiv 0 \\ |z_{j_1}^{(1)} - \widehat{f}_1(m^{(j_1)})| \leq \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)}, j_1 = 1, 2, \dots, N_1}} \|u(\cdot; f_1, 0) - \varphi_N(z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1}^{(1)}, 0, \dots, 0; \cdot)\|_{L^{2, \infty}([0, 1]^s \times [0, +\infty))}. \end{aligned}$$

Поскольку это неравенство выполнено при любых $m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)}, n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)}$ и φ_N , то оно выполняется и для инфимумов этих величин, т.е.

$$\begin{aligned} & \delta_{N_1, N_2} \left(D_{N_1, N_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_1, N_2} \right)_{L^{2, \infty}} \\ & \equiv \inf_{\substack{m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)} \\ n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)} \\ \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \\ f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s \\ |z_{j_1}^{(1)} - \widehat{f}_1(m^{(j_1)})| \leq \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)} \\ |z_{j_2}^{(2)} - \widehat{f}_2(n^{(j_2)})| \leq \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_2}^{(j_2)}}} \|u(\cdot; f_1, 0) - \varphi_N(z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1}^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_{N_2}^{(2)}; \cdot)\|_{L^{2, \infty}([0, 1]^s \times [0, +\infty))} \\ & \geq \inf_{\substack{m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)} \\ n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)} \\ \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, f_2 \equiv 0 \\ |z_{j_1}^{(1)} - \widehat{f}_1(m^{(j_1)})| \leq \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)}}} \|u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1}^{(1)}, 0, \dots, 0; \cdot)\|_{L^{2, \infty}([0, 1]^s \times [0, +\infty))} \\ & = \inf_{\substack{m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)} \\ \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s \\ |z_{j_1}^{(1)} - \widehat{f}_1(m^{(j_1)})| \leq \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)}}} \|u(\cdot; f_1, 0) - \varphi_N(z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1}^{(1)}, 0, \dots, 0; \cdot)\|_{L^{2, \infty}([0, 1]^s \times [0, +\infty))} \\ & \equiv \delta_{N_1} \left(D_{N_1}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \eta_N \widetilde{\varepsilon}_{N_1} \right)_{L^{2, \infty}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Аналогично доказываются неравенства

$$\begin{aligned} & \delta_{N_1, N_2} \left(D_{N_1, N_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1, N_2} \right)_{L^2, \infty} \\ & \geq \delta_{N_2} \left(D_{N_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_2} \right)_{L^2, \infty}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

При $\eta_N \equiv 1$ из (5.57)–(5.58) и из теорем 3 и 4 следует, что

$$\begin{aligned} & \inf_{\substack{m^{(1)}, \dots, m^{(N_1)} \\ n^{(1)}, \dots, n^{(N_2)} \\ \varphi_N}} \sup_{\substack{f_1 \in W_2^{r_1}(0, 1)^s \\ f_2 \in W_2^{r_2}(0, 1)^s \\ |z_{j_1}^{(1)} - \hat{f}_1(m^{(j_1)})| \leq \tilde{\varepsilon}_{N_1}^{(j_1)} \\ |z_{j_2}^{(2)} - \hat{f}_2(n^{(j_2)})| \leq \tilde{\varepsilon}_{N_2}^{(j_2)}}} \|u(\cdot; f_1, f_2) - \varphi_N(z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1}^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_{N_2}^{(2)}; \cdot)\|_{L^2, \infty([0, 1]^s \times [0, +\infty))} \\ & \gg \max\{N_1^{-r_1/s}; N_2^{-(r_2+1)/s}\} \geq \max\{N^{-r_1/s}; N^{-(r_2+1)/s}\} = N^{-\min\{r_1/s; (r_2+1)/s\}}. \end{aligned}$$

Поскольку последнее неравенство выполняется при любых целых положительных N_1 и N_2 таких, что $N_1 + N_2 = N$, то оно справедливо и для минимального значения погрешности, т.е.

$$\begin{aligned} & \delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}} \right)_{L^2, \infty} \\ & \gg N^{-\min\{r_1/s; (r_2+1)/s\}}. \end{aligned}$$

В частности, соотношения (5.57) и (5.58) справедливы также в случае восстановления по точной информации, т.е. при $\varepsilon_{N_1, N_2} \equiv \bar{0}_N$. Поэтому в силу (5.34) и (5.50) справедливо также соотношение

$$\begin{aligned} & \delta_N \left(D_N; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \bar{0}_N \right)_{L^2, \infty} \\ & \gg N^{-\min\{r_1/s; (r_2+1)/s\}}. \end{aligned}$$

Оценки снизу в (3.13) и (3.14) доказаны.

Для доказательства оценок сверху в (3.13) и (3.14) для заданного $N \geq 2$ положим $N_1 = [N/2]$ и $N_2 = N - [N/2]$, где $[x]$ – целая часть числа. Тогда оператор

$$\bar{\varphi}_N(z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1}^{(1)}, z_1^{(2)}, \dots, z_{N_2}^{(2)}; x, t) \equiv \bar{\varphi}_{N_1}^{(1)}(z_1^{(1)}, \dots, z_{N_1}^{(1)}; x, t) + \bar{\varphi}_{N_2}^{(2)}(z_1^{(2)}, \dots, z_{N_2}^{(2)}; x, t),$$

где $\bar{\varphi}_{N_1}^{(1)}$ и $\bar{\varphi}_{N_2}^{(2)}$ – те же операторы, что и при доказательствах оценок сверху в теоремах 3 и 4 с $N = N_1$ и $N = N_2$ соответственно (см. (5.25), (5.26) и (5.42), (5.43)), реализует оценку сверху в (3.13) и (3.14). Это следует из равенства

$$u(x, t; f_1, f_2) = u(x, t; f_1, 0) + u(x, t; 0, f_2),$$

а также из неравенства треугольника и доказательств оценок сверху в теоремах 3 и 4.

Таким образом, утверждения $K(V)II-1^\circ$ и $K(V)II-2^\circ$ в теореме 5 доказаны. Теперь докажем $K(V)II-3^\circ$. Из (5.57) и (5.58) следует, что

$$\begin{aligned} & \delta_{N_1, N_2} \left(D_{N_1, N_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1, N_2} \right)_{L^{2, \infty}} \\ & \geq \max \left\{ \delta_{N_1} \left(D_{N_1}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1} \right)_{L^{2, \infty}}, \right. \\ & \quad \left. \delta_{N_2} \left(D_{N_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_2} \right)_{L^{2, \infty}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Пусть при заданном $N \geq 2$ минимум величины δ_{N_1, N_2} по всем целым положительным парам N_1 и N_2 таким, что $N_1 + N_2 = N$, реализуется при $N_1 = N_1^{(0)}$ и $N_2 = N_2^{(0)}$. Тогда из (5.59) следует

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{N_1 \in \mathbb{Z}_+, N_2 \in \mathbb{Z}_+ \\ N_1 + N_2 = N}} \delta_{N_1, N_2} \left(D_{N_1, N_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1, N_2} \right)_{L^{2, \infty}} \\ & = \delta_N \left(D_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}, N_2^{(0)}} \right)_{L^{2, \infty}} \\ & \geq \max \left\{ \delta_{N_1^{(0)}} \left(D_{N_1^{(0)}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}} \right)_{L^{2, \infty}}; \right. \\ & \quad \left. \delta_{N_2^{(0)}} \left(D_{N_2^{(0)}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_2^{(0)}} \right)_{L^{2, \infty}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Из доказательств соотношений (3.10) и (3.12) в теоремах 3 и 4 (см. (5.38)–(5.41) и (5.52), (5.56) и последующие за ними выкладки) имеем

$$\begin{aligned} & \delta_{N_1^{(0)}} \left(D_{N_1^{(0)}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1^{(0)}} \right)_{L^{2, \infty}} \\ & \gg \bar{\eta}_N (N_1^{(0)})^{-r_1/s} \geq \bar{\eta}_N N^{-r_1/s}, \\ & \delta_{N_2^{(0)}} \left(D_{N_2^{(0)}}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_2^{(0)}} \right)_{L^{2, \infty}} \\ & \gg (\eta_N^*)^{\alpha(s)} (N_2^{(0)})^{-(r_2+1)/s} \geq (\eta_N^*)^{\alpha(s)} N^{-(r_2+1)/s}. \end{aligned}$$

В итоге из (5.60) и последних соотношений получаем

$$\begin{aligned} & \min_{\substack{N_1 \in \mathbb{Z}_+, N_2 \in \mathbb{Z}_+ \\ N_1 + N_2 = N}} \delta_{N_1, N_2} \left(D_{N_1, N_2}; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u, u(x, 0) = f_1(x) \in W_2^{r_1}(0, 1)^s, \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x) \in W_2^{r_2}(0, 1)^s; \eta_N \tilde{\varepsilon}_{N_1, N_2} \right)_{L^{2, \infty}} \\ & \gg N^{-\min\{r_1; r_2+1\}/s} \min\{\bar{\eta}_N; (\eta_N^*)^{\alpha(s)}\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (3.15). Теорема 5 полностью доказана.

Список литературы

- [1] Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, М., 1987.
- [2] К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, Наука, М., 1986.
- [3] О. В. Локуциевский, М. Б. Гаврилов, *Начала численного анализа*, Янус, М., 1995.
- [4] В. С. Рябенкий, *Введение в вычислительную математику*, Наука, М., 1994.
- [5] Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, Физматгиз, М., 1963.
- [6] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной производной”, *Тр. МИАН СССР*, **178**, 1986, 3–113.
- [7] Н. Темиргалиев, “Об оптимальном восстановлении решений классических уравнений математической физики”, *I съезд математиков Казахстана*, Тезисы докладов, Шымкент, 1996, 151–153.
- [8] Н. Темиргалиев, “Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье”, *Вестн. Евразийск. ун-та им. Л. Н. Гумилева*, 1997, № 3, 90–144.
- [9] Н. Темиргалиев, “О задаче восстановления по неточной информации”, *Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л. Н. Гумилева*, 2004, № 1, 202–209.
- [10] Н. Темиргалиев, “Предельная нечувствительность операторов восстановления по неточной информации”, *10-я Межвузовская конференция по математике и механике*, Тезисы докладов, ЭВЕРО, Алматы, 2004, 252–253.
- [11] Н. Темиргалиев, *Математика: Избранное. Наука*, Изд-во ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, Астана, 2009.
- [12] Н. Темиргалиев, “Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте-Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье”, *Вестн. Евразийск. нац. ун-та им. Л. Н. Гумилева*, 2010, Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 1–194.
- [13] Н. Темиргалиев, *Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований*, Электронное издание, ИТМиНВ, Астана, 2012.
- [14] Ш. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, “Об информативной мощности линейных функционалов”, *Матем. заметки*, **73:6** (2003), 803–812.
- [15] Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, “Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω ”, *Матем. сб.*, **198:11** (2007), 3–20.
- [16] И. Ж. Ибатулин, Н. Темиргалиев, “Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона в метрике”, *Дифференц. уравнения*, **44:4** (2008), 491–506.
- [17] Ш. У. Ажгалиев, “О дискретизации решений уравнения теплопроводности”, *Матем. заметки*, **82:2** (2007), 177–182.
- [18] Ш. К. Абикенова, Н. Темиргалиев, “О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **46:8** (2010), 1201–1204.
- [19] Ш. К. Абикенова, А. Утесов, Н. Т. Темиргалиев, “О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева”, *Матем. заметки*, **91:3** (2012), 459–463.
- [20] Ш. У. Ажгалиев, *Приближенное восстановление по линейной информации функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов B и E* , Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Алматы, 2001.
- [21] Н. Н. Ташатов, *Приближенное восстановление функций и решений уравнения Пуассона с правой частью из анизотропных классов E и SW* , Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Караганда, 2002.
- [22] Е. И. Шангиреев, *О восстановлении решений волнового уравнения*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Караганда, 2002.
- [23] К. Е. Шерниязов, “Оптимальные в степенной шкале порядка погрешности приближенного восстановления решений уравнения теплопроводности с начальными функциями распределения температур из классов SW и E ”, *Вестн. Казахского гос. ун-та. Сер. Матем., мех., информ.*, 1998, № 9, 198–215.

- [24] М. Е. Берикханова, *Об информативных мощностях всевозможных линейных функционалов при дискретизации решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Алматы, 2007.
- [25] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.
- [26] Н. Д. Виск, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным", *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803–815.
- [27] А. Г. Марчук, К. Ю. Осипенко, "Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек", *Матем. заметки*, **17**:3 (1975), 359–368.
- [28] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье", *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 67–82.
- [29] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, "Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям", *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37–54.
- [30] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, В. М. Тихомиров, "Оптимальное восстановление и теория экстремума", *Докл. РАН*, **379**:2 (2001), 161–164.
- [31] L. Plaskota, *Noisy Information and Computational Complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [32] B. Z. Kacewicz, L. Plaskota, "On the minimal cost of approximating linear problems based on information with deterministic noisy", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **11**:5-6 (1990), 511–528.
- [33] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Wozniakowski, *Information, Uncertainty, Complexity*, Addison-Wesley Publ., Reading, MA, 1983.
- [34] J. F. Traub, H. Wozniakowski, *A General Theory of Optimal Algorithms*, ACM Monogr. Ser., Academic Press, New York, 1980.
- [35] J. F. Traub, H. Wozniakowski, "On the optimal solution of large linear systems", *J. Assoc. Comput. Mach.*, **31**:3 (1984), 545–559.