Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, Закон Грама в теории дзета-функции Римана. Часть 2, *Совр. пробл. матем.*, 2016, выпуск 21, 3–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm54>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 08:06:43

Содержание

Глава 4. Порядок роста величин Δ_n	7
4.1. O - и Ω -теоремы для Δ_n	7
4.2. Значения, которые принимает величина Δ_n	15
Глава 5. Соседние ординаты, не подчиняющиеся закону Грама	27
5.1. Большие расстояния между соседними ординатами нулей $\zeta(s)$	28
5.2. Распределение знаков в наборах $(\Delta_n, \dots, \Delta_{n+s-1})$	31
5.3. Распределение произведений $\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}$	36
Глава 6. Значения функции $\zeta(1/2 + it)$ в точках Грама	57
6.1. Верхняя оценка $\log \zeta(1/2 + it) $	61
6.2. Основные теоремы	67
Приложение I. Вспомогательные утверждения	74
Приложение II. Таблицы	82
II.1. Статистика нарушений правила Грама	82
II.2. Соседние члены последовательности Δ_n , отличные от нуля	83
II.3. Маленькие значения $\zeta(1/2 + it)$ в точках Грама	86
II.4. Дискретный момент дзета-функции Римана	90
Список литературы	92

*Светлой памяти моего Учителя
Анатолия Алексеевича Карацубы*

Глава 4. Порядок роста величин Δ_n

Теоремы 3.3 и 3.4 о распределении величин Δ_n позволяют сделать вывод о существовании таких номеров n , для которых величина $|\Delta_n|$ существенно превышает свое среднее значение $\sqrt{\log \log n}$.

Например, при сколь угодно малом фиксированном δ с условиями $0 < \delta < 0.5$ и $N \geq N_0(\varepsilon, \delta)$ из теоремы 3.4 следует существование по крайней мере

$$M \exp(-(\log \log N)^{1-\delta}) > \frac{M}{\log N}$$

номеров n , $N < n \leq N + M$, для которых выполнено неравенство

$$\Delta_n \geq (\log \log N)^{1-\delta}. \quad (4.1)$$

Вместе с тем «зазор» между (4.1) и верхней оценкой $|\Delta_n| \ll \log n$ из леммы 3.1 слишком велик. Это наводит на мысль о том, что, во-первых, оценка леммы 3.1 достаточно груба и, во-вторых, должны существовать значения Δ_n , по абсолютной величине значительно превосходящие правую часть (4.1).

Первое из этих предположений, по-видимому, является верным, однако средствами для его проверки мы не располагаем. Единственным аргументом в его пользу служит условная верхняя оценка $|\Delta_n|$, которая опирается на гипотезу Римана (теорема 4.4).

Обоснованию второго предположения мы посвящаем параграф 4.1. Именно, мы покажем, что Δ_n может принимать как положительные, так и отрицательные значения, превышающие по модулю

$$c \left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/3} \quad \text{или даже} \quad c \left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/2},$$

если гипотеза Римана верна. В последнем случае оказывается также, что большие значения $|\Delta_n|$ могут встречаться и на очень коротких промежутках изменения n (теоремы 4.2 и 4.3).

Однако ни теоремы 3.3, 3.4 о распределении значений Δ_n , ни утверждения параграфа 4.1 не позволяют ответить на следующий вопрос: принимает ли величина Δ_n заданное целочисленное значение k при изменении n на промежутке $N < n \leq N + M$, и если принимает, то как часто? Вопрос этот¹ представляется не лишенным интереса по той еще причине, что ответ на него в частном случае $k = 0$ позволил бы узнать, как часто на заданном промежутке наблюдается явление Грама–Сельберга.

Задачи такого рода и рассматриваются в параграфе 4.2. Оказывается, что всякое целочисленное значение k , находящееся между «экстремальными» значениями (существование которых гарантируется теоремами 4.2 и 4.3), принимает, и достаточно часто, величина Δ_n (теоремы 4.7–4.9).

4.1. O - и Ω -теоремы для Δ_n

Хорошо известно, что функция $S(t)$ может принимать очень большие по модулю как положительные, так и отрицательные значения (см., например, [1]). Используя особенности этой

¹Поставленный автору (в несколько иной форме) его учителем Анатолием Алексеевичем Карацубой 31 июля 2008 г.

функции, связанные с формулой Римана–Мангольдта, а также «регулярный» характер последовательности $\{t_n\}$, можно показать, что утверждения всех омега-теорем для $S(t)$ остаются в силе и тогда, когда параметр t пробегает множество точек Грама.

Применив лемму 3.3 о связи последовательностей $S(t_n + 0) = \Delta(n)$ и Δ_n , несложно вывести отсюда и соответствующие аналоги омега-теорем для Δ_n .

Однако рассуждения такого рода приводят к потери точности ряда оценок. Чтобы избежать этого, мы откажемся от использования здесь леммы 3.3. Вместо этого мы сначала докажем соответствующие омега-теоремы для дробей

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n},$$

после чего с помощью леммы 3.7 осуществим переход от q_n к Δ_n .

ТЕОРЕМА 4.1. *Существует положительная постоянная c , зависящая лишь от ε и такая, что*

$$\max_{N < n \leq N+M} \{\pm \Delta_n\} \geq c \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$q = a_1 \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/3},$$

где точное значение постоянной a_1 будет выбрано ниже. Допустим сначала, что для всех n из рассматриваемого промежутка выполнены неравенства

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} < q.$$

Полагая $u_n = t_n + q(t_{n+1} - t_n)$, для таких n будем иметь $\gamma_n < u_n$ и, следовательно,

$$n \leq N(\gamma_n + 0) \leq N(u_n + 0) = \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} + 1 + S(u_n + 0). \quad (4.2)$$

По формуле конечных приращений

$$\begin{aligned} \vartheta(u_n) &= \vartheta(t_n) + \vartheta'(t_n)(t_{n+1} - t_n)q + \frac{1}{2} \vartheta''(\xi)(t_{n+1} - t_n)^2 q^2 \\ &= \pi(n-1) + \pi q \left(1 + O\left(\frac{q}{N \log N} \right) \right) = \pi(n-1+q) + O\left(\frac{1}{N} \right), \end{aligned}$$

где $t_n < \xi < t_{n+1}$. Подставив последнее выражение в (4.2), получим

$$S(u_n + 0) \geq n - \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} - 1 = -q + O\left(\frac{1}{N} \right). \quad (4.3)$$

Покажем теперь, что неравенство (4.3) не может иметь место для всех без исключения значений n , $N < n \leq N + M$.

Рассмотрим при произвольном (не обязательно целом) $x > 1$ величину t_x из соотношения $\vartheta(t_x) = (x-1)\pi$ и положим $u_x = t_x + (t_{x+1} - t_x)q$. Тогда при некотором η , $x < \eta < x+1$, будем иметь

$$u'_x = t'_x + (t'_{x+1} - t'_x)q = t'_x + t''_\eta q. \quad (4.4)$$

Пользуясь леммой 1.1 наряду с равенствами

$$t'_x = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)}, \quad t''_x = -\frac{\pi^2 \vartheta''(t_x)}{(\vartheta'(t_x))^3},$$

при $N < x \leq N + M$ получаем:

$$u'_x = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)} - \frac{\pi^2 q \vartheta''(t_\eta)}{(\vartheta'(t_\eta))^3} = \frac{\pi}{\vartheta'(t_x)} \left(1 - O\left(\frac{q}{x \log x}\right) \right) > \frac{\pi}{2\vartheta'(t_x)} > 0.$$

Итак, u_x как функция x монотонно возрастает. Вместе с ней возрастающей будет и последовательность u_n , $N < n \leq N + M$. Согласно лемме 1.12 на промежутке $(u_N, u_{N+M}]$ найдется точка u такая, что

$$S(u) < -a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3},$$

где $a = 0.5 \cdot 10^{-3} \delta^{5/4}$, $\delta = 10^{-4} \varepsilon$. Воспользовавшись монотонностью и неограниченностью последовательности u_n , определим номер n из неравенств $u_n < u \leq u_{n+1}$. Предположим, далее, что $\gamma^{(1)} < \gamma^{(2)} < \dots < \gamma^{(k)}$ – все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие на промежуток $(u_n, u]$. Тогда, записывая приращение функции $S(t)$ на этом промежутке подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 3.17, приходим к тождеству

$$\begin{aligned} S(u) - S(u_n + 0) &= \{S(\gamma^{(1)} - 0) - S(u_n + 0)\} + \{S(\gamma^{(1)} + 0) - S(\gamma^{(1)} - 0)\} + \dots \\ &\quad + \{S(\gamma^{(k)} - 0) - S(\gamma^{(k-1)} + 0)\} + \{S(\gamma^{(k)} + 0) - S(\gamma^{(k)} - 0)\} + \{S(u) - S(\gamma^{(k)} + 0)\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

(если u совпадает с ординатой нуля $\zeta(s)$, то во всех формулах $S(u)$ следует заменить на $S(u + 0)$).

Преобразуя (4.5) с помощью формулы конечных приращений, находим

$$\begin{aligned} S(u) - S(u_n + 0) &\geq \{(\gamma^{(1)} - u_n) + (\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}) + \dots + (u - \gamma^{(k)})\} \left(-\frac{1}{2} \log \frac{u}{2\pi} + O(u^{-2}) \right) \\ &> -\frac{1}{2} (u - u_n) \log u. \end{aligned}$$

Согласно (4.4) имеем оценку

$$u - u_n \leq u_{n+1} - u_n = u'_\zeta < t'_\zeta = \frac{\pi}{\vartheta'(t_\zeta)} < \frac{\pi}{\vartheta'(t_n)} < \frac{3\pi}{\log n},$$

где $n < \zeta < n + 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} S(u) - S(u_n + 0) &> -\frac{1}{2} \frac{3\pi}{\log n} \log u_N > -2\pi, \\ S(u_n + 0) &\leq S(u) + 2\pi < -0.9a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит (4.3), если положить $a_1 = 0.8a$. Итак, найдется по крайней мере один номер n такой, что

$$S(u_n + 0) \leq -0.9a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}, \quad q_n \geq 0.8a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}.$$

В силу леммы 3.7 для такого n имеем

$$\Delta_n \geq q_n - 1 - \frac{\log N}{4N} > 0.7a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3},$$

что и требовалось.

Аналогично доказывается и существование больших по модулю отрицательных значений Δ_n . Именно, допустив, что для всех n из рассматриваемого промежутка выполняется неравенство $q_n > -q$, несложно заключить, что на всем промежутке выполняется и неравенство $\gamma_n > v_n$, где $v_n = t_n - q(t_{n+1} - t_n)$, и, следовательно,

$$N(v_n + 0) \leq N(\gamma_n - 0) < n. \quad (4.6)$$

Преобразуя левую часть (4.6) подобно тому, как это делалось выше, получим

$$S(v_n + 0) < q + O(N^{-1}). \quad (4.7)$$

Отыскивая затем с помощью леммы 1.12 точку v , $v_N < v \leq v_{N+M}$, такую, что

$$S(v) > a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3},$$

определим номер n из неравенств $v_{n-1} < v \leq v_n$. Последнее возможно, так как величины v_n образуют на рассматриваемом промежутке строго монотонную и неограниченно возрастающую последовательность.

Рассуждая точно так же, как и при доказательстве первого утверждения теоремы, и пользуясь тем, что $v_n - v_{n-1} < 3\pi(\log n)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} S(v_n + 0) - S(v) &> (v_n - v) \left(-\frac{1}{2} \log \frac{v}{2\pi} + O(v^{-2}) \right) > -2\pi, \\ S(v_n + 0) &> S(v) - 2\pi > 0.9a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство, очевидно, противоречит (4.7). Следовательно, для такого n имеем

$$q_n \leq -0.8a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}, \quad \Delta_n \leq q_n + 1 + \frac{1}{4N} < -0.7a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. При $n \rightarrow +\infty$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Omega_{\pm} \left(\left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/3} \right), \quad \gamma_n - t_n = \Omega_{\pm} ((\log n)^{-2/3} (\log \log n)^{-1/3}), \\ S(\gamma_n + 0) &= \Omega_+ \left(\left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/3} \right), \quad S(\gamma_n - 0) = \Omega_- \left(\left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/3} \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое соотношение следует непосредственно из теоремы 4.1. Для доказательства второго следует воспользоваться равенством

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - \theta_1)}{\vartheta'(t_N)} \left(1 + \frac{\pi\theta_2 M}{N \log N} \right),$$

которое было установлено при доказательстве теоремы 3.8 в предположении $N < n \leq N + M$. Наконец, последние два соотношения следуют из леммы 3.8 и неравенства

$$\kappa_n = S(\gamma_n + 0) - S(\gamma_n - 0) > 0.$$

Предположив справедливость гипотезы Римана, утверждение теоремы 4.1 можно значительно уточнить.

ТЕОРЕМА 4.2. Если верна гипотеза Римана, то при любом μ с условием

$$\frac{1}{2\pi}(\log N)^2(\log \log N)^{-3/2} < \mu \leq \frac{N}{4}$$

справедливы неравенства

$$\max_{N-3\mu < n \leq N+2\mu} \{\pm \Delta_n\} \geq \frac{1}{400} \left(\frac{\log \mu}{\log \log \mu} \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать доказательству теоремы 4.1. Положим

$$q = c \left(\frac{\log \mu}{\log \log \mu} \right)^{1/2} - 3\pi, \quad c = \frac{1}{90\pi} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}}$$

и обозначим

$$T = \frac{2\pi(N - \mu)}{\log N}, \quad H = \frac{2\pi\mu}{\log N}.$$

Допустив, что для всех n из промежутка $N - 3\mu < n \leq N + 2\mu$ справедливо неравенство

$$q_n = \frac{\gamma_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} < q,$$

закключаем отсюда, что

$$S(u_n + 0) \geq -q - N^{-1}, \quad (4.8)$$

где $u_n = t_n + (t_{n+1} - t_n)q$. Заметив, что

$$u_{N-3\mu} < T - H < T + 2H < u_{N+2\mu},$$

с помощью леммы I.13 отыщем на промежутке $(u_{N-3\mu}, u_{N+2\mu}]$ точку u такую, что

$$S(u) \leq -\frac{1}{90\pi} \left(\frac{\log H}{\log \log H} \right)^{1/2} < -c \left(\frac{\log \mu}{\log \log \mu} \right)^{1/2}.$$

Отыскивая номер n так, чтобы выполнялись неравенства $u_n < u \leq u_{n+1}$, получим

$$S(u) - S(u_n + 0) \geq -\frac{1}{2}(u - u_n) \log u > -2\pi,$$

$$S(u_n + 0) \leq S(u) + 2\pi < -c \left(\frac{\log \mu}{\log \log \mu} \right)^{1/2} + 2\pi,$$

что противоречит (4.8). Следовательно, найдется по меньшей мере один номер n , для которого

$$q_n \geq q, \quad \Delta_n \geq q_n - 1 - \frac{\log N}{4N} \geq q - 2 > c \left(\frac{\log \mu}{\log \log \mu} \right)^{1/2} - 3\pi - 2 > \frac{1}{400} \left(\frac{\log \mu}{\log \log \mu} \right)^{1/2}.$$

Доказательство второго неравенства теоремы 4.2 подобно доказательству второго неравенства теоремы 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Если гипотеза Римана верна, то при $n \rightarrow +\infty$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Omega_{\pm} \left(\left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/2} \right), & \gamma_n - t_n &= \Omega_{\pm} ((\log n)^{-1/2} (\log \log n)^{-1/2}), \\ S(\gamma_n + 0) &= \Omega_{+} \left(\left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/2} \right), & S(\gamma_n - 0) &= \Omega_{-} \left(\left(\frac{\log n}{\log \log n} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Длина промежутка, на котором теорема 4.2 гарантирует существование больших по модулю положительных и отрицательных значений, может быть уменьшена, правда, с незначительной потерей точности утверждения.

ТЕОРЕМА 4.3. *Если верна гипотеза Римана, то при любом μ с условием*

$$\frac{1}{2\pi}(\log N)\sqrt{\log \log N} \leq \mu \leq \frac{1}{2\pi}(\log N)^2(\log \log N)^{-3/2}$$

справедливы неравенства

$$\max_{N-3\mu < n \leq N+2\mu} \{\pm \Delta_n\} \geq 7.5 \cdot 10^{-4} \frac{\sqrt{\log(\mu/\log N)}}{\log \log(\mu/\log N)}, \quad (4.9)$$

$$\max_{N-3\mu < n \leq N+2\mu} \{\pm \Delta_n\} \geq 7.4 \cdot 10^{-4} \frac{\sqrt{\log \log \mu}}{\log \log \log \mu}. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$H = \frac{2\pi\mu}{\log N}, \quad T = \frac{2\pi(N-\mu)}{\log N}$$

и заметим, что для так определенных T и H будет выполнено неравенство

$$H \geq \sqrt{\log \log T}.$$

Беря

$$q = \frac{c\sqrt{\log(\mu/\log N)}}{\log \log(\mu/\log N)}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}}$$

и практически дословно повторяя доказательство теоремы 4.2. (с использованием леммы 1.14 вместо леммы 1.13), получим (4.9). Неравенства (4.10) легко получаются из (4.9), если заметить, что

$$\frac{\mu}{\log N} \geq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\log \mu}.$$

Теорема доказана.

Докажем теперь теорему о верхней границе величины $|\Delta_n|$, уточняющую оценку леммы 3.2.

ТЕОРЕМА 4.4. *Пусть δ – сколь угодно малое фиксированное число. Тогда при любом $n \geq n_0(\delta)$ имеет место оценка*

$$|\Delta_n| < (0.138 + \delta) \log n.$$

Если верна гипотеза Римана, то

$$|\Delta_n| < (0.5 + \delta) \frac{\log n}{\log \log n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.8 имеем равенство

$$\Delta_n = -S(\gamma_n + 0) + \theta \kappa_n + \theta_1 \frac{(\log n)^2}{79n},$$

где κ_n – кратность ординаты γ_n , $0 \leq \theta \leq 1$, $|\theta_1| \leq 1$. Замечая, что

$$\kappa_n = S(\gamma_n + 0) - S(\gamma_n - 0),$$

получим

$$\begin{aligned}\Delta_n &= -S(\gamma_n + 0) + \theta(S(\gamma_n + 0) - S(\gamma_n - 0)) + \theta_1 \frac{(\log n)^2}{79n} \\ &= (\theta - 1)S(\gamma_n + 0) - \theta S(\gamma_n - 0) + \theta_1 \frac{(\log n)^2}{79n},\end{aligned}$$

откуда

$$|\Delta_n| \leq (1 - \theta)|S(\gamma_n + 0)| + \theta|S(\gamma_n - 0)| + \frac{(\log n)^2}{79n}.$$

Теперь утверждение теоремы следует из оценки леммы 3.1, а в случае, когда верна гипотеза Римана – из оценки

$$|S(t)| \leq (0.5 + o(1)) \frac{\log t}{\log \log t},$$

принадлежащей Голдстону и Гонеку [2]. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть δ – сколь угодно малое фиксированное число. Тогда при любом $n \geq n_0(\delta)$ имеет место оценка

$$|\gamma_n - t_n| < 2\pi(0.138 + \delta).$$

Если верна гипотеза Римана, то

$$|\gamma_n - t_n| < \frac{\pi + \delta}{\log \log n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для заданного n выполнены неравенства

$$t_{m-1} < \gamma_n \leq t_m,$$

так что $\Delta_n = m - n$. Замечая, что

$$t_{m-1} - t_n < \gamma_n - t_n \leq t_m - t_n,$$

и пользуясь равенством (1.8), получаем:

$$t_m - t_n = \frac{\pi \Delta_n}{\vartheta'(t_n)}(1 + O(n^{-1})), \quad t_{m-1} - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - 1)}{\vartheta'(t_n)}(1 + O(n^{-1})),$$

откуда

$$\gamma_n - t_n = \frac{\pi(\Delta_n - \theta)}{\vartheta'(t_n)}(1 + O(n^{-1})) = \frac{2\pi(\Delta_n - \theta)}{\log n}(1 + o(1)),$$

где $0 \leq \theta \leq 1$. Теперь утверждение следует из оценок теоремы 4.4.

Последние из утверждений настоящего параграфа связаны с оценками величин D_n , определенных в параграфе 3.7. Оказывается, что наибольшую сложность представляет уточнение верхней границы D_n .

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть при $t > t_0 > 1$ выполнено неравенство

$$N_0(t) \geq \kappa N(t), \tag{4.11}$$

где κ – некоторое число с условием $0 < \kappa \leq 1$. Тогда при достаточно большом n справедливы неравенства

$$-0.14 \log n \leq D_n \leq \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + 0.14 \left(\frac{2}{\kappa} + 1\right) \log n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n -й вещественный нуль $\mathbf{c}_n$ функции Харди $Z(t)$ удовлетворяет неравенствам $t_{m-1} < \mathbf{c}_n \leq t_m$, так что $D_n = m - n$. Тогда имеем, очевидно

$$N(\mathbf{c}_n + 0) \geq N(t_{m-1} + 0) = m - 1 + S(t_{m-1} + 0). \quad (4.12)$$

Положив $t = \mathbf{c}_n + 0$ в неравенстве (4.11), получим

$$N(\mathbf{c}_n + 0) \leq \frac{1}{\kappa} N_0(\mathbf{c}_n + 0) \leq \frac{1}{\kappa} (n + \kappa_n), \quad (4.13)$$

где κ_n – кратность нуля $\mathbf{c}_n$. Сравнивая (4.12) и (4.13), находим

$$m - 1 + S(t_{m-1} + 0) \leq \frac{1}{\kappa} (n + \kappa_n).$$

В силу леммы 3.1

$$\begin{aligned} D_n &\leq 1 - S(t_{m-1} + 0) + \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + \frac{1}{\kappa}(S(\mathbf{c}_n + 0) - S(\mathbf{c}_n - 0)) \\ &\leq 1 + 0.138 \log n + \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + \frac{2}{\kappa} 0.138 \log n < \left(\frac{1}{\kappa} - 1\right)n + 0.14 \left(\frac{2}{\kappa} + 1\right) \log n. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$n \leq N_0(\mathbf{c}_n + 0) \leq N(\mathbf{c}_n + 0) \leq N(t_m + 0) = m + S(t_m + 0),$$

откуда

$$D_n = m - n \geq -S(t_m + 0) > -0.14 \log n.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.6. *Существует положительная постоянная c , зависящая лишь от ε , такая, что*

$$\max_{N < n \leq N+M} D_n \geq c \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$q = a \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3},$$

где $a > 0$ – некоторая постоянная. Следуя доказательству леммы 3.6, получаем

$$\tau_n = \frac{\mathbf{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n} = D_n - \theta_1 + \frac{\theta_2 \log N}{4N},$$

где $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $|\theta_2| \leq 1$. Допустив, что для всех n с условием $N < n \leq N + M$ выполняется неравенство $\tau_n \leq q$, заключаем, что

$$\mathbf{c}_n \leq u_n = t_n + q(t_{n+1} - t_n)$$

для всех n из указанного промежутка. Следовательно,

$$n \leq N(\mathbf{c}_n + 0) \leq N(u_n + 0) = \frac{\vartheta(u_n)}{\pi} + 1 + S(u_n + 0) \leq n + q + S(u_n + 0) + O\left(\frac{\log N}{N}\right),$$

откуда

$$S(u_n + 0) \geq -q + O\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

Выше было показано (см. доказательство теоремы 4.1), что при надлежащем выборе постоянной a последнее неравенство не может выполняться для всех значений n , $N < n \leq N + M$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. При $n \rightarrow +\infty$ справедливо соотношение

$$D_n = \Omega_+ \left(\left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. При попытке доказать с помощью аналогичных рассуждений Ω_- -оценку для D_n мы приходим к неравенству

$$S(v_n + 0) \leq q + \varepsilon(n) + O\left(\frac{\log N}{N}\right), \quad (4.14)$$

в котором $v_n = t_n - q(t_{n+1} - t_n)$, а $\varepsilon(n)$ обозначает (как и в теореме 3.19) число нулей $\zeta(s)$ с условием $0 < \operatorname{Im} s \leq \mathfrak{c}_n$, $\operatorname{Re} s \neq 1/2$. Отсутствие какой-либо информации о величине $\varepsilon(n)$ не позволяет привести (4.14) к противоречию с имеющимися омега-теоремами для функции $S(t)$.

Еще раз отметим, что Сельберг, цитируя в [3] результат Титчмарша о неограниченности дробей

$$\tau_n = \frac{\mathfrak{c}_n - t_n}{t_{n+1} - t_n}$$

(совпадающих с D_n с точностью до слагаемого $O(1)$), фактически утверждал, что Титчмарш доказал соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} D_n = +\infty, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} D_n = -\infty.$$

Первое из них, как было показано выше, справедливо. В то же время доказательство второго требует глубоких результатов о поведении величин $\varepsilon(n)$, сравнимых по силе с «почти гипотезой Римана».

Это еще раз подтверждает отстаиваемое в данной работе мнение о том, что Сельберг не вполне корректно процитировал в [3] работу Титчмарша и «отождествил» величины Δ_n и D_n (см. параграф 3.7).

4.2. Значения, которые принимает величина Δ_n

Ключевым обстоятельством, которое позволяет оценить снизу количество номеров n с условием $\Delta_n = 0$, является то, что это число в силу леммы 3.3 практически совпадает с числом тех n из заданного промежутка, для которых $\Delta(n) = S(t_n + 0) = 0$.

Несложные рассуждения позволяют связать такие точки Грама t_n с точками, в которых функция $S(t)$ меняет знак. Нижняя оценка количества таких точек, полученная методом Сельберга, и приводит в итоге к искомому результату.

Обобщение оценки Сельберга числа точек перемены знака на случай функции

$$\varphi(t) = S(t + 0) - k,$$

где $|k|$ – не очень большое целое число, позволяет оценить и число тех n , для которых $\Delta_n = k$.

В случае больших $|k|$ искомое утверждение получается как следствие омега-теорем для функции $S(t)$. Здесь мы существенно пользуемся особенностями графика $S(t)$, которые позволяют утверждать следующее: несмотря на наличие у этой функции точек разрыва, она принимает любое значение k , лежащее между любыми двумя ее значениями $\alpha = S(a)$ и $\beta = S(b)$ с условиями $a < b$, $\alpha > \beta$ (лемма 4.3). Кроме того, доказательство опирается и на тот факт, что целочисленные значения k принимаются функцией $S(t)$ лишь в точках Грама t_n . Как и в случае малых $|k|$, переход от значений $\Delta(n) = S(t_n + 0)$ к величинам Δ_n осуществляется с помощью леммы 3.3.

Для доказательства утверждений этого параграфа придадим лемме 3.3 следующий, более удобный для дальнейшего, вид. Обозначим через F_m число номеров n , $N < n \leq N + M$, для которых $\Delta_n = m$, а через E_m – число номеров n , $N < n \leq N + M$, для которых $\Delta(n) = m$.

ЛЕММА 4.1. *При любом целом k справедливо равенство*

$$F_k = E_{(-k)} + \theta(2|k| + 4).$$

Точность ряда дальнейших утверждений о величинах Δ_n зависит, как оказывается, от степени точности асимптотических формул для первых моментов функций, связанных с $S(t)$. По этой причине нам потребуется следующее общее утверждение.

ЛЕММА 4.2. *Пусть $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, H – произвольное число с условием $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leq H \leq T^{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$. Пусть, далее, справедливы равенства*

$$\int_T^{T+H} |S(t)| dt = \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log \log T} \left(1 + \frac{\theta_1}{f(T)}\right), \quad (4.15)$$

$$\int_T^{T+H} \left| \int_0^h S(t+u) du \right| dt = \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log \frac{1}{h}} \left(1 + \frac{\theta_2}{f(T)}\right), \quad (4.16)$$

в которых $f(T)$ – некоторая монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая при $T \geq T_0$ неравенствам $24 < f(T) < \sqrt{\log \log T}$. Пусть, наконец, k – произвольное целое число с условием

$$|k| < \frac{1}{12\pi\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{12}{f(T)}\right) \sqrt{\log \log T}. \quad (4.17)$$

Тогда для количества $\nu = \nu(T; H)$ точек перемены знака функции $\varphi(t) = S(t+0) - k$ на промежутке $(T, T+H]$ справедлива следующая оценка:

$$\nu \geq \frac{H\Delta}{2\pi} (\log T),$$

где

$$\Delta = \left(\frac{1}{f^2(T)} + \frac{\pi^3 k^2}{\log \log T} \right) \exp \left\{ -\frac{6 \log \log T}{f(T)} \right\} \exp \{ -6\pi\sqrt{\pi} |k| \sqrt{\log \log T} \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оценки величины ν воспользуемся следующим неравенством, принадлежащим Сельбергу (см. [1]):

$$\nu \geq \frac{(I_1 - I_2)^2}{2hI_3} - 1. \quad (4.18)$$

Здесь h – некоторый параметр, удовлетворяющий условиям

$$\frac{(\log \log T)^2}{\log T} < h < \frac{1}{\sqrt{\log T}}, \quad (4.19)$$

точное значение которого будет выбрано ниже,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T^{T+H} \int_0^h |\varphi(t+u)| du dt, & I_2 &= \int_T^{T+H} \left| \int_0^h \varphi(t+u) du \right| dt, \\ I_3 &= \int_T^{T+H} \left(\int_0^h |\varphi(t+u)| du \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Оценим эти интегралы, пользуясь леммами 1.15 и 1.16. Прежде всего, имеем

$$I_1 = \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |\varphi(t)| dt du$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |S(t)| dt du - |k|Hh \geq \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\log \log T} \left(1 - \frac{1}{f(T)} \right) - |k|\pi\sqrt{\pi} \right), \\
I_2 &= \int_T^{T+H} \left| \int_0^h S(t+u) du + kh \right| dt \\
&\leq \int_T^{T+H} \left| \int_0^h S(t+u) du \right| dt + Hh|k| \leq \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\log \frac{1}{h}} \left(1 + \frac{1}{f(T)} \right) + |k|\pi\sqrt{\pi} \right).
\end{aligned}$$

Наконец, применив к I_3 неравенство Коши, получим

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq h \int_T^{T+H} \int_0^h |\varphi(t+u)|^2 du dt = h \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |\varphi(t)|^2 dt du \\
&= h \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} (S^2(t+0) + 2kS(t+0) + k^2) dt du \\
&\leq h \int_0^h \left\{ \frac{H}{2\pi^2} (\log \log T) \left(1 + \frac{2.4}{\sqrt{\log \log T}} \right) + O(|k| \log T) + k^2 H \right\} du < \frac{Hh^2}{\pi^2} (\log \log T).
\end{aligned}$$

Положим теперь $h = q(T)(\log T)^{-1}$, где

$$q(T) = \exp \left\{ \frac{6 \log \log T}{f(T)} \right\} \exp \{ 6\pi\sqrt{\pi}|k|\sqrt{\log \log T} \}.$$

Тогда из (4.17) следует, что условия (4.19) выполнены. Поэтому

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &\geq \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\log \log T} - \sqrt{\log \frac{1}{h}} - \frac{2\sqrt{\log \log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi} \right) \\
&= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \left(\frac{\log q(T)}{\sqrt{\log \log T} + \sqrt{\log(1/h)}} - \frac{2\sqrt{\log \log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi} \right) \\
&\geq \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\log \log T}} \left(\frac{6 \log \log T}{f(T)} + 6\pi\sqrt{\pi}|k|\sqrt{\log \log T} \right) - \frac{2\sqrt{\log \log T}}{f(T)} - 2|k|\pi\sqrt{\pi} \right\} \\
&= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log \log T} \left(\frac{1}{f(T)} + \frac{\pi\sqrt{\pi}|k|}{\sqrt{\log \log T}} \right).
\end{aligned}$$

Переходя к оценке (4.18), будем иметь

$$\begin{aligned}
\nu &\geq \frac{(Hh)^2}{2\pi^3} (\log \log T)(\log T) \left(\frac{1}{f(T)} + \frac{\pi\sqrt{\pi}|k|}{\sqrt{\log \log T}} \right)^2 \\
&\quad \times \exp \left\{ -\frac{6 \log \log T}{f(T)} - 6\pi\sqrt{\pi}|k|\sqrt{\log \log T} \right\} \frac{\pi^2}{Hh^2 \log \log T} - 1 \\
&> \frac{H}{2\pi} (\log T) \left(\frac{1}{f^2(T)} + \frac{\pi^3 k^2}{\log \log T} \right) \exp \left\{ -\frac{6 \log \log T}{f(T)} - 6\pi\sqrt{\pi}|k|\sqrt{\log \log T} \right\}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть целое число k удовлетворяет условию

$$|k| \leq \frac{1}{12\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log \log N}.$$

Тогда для числа F_k выполнено неравенство

$$F_k \geq M \exp \{ -6\pi\sqrt{\pi}(|k| + c)\sqrt{\log \log N} \},$$

где $c = c(\varepsilon) > 0$ — постоянная леммы 1.15.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4.1 достаточно получить подходящую оценку для числа E_k номеров n , $N < n \leq N + M$, удовлетворяющих условию $\Delta(n) = k$, или, что то же, условию $S(t_n + 0) - k = 0$.

Заметим теперь следующее. Имеется ровно два типа точек, в которых функция $\varphi(t) = S(t + 0) - k$ меняет знак (рис. 5).

Рис. 5. Точки, в которых $\varphi(t)$ меняет знак: γ, γ^* – первого типа, τ, τ^* – второго типа

Первый тип – это точки разрыва $S(t)$ (совпадающие с ординатами нулей $\zeta(s)$) такие, что $\varphi(t - 0) < 0$, $\varphi(t + 0) > 0$. В каждой из точек разрыва функция $\varphi(t)$, как и функция $S(t)$, совершает скачок на положительную величину, равную кратности соответствующей ординаты. Следовательно, в точках перемены знака первого типа $\varphi(t)$ меняет знак только с минуса на плюс.

Второй тип – это нули $\varphi(t)$, расположенные на интервалах непрерывности $\varphi(t)$, которые имеют вид (γ_n, γ_{n+1}) . Поскольку $S(t)$ строго убывает на таких интервалах, в точках второго типа функция $\varphi(t)$ может менять знак лишь с плюса на минус.

Рис. 6. Нули $\varphi(t)$ в точках Грама, совпадающие с ординатами, не могут быть точками перемены знака

Отметим, что нули $\varphi(t)$, совпадающие с точкой разрыва, не могут быть точками перемены знака (рис. 6). Действительно, если $t = \gamma$ – такая точка, то $\varphi(\gamma + 0) = 0$. Так как

$$\varphi(\gamma + 0) - \varphi(\gamma - 0) = S(\gamma + 0) - S(\gamma - 0) \geq 1,$$

то

$$\varphi(\gamma - 0) \leq \varphi(\gamma + 0) - 1 = -1.$$

Поэтому $\varphi(t)$ отрицательна при t , близких к γ слева. Вместе с тем в достаточно малой окрестности вида $(\gamma, \gamma + h)$ как $S(t)$, так и $\varphi(t)$ монотонно убывают, так что $\varphi(t) < 0$ и при t , достаточно близких к γ справа. Итак, при переходе через точку $t = \gamma$ функция $\varphi(t)$ знака не меняет.

Рис. 7. Всякое значение τ , для которой число $S(\tau + 0)$ является целым, есть точка Грама: точки Грама совпадают с абсциссами точек пересечения графика $y = S(t)$ с горизонтальными прямыми $y = k$, $k \in \mathbb{Z}$

Далее, всякий нуль $\tau > t^* = 6.289\,836\dots$ функции $\varphi(t)$ является точкой Грама (рис. 7). Действительно, пусть $S(\tau + 0) = k$. Обозначив через m число ординат нулей $\zeta(s)$, не превосходящих τ и взятых с учетом кратности, из формулы Римана–Мангольдта получаем:

$$m = N(\tau) = \frac{\vartheta(\tau)}{\pi} + 1 + S(\tau + 0) = \frac{\vartheta(\tau)}{\pi} + k + 1,$$

откуда $\vartheta(\tau) = \pi(m - k - 1)$. В силу монотонности $\vartheta(t)$ заключаем: $\tau = t_{m-k}$ — точка Грама.

Из леммы 4.1 следует, что как $S(t)$, так и $\varphi(t)$ меняют знак на числовой прямой бесконечно много раз. Поэтому за всякой точкой первого типа необходимо следует точка второго типа, и наоборот.

Таким образом, число нулей $\varphi(t)$ на всяком промежутке $(T, T + H]$ не более чем на единицу отличается от числа точек разрыва $\varphi(t)$, в которых эта функция меняет знак. Иными словами, если ν — число точек перемены знака $\varphi(t)$, а E_k — число нулей $\varphi(t)$ на промежутке $(T, T + H]$, то

$$E_k \geq \frac{\nu}{2} - 1.$$

Положим теперь $T = t_N$, $H = t_{N+M} - t_N$ и воспользуемся утверждениями леммы 1.15 и леммы 4.2 с $f(T) = c^{-1}\sqrt{\log \log T}$. Получим

$$\begin{aligned} E_k &\geq \frac{H}{2\pi} (\log T) \frac{\pi^3 k^2 + c}{\log \log T} \exp \{-6c\sqrt{\log \log T}\} \exp \{-6\pi\sqrt{\pi}|k|\sqrt{\log \log T}\} \\ &> \frac{M(k^2 + c)}{\log \log N} \exp \{-6(\pi\sqrt{\pi}|k| + c)\sqrt{\log \log N}\} \\ &> 2M \exp \{-6\pi\sqrt{\pi}(|k| + c)\sqrt{\log \log N}\}, \\ F_k &\geq E_{(-k)} - 2|k| - 4 > M \exp \{-6\pi\sqrt{\pi}(|k| + c)\sqrt{\log \log N}\}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В частности, при $k = 0$ теорема 4.7 дает неравенство

$$F_0 \geqslant M e^{-c_1 \sqrt{\log \log N}}, \quad c_1 > 0.$$

Однако в этом случае функция $\varphi(t)$ совпадает с $S(t + 0)$, так что нижняя оценка величины E_0 (и, таким образом, F_0) сводится по сути к оценке числа точек перемены знака $S(t)$. Метод такой оценки, не опирающийся на асимптотические формулы для первых моментов функций, связанных с $S(t)$, был разработан в начале 1980-х годов Сельбергом и Тсангом [4] (см. также [5]). Применение оценки величины E_0 , полученной с помощью этого метода, позволяет значительно уточнить и приведенную выше оценку числа F_0 ординат γ_n , для которых наблюдается явление Грама–Сельберга.

Так, из леммы 1.17 и рассуждений, использованных для доказательства теоремы 4.7, сразу следует

ТЕОРЕМА 4.8. *Существуют положительные постоянные $b_1, b_2 > 0$, зависящие лишь от ε и такие, что число F_0 номеров n промежутка $N < n \leqslant N + M$ с условием $\Delta_n = 0$ оценивается снизу величиной*

$$M e^{-b_1 (\log \log \log N)^2},$$

а если верна гипотеза Римана – то величиной

$$M e^{-b_2 \log \log \log N} = \frac{M}{(\log \log N)^{b_2}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Существует гипотеза (см. [4; гл. 7]), согласно которой число перемен знака $S(t)$ на промежутке $(T, T + H]$ асимптотически равно

$$\frac{H \log T}{\sqrt{\pi \log \log T}}.$$

Если эта гипотеза верна, то число номеров n , $N < n \leqslant N + M$, с условием $\Delta_n = 0$ асимптотически равно

$$\frac{\sqrt{\pi} M}{\sqrt{\log \log N}}.$$

Доказательства двух оставшихся теорем опираются на известные утверждения о существовании на любом достаточно коротком промежутке точек, в которых функция $S(t)$ принимает «аномально» большие по абсолютной величине положительные и отрицательные значения (лемма 1.12).

Хотя $S(t)$ и является разрывной функцией, пользуясь ее спецификой можно показать (лемма 4.3), что $S(t)$ принимает на заданном отрезке любое промежуточное значение, находящееся между ее минимумом и максимумом (при условии, что точка максимума лежит левее точки минимума). Эти соображения и лежат в основе доказательств теорем 4.9 и 4.10.

ЛЕММА 4.3. *Пусть точки τ_1 и τ_2 таковы, что $\tau_1 < \tau_2$ и $S(\tau_1 + 0) > S(\tau_2 - 0)$. Тогда для всякого числа α с условием $S(\tau_2 - 0) < \alpha < S(\tau_1 + 0)$ на интервале (τ_1, τ_2) найдется точка τ , отличная от ординаты нуля $\zeta(s)$ и такая, что $S(\tau) = \alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сперва, что промежуток (τ_1, τ_2) не содержит ординат нулей $\zeta(s)$. Тогда функция $S(t)$ непрерывна и монотонно убывает на интервале (τ_1, τ_2) , и в этом случае утверждение леммы очевидно (рис. 8 а)).

Предположим теперь противное (рис. 8 б)); пусть $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(m)}$ – все различные ординаты на рассматриваемом интервале, $\tau_1 \leqslant \gamma^{(1)} < \gamma^{(2)} < \dots < \gamma^{(m)} \leqslant \tau_2$. Если $S(\gamma^{(1)} - 0) < \alpha$,

Рис. 8. Функция $S(t)$ принимает любое значение, лежащее между ее максимумом и минимумом при условии, что точка минимума расположена правее точки максимума

то из непрерывности $S(t)$ на $(\tau_1, \gamma^{(1)})$ следует, что искомая точка может быть выбрана на указанном интервале. Если же $S(\gamma^{(1)} - 0) \geq \alpha$, то

$$S(\gamma^{(1)} + 0) \geq S(\gamma^{(1)} - 0) + 1 \geq \alpha + 1 > \alpha,$$

и вышеприведенные рассуждения можно применить к промежутку $(\gamma^{(1)}, \tau_2)$.

Продолжая этот процесс далее, мы либо отыщем точку τ на одном из интервалов $(\gamma^{(k)}, \gamma^{(k+1)})$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, либо придем к цепочке неравенств

$$S(\gamma^{(1)} + 0) > \alpha, \quad S(\gamma^{(2)} + 0) > \alpha, \quad \dots, \quad S(\gamma^{(m)} + 0) > \alpha.$$

Так как интервал $(\gamma^{(m)}, \tau_2)$ уже не содержит точек разрыва $S(t)$, то существование точки τ , $\gamma^{(m)} < \tau < \tau_2$, следует из неравенств $S(\tau_2 - 0) < \alpha < S(\gamma^{(m)} + 0)$. Отличие τ от ординат $\gamma^{(s)}$, $s = 1, 2, \dots, m$, следует из приведенных выше рассуждений. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.9. *Существует постоянная c , зависящая лишь от ε и такая, что для любого целого k с условием*

$$|k| \leq c \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/3}$$

справедливо неравенство $F_k \geq N^{0.8\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\delta = 10^{-4}\varepsilon$, так что $0 < \delta < 10^{-7}$, $M_1 = [N^{\alpha+\delta}]$. Пусть, далее, r — произвольное целое число с условием $1 \leq r \leq [MM_1^{-1}]$. Определим T и H из равенств

$$T - 4H = t_{N+(r-1)M_1}, \quad T + 2H = t_{N+rM}. \quad (4.20)$$

Тогда несложно проверить, что $T^{\alpha+0.9\delta} \leq H \leq T^{\alpha+\delta}$. Согласно лемме 1.12 на промежутке $(T - H, T + 2H]$ найдутся точки τ'_1 и τ'_2 такие, что

$$S(\tau'_1 + 0) > K, \quad S(\tau'_2 - 0) < -K, \quad K = \left[\frac{\delta^{5/4}}{2000} \left(\frac{\log T}{\log \log T} \right)^{1/3} \right].$$

Отыскивая на промежутке $(T - 4H, T - H]$ точки τ''_1 и τ''_2 с тем же свойством и полагая $\tau_1 = \tau''_1$, $\tau_2 = \tau'_2$, будем иметь

$$S(\tau_1 + 0) > K, \quad S(\tau_2 - 0) < -K, \quad \tau_1 < \tau_2.$$

Зададимся теперь произвольным целым k с условием $|k| \leq K$ и воспользуемся леммой 4.3. Тогда мы убеждаемся в существовании точки t с условием

$$t_{N+(r-1)M_1} = T - 4H < \tau_1 < t < \tau_2 \leq T + 2H = t_{N+rM_1}, \quad (4.21)$$

отличной от ординаты нуля $\zeta(s)$ и такой, что $S(t) = k$. Как было замечено при доказательстве теоремы 4.7, такая точка t является точкой Грама: $t = t_n$. Из неравенств (4.21) следует, что

$$N + (r - 1)M_1 < n \leq N + rM_1.$$

Придавая величине r значения $1, 2, \dots, [MM_1^{-1}]$, заключаем, что общее число номеров n промежутка $N < n \leq N + M$, для которых $S(t_n + 0) = \Delta(n) = k$, оценивается снизу величиной $MM_1^{-1} - 1 > 2N^{0.8\varepsilon}$. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 4.1.

ТЕОРЕМА 4.10. Пусть верна гипотеза Римана. Тогда при любом целом k с условиями

$$\frac{1}{86\pi} \left(\frac{\log \log N}{\log \log \log N} \right)^{1/2} < |k| \leq \frac{1}{91\pi} \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/2}$$

на промежутке $N < n \leq 2N$ найдется не менее

$$\frac{N}{\log N} \exp \{ -2(90\pi k)^2 \log |k| \}$$

номеров n с условием $\Delta_n = k$. В частности, всякое значение k ,

$$\frac{1}{92\pi} \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/2} < |k| \leq \frac{1}{91\pi} \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/2},$$

принимается величиной Δ_n на указанном промежутке не менее $N^{0.02}$ раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наши рассуждения подобны доказательству теоремы 4.9, с той лишь разницей, что вместо леммы 1.12 необходимо воспользоваться леммой 1.13. Действительно, ограничиваясь случаем положительных k и полагая

$$h = \exp \{ 2(90\pi k)^2 \log |k| \}, \quad M_1 = 6 \left[\frac{h}{2\pi} \log N \right],$$

при произвольном r с условием $1 \leq r \leq [NM_1^{-1}]$ определим T и H из равенств (4.20). Замечая, что $H = h(1 + o(1))$, будем иметь

$$\begin{aligned} H &< \frac{3}{2} h \leq \frac{3}{2} \exp \left\{ 2(91\pi)^2 \frac{\log N}{(91\pi)^2 \log \log N} \cdot \frac{1}{2} (\log \log N - \log \log \log N) \right\} \\ &= N \exp \left\{ -\frac{\log N}{\log \log N} \log \log \log N \right\} < \frac{T}{3}, \\ H &> \frac{h}{2} > \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{2(91\pi)^2 \log \log N}{(86\pi)^2 \log \log \log N} \cdot \frac{1}{2} (\log \log \log N - \log \log \log \log N - 2 \log (86\pi)) \right\} \\ &> \exp \{ 1.1 \log \log N \} > (\log T)(\log \log T)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Условия леммы 1.13 выполнены. Следовательно, для любого целого числа k из условия теоремы будем иметь

$$\sup_{T-H < t \leq T+2H} \{ \pm S(t) \} \geq \frac{1}{90\pi} \left(\frac{\log H}{\log \log H} \right)^{1/2} > k + 1.$$

Согласно лемме 4.3 между $n + (r - 1)M_1$ и $N + rM_1$ найдется номер n с условием $\Delta(n) = k$. Общее же число таких номеров на промежутке $(N, 2N]$ оценивается снизу величиной

$$[NM_1^{-1}] - 2k - 4 > \frac{N}{\log N} \exp \{-2(90\pi k)^2 \log |k|\}.$$

Применяя лемму 4.1, приходим к первому утверждению теоремы. Второе утверждение получим, если подставим в последнее неравенство вместо k значение

$$\frac{1}{91\pi} \left(\frac{\log N}{\log \log N} \right)^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Если целое число k превосходит по модулю $c\sqrt{\log \log N}$, где $c = (12\pi\sqrt{\pi})^{-1}$, то для величины F_k мы имеем лишь очень слабую оценку теоремы 4.7. Вместе с тем согласно теореме 3.3 при любом A , даже сколь угодно большом (но фиксированном), каждое из неравенств

$$\Delta_n \leq -A\sqrt{\log \log N}, \quad \Delta_n \geq A\sqrt{\log \log N}$$

выполняется для положительной доли номеров n промежутка $N < n \leq N + M$.

Это позволяет предположить, что при k , близких к $\sqrt{\log \log N}$, оценка теоремы 4.7 может быть уточнена. Пример такого уточнения дается теоремой 4.11. Ее доказательство опирается на два вспомогательных утверждения (леммы 4.3 и I.18).

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть $A > 0$ – сколь угодно большое фиксированное число, $N \geq N_0(\varepsilon, A)$. Тогда при любом целом k с условием $|k| \leq A\sqrt{\log \log N}$ справедлива следующая оценка:

$$F_k \geq \frac{cM}{\log N} (\log \log \log \log N)^{-1}, \quad c = \frac{\exp \{-(2\pi A)^2\}}{100A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай положительных k . Положим $T = t_N$, $H = t_{N+M} - t_N$ и определим $E = E(A; T, H)$ как множество точек t промежутка $T \leq t \leq T + H$, удовлетворяющих условию

$$S(t) > 2A\sqrt{\log \log T}.$$

Согласно лемме I.19 имеем

$$\text{mes}(E) \sim \frac{H}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\pi A\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-u^2/2} du > b_1 H, \quad (4.22)$$

где $b_1 = (0.07/(\pi A))e^{-(2\pi A)^2}$.

Множество E состоит из конечного числа непересекающихся интервалов (α_j, β_j) , $j = 1, 2, \dots, s$, левые и правые концы которых занумеруем в порядке возрастания:

$$T \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_s < \beta_s \leq T + H.$$

Распределим эти интервалы по совокупностям $E_1, E_2, \dots$ по следующему правилу. Интервал (α_1, β_1) относим к совокупности E_1 . Если интервал (α_j, β_j) уже отнесен к совокупности E_m , то интервал $(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1})$ относим к той же совокупности E_m в том случае, если отрезок $[\beta_j, \alpha_{j+1}]$ не содержит точек перемены знака функции $S(t)$, и относим к совокупности E_{m+1} в противном случае. Из этого построения следует, что для всякой совокупности отрезок минимальной длины, ее покрывающий, не содержит точек перемен знака функции $S(t)$.

Положим теперь $h = 4.39 \log \log \log \log T$ и отнесем каждую из построенных совокупностей к первому или второму классу в зависимости от того, будет суммарная длина интервалов,

Рис. 9. На рисунке, схематически изображающем график функции $y = S(t)$ и прямую $y = \lambda = 2A\sqrt{\log \log T}$, промежутки (α_j, β_j) , $j = 1, 2, 3, 4$, относятся к первой совокупности, а промежутки (α_5, β_5) и (α_6, β_6) – ко второй

составляющих эту совокупность, меньше $3h$ или нет. Обозначим, наконец, через L_1 и L_2 суммарные длины промежутков (α_j, β_j) , образующих соответственно совокупности первого и второго классов. Тогда из (4.22) имеем оценку

$$L_1 + L_2 > b_1 H. \quad (4.23)$$

Предположим, что совокупность E_m , образованная интервалами $(\alpha_\ell, \beta_\ell)$, $(\alpha_{\ell+1}, \beta_{\ell+1})$, $\dots$, (α_n, β_n) , отнесена ко второму классу. Из вышеприведенных рассуждений следует, что отрезок $[\alpha_\ell, \beta_n]$, с одной стороны, не содержит ни одной точки перемены знака $S(t)$ и, с другой стороны, имеет длину, не меньшую $3h$ (см. рис. 10). Но тогда интервал $(\alpha_\ell + h, \beta_n - h)$ непуст и обладает следующим свойством: для всякой его точки τ интервал $(\tau - h, \tau + h)$ не содержит точек перемены знака $S(t)$.

Рис. 10. Для всякой точки $\tau \in (\alpha_\ell + h, \beta_n - h)$ промежуток $(\tau - h, \tau + h)$ не содержит точек перемены знака $S(t)$

Если теперь r обозначает число совокупностей, отнесенных ко второму классу, то мера μ множества точек τ , $T \leq \tau \leq T + H$, таких, что $S(t)$ не меняет знака на интервале $(\tau - h, \tau + h)$, оценивается снизу величиной

$$\sum_{E_m \text{ принадлежит} \text{ второму классу}} (\beta_n - \alpha_\ell - 2h) = \sum_{E_m \text{ принадлежит} \text{ второму классу}} (\beta_n - \alpha_\ell) - 2rh \geq L_2 - 2rh.$$

С другой стороны, из леммы I.18 следует, что

$$\mu \leq \frac{b_2 H}{\sqrt{\log \log T}},$$

где $b_2 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая лишь от ε . Таким образом,

$$L_2 - 2rh \leq \frac{b_2 H}{\sqrt{\log \log T}}.$$

В то же время из определения совокупностей второго класса имеем оценку $L_2 \geq 3h \cdot r$. Поэтому

$$rh \leq L_2 - 2rh \leq \frac{b_2 H}{\sqrt{\log \log T}},$$

$$L_2 \leq 2rh + \frac{b_2 H}{\sqrt{\log \log T}} \leq \frac{3b_2 H}{\sqrt{\log \log T}}. \quad (4.24)$$

Пользуясь (4.22) и (4.24), получаем:

$$L_1 > b_1 H - \frac{3b_2 H}{\sqrt{\log \log T}} > (1 - \delta)b_1 H, \quad (4.25)$$

где $\delta = 10^{-4}$.

Пусть теперь R – число совокупностей, отнесенных к первому классу. Поскольку суммарная длина интервалов, образующих каждую из таких совокупностей, не превосходит $3h$, то $L_1 < 3Rh$. Вместе с (4.25) это дает:

$$3Rh > (1 - \delta)b_1 H, \quad R > (1 - \delta) \frac{b_1}{3} H h^{-1}.$$

Пусть k – заданное целое число с условиями

$$1 \leq k \leq A\sqrt{\log \log N} < 2A\sqrt{\log \log T},$$

E_m – произвольная совокупность первого класса, и пусть $(\alpha_\ell, \beta_\ell)$, $(\alpha_{\ell+1}, \beta_{\ell+1})$, $\dots$, (α_n, β_n) – образующие ее интервалы. Выберем на (α_n, β_n) произвольную точку τ_1 так, чтобы выполнялись неравенства

$$S(\tau_1) \geq 2A\sqrt{\log \log T} > k.$$

Пусть, далее, τ_2 – ближайшая к β_n справа точка перемены знака функции $S(t)$. Поскольку $S(t)$ меняет знак с плюса на минус, точка τ_2 необходимо является точкой Грама² и $S(\tau_2) = 0$. Итак,

$$S(\tau_1) > k > S(\tau_2), \quad \tau_1 < \tau_2.$$

Согласно лемме I.18 между τ_1 и τ_2 найдется по меньшей мере одна точка τ такая, что $S(\tau + 0) = k$. Поскольку найденные выше точки τ_2 перемены знака, отвечающие различным совокупностям, различны (это следует из процедуры разбиения множества интервалов (α_j, β_j) на совокупности), то количество таких точек τ на промежутке $T < t \leq T + H$ оценивается снизу числом

$$R - 1 > (1 - \delta) \frac{b_1}{3} H h^{-1} > \frac{\pi b_1}{6.6} \frac{M}{\log N} (\log \log \log \log N)^{-1}.$$

Теперь утверждение леммы следует из леммы 4.1.

²См. доказательство теоремы 4.7.

В случае отрицательных k доказательство проводится аналогично. Отличие заключается в том, что в качестве E следует рассматривать множество точек t промежутка $(T, T + H]$, для которых $S(t) \leq -2A\sqrt{\log \log T}$. Далее все промежутки, образующие E , следует разбить на совокупности, а совокупности – на классы подобно тому, как это делалось выше (полученные выше оценки величин L_1, L_2, R при этом, очевидно, сохраняют силу). На заключительном шаге при рассмотрении произвольной совокупности E_m первого класса в качестве τ_1 следует брать точку перемены знака $S(t)$, ближайшую к α_ℓ слева, а в качестве τ_2 – произвольную точку интервала (α_n, β_n) , так что

$$S(\tau_2) < -2A\sqrt{\log \log T} < -A\sqrt{\log \log N} \leq k \leq -1 < S(\tau_1) = 0, \quad \tau_1 < \tau_2.$$

Теперь утверждение теоремы следует из лемм [1.18](#) и [4.1](#).

Глава 5. Соседние ординаты, не подчиняющиеся закону Грама

Настоящая глава посвящена изучению поведения чисел в наборах вида

$$(\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}), \quad (5.1)$$

где $s \geq 2$ – фиксированное целое число, а n неограниченно возрастает. Ее появление явилось следствием попыток автора дать ответ на следующий вопрос, ранее, по всей видимости, не рассматривавшийся: как часто встречаются пары, тройки, четверки и т.д. подряд идущих ординат γ_n , для каждой из которых явление Грама–Сельберга не имеет места, и каково в таких случаях распределение знаков в соответствующих наборах

$$(\Delta_n, \Delta_{n+1}), \quad (\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2}), \quad (\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2}, \Delta_{n+4}), \quad \dots?$$

Из определения Δ_n следует, что одновременное выполнение неравенств

$$\Delta_n > 0, \quad \Delta_{n+1} < 0$$

привело бы к противоречивому соотношению $\gamma_{n+1} \leq t_n < \gamma_n$. Таким образом, номера n , отвечающие соотношению $\Delta_n \Delta_{n+1} \neq 0$, можно разбить на три класса в зависимости от того, какое из следующих условий окажется выполненным:

- 1) $\Delta_n > 0, \Delta_{n+1} > 0$;
- 2) $\Delta_n < 0, \Delta_{n+1} < 0$;
- 3) $\Delta_n < 0, \Delta_{n+1} > 0$.

Вычисления показывают, что каждый из этих классов непуст, а наименьшие принадлежащие им значения n равны соответственно 4923, 3359 и 379. Данные таблицы II.2 приложения II показывают, например, что среди первых 10 млн номеров n доли попавших в первый, второй и третий классы составляют 1.05 %, 1.05 % и 0.46 %. Однако эта таблица плохо отражает истинное положение дел, поскольку (как будет показано ниже) при неограниченном возрастании N эти доли стремятся к 50 %, 50 % и 0 % соответственно.

Похожая картина наблюдается и в случае, если вместо произведений двух соседних членов последовательности Δ_n рассматривать произведения трех, четырех, пяти и вообще любого фиксированного числа s подряд идущих величин $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}$.

Именно, пусть E_s – множество номеров n с условием $\Delta_n \Delta_{n+1} \dots \Delta_{n+s-1} \neq 0$, и пусть $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ – произвольный набор, элементы которого равны ± 1 . Пусть, далее, $E_s(\mathbf{e})$ обозначает множество тех номеров $n \in E_s$, для которых знак Δ_{n+j-1} совпадает с ε_j для всех $j = 1, \dots, s$:

$$\text{sign } \Delta_n = \varepsilon_1, \quad \text{sign } \Delta_{n+1} = \varepsilon_2, \quad \dots, \quad \text{sign } \Delta_{n+s-1} = \varepsilon_s.$$

Отметим, что большая часть из 2^s множеств $E_s(\mathbf{e})$, отвечающих всем возможным наборам $\mathbf{e}$, являются пустыми. Действительно, рассмотренный выше пример (с $s = 2$, $\mathbf{e} = (1, -1)$) показывает, что непустому множеству не может отвечать набор $\mathbf{e}$, в котором найдется пара соседних элементов вида $\varepsilon_j = 1, \varepsilon_{j+1} = -1$. Иначе говоря, для того, чтобы множество $E_s(\mathbf{e})$ было непустым, необходимо, чтобы величины ε_j , составляющие набор $\mathbf{e}$, образовывали неубывающую последовательность: $\varepsilon_1 \leq \dots \leq \varepsilon_s$. Так как $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, то это возможно лишь в случае, когда $\mathbf{e}$ имеет вид

$$(\underbrace{-1, \dots, -1}_r, \underbrace{1, \dots, 1}_{s-r}),$$

где $0 \leq r \leq s$. Следовательно, общее число допустимых наборов равно $s + 1$.

Как и в случае $s = 2$, среди $s + 1$ множеств $E_s(\mathbf{e})$, отвечающих допустимым наборам $\mathbf{e}$, можно указать два исключительных множества, для каждого из которых число элементов, не превосходящих N , составляет $0.5N + o(N)$ при неограниченном возрастании N . Эти исключительные множества (обозначаемые в дальнейшем через E_s^+ и E_s^-) отвечают наборам $\mathbf{e}^+ = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{e}^- = (-1, \dots, -1)$, составленным из чисел одного знака.

Этот неожиданный эффект «неравноправия» различных допустимых наборов можно пояснить следующим образом. Одновременному наличию в наборе $\mathbf{e}$ положительных и отрицательных чисел должны отвечать перемены знака в последовательности величин Δ_n , т.е. неравенства

$$\Delta_n < 0, \quad \Delta_{n+1} > 0. \quad (5.2)$$

Если Δ_n велико по модулю, то для выполнения неравенств (5.2) величина Δ_m при переходе от $m = n$ к $m = n + 1$ должна совершить достаточно резкий скачок. С другой стороны, этот скачок может быть и не таким резким, но для этого необходимо, чтобы модуль величины Δ_n был не очень велик. Таким образом, для частого осуществления условий (5.2) имеется два препятствия.

Первое препятствие заключается в том, что при больших n величина $|\Delta_n|$, как правило, очень велика. Согласно следствию из теоремы 3.3 для любой сколь угодно медленно растущей функции $\Phi(x) > 0$ количество номеров $n \leq N$ с условием

$$|\Delta_n| \leq \Phi^{-1}(n) \sqrt{\log \log n}$$

есть $o(N)$. Иными словами, «почти всегда» Δ_n имеет порядок $\Phi^{-1}(n) \sqrt{\log \log n}$ и выше.

Второе препятствие состоит в следующем. Согласно лемме 5.3 резкий скачок при переходе от Δ_n к Δ_{n+1} (и, как следствие, большое значение разности $\Delta_{n+1} - \Delta_n$) возникает в случае, когда соседние ординаты γ_n и γ_{n+1} разделены большим числом точек Грама. Можно, однако, показать (см. лемму 5.1), что доля номеров n , для которых промежутки $[\gamma_n, \gamma_{n+1})$ содержит не менее k таких точек, не превосходит ae^{-bk} , где $a, b > 0$, и, таким образом, чрезвычайно быстро убывает с ростом k .

Итак, если величина Δ_n положительна (отрицательна), то при любом фиксированном $s \geq 2$ все величины $\Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}$ «почти всегда» будут иметь тот же знак, что и Δ_n . Поскольку число положительных (отрицательных) членов в последовательности Δ_n , $n \leq N$, эквивалентно $0.5N$, то и число номеров n из того же промежутка, попавших в каждое из множеств E_s^+, E_s^- , также эквивалентно $0.5N$.

Строгому обоснованию приведенных выше рассуждений посвящена первая часть главы (параграфы 5.1, 5.2).

Утверждения первых двух параграфов уточняются и дополняются в параграфе 5.3, где строится функция распределения для произведений

$$\Delta_n \Delta_{n+1} \cdots \Delta_{n+s-1} \quad (5.3)$$

и доказываются теоремы о существовании наборов (5.1), состоящих из одних лишь аномально малых или одних лишь аномально больших значений Δ_n .

В отличие от остальных глав, здесь мы предполагаем, что $N \geq N_0$, где постоянная N_0 зависит не только от ε , но и от s .

5.1. Большие расстояния между соседними ординатами нулей $\zeta(s)$

Приведенное ниже утверждение (лемма 5.1) имеет целью показать, что доля промежутков (γ_n, γ_{n+1}) , длина которых в v раз превышает среднее значение $2\pi(\log \gamma_n)^{-1}$, убывает с ростом v как $O(e^{-cv})$, где c — положительная постоянная.

ЛЕММА 5.1. Пусть $v > 0$, и пусть $\nu = \nu(v)$ – количество пар соседних ординат γ_n, γ_{n+1} нулей $\zeta(s)$, удовлетворяющих условиям

$$T < \gamma_n < \gamma_{n+1} \leq T + H, \quad \gamma_{n+1} - \gamma_n > \frac{2\pi v}{\log T}. \quad (5.4)$$

Тогда для $\nu(v)$ справедлива оценка

$$\nu(v) \leq \kappa(v) \frac{H}{2\pi} \log T, \quad \kappa(v) = e^4 \exp \left\{ -\frac{v}{2ec_0} + \frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 < v \leq 8ec_0$, то искомая оценка следует из тривиальной, поскольку

$$\nu(v) \leq N(T+H) - N(T) < \frac{H}{2\pi} \log T \leq e^4 \frac{H}{2\pi} (\log T) \exp \left\{ -\frac{v}{2ec_0} \right\} < \kappa(v) \frac{H}{2\pi} \log T.$$

Если же

$$v > \frac{16}{\pi} \frac{\log T}{\log \log \log T},$$

то $\nu(v) = 0$ в силу теоремы Литтлвуда [6], согласно которой

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n < \frac{32}{\log \log \log \gamma_n}$$

для всех достаточно больших n .

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда

$$8ec_0 < v \leq \frac{16}{\pi} \frac{\log T}{\log \log \log T}.$$

Положим $h = \pi v (2 \log T)^{-1}$ и рассмотрим произвольную пару γ_n, γ_{n+1} , отвечающую (5.4). При любом t с условием $\gamma_n < t < \gamma_n + 2h$ промежуток $(t, t + 2h)$ целиком лежит в $(\gamma_n, \gamma_n + 4h)$ и, таким образом, не содержит ни одной ординаты нулей $\zeta(s)$. Следовательно,

$$N(t + 2h) - N(t) = \frac{1}{\pi} (\vartheta(t + 2h) - \vartheta(t)) + S(t + 2h) - S(t) = 0$$

при всех t , $\gamma_n < t \leq \gamma_n + 2h$. Итак, для указанных значений t имеем

$$\begin{aligned} |S(t + 2h) - S(t)| &= \frac{1}{\pi} (\vartheta(t + 2h) - \vartheta(t)) = \frac{1}{\pi} (2h\vartheta'(t) + 2h^2\vartheta''(t + 2\theta h)) \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ 2h \left(\log \frac{t}{2\pi} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right) + 2h^2 \left(\frac{1}{2(t + 2\theta h)} + O\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) \right\} \\ &> \frac{h}{\pi} \log \frac{t}{2\pi} > \frac{h}{\pi} \log \frac{T}{2\pi} = \frac{v}{2} \left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T} \right). \end{aligned}$$

Положим $k = [v/(4ec_0)]$, так что

$$2 \leq k \leq \frac{2}{\pi ec_0} \frac{\log T}{\log \log \log T} < c \log Y,$$

где c – сколь угодно малое фиксированное число. Суммируя обе части неравенства

$$2h \left(\frac{v}{2} \right)^{2k} \left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T} \right)^{2k} \leq \int_{\gamma_n}^{\gamma_n + 2h} (S(t + 2h) - S(t))^{2k} dt$$

по всем $\nu(v)$ парам γ_n, γ_{n+1} , отвечающим (5.4), и пользуясь леммой 3.15, находим

$$2h\nu(v) \left(\frac{v}{2}\right)^{2k} \left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{2k} \leq \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2k} dt \leq \exp \left\{ \frac{v\varepsilon}{80c_0\sqrt{ke}} \right\} \frac{c_0}{56} (2c_0)^{2k} H,$$

откуда

$$\begin{aligned} \nu(v) &\leq \frac{H}{2h} \frac{c_0}{56} \left(\frac{4c_0k}{v}\right)^{2k} \left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k} \exp \left\{ \frac{v\varepsilon}{80c_0\sqrt{ke}} \right\} \\ &\leq \frac{c_0}{28v} \exp \left\{ \frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}} \right\} \left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k} e^{-2k} \frac{H}{2\pi} \log T. \end{aligned}$$

Из неравенств, которым удовлетворяет v , находим

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\log 2\pi}{\log T}\right)^{-2k} &\leq \exp \left\{ \frac{4k \log 2\pi}{\log T} \right\} \leq \exp \left\{ \frac{v}{ec_0} \frac{\log 2\pi}{\log T} \right\} < \exp \left\{ \frac{4 \log 2\pi}{\pi ec_0} (\log \log \log T)^{-1} \right\}, \\ \nu(v) &\leq \frac{c_0}{28 \cdot 8ec_0} \exp \left\{ \frac{4 \log 2\pi}{\pi ec_0} (\log \log \log T)^{-1} \right\} \exp \left\{ -2 \left(\frac{v}{4ec_0} - 1 \right) \right\} \exp \left\{ \frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}} \right\} \frac{H}{2\pi} \log T \\ &< \frac{1}{80} \exp \left\{ -\frac{v}{2ec_0} + \frac{\varepsilon\sqrt{v}}{20\sqrt{2c_0}} \right\} \frac{H}{2\pi} \log T < \kappa(v) \frac{H}{2\pi} \log T. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Неравенство леммы 5.1 позволяет получить верхнюю оценку суммы

$$S_\kappa(N; M) = \sum_n (\gamma_{n+1} - \gamma_n)^\kappa, \quad \kappa > 0,$$

необходимую для доказательства основных утверждений главы.

ЛЕММА 5.2. *При любом $\kappa \geq 1$ имеет место оценка*

$$S_\kappa(N; M) \leq c_5 \left(\frac{2\pi c_4}{\log N} \right)^\kappa \Gamma(\kappa + 1) M,$$

где $c_4 = 8.7ec_0$, $c_5 = 9e^5 c_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $T = \gamma_N$, $H = \gamma_{N+M} - \gamma_N$, так что

$$T = (1 + o(1)) \frac{2\pi N}{\log N}, \quad H = (1 + o(1)) \frac{2\pi M}{\log N}$$

и, следовательно,

$$T^{\alpha+\varepsilon_1} \leq H \leq T^{\alpha+\varepsilon},$$

где $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$. Распределим все ординаты γ_n , $N < n \leq N + M$, по классам $E_0, E_1, E_2, \dots$, относя к классу E_r те из них, которые удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi r}{\log T} \leq \gamma_{n+1} - \gamma_n < \frac{2\pi(r+1)}{\log T}.$$

Согласно лемме 5.1 число элементов в классе E_r не превосходит

$$\kappa(r) \frac{H}{2\pi} \log T, \quad \kappa(r) = e^4 \exp \left\{ -\frac{r}{2ec_0} + \frac{\varepsilon\sqrt{r}}{20\sqrt{2c_0}} \right\}.$$

Замечая, что

$$-\frac{r}{2ec_0} + \frac{\varepsilon\sqrt{r}}{20\sqrt{2}c_0} \leq -\frac{r}{2ec_0} \left(1 - 6e\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right) < -\frac{0.23r}{2ec_0} = -\beta r$$

при $\varepsilon < 10^{-3}$, получаем

$$S_\kappa(N; M) \leq e^4 \sum_{r=0}^{+\infty} \left(\frac{2\pi(r+1)}{\log T}\right)^\kappa e^{-\beta(r+1)+\beta} \frac{H}{2\pi} \log T \leq e^{4+\beta} \left(\frac{2\pi}{\log T}\right)^\kappa V_\kappa \frac{H}{2\pi} \log T,$$

$$V_\kappa = \sum_{r=1}^{+\infty} r^\kappa e^{-\beta r}.$$

Функция $f(r) = r^\kappa e^{-\beta r}$ монотонно возрастает на отрезке $1 \leq r \leq r_0 = \kappa\beta^{-1}$, достигает в точке $r = r_0$ максимума, равного

$$\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa, \quad (5.5)$$

после чего монотонно убывает. Оценивая слагаемые суммы V_κ , отвечающие значениям $1 \leq r \leq r_1 - 1$ и $r \geq r_1 + 2$, $r_1 = [r_0]$, интегралами по соответствующим промежуткам, а слагаемые, отвечающие значениям $r = r_1, r_1 \pm 1$, величиной (5.5), получим

$$\begin{aligned} V_\kappa(N; M) &\leq \left(\int_0^{r_1} + \int_{r_1+1}^{+\infty}\right) f(r) dr + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa < \int_0^{+\infty} f(r) dr + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa \\ &= \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}} + 3\left(\frac{\kappa}{e\beta}\right)^\kappa = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}} \left(1 + 3\beta \frac{(\kappa e^{-1})^\kappa}{\Gamma(\kappa+1)}\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{3\beta}{e}\right) \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^{\kappa+1}} < 8.9ec_0 \Gamma(\kappa+1) \beta^{-\kappa}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_\kappa(N; M) &< e^{4+\beta} \left(\frac{2\pi}{\log T}\right)^\kappa \cdot 8.9ec_0 \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\beta^\kappa} \\ &< 9e^5 c_0 \left(\frac{2\pi}{\beta \log T}\right)^\kappa \Gamma(\kappa+1) < 9e^5 c_0 \left(\frac{2\pi \cdot 8.7ec_0}{\log N}\right)^\kappa \Gamma(\kappa+1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

5.2. Распределение знаков в наборах $(\Delta_n, \dots, \Delta_{n+s-1})$

Основное утверждение этого параграфа (теорема 5.1) показывает, что как бы ни было велико фиксированное число $s \geq 2$, «почти всегда» набор (5.1) состоит из чисел одного знака, причем асимптотически в половине случаев все элементы такого набора положительны, а в половине отрицательны.

По аналогии с величинами $r(n) = \Delta(n) - \Delta(n-1)$, введенными в параграфе 3.2, определим величины

$$r_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}.$$

ЛЕММА 5.3. *Величина $r_n + 1$ совпадает с числом точек Грама на промежутке $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определив номера μ и ν из неравенств

$$t_{\mu-1} < \gamma_{n-1} \leq t_\mu, \quad t_{\nu-1} < \gamma_n \leq t_\nu,$$

будем иметь

$$\Delta_n = \nu - n, \quad \Delta_{n-1} = \mu - n + 1, \quad 1 + r_n = \nu - \mu.$$

Но разность $\nu - \mu$ совпадает с числом точек Грама на промежутке $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. При любом n справедливо неравенство $r_n \geq -1$.

ЛЕММА 5.4. При любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_n |r_n|^\kappa \leq 1.1c_5(c_4\kappa)^\kappa M$$

(здесь и далее c_4, c_5 – постоянные из леммы 5.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_{\nu-1} < \gamma_{N+M} \leq t_\nu$. В силу леммы 1.1 для длины G_ν наикратчайшего промежутка Грама, имеющего непустое пересечение с отрезком $[\gamma_N, \gamma_{N+M}]$, имеем оценку

$$h = t_\nu - t_{\nu-1} > \frac{2\pi}{\ln N}.$$

Следовательно, при любом n , $N < n \leq N + M$, число точек Грама, попавших на $[\gamma_{n-1}, \gamma_n)$, не превосходит $(\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1} + 1$. Отсюда по лемме 5.3 получаем: $r_n \leq (\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1}$. Пользуясь оценкой леммы 5.2, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_n |r_n|^\kappa &\leq \sum_{n: r_n = -1} 1 + \sum_{n: r_n \geq 1} ((\gamma_n - \gamma_{n-1})h^{-1})^\kappa \leq M + c_5\Gamma(\kappa + 1) \left(\frac{2\pi c_4}{h \ln N} \right)^\kappa M \\ &< M + c_5(\kappa c_4)^\kappa M < 1.1c_5(\kappa c_4)^\kappa M. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Для целых i, j с условием $0 \leq i < j$ положим

$$r_n(i, j) = \Delta_{n+j} - \Delta_{n+i}.$$

ЛЕММА 5.5. Пусть $0 \leq i < j \leq s$. Тогда при любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_n |r_n(i, j)|^\kappa \leq 1.2c_5(c_4 s \kappa)^\kappa M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения r_n и $r_n(i, j)$ следует тождество

$$r_n(i, j) = r_{n+j} + r_{n+j-1} + \dots + r_{n+i+1}.$$

Применяя к нему неравенство Гёльдера и оценку леммы 5.4, получим

$$\begin{aligned} \sum_n |r_n(i, j)|^\kappa &\leq \sum_n (j-i)^{\kappa-1} (|r_{n+j}|^\kappa + |r_{n+j-1}|^\kappa + \dots + |r_{n+i+1}|^\kappa) \\ &\leq s^{\kappa-1} \sum_n \sum_{t=i+1}^j |r_{n+t}|^\kappa \leq s^\kappa \sum_{N < n \leq N+M+s} |r_n|^\kappa \\ &\leq s^\kappa \cdot 1.1c_5(\kappa c_4)^\kappa (M + s) < 1.2c_5(\kappa c_4 s)^\kappa M. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.6. Пусть $0 \leq j \leq s$ – целое число. Тогда при любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_n' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa} \leq \frac{3.6M}{\sqrt{\log L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях леммы 4.1 сумма $F_r + F_{-r} = \mathcal{F}_r$ равна числу величин Δ_n с условием $|\Delta_n| = r$, $N < n \leq N + M + s$ ($r = 0, 1, 2, \dots$). Положив $R = \sqrt[4]{L}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_n' |\Delta_{n+j}|^{-\kappa} &\leq \sum_{N < n \leq N+M+s} |\Delta_n|^{-\kappa} = \sum_{r \geq 1} \mathcal{F}_r \cdot r^{-\kappa} \\ &= \left(\sum_{r \leq R} + \sum_{r > R} \right) \mathcal{F}_r \cdot r^{-\kappa} \leq \left(\sum_{r \leq R} \mathcal{F}_r \right) + R^{-\kappa} \left(\sum_{r > R} \mathcal{F}_r \right). \end{aligned}$$

Полагая $x = \pm y$, $y = \pi R \sqrt{2/L}$ в теореме 3.3, получаем

$$\sum_{r \leq R} \mathcal{F}_r \leq (M + s) \left(\frac{2y}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2 \cdot 1.79}{\sqrt{\log L}} \right) < \frac{3.59M}{\sqrt{\log L}}.$$

Таким образом, исходная сумма не превосходит

$$\frac{3.59M}{\sqrt{\log L}} + MR^{-\kappa} < \frac{3.6M}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.7. Пусть $0 \leq i < j \leq s$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n' \left| \frac{r_n(i, j)}{\Delta_{n+j}} \right| \leq \frac{4.8c_4 s M \log \log L}{\sqrt{\log L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\kappa = 0.5 \log \log L$. Применяя к исходной сумме неравенство Гёльдера наряду с оценками лемм 5.5 и 5.6, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_n' \left| \frac{r_n(i, j)}{\Delta_{n+j}} \right| &\leq \left(\sum_n |r_n(i, j)|^\kappa \right)^{1/\kappa} \left(\sum_n |\Delta_{n+j}|^{-\kappa/(\kappa-1)} \right)^{1-1/\kappa} \\ &\leq (1.2c_5 (c_4 s \kappa)^\kappa M)^{1/\kappa} \left(\frac{3.6M}{\sqrt{\log L}} \right)^{1-1/\kappa} = \left(\frac{c_5}{3} \right)^{1/\kappa} \frac{3.6e c_4 s \kappa M}{\sqrt{\log L}} < \frac{4.8c_4 s M \log \log L}{\sqrt{\log L}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим $e_n = \text{sign } \Delta_n$, так что $e_n = |\Delta_n|/\Delta_n$ при $\Delta_n \neq 0$.

ЛЕММА 5.8. Пусть $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2m} < i_{2m+1}$ — целые числа. Тогда равенства

$$e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m}} = 1 + 2\theta_1 f_m, \quad (5.6)$$

$$e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m+1}} = e_{n+i_{2m+1}} + 2\theta_2 f_m, \quad (5.7)$$

в которых

$$f_m = \left| \frac{r_n(i_1, i_2)}{\Delta_{n+i_2}} \right| + \left| \frac{r_n(i_3, i_4)}{\Delta_{n+i_4}} \right| + \dots + \left| \frac{r_n(i_{2m-1}, i_{2m})}{\Delta_{n+i_{2m}}} \right|,$$

имеют место в случае, когда произведения в левых частях (5.6), (5.7) отличны от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (5.6) индукцией по m . Не ограничивая общности, можем считать $i_1 = 0$. Полагая для краткости $i_2 = i$ и пользуясь тем, что $|x + y| = |x| + \theta|y|$ при любых x и y , в случае $m = 1$ получим

$$\begin{aligned} e_n e_{n+i} &= \frac{|\Delta_n \Delta_{n+i}|}{\Delta_n \Delta_{n+i}} = \frac{|\Delta_n (\Delta_n + r_n(0, i))|}{\Delta_n \Delta_{n+i}} = \frac{\Delta_n^2 + \theta_1 \Delta_n r_n(0, i)}{\Delta_n \Delta_{n+i}} \\ &= \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+i}} + \theta_1 \frac{r_n(0, i)}{\Delta_{n+i}} = \frac{\Delta_{n+i} - r_n(0, i)}{\Delta_{n+i}} + \theta_1 \frac{r_n(0, i)}{\Delta_{n+i}} = 1 + (\theta_1 - 1) \frac{r_n(0, i)}{\Delta_{n+i}} = 1 + 2\theta_2 f_1. \end{aligned}$$

Допустим, что формула (5.6) верна при $m = 1, \dots, \mu$. По предположению индукции для $m = \mu + 1$ имеем

$$\begin{aligned} e_{n+i_1} \cdots e_{n+i_{2\mu}} e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} &= (1 + 2\theta_3 f_\mu) e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} \\ &= e_{n+i_{2\mu+1}} e_{n+i_{2\mu+2}} + 2\theta_4 f_\mu = 1 + 2\theta_5 \left| \frac{r_n(i_{2\mu+1}, i_{2\mu+2})}{\Delta_{n+i_{2\mu+2}}} \right| + 2\theta_4 f_\mu = 1 + 2\theta_6 f_{\mu+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Формула (5.7) следует из (5.6). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.9. Пусть $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2m} < i_{2m+1} \leq s$ – фиксированные целые числа. Тогда справедливы соотношения

$$\sum_n e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m+1}} = \theta_1 R, \quad \sum_n e_{n+i_1} e_{n+i_2} \cdots e_{n+i_{2m}} = M + \theta_2 R,$$

в которых

$$R = \frac{4.9c_4 s^2 M \log \log L}{\sqrt{\log L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим суммы из условия леммы через σ_1 и σ_2 соответственно. Согласно лемме 5.8

$$\sigma_1 = \sum_n' (e_{n+i_{2m+1}} + 2\theta_1 f_m) = \sigma^{(0)} + 2\theta_2 \sum_{k=1}^m \sigma^{(k)},$$

где

$$\sigma^{(0)} = \sum_n' e_{n+i_{2m+1}}, \quad \sigma^{(k)} = \sum_n' \left| \frac{r_n(i_{2k-1}, i_{2k})}{\Delta_{n+i_{2k}}} \right|.$$

Заметим следующее: если l и r – количества нулевых членов некоторых последовательностей a_n и b_n , $N < n \leq N + M$, то число нулевых членов в последовательности $a_n b_n$ не превосходит $l + r$. Отсюда и из теоремы 3.3 заключаем, что число тех n из промежутка $N < n \leq N + M$, для которых $\Delta_{n+i_1} \Delta_{n+i_2} \cdots \Delta_{n+i_{2m}} = 0$, не превосходит

$$\frac{2 \cdot 1.79 \cdot 2mc_2 M}{\sqrt{\log L}} < \frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}}. \quad (5.8)$$

Следовательно,

$$\sigma^{(0)} = \sum_n e_{n+i_{2m+1}} + \theta_2 \frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}} = \sum_n e_n + \theta_3 \left(\frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}} + s \right).$$

Последняя сумма по n совпадает с разностью между числом положительных и отрицательных членов последовательности Δ_n , $N < n \leq N + M$, и в силу теоремы 3.3 не превосходит по модулю

$$M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2/2} du + \frac{1.79}{\sqrt{\log L}} \right) - M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-u^2/2} du - \frac{1.79}{\sqrt{\log L}} \right) = \frac{3.58M}{\sqrt{\log L}}.$$

Оценивая каждую из сумм $\sigma^{(k)}$ по лемме 5.6 получаем

$$|\sigma_1| \leq \frac{3.58M}{\sqrt{\log L}} + \frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}} + s + \frac{4.8c_4 s^2 M \log \log L}{\sqrt{\log L}} < \frac{4.9c_4 s^2 M \log \log L}{\sqrt{\log L}}.$$

С помощью тех же рассуждений, что и выше, заключаем, что число ненулевых слагаемых в σ_2 отличается от M не более, чем на (5.8). Вновь применяя леммы 5.6 и 5.8, будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sum_n' (1 + 2\theta_4 f_m) \\ &= M + \theta_5 \left(\frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}} + s + \frac{4.8c_4s^2M \log \log L}{\sqrt{\log L}} \right) = M + \theta_6 \frac{4.9c_4s^2M \log \log L}{\sqrt{\log L}}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ – произвольный набор с условием $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \dots, s$, $\varepsilon_1 \leq \dots \leq \varepsilon_s$, и пусть $\mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{e}; N, M)$ – число номеров n промежутка $N < n \leq N + M$, для которых выполнены равенства

$$\text{sign}(\Delta_{n+j-1}) = \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, s. \quad (5.9)$$

Тогда

$$\mu(\mathbf{e}) = \kappa \cdot \frac{M}{2} + \theta R, \quad R = \frac{5c_4s^2M \log \log L}{\sqrt{\log L}},$$

где

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{e} = \mathbf{e}^+ \text{ или } \mathbf{e} = \mathbf{e}^-, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произведение

$$E_n = \frac{1 + \varepsilon_1 e_n}{2} \frac{1 + \varepsilon_2 e_{n+1}}{2} \dots \frac{1 + \varepsilon_s e_{n+s-1}}{2}.$$

Так как

$$\frac{1 + \varepsilon_j e_{n+j-1}}{2} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_{n+j-1} = \varepsilon_j, \\ 0, & \text{если } e_{n+j-1} = -\varepsilon_j, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } e_{n+j-1} = 0, \end{cases}$$

то $0 \leq E_n \leq 1/2$ в случае, когда хотя бы одно из чисел Δ_{n+j} , $j = 0, 1, \dots, s-1$, обращается в нуль. Как было отмечено по ходу доказательства леммы 5.9, общее число таких номеров n не превосходит (5.8). Для оставшихся n имеем $E_n = 1$ или $E_n = 0$ в зависимости от того, выполнены или нет условия (5.9). Следовательно,

$$\mu(\mathbf{e}) = \sum_n E_n + \frac{\theta}{2} \frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}}.$$

Имеем, далее,

$$\begin{aligned}\sum_n E_n &= 2^{-s} \sum_n (1 + \varepsilon_1 e_n) \dots (1 + \varepsilon_s e_{n+s-1}) \\ &= 2^{-s} \sum_n \left(1 + (\varepsilon_1 e_n + \dots + \varepsilon_s e_{n+s-1}) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k \leq s} \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k} e_{n+i_1} \dots e_{n+i_k} + \dots + \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s e_n \dots e_{n+s-1} \right) \\ &= 2^{-s} \left(\sum_n 1 + \left(\varepsilon_1 \sum_n e_n + \dots + \varepsilon_s \sum_n e_{n+s-1} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k \leq s} \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_k} \sum_n e_{n+i_1} \dots e_{n+i_k} + \dots + \varepsilon_1 \dots \varepsilon_s \sum_n e_n \dots e_{n+s-1} \right).\end{aligned}$$

Согласно лемме 5.9 общий вклад сумм, отвечающих произведениям нечетного числа сомножителей e_{n+i} , оценивается по модулю величиной

$$2^{-s} \sum_{1 \leq k \leq (s+1)/2} \binom{s}{2k-1} R = 0.5R, \quad R = \frac{4.9c_1 s^2 M \log \log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Согласно той же лемме вклад сумм, отвечающих произведениям четного числа сомножителей, представляется в виде $2^{-s} M(1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \dots)$, где

$$\sigma_2 = \sum_{0 < i < j \leq s} \varepsilon_i \varepsilon_j, \quad \sigma_4 = \sum_{0 < i < j < k < r \leq s} \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_k \varepsilon_r, \quad \dots$$

– элементарные симметрические функции величин $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$.

Положим

$$f(x) = (x - \varepsilon_1) \cdots (x - \varepsilon_s) = x^s - \sigma_1 x^{s-1} + \sigma_2 x^{s-2} - \cdots + (-1)^s \sigma_s.$$

Несложно проверить, что сумма $\sigma = 1 + \sigma_2 + \sigma_4 + \dots$ совпадает с суммой коэффициентов многочлена $g(x) = (f(x) + (-1)^s f(-x))/2$, так что $\sigma = g(1)$. Пусть теперь l и m обозначают количества положительных и отрицательных чисел в наборе $\mathbf{e} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$, так что $l + m = s$. Тогда

$$f(x) = (x - 1)^l (x + 1)^m, \quad g(x) = \frac{1}{2}((x - 1)^l (x + 1)^m + (x - 1)^m (x + 1)^l).$$

Очевидно, $g(1) = 0$ при любых l и m , отличных от нуля (что отвечает наборам $\mathbf{e}$, содержащим числа разных знаков). Если же $m = 0$ или $l = 0$ (что соответствует наборам $\mathbf{e}^+, \mathbf{e}^-$), то $g(1) = (1/2) \cdot 2^s = 2^{s-1}$.

Собирая вместе полученные результаты, получаем

$$\sum_n E_n = \kappa \frac{M}{2} + \theta_1 R,$$

$$\mu(\mathbf{e}) = \kappa \frac{M}{2} + \theta_2 \left(R + \frac{1.8sM}{\sqrt{\log L}} \right) = \kappa \frac{M}{2} + \theta_3 \frac{5c_4 s^2 M \log \log L}{\sqrt{\log L}}.$$

Теорема доказана.

Результаты этого параграфа интересно сопоставить с численными данными, собранными в таблицах II.2–II.5 приложения II.

5.3. Распределение произведений $\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}$

В настоящем параграфе исследуется распределение произведений (5.3) в случаях, когда n пробегает множества E_s^+, E_s^- (т.е. в случаях, когда числа набора (5.1) все положительны или все отрицательны). В частности, будет доказано, что при любом $s \geq 2$ произведения (5.3), должным образом нормированные, имеют распределение, сходящееся с ростом параметра N к гамма-распределению $\Gamma(1)$, т.е. к распределению с плотностью

$$\frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}.$$

Построение функции распределения опирается, как и при доказательстве теоремы 2.4, на метод А. Гоша и использует асимптотические формулы для моментов произведений (5.3), но имеет свои особенности.

Несложно показать, что главные члены $2k$ -х моментов

$$\sum_n |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}|^{2k} \quad \text{и} \quad \sum_n \Delta_n^{2ks}$$

совпадают и равны, следовательно,

$$\frac{(2ks)!}{(ks)!} \frac{M(\log \log N)^{ks}}{(2\pi)^{2ks}}.$$

При применении метода Гоша напрямую к произведениям (5.3) и построении для них характеристической функции возникает сумма типа

$$\sum_{0 \leq k \leq K} \left(-\frac{t^2}{2^s} \right)^k \frac{(2ks)!}{(2k)!(ks)!},$$

которая при $s = 1$ служит приближением к функции $e^{-t^2/2}$, но при $s \geq 3$ оказывается частичной суммой ряда, расходящегося всюду, кроме точки $t = 0$.

Чтобы избежать трудностей такого рода, вместо произведений (5.3) приходится иметь дело с величинами

$$\kappa_n = |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}|^{1/s}, \quad (5.10)$$

которые «в среднем» ведут себя, как $|\Delta_n|$, и к которым применима техника Гоша. Однако появление дробного показателя $1/s$ в (5.10), а также необходимость учета ограничений типа $n \in E_s^+$, $n \in E_s^-$ при вычислении моментов

$$\sum_{n \in E_s^\pm} \kappa_n^k$$

приводят к усложнению ряда выкладок. Этим объясняется большое число вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы 5.2.

Положим $\delta_n = \pi \Delta_n \sqrt{2/L}$, $\varepsilon_n(i, j) = \delta_{n+j} - \delta_{n+i}$, так что $\varepsilon_n(i, j) = \pi r_n(i, j) \sqrt{2/L}$. Вместо $\varepsilon_n(0, j)$ в ряде случаев будем писать $\varepsilon_n(j)$.

ЛЕММА 5.10. Пусть $0 \leq i < j \leq s$. Тогда при любом $\kappa \geq 1$ справедлива оценка

$$\sum_n |\varepsilon_n(i, j)|^\kappa \leq 1.2c_5 \left(\frac{4.5c_4\kappa s}{\sqrt{L}} \right)^\kappa M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно лемме 5.5

$$\sum_n |r_n(i, j)|^\kappa \leq 1.2c_5 (c_4 s \kappa)^\kappa M.$$

Значит,

$$\sum_n |\varepsilon_n(i, j)|^\kappa = \left(\pi \sqrt{\frac{2}{L}} \right)^\kappa \sum_n |r_n(i, j)|^\kappa \leq 1.2c_5 \left(\frac{\pi \sqrt{2} c_4 s \kappa}{\sqrt{L}} \right)^\kappa M < 1.2c_5 \left(\frac{4.5c_4 s \kappa}{\sqrt{L}} \right)^\kappa M.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.11. Пусть i, j, k, l, r, s и t — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq i < j \leq s, \quad 1 \leq t < s, \quad 0 \leq l \leq s, \quad 1 \leq r \leq c_1 \sqrt[3]{L}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_n |\delta_{n+l}|^r |\varepsilon_n(i, j)|^t \leq 68\sqrt{c_0} \left(\frac{2r}{e} \right)^{r/2} \left(\frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}} \right)^t M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя утверждения леммы 5.10 и теоремы 3.1 наряду и неравенство Коши, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_n |\delta_{n+l}|^r |\varepsilon_n(i, j)|^t &\leq \left(\sum_{N < n \leq N+M+s} \delta_n^{2r} \right)^{1/2} \left(\sum_n \varepsilon_n^{2t}(i, j) \right)^{1/2} \\ &< \left(2.88 \left(\frac{2r}{e} \right)^r (M+s) \cdot 1.2c_5 \left(\frac{4.5c_4s \cdot 2t}{\sqrt{L}} \right)^{2t} M \right)^{1/2} \\ &\leq 1.86\sqrt{c_1} \left(\frac{2r}{e} \right)^{r/2} \sqrt{c_5} \left(\frac{9c_4st}{\sqrt{L}} \right)^t M < 68\sqrt{c_0} \left(\frac{2r}{e} \right)^{r/2} M \left(\frac{9c_4s^2}{\sqrt{L}} \right)^t. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть t – произвольное целое число с условием $1 \leq t < s$. Положим

$$\xi_n(t) = \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)|,$$

где суммирование ведется по всем $\binom{s-1}{t}$ упорядоченным наборам $(i_1, \dots, i_t)$ натуральных чисел, меньших s .

ЛЕММА 5.12. Пусть k – целое число, $2 \leq k \leq c_1 \sqrt[3]{L}$, $l = \min(k, s)$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n \sum_{t=1}^{l-1} |\delta_n|^{h-t} \xi_n(t) < 374c_4\sqrt{c_0} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2},$$

где h – любое из чисел k, s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, а также из леммы 5.11 следует, что исходная сумма не превосходит величины

$$\begin{aligned} &\sum_n \sum_{t=1}^{l-1} |\delta_n|^{h-t} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)| \\ &\leq \sum_n \sum_{t=1}^{l-1} |\delta_n|^{h-t} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} \frac{1}{t} (|\varepsilon_n(i_1)|^t + \dots + |\varepsilon_n(i_t)|^t) \\ &= \sum_{t=1}^{l-1} \frac{1}{t} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} \left\{ \sum_n |\delta_n|^{h-t} |\varepsilon_n(i_1)| + \dots + \sum_n |\delta_n|^{h-t} |\varepsilon_n(i_t)| \right\} \\ &< \sum_{t=1}^{l-1} \frac{1}{t} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} t \cdot 68\sqrt{c_0} M \left(\frac{2(h-t)}{e} \right)^{h-t/2} \left(\frac{9c_4s^2}{\sqrt{L}} \right)^t \\ &= 68\sqrt{c_0} M \sum_{t=1}^{l-1} \binom{s-1}{t} \left(\frac{2(h-t)}{e} \right)^{h-t/2} \left(\frac{9c_4s^2}{\sqrt{L}} \right)^t. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$(h-t)^{h-t/2} \leq (k-t)^{k/2} = k^{k/2} \left(1 - \frac{t}{k} \right)^{k/2} < k^{k/2} e^{-t/2},$$

закключаем, что сумма из условия леммы не превосходит

$$\begin{aligned} & 68\sqrt{c_0}M \sum_{t=1}^{l-1} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \binom{s-1}{t} e^{-t/2} \left(\frac{9c_4s^2}{\sqrt{L}}\right)^t \\ &= 68\sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} M \sum_{t=1}^{l-1} \binom{s-1}{t} q^t = 68\sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} M \{(1+q)^{s-1} - 1\}, \end{aligned}$$

где обозначено

$$q = \frac{9c_4s^2}{\sqrt{eL}}.$$

Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, находим:

$$\begin{aligned} (1+q)^{s-1} - 1 &\leq q(s-1)(1+q)^{s-2} < qs(1+q)^s \\ &= \frac{9c_4s^3}{\sqrt{eL}} \left(1 + \frac{1}{s} \cdot \frac{9c_4s^3}{\sqrt{eL}}\right)^s < \frac{9c_4s^3}{\sqrt{eL}} \exp\left\{\frac{9c_4s^3}{\sqrt{eL}}\right\} < \frac{5.5c_4s^3}{\sqrt{L}}. \end{aligned}$$

Отсюда уже легко получить утверждение леммы.

ЛЕММА 5.13. Пусть k, t – целые числа, $k \geq 1$, $1 \leq t < s$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n \xi_n^{2k}(t) \leq 1.2c_5 \left(\frac{9c_4ks^3}{\sqrt{L}}\right)^{2kt} M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим, а также из неравенства Гёльдера получаем:

$$\begin{aligned} \sum_n \xi_n^{2k}(t) &= \sum_n \left\{ \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)| \right\}^{2k} \\ &\leq \sum_n \left\{ \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} \frac{1}{t} (|\varepsilon_n(i_1)|^t + \dots + |\varepsilon_n(i_t)|^t) \right\}^{2k} \\ &\leq \sum_n t^{-2k} \binom{s-1}{t}^{2k-1} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} (|\varepsilon_n(i_1)|^t + \dots + |\varepsilon_n(i_t)|^t)^{2k} \\ &\leq \sum_n t^{-2k} \binom{s-1}{t}^{2k-1} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} t^{2k-1} (|\varepsilon_n(i_1)|^{2kt} + \dots + |\varepsilon_n(i_t)|^{2kt}) \\ &= \frac{1}{t} \binom{s-1}{t}^{2k-1} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_t < s} \left\{ \sum_n |\varepsilon_n(i_1)|^{2kt} + \dots + \sum_n |\varepsilon_n(i_t)|^{2kt} \right\}. \end{aligned}$$

Оценивая каждую из сумм по n с помощью леммы 5.10 и пользуясь неравенством

$$\binom{s-1}{t} = \frac{(s-1)(s-2) \cdots (s-t)}{t!} < s^t,$$

находим

$$\sum_n \xi_n^{2k}(t) \leq \frac{1}{t} \binom{s-1}{t}^{2k-1} \binom{s-1}{t} t \cdot 1.2c_5 \left(\frac{9c_4s^2k}{\sqrt{L}}\right)^{2kt} M < 1.2c_5 \left(\frac{9c_4s^3k}{\sqrt{L}}\right)^{2kt} M.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.14. Пусть k, t – целые числа, $1 \leq t < s$, $1 \leq k \leq c_1 \sqrt[3]{L}$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n |\delta_n|^{k(s-t)/s} (\xi_n(t))^{k/s} < 8.25c_0^{1/4} M \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_4 \sqrt{k} s^3}{\sqrt{L}} \right)^{kt/s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим сумму из условия леммы через C_t . Согласно неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} C_t &\leq \left(\sum_n \delta_n^{2k} \right)^{1/2-t/(2s)} \left(\sum_n (\xi_n(t))^{2k/(s+t)} \right)^{1/2+t/(2s)} \\ &\leq \left(\sum_n \delta_n^{2k} \right)^{1/2-t/(2s)} \left(\sum_n \xi_n^{2k}(t) \right)^{1/(2s)} M^{s+t-1/(2s)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Оценивая правую часть (5.11) с помощью теорем 3.1 и леммы 5.13, находим:

$$\begin{aligned} C_t &\leq \left(2.88 \left(\frac{2k}{e} \right)^k M \right)^{1/2-t/(2s)} \left(1.2c_5 M \left(\frac{9c_4 s^3 k}{\sqrt{L}} \right)^{2kt} \right)^{1/(2s)} M^{s+t-1/(2s)} \\ &< (2.88)^{1/2-t/(2s)} (1.2c_5)^{1/(2s)} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/(2(1-t/s))} \left(\frac{9c_4 s^3 k}{\sqrt{L}} \right)^{kt/s} M \\ &< 8.25c_0^{1/4} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \left\{ \sqrt{\frac{e}{2k}} \frac{9c_4 s^3 k}{\sqrt{L}} \right\}^{kt/s} < 8.25c_0^{1/4} M \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_4 \sqrt{k} s^3}{\sqrt{L}} \right)^{kt/s}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим

$$\eta_n = \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t} \xi_n(t).$$

ЛЕММА 5.15. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq c_1 \sqrt[3]{L}$. Тогда справедлива оценка

$$\sum_n \eta_n^{k/s} < 8.3c_0^{1/4} M \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \left\{ \frac{10.5c_4 \sqrt{k} s^4}{\sqrt{L}} \right\}^{k/s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства Гёльдера и очевидного соотношения

$$(a + b + \dots + c)^{1/s} \leq a^{1/s} + b^{1/s} + \dots + c^{1/s}, \quad a, b, \dots, c \geq 0,$$

закключаем, что

$$\eta_n^k \leq (s-1)^{k-1} \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{k(s-1)} \xi_n^k(t), \quad \eta_n^{k/s} \leq s^{k/s} \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{k(s-t)/s} (\xi_n(t))^{k/s}.$$

Полагая

$$q = \left\{ \frac{10.5c_4 \sqrt{k} s^3}{\sqrt{L}} \right\}^{k/s}$$

и используя оценку леммы 5.14, будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_n \eta_n^{k/s} &\leq s^{k/s} \sum_{t=1}^{s-1} 8.25c_0^{1/4} M \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} q^t < 8.25c_0^{1/4} M \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{qs^{k/s}}{1-q} \\ &< 8.3c_0^{1/4} M \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \left\{ \frac{10.5c_4 \sqrt{k} s^4}{\sqrt{L}} \right\}^{k/s}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.16. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq c_1 \sqrt[3]{L}$. Тогда при любом r с условием $1 \leq r \leq k-1$ справедлива оценка

$$\sum_n |\delta_n|^{k-r} \eta_n^{r/s} < 1.7M(4.9c_0^{1/4})^{r/s} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_4s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{r/s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно проверить, что при $r = k$ искомая оценка следует из леммы 5.15. Поэтому далее считаем, что $1 \leq r \leq k-1$. Дважды применяя к сумме из условия леммы неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} \sum_n |\delta_n|^{k-r} \eta_n^{r/s} &\leq \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{(k-r)/(2k)} \left(\sum_n \eta_n^{k/s \cdot 2r/(k+r)}\right)^{(k+r)/(2k)} \\ &\leq \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{(k-r)/(2k)} \left\{M^{(k-r)/(k+r)} \left(\sum_n \eta_n^{k/s}\right)^{2r/(k+r)}\right\}^{(k+r)/(2k)} \\ &= M^{(k-r)/(2k)} \left(\sum_n \delta_n^{2k}\right)^{(k-r)/(2k)} \left(\sum_n \eta_n^{k/s}\right)^{r/k}. \end{aligned}$$

Оценивая последние суммы с помощью теоремы 3.1 и леммы 5.15, получим:

$$\begin{aligned} \sum_n |\delta_n|^{k-r} \eta_n^{r/s} &\leq M^{(k-r)/(2k)} \left\{2.88 \left(\frac{2k}{e}\right)^k M\right\}^{(k-r)/(2k)} \\ &\quad \times \left\{8.3c_0^{1/4} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} M \left(\frac{10.5c_4s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{k/s}\right\}^{r/k} \\ &= \sqrt{2.88} M \left(\frac{8.3c_0^{1/4}}{\sqrt{2.88}}\right)^{r/k} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_4s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{r/s} \\ &< 1.7M(4.9c_0^{1/4})^{r/k} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \left(\frac{10.5c_4s^4\sqrt{k}}{\sqrt{L}}\right)^{r/s}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.17. Справедливо равенство

$$\delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1} = \delta_n^s + \theta \eta_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения величин $\varepsilon_n(i)$ имеем

$$\begin{aligned} \delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1} &= \delta_n (\delta_n + \varepsilon_n(1)) (\delta_n + \varepsilon_n(2)) \cdots (\delta_n + \varepsilon_n(s-1)) \\ &= \delta_n^s + \sum_{t=1}^{s-1} \delta_n^{s-t} \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_t < s} \varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t) \\ &= \delta_n^s + \theta \cdot \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t} \xi_n(t) = \delta_n^s + \theta \eta_n. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим $\kappa_n = |\delta_n \cdots \delta_{n+s-1}|^{1/s}$.

ЛЕММА 5.18. Пусть E – любое из множеств E_s^+ , E_s^- . Тогда для целого k с условием

$$1 \leq k \leq \frac{L^{1/(2s+1)}}{136c_0^{3/5}}$$

справедливо равенство

$$\sum_{n \in E} \kappa_n^k = \sum_{n \in E} |\delta_n|^k + 1180\theta M \varkappa(k) k c_0^{3/4} \left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}.$$

Доказательство. В силу леммы 5.17 имеем

$$\kappa_n = |\delta_n^s + \theta_1 \eta_n|^{1/s} = |\delta_n| + \theta_2 \eta_n^{1/s}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n \in E} \kappa_n^k = \sum_{n \in E} (|\delta_n| + \theta_2 \eta_n^{1/s})^k = \sum_{n \in E} |\delta_n|^k + \theta_3 R,$$

где

$$R = \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \sum_n |\delta_n|^{k-r} \eta_n^{r/s}.$$

Оценивая каждую из сумм по n в выражении для R с помощью леммы 5.16, получаем

$$R < 1.7M \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} \sum_n \binom{k}{r} q^r < 1.7M \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} kq(1+q)^k,$$

где

$$q = a^{1/k} b^{1/s} \left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}, \quad a = 4.9c_0^{1/4}, \quad b = 10.5c_4 s^4.$$

Заметим теперь, что при любых $k \geq 1$ и $s \geq 2$ справедливы неравенства

$$a^{2s/(k(2s+1))} \leq a^{2s/(2s+1)} < 4.9c_0^{2s/(2s+1)}, \quad b^{2/(2s+1)} < 27.6c_0^{2/(2s+1)}, \\ a^{2s/(k(2s+1))} \cdot b^{2/(2s+1)} < 136c_0^{(s+4)/(2(2s+1))} \leq 136c_0^{3/5}.$$

Следовательно,

$$k \leq \frac{L^{1/(2s+1)}}{136c_0^{3/5}} < a^{-2s/(k(2s+1))} b^{-2/(2s+1)} L^{1/(2s+1)},$$

откуда

$$k^{2s+1} < a^{-2s/k} b^{-2} L, \quad k < a^{-1/k} b^{-1/s} \left(\frac{L}{k}\right)^{1/(2s)}$$

и, наконец,

$$q = a^{1/k} b^{1/s} \left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)} < \frac{1}{k}.$$

Таким образом, $(1+q)^k < e$, так что

$$R < 1.7eM \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} k a^{1/k} b^{1/s} \left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)} \\ \leq 1.7eM \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} k \cdot 4.9c_0^{1/4} (10.5 \cdot 8.7es^4)^{1/s} c_0^{1/2} \left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)} \\ < 1427.4Mk \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} c_0^{3/4} \left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)} < 1180Mk \varkappa(k) c_0^{3/4} \left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}.$$

Лемма доказана.

Положим

$$D_n = \frac{1}{2}(|\delta_n| + \delta_n), \quad d_n = \frac{1}{2}(|\delta_n| - \delta_n).$$

ЛЕММА 5.19. Пусть k – целое число, $s \leq k \leq c_1 \sqrt[3]{L}$. Тогда справедливы соотношения

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_1 R, \quad \sum_{n \in E_s^-} |\delta_n|^k = \sum_n d_n^k + \theta_2 R,$$

где

$$R = 614c_4c_0^{1/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \varkappa(k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.17

$$\delta_n^s = \delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1} - \theta_1 \eta_n,$$

откуда

$$\delta_n^k = \delta_n^{k-s} \cdot \delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1} + \theta_2 |\delta_n|^{k-s} \eta_n. \quad (5.12)$$

Чтобы доказать первое соотношение, положим $D(n) = D_n \cdots D_{n+s-1}$. Поскольку

$$D(n) = \begin{cases} \delta_n \delta_{n+1} \cdots \delta_{n+s-1}, & \text{если } n \in E_s^+, \\ 0, & \text{если } n \notin E_s^+, \end{cases}$$

то в силу (5.12) получаем

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_{n \in E_s^+} (\delta_n^{k-s} D(n) + \theta_2 |\delta_n|^{k-s} \eta_n) = \sum_n \delta_n^{k-s} D(n) + \theta_3 \sum_n |\delta_n|^{k-s} \eta_n. \quad (5.13)$$

Далее, несложно заметить, что

$$D_{n+j} = \frac{1}{2}(|\delta_n + \varepsilon_n(j)| + (\delta_n + \varepsilon_n(j))) = \frac{1}{2}(|\delta_n| + \theta_4 |\varepsilon_n(j)|) + \frac{1}{2}(\delta_n + \varepsilon_n(j)) = D_n + \theta_5 |\varepsilon_n(j)|. \quad (5.14)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D(n) &= D_n(D_n + \theta' |\varepsilon_n(1)|)(D_n + \theta'' |\varepsilon_n(2)|) \cdots (D_n + \theta^{(s-1)} |\varepsilon_n(s-1)|) \\ &= D_n^s + \sum_{t=1}^{s-1} D_n^{s-t} \sum_{0 < i_1 < \cdots < i_t < s} \theta^{(i_1)} \cdots \theta^{(i_t)} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)| \\ &= D_n^s + \theta_6 \sum_{t=1}^{s-1} |\delta_n|^{s-t} \xi_n(t) = D_n^s + \theta_6 \eta_n. \end{aligned}$$

Возвращаясь к равенству (5.13), будем иметь

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n \delta_n^{k-s} (D_n^s + \theta_6 \eta_n) + \theta_3 \sum_n |\delta_n|^{k-s} \eta_n = \sum_n \delta_n^{k-s} D_n^s + 2\theta_7 \sum_n |\delta_n|^{k-s} \eta_n.$$

Оценивая последнюю сумму с помощью леммы 5.12, получим

$$\sum_n |\delta_n|^{k-s} \eta_n = \sum_{t=1}^{s-1} \sum_n |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) < 372c_4c_0^{1/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e}\right)^{k/2} < 307c_4c_0^{1/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \varkappa(k).$$

Замечая, наконец, что $\delta_n^{k-s} D_n^s = D_n^k$, приходим к первому утверждению леммы. Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 5.20. Пусть $1 \leq k < s$. Тогда справедливы следующие соотношения

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_n D_n^k + \theta_1 R, \quad \sum_{n \in E_s^-} |\delta_n|^k = \sum_n d_n^k + \theta_2 R,$$

где

$$R = 3\sqrt{e}s \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} M \frac{(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое соотношение (второе получается аналогично). Пусть A – множество тех n , $N < n \leq N + M$, для которых $\delta_{n+k} \cdots \delta_{n+s-1} \neq 0$. Для $n \in A$ положим

$$D(n) = D_n D_{n+1} \cdots D_{n+k-1} \frac{D_{n+k}}{\delta_{n+k}} \cdots \frac{D_{n+s-1}}{\delta_{n+s-1}},$$

так что

$$D(n) = \begin{cases} \delta_n \cdots \delta_{n+k-1}, & \text{если } n \in E_s^+, \\ 0, & \text{если } n \in A \setminus E_s^+. \end{cases}$$

Если $k = 1$, то, очевидно, имеем

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n = \sum_{n \in A} D(n). \quad (5.15)$$

В случае $k \geq 2$, пользуясь леммой 5.17, приходим к равенству

$$\delta_n \cdots \delta_{n+k-1} = \delta_n^k + \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t),$$

из которого при $n \in E_s^+$ получаем

$$D(n) = \delta_n^k + \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t).$$

Применяя оценку леммы 5.12, будем иметь

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \sum_{n \in E_s^+} \left(D(n) - \theta_1 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \right) = \sum_{n \in A} D(n) + 18\theta_2 c_0 \sqrt{c_1} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2}. \quad (5.16)$$

Сравнивая (5.15) и (5.16), убеждаемся, что формула (5.16) верна и в случае $k = 1$ (при $\theta_2 = 0$).

Чтобы заменить сумму по $n \in A$ суммой по всем n , $N < n \leq N + M$, покажем сначала, что при любых $n, r \geq 1$ имеет место равенство

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} \cdots \frac{D_{n+r}}{\delta_{n+r}} = D_n + \theta \sum_{i=1}^r |\varepsilon_n(i-1, i)|. \quad (5.17)$$

Действительно, пусть сначала $r = 1$. Если $\delta_{n+1} > 0$, то

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} = D_n; \quad (5.18)$$

если же $\delta_{n+1} < 0$, то из равенства (5.14) следует, что

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} = 0 = D_{n+1} = D_n + \theta |\varepsilon_n(0, 1)|. \quad (5.19)$$

Допустим теперь, что равенство (5.17) доказано для $r = 1, \dots, j$ и проверим его справедливость в случае $r = j + 1$. Пользуясь предположением индукции, получаем

$$D_n \frac{D_{n+1}}{\delta_{n+1}} \cdots \frac{D_{n+j}}{\delta_{n+j}} \frac{D_{n+j+1}}{\delta_{n+j+1}} = \left(D_n + \theta_1 \sum_{i=1}^j |\varepsilon_n(i-1, i)| \right) \cdot \frac{D_{n+j+1}}{\delta_{n+j+1}}. \quad (5.20)$$

Если $\delta_{n+j+1} > 0$, то правая часть (5.20) совпадает с

$$D_n + \theta_1 \sum_{i=1}^j |\varepsilon_n(i-1, i)| = D_n + \theta_2 \sum_{i=1}^{j+1} |\varepsilon_n(i-1, i)|, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \theta_1.$$

Если же $\delta_{n+j+1} < 0$, то $D_{n+j+1} = 0$ и правая часть (5.20) совпадает с

$$D_{n+j+1} = D_n + \theta_1 |\varepsilon_n(0, j+1)| = D_n + \theta_2 \sum_{i=1}^{j+1} |\varepsilon_n(i-1, i)|.$$

Формула (5.17) доказана.

Предположим, что $k \geq 2$. Полагая $r = s - 1$ и заменяя n на $n + k - 1$ в (5.17), получим

$$\begin{aligned} D(n) &= D_n \cdots D_{n+k-2} \cdot D_{n+k-1} \frac{D_{n+k}}{\delta_{n+k}} \cdots \frac{D_{n+s-1}}{\delta_{n+s-1}} \\ &= D_n \cdots D_{n+k-2} \left(D_{n+k-1} + \theta_3 \sum_{i=1}^{s-k} |\varepsilon_{n+k-1}(i-1, i)| \right) \\ &= D_n \cdots D_{n+k-1} + \theta_4 |\delta_n \cdots \delta_{n+k-2}| \sum_{i=k}^{s-1} |\varepsilon_n(i-1, i)|. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством (5.14), получаем

$$\begin{aligned} D_n \cdots D_{n+k-1} &= D_n (D_n + \theta^{(1)} |\varepsilon_n(1)|) \cdots (D_n + \theta^{(k-1)} |\varepsilon_n(k-1)|) \\ &= D_n^k + \sum_{t=1}^{k-1} D_n^{k-t} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_t < k} \theta^{(i_1)} \cdots \theta^{(i_t)} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)| \\ &= D_n^k + \theta_5 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_t < k} |\varepsilon_n(i_1) \cdots \varepsilon_n(i_t)| = D_n^k + \theta_5 \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t). \end{aligned}$$

Далее, замечая, что

$$|\delta_n \cdots \delta_{n+k-2}| \leq \frac{1}{k-1} \sum_{j=0}^{k-2} |\delta_{n+j}|^{k-1},$$

будем иметь

$$D(n) = D_n^k + \theta_6 \left(\frac{1}{k-1} \sum_{i=k}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-2} |\delta_{n+j}|^{k-1} |\varepsilon_n(i-1, i)| + \sum_{t=1}^{k-1} |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \right). \quad (5.21)$$

Если же $k = 1$, то в силу (5.18), (5.19) имеем

$$D(n) = D_n + \theta_7 |\varepsilon_n(0, 1)|. \quad (5.22)$$

Суммируя обе части (5.21), (5.22) по $n \in A$ и пользуясь оценками лемм 5.10–5.12, получим

$$\sum_{n \in A} D(n) = \sum_{n \in A} D_n^k + \theta_8 R_k, \quad (5.23)$$

где

$$R_1 \leq \sum_n |\varepsilon_n(0, 1)| \leq 1.2c_5 \frac{4.5c_4 s M}{\sqrt{L}} = \frac{5.4c_4 c_5 s M}{\sqrt{L}}$$

и

$$\begin{aligned} R_k &\leq \frac{1}{k-1} \sum_{i=k}^{s-1} \sum_{j=0}^{k-2} \sum_n |\delta_{n+j}|^{k-1} |\varepsilon_n(i-1, i)| + \sum_{t=1}^{k-1} \sum_n |\delta_n|^{k-t} \xi_n(t) \\ &\leq \frac{1}{k-1} (s-k)(k-1) \cdot 68\sqrt{c_0} M \left(\frac{2(k-1)}{e} \right)^{(k-1)/2} \frac{9c_1 s^2}{\sqrt{L}} + 372c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \\ &\leq s \cdot 68\sqrt{c_0} \frac{M}{\sqrt{2}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{9c_4 s^2}{\sqrt{L}} + 372c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} \\ &\leq 433c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} + 372c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}} = 805c_4 \sqrt{c_0} \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}}, \end{aligned}$$

если $k \geq 2$. Замечая, что $805c_4 \sqrt{c_0} < 0.03c_4 c_5$ при $\varepsilon < 10^{-3}$ и $5.4 < 6.3(2k/e)^{k/2}$ при $k = 1$, окончательно получаем

$$R_k \leq 6.3c_4 c_5 \left(\frac{2k}{e} \right)^{k/2} \frac{Ms^3}{\sqrt{L}}$$

при любом k , $1 \leq k \leq s-1$.

Определим, наконец, множество B как дополнение к A до множества всех номеров n , $N < n \leq N + M$. Тогда B совпадает со множеством всех n из указанного промежутка, для которых $\delta_{n+k} \cdots \delta_{n+s-1} = 0$. Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 5.9, заключаем, что число элементов B не превосходит правой части (5.8).

Зададимся теперь некоторым числом $a > 0$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\sum_{n \in B} D_n^k \leq \sum_{n \in B} |\delta_n|^k \leq \left(\sum_n |\delta_n|^{ak} \right)^{1/a} \left(\sum_{n \in B} 1 \right)^{1-1/a}.$$

Предполагая условие $ak = o(\sqrt[3]{L})$ выполненным, применим теорему 3.2. Получим

$$\begin{aligned} \sum_{n \in B} D_n^k &\leq \left\{ \frac{\varkappa(ak)}{2^{ak/2}} M \left(1 + \frac{131.6}{\sqrt{\log L}} \right) \right\}^{1/a} \left\{ \frac{3.59sM}{\sqrt{\log L}} \right\}^{1-1/a} \\ &\leq \left\{ \sqrt{2} \cdot 2^{-ak/2} \left(\frac{2ak}{e} \right)^{ak/2} \left(1 + \frac{131.6}{\sqrt{\log L}} \right) \right\}^{1/a} \left\{ \frac{3.59s}{\sqrt{\log L}} \right\}^{1-1/a} M \\ &< \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{ak}{e} \right)^{ak/2} \right\}^{1/a} \cdot (3.59s)^{1-1/a} (\log L)^{-(1/2) \cdot (1-1/a)} \\ &< 2.99sM \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} a^{k/2} (\sqrt{\log L})^{-(1-1/a)}. \end{aligned}$$

Полагая теперь $a = (\log \log L)/k$, получим

$$a^{k/2} (\sqrt{\log L})^{-(1-1/a)} = \left(\frac{e}{2} \right)^{k/2} \frac{(\log \log L)^{k/2}}{\sqrt{\log L}},$$

$$\sum_{n \in B} D_n^k < 2.99sM \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \left(\frac{e}{2} \right)^{k/2} \frac{(\log \log L)^{k/2}}{\sqrt{\log L}} < 2.99\sqrt{e} sM \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}. \quad (5.24)$$

Итак, замена условия $n \in A$ в правой части (5.23) условием $N < n \leq N + M$ приводит к ошибке, не превосходящей по абсолютной величине правой части (5.24). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k &= \sum_n D_n^k + \theta_9 \left(R_k + 2.99\sqrt{e}sM \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}} \right) \\ &= \sum_n D_n^k + 3\sqrt{e}\theta_{10}sM \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.21. Пусть r – четное число с условием $2 \leq r \leq (1/8) \cdot 10^{-5} \log \log \log N$. Тогда справедлива оценка

$$\left| \sum_n \delta_n^{r-1} |\delta_n| \right| < M \frac{\varkappa(r)}{2^{r/2}} \frac{1205}{\sqrt{\log L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{e}} \sqrt{10^{-5} \log L + 4}, \quad K = [4e\lambda^2] + 1,$$

так что $K > (1/4) \cdot 10^{-5} \log L$ и $r \leq (1/2)K$. Используя тождество

$$\delta_n^{r-1} |\delta_n| = \frac{2}{\pi} \delta_n^{r-1} \left(\int_0^\lambda + \int_\lambda^{+\infty} \right) \left(\frac{\sin(\delta_n u)}{u} \right)^2 du = \frac{2}{\pi} \delta_n^{r-1} \left(\int_0^\lambda \left(\frac{\sin(\delta_n u)}{u} \right)^2 du + \frac{\theta_1}{\lambda} \right)$$

и разложение

$$\sin^2 x = \sum_{\nu=1}^K (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu-1} x^{2\nu}}{(2\nu)!} + \frac{\theta_2}{2} \frac{(2x)^{2K+2}}{(2K+2)!},$$

сумму из условия леммы представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \sum_n \delta_n^{r-1} \int_0^\lambda \frac{1}{u^2} \left\{ \sum_{\nu=1}^K (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu-1} u^{2\nu}}{(2\nu)!} \delta_n^{2\nu} + \frac{\theta_3}{2} \frac{(2u\delta_n)^{2K+2}}{(2K+2)!} \right\} du + \frac{2\theta_4}{\pi\lambda} \sum_n |\delta_n|^{r-1} \\ = R_1 + \theta_5(R_2 + R_3), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^K \frac{(2\lambda)^{2\nu-1}}{(2\nu-1) \cdot (2\nu)!} |R_1(2\nu + r - 1)|, \\ R_2 &= \frac{4}{\pi} \frac{(2\lambda)^{2K+1}}{(2K+1) \cdot (2K+2)!} R_2(2K + r + 1), \quad R_3 = \frac{2}{\pi\lambda} R_2(r - 1), \end{aligned}$$

а символы $R_j(m)$ обозначают соответственно суммы

$$\sum_n \delta_n^m, \quad \sum_n |\delta_n|^m.$$

Оценим величины R_1, R_2 и R_3 .

Прежде всего, используя неравенство

$$\left| \sum_n \delta_n^{2k-1} \right| < \frac{2\pi k c_0^{3/2}}{\sqrt{L}} M \left(\frac{2k}{e} \right)^k,$$

которое следует из теоремы 3.1 при $1 \leq k \leq c_1 \sqrt[3]{L}$, для любого ν с условием $1 \leq \nu \leq K$ получаем

$$\begin{aligned} |R_1(2\nu + r - 1)| &< \frac{2\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}} M\left(\nu + \frac{r}{2}\right) \left\{ \frac{2}{e} \left(\nu + \frac{r}{2}\right) \right\}^{\nu+r/2} \\ &= \frac{2\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}} \left(\frac{2\nu}{e}\right)^\nu M\left\{ \left(1 + \frac{r}{2\nu}\right)^{2\nu/r} \right\}^{r/2} \left\{ \frac{1}{e} \left(\nu + \frac{r}{2}\right) \right\}^{r/2} \left(\nu + \frac{r}{2}\right) \\ &\leq \frac{2\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}} \left(\frac{2\nu}{e}\right)^\nu M e^{r/2} \left\{ \frac{2K}{e} \right\}^{r/2} \cdot 2K = \frac{4\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}} \left(\frac{2\nu}{e}\right)^\nu M (2K)^{r/2} K. \end{aligned}$$

Принимая во внимание оценку

$$\left(\frac{2\nu}{e}\right)^\nu \leq 2^{-\nu} \frac{2(2\nu)!}{e \nu!},$$

получим

$$\begin{aligned} R_1 &\leq \frac{2}{\pi} \frac{4\pi c_0^{3/2}}{\sqrt{L}} M (2K)^{r/2} K \sum_{\nu=1}^K 2^{-\nu} \frac{(2\lambda)^{2\nu-1} (2\nu)!}{(2\nu)! \nu!} \frac{2}{e} \\ &\leq \frac{8c_0^{3/2}}{\lambda e \sqrt{L}} M (2K)^{r/2} K \sum_{\nu=1}^K \frac{(2\lambda^2)^\nu}{\nu!} < \frac{8c_0^{3/2}}{\lambda e \sqrt{L}} M (2K)^{r/2} K e^{2\lambda^2}. \end{aligned}$$

Далее, используя формулу Стирлинга для гамма-функции, получаем

$$\begin{aligned} \varkappa(2K + r + 1) &= \frac{2^{2K+r+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(K + \frac{r}{2} + 1\right) \leq 2\sqrt{2} \cdot 2^{2K+r} \sqrt{K + \frac{r}{2}} \left\{ \frac{1}{e} \left(K + \frac{r}{2}\right) \right\}^{K+r/2} e^{1/(12K)} \\ &< 3 \cdot 2^{2K+r} \sqrt{\frac{5K}{4}} \left(\frac{K}{e}\right)^K \left(1 + \frac{r}{2K}\right)^K \left\{ \frac{1}{e} \left(K + \frac{r}{2}\right) \right\}^{r/2} \\ &< 4\sqrt{K} \left(\frac{4K}{e}\right)^K \cdot 2^r e^{r/2} \left\{ \frac{5K}{4e} \right\}^{r/2} = 4\sqrt{K} \left(\frac{4K}{e}\right)^K (5K)^{r/2}. \end{aligned}$$

Замечая теперь, что

$$2K + r + 1 \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \log L + \frac{1}{8} \cdot 10^{-5} \log L + 1 < 10^{-5} \log L,$$

из теоремы 3.2 получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} R_2(2K + r + 1) &< \frac{\varkappa(2K + r + 1)}{2^{K+(r+1)/2}} M \left(1 + \frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) < 3\sqrt{K} \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} M \left(\frac{2K}{e}\right)^K, \\ R_2 &\leq \frac{4}{\pi} \frac{(2\lambda)^{2K+1}}{(2K+1) \cdot (2K+2)!} \cdot 3\sqrt{K} \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} M \left(\frac{2K}{e}\right)^K \\ &< \frac{1}{\pi} \frac{\lambda \sqrt{K}}{K^3} \frac{(2\lambda)^{2K}}{(2K)!} \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} M \left(\frac{2K}{e}\right)^K < \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} \left(\frac{2e\lambda^2}{K}\right)^K M < \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} \cdot 2^{-K} M. \end{aligned}$$

Вновь пользуясь теоремой 3.2 и замечая, что при четном $r \geq 2$ справедливы оценки

$$\varkappa(r-1) = \frac{2^r}{r\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) \leq \frac{2^r}{r\sqrt{\pi}} \sqrt{2\pi \cdot \frac{r}{2}} \left(\frac{r}{2e}\right)^{r/2} e^{1/(6r)} \leq \frac{e^{1/(6r)}}{\sqrt{r}} \left(\frac{2r}{e}\right)^{r/2},$$

получаем

$$R_3 \leq \frac{2}{\pi\lambda} \cdot \frac{\varkappa(r-1)}{2^{(r-1)/2}} M \left(1 + \frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi\lambda} \frac{e^{1/(6r)}}{\sqrt{r}} \left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} M \left(1 + \frac{131.6}{\sqrt{\log L}}\right) < \frac{2.2}{\pi\lambda} \left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} M.$$

Сложив полученные выше оценки R_1 , R_2 и R_3 , заключаем, что сумма из условия леммы не превосходит по абсолютной величине

$$\begin{aligned} & \frac{2.2}{\pi\lambda} \left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} M + \left(\frac{5K}{2}\right)^{r/2} \cdot 2^{-K} M + \frac{8c_0^{3/2}}{\lambda e \sqrt{L}} M (2K)^{r/2} K e^{2\lambda^2} \\ &= M \left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} \left\{ \frac{2.2}{\pi\lambda} + 2^{-K} \left(\frac{5eK}{2r}\right)^{r/2} + \frac{8c_0^{3/2} K}{\lambda e \sqrt{L}} \left(\frac{2eK}{r}\right)^{r/2} e^{2\lambda^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Несложно заметить, что дробь $(A/u)^u$ возрастает при изменении u на промежутке $1 \leq u \leq A/e$, $A > e$. Следовательно, из условия $1 < r \leq K/2$ заключаем, что наибольшее значение выражения $(5eK/(2r))^{r/2}$ не превосходит

$$(5e)^{K/4} = \exp \left\{ \frac{K}{4} \log(5e) \right\}.$$

Таким образом, второе слагаемое в фигурных скобках в (5.25) не превосходит

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{K}{4} \log(5e) - K \log 2 \right\} &\leq \exp \{ K(0.653 - 0.693) \} = \exp \left\{ -\frac{K}{25} \right\} \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{4} \cdot 10^{-5} \log L \right\} = L^{-10^{-7}}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично и замечая, что $\lambda < \sqrt{K/(4e)}$, третье слагаемое в (5.25) оценим сверху величиной

$$\begin{aligned} \frac{8c_0^{3/2} K}{\lambda e \sqrt{L}} (4e)^{K/4} e^{2\lambda^2} &< \frac{8c_0^{3/2} K}{\lambda e \sqrt{L}} (4e)^{K/4} e^{K/(2e)} \\ &< \frac{8c_0^{3/2} K}{\lambda e \sqrt{L}} \exp \left\{ \frac{K}{4} \log(4e) + \frac{K}{2e} \right\} < \frac{\exp \{0.8K\}}{\sqrt{L}} < L^{-0.4}. \end{aligned}$$

Таким образом, исходная сумма не превосходит по абсолютной величине

$$\begin{aligned} & M \left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} \left\{ \frac{2.2}{\pi\lambda} + L^{-10^{-7}} + L^{-0.4} \right\} \\ &< M \left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} \cdot \frac{2.2}{\pi} \frac{4\sqrt{e}}{\sqrt{10^{-5} \log L}} < \frac{1461}{\sqrt{\log L}} M \left(\frac{r}{e}\right)^{r/2} < \frac{1205}{\sqrt{\log L}} M \frac{\varkappa(r)}{2^{r/2}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.22. Пусть k – целое число с условием $1 \leq k \leq (1/8) \cdot 10^{-5} \log L$; пусть, далее, E – любое из множеств E_s^+, E_s^- , и пусть $|E|$ – число элементов E , отвечающих условию $N < n \leq N + M$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{n \in E} \varkappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} |E| (1 + \theta R), \quad R = 5(2c_4 + 1) \frac{s(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лишь случай $E = E_s^+$, так как в случае $E = E_s^-$ доказательство проводится аналогично. Прежде всего, согласно лемме 5.18 имеем

$$\sum_{n \in E_s^+} \varkappa_n^k = \sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k + \theta_1 R_1, \quad R_1 = 1180k \varkappa(k) c_0^{3/4} M \left(\frac{k}{L}\right)^{1/(2s)}. \quad (5.26)$$

Далее, из лемм 5.19, 5.20 следует равенство

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = S + \theta_2 R_2, \quad (5.27)$$

в котором

$$S = \sum_n D_n^k, \quad R_2 = 3\sqrt{e} M s^{\frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}}} \frac{(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}. \quad (5.28)$$

Используя тождество

$$D_n^k = \frac{1}{2}(\delta_n^k + |\delta_n| \cdot \delta_n^{k-1}),$$

получим

$$S = \frac{1}{2}(S_1 + S_2), \quad S_1 = \sum_n \delta_n^k, \quad S_2 = \sum_n |\delta_n| \cdot \delta_n^{k-1}.$$

Предположим сначала, что k – четное число, $k = 2r$. Тогда в силу теоремы 3.1 имеем

$$S_1 = \sum_n \delta_n^{2r} = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} M + \theta_3 R_3, \quad R_3 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{4.3(c_0 r)^{3/2} M}{\sqrt{L}} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{1.6(c_0 k)^{3/2} M}{\sqrt{L}}.$$

Далее, из леммы 5.21 следует оценка

$$|S_2| = \left| \sum_n |\delta_n| \cdot \delta_n^{k-1} \right| < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{1205M}{\sqrt{\log L}}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{M}{2} + \theta_4 R_4, \quad R_4 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{1.6(c_0 k)^{3/2} M}{\sqrt{L}} + \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{1205M}{\sqrt{\log L}} \right\} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{603M}{\sqrt{\log L}}. \quad (5.29)$$

Рассмотрим теперь случай нечетного k , $k = 2r - 1$. Из теорем 3.1, 3.2 получаем

$$\begin{aligned} |S_1| &= \left| \sum_n \delta_n^{2r-1} \right| < \left(\frac{2r}{e} \right)^r \frac{2\pi r c_0^{3/2} M}{\sqrt{L}} = \left(\frac{k+1}{e} \right)^{k+1/2} \frac{\pi(k+1)c_0^{3/2} M}{\sqrt{L}} \\ &\leq \left(\frac{k}{e} \right)^{k/2} \frac{\pi(c_0(k+1))^{3/2} M}{\sqrt{L}} < \frac{\pi\sqrt{e}}{2} \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{(c_0(k+1))^{3/2} M}{\sqrt{L}}, \\ S_2 &= \sum_n |\delta_n| \cdot \delta_n^{2r-2} = \sum_n |\delta_n|^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} M + \theta_5 R_5, \quad R_5 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{131.6M}{\sqrt{\log L}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{M}{2} + \theta_6 R_6, \quad R_6 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi\sqrt{e}}{2} \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{(c_0(k+1))^{3/2} M}{\sqrt{L}} + \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{131.6M}{\sqrt{\log L}} \right\} < \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{66M}{\sqrt{\log L}}. \quad (5.30)$$

Сравнивая (5.29) и (5.30), убеждаемся, что равенство

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{M}{2} + \theta_7 R_7, \quad \text{где} \quad R_7 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{603M}{\sqrt{\log L}}, \quad (5.31)$$

имеет место как при четных, так и при нечетных k .

Используя теорему 5.1 и заменяя в (5.31) величину $M/2$ суммой

$$|E| + 5\theta c_4 \frac{s^2 M \log \log L}{\sqrt{\log L}},$$

получим

$$S = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} |E| + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8, \quad R_8 = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \cdot 5c_4 \frac{s^2 M \log \log L}{\sqrt{\log L}},$$

$$\sum_{n \in E_s^+} \delta_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} |E| + \theta_2 R_2 + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8$$

и, наконец,

$$\sum_{n \in E_s^+} \kappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} |E| + \theta_1 R_1 + \theta_2 R_2 + \theta_7 R_7 + \theta_8 R_8.$$

Суммируя полученные выше оценки, получаем

$$\left| \sum_{j=1,2,7,8} \theta_j R_j \right|$$

$$< \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} M \left\{ 539c_0^{3/4} k 2^{k/2} \left(\frac{k}{L} \right)^{1/(2s)} + 3\sqrt{e} \frac{s(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}} + \frac{603}{\sqrt{\log L}} + 5c_4 \frac{s^2 \log \log L}{\sqrt{\log L}} \right\}$$

$$< 5(2c_4 + 1) \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} \frac{s|E|(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $s \geq 2$ – фиксированное целое число, E – любое из множеств E_s^+ , E_s^- . Тогда при любом $x > 0$ число $E(x)$ номеров n , $N < n \leq N + M$, принадлежащих E и отвечающих условию

$$0 < |\Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1}| \leq \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{x \log \log N} \right)^s,$$

выражается формулой

$$E(x) = \frac{M}{2} \left\{ \int_0^x \frac{e^{-u} du}{\sqrt{\pi u}} + \frac{2.15\theta}{\sqrt{\log \log \log \log N}} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция, отвечающая распределению

$$F(x) = \frac{1}{M} \cdot \{n \mid n \in E, \kappa_n \leq x\}$$

дискретной случайной величины $\kappa: E \mapsto \mathbb{R}$ со значениями κ_n , $n \in E$. Тогда, полагая

$$\delta = 10^{-4}, \quad \lambda = \sqrt{(1 - \delta) \log \log L}, \quad K = [2e\lambda^2] + 1,$$

будем иметь

$$\varphi(t) = |E|^{-1} \sum_{n \in E} e^{it\kappa_n} = |E|^{-1} \sum_{n \in E} \left\{ \sum_{k=0}^K \frac{(it\kappa_n)^k}{k!} + 2\theta_1 \frac{(|t|\kappa_n)^{K+1}}{(K+1)!} \right\}. \quad (5.32)$$

Меняя в (5.32) порядок суммирования и пользуясь формулой леммы 5.22 в виде

$$\sum_{n \in E} \kappa_n^k = \frac{\varkappa(k)}{2^{k/2}} |E| (1 + \theta^{(k)} R), \quad R = \frac{5(2c_4 + 1)s(\log \log L)^{s/2}}{\sqrt{\log L}}, \quad \theta^{(0)} = 0,$$

получаем

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^K \frac{(it)^k}{k!} |E|^{-1} \sum_{n \in E} \kappa_n^k + \frac{2\theta_2 |t|^{K+1}}{(K+1)!} |E|^{-1} \sum_{n \in E} \kappa_n^{K+1} = \varphi_1(t) + 2\theta_3(\varphi_2(t) + \varphi_3(t)),$$

где

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=0}^K \frac{1}{k!} \left(\frac{it}{\sqrt{2}} \right)^k \varkappa(k), \quad \varphi_2(t) = \frac{\varkappa(K+1)}{(K+1)!} \left(\frac{|t|}{\sqrt{2}} \right)^{K+1}, \quad \varphi_3(t) = R \sum_{k=1}^{K+1} \frac{\varkappa(k)}{k!} \left(\frac{|t|}{\sqrt{2}} \right)^k.$$

Преобразуя $\varphi_1(t)$ с помощью тождества

$$\varkappa(k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} (2u)^{2k} du,$$

имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \sum_{k=0}^K \frac{(itu\sqrt{2})^k}{k!} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \left\{ e^{itu\sqrt{2}} + 2\theta_4 \frac{(|t|u\sqrt{2})^{K+1}}{(K+1)!} \right\} du \\ &= \psi(t) + \frac{2\theta_5}{(K+1)!} \left(\frac{|t|}{\sqrt{2}} \right)^{K+1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} (2u)^{K+1} du = \psi(t) + 2\theta_5 \varphi_2(t), \end{aligned}$$

где

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 + itu\sqrt{2}} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2/2 + itv} dv$$

– характеристическая функция, отвечающая распределению $H(x)$ с плотностью

$$h(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u < 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-u^2/2}, & \text{если } u \geq 0. \end{cases}$$

Положим

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{|\varphi(t) - \psi(t)|}{|t|} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\leq \frac{4}{K+1} \frac{\varkappa(K+1)}{(K+1)!} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^{K+1} + 2R \sum_{k=1}^{K+1} \frac{\varkappa(k)}{k!} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^k \\ &< \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{K^2} \left(\frac{e\lambda^2}{K} \right)^{K/2} + 2R \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \sum_{k=1}^{K+1} \frac{1}{k!} \left(2u \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^k du \\ &< 2^{-K/2} + 2R \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 + u\lambda\sqrt{2}} du = 2^{-K/2} + 4Re^{\lambda^2/2} \\ &< L^{-1.8} + 4 \cdot \frac{5(2c_4 + 1)s(\log \log L)^{s/2}}{(\log L)^{\delta/2}} < (\log L)^{-\delta/3}. \end{aligned}$$

Замечая, что $\sup_u |h'(u)| = \sqrt{2/(\pi e)}$, и применяя лемму [1.7](#), приходим к неравенству

$$\sup_x |F(x) - H(x)| \leq \frac{a}{\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi e}} + bI(\lambda) < \frac{2.15}{\sqrt{\log \log L}}.$$

Теорема доказана.

В завершение мы докажем две теоремы о существовании любого фиксированного числа подряд идущих аномально малых или аномально больших значений величин Δ_n .

Во-первых, мы покажем, что каково бы ни было фиксированное число s , найдется бесконечно много номеров n таких, что каждое из значений $\Delta_n, \dots, \Delta_{n+s-1}$ имеет порядок $o(\sqrt{\log \log n})$, т.е. будет очень маленьким по сравнению со своим средним значением $\sqrt{\log \log n}$.

Во-вторых, мы докажем бесконечность множества наборов $\Delta_n, \dots, \Delta_{n+s-1}$, в которых каждое из чисел превышает $\varphi(n)\sqrt{\log \log n}$, где $\varphi(x)$ – некоторая функция, неограниченно возрастающая при $x \rightarrow +\infty$.

Основное соображение, которое позволяет доказывать утверждения такого рода, состоит в том, что если произведение положительных величин из набора (5.1) очень мало, то в большинстве случаев и каждая из разностей $\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1}$ тоже будет мала по сравнению со средним значением. Если же это не так, то в наборе (5.1) нашлись бы два числа, разность между которыми оказалась бы очень велика. Последнее в свою очередь влечет существование аномально больших расстояний между соседними ординатами нулей дзета-функции Римана, что оказывается (в силу леммы 5.1) очень редким явлением.

ТЕОРЕМА 5.3. *Для любого фиксированного числа $s \geq 2$ найдется не менее*

$$\frac{0.01M}{\log \log \log \log N}$$

номеров n , $N < n \leq N + M$, таких, что

$$1 \leq \Delta_n, \quad \Delta_{n+1}, \quad \dots, \quad \Delta_{n+s-1} \leq 0.65 \sqrt{\frac{\log \log N}{\log \log \log \log N}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\kappa_1 = 1.2\pi, \quad \kappa_2 = 1.3\pi, \quad x = \frac{\kappa_1}{\log \log L}, \quad y = \frac{\kappa_2}{\log \log L}$$

и рассмотрим множество номеров n с условиями

$$\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1} > 0, \quad \Delta_n \Delta_{n+1} \cdots \Delta_{n+s-1} \leq \left\{ \frac{\sqrt{xL}}{\pi} \right\}^s.$$

Согласно теореме 5.2 для количества ν_1 таких n справедлива следующая нижняя оценка:

$$\nu_1 \geq \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x u^{-1/2} e^{-u} du - \frac{2.15}{\sqrt{\log \log L}} \right\} > \frac{M}{2} \left\{ 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^{-x} - \frac{2.15}{\sqrt{\log \log L}} \right\} > \frac{0.02M}{\sqrt{\log \log L}}.$$

Далее, из рассматриваемых n отберем те, для которых

$$\max_{0 \leq j \leq s-1} \Delta_{n+j} > \frac{\sqrt{yL}}{\pi}. \quad (5.33)$$

Поскольку

$$\left\{ \min_{0 \leq j \leq s-1} \Delta_{n+j} \right\}^s \leq \Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1} \leq \left\{ \frac{\sqrt{xL}}{\pi} \right\}^s,$$

то

$$\min_{0 \leq j \leq s-1} \Delta_{n+j} \leq \frac{\sqrt{xL}}{\pi}.$$

Следовательно, для таких n имеем

$$\max_{0 \leq j \leq s-1} \Delta_{n+j} - \min_{0 \leq j \leq s-1} \Delta_{n+j} > \frac{1}{\pi} (\sqrt{\kappa_2} - \sqrt{\kappa_1}) \sqrt{\frac{L}{\log \log L}} > \frac{1}{40} \sqrt{\frac{L}{\log \log L}}. \quad (5.34)$$

Пусть при заданном n символы q и r обозначают те значения j , для которых достигаются эти максимум и минимум. Тогда $r < q$. Действительно, воспользовавшись леммой 5.3, будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta_{n+q+1} &\geq \Delta_{n+q} - 1 \geq \frac{\sqrt{yL}}{\pi} - 1 > \frac{\sqrt{xL}}{\pi}, \\ \Delta_{n+q+2} &\geq \Delta_{n+q} - 2 \geq \frac{\sqrt{yL}}{\pi} - 2 > \frac{\sqrt{xL}}{\pi}, \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_{n+s-1} &\geq \Delta_{n+q} - (s - q - 1) > \frac{\sqrt{xL}}{\pi}.\end{aligned}$$

Итак, наименьшее из чисел Δ_{n+j} , $0 \leq j < s$, находится среди $\Delta_n, \dots, \Delta_{n+q-1}$. Переписывая неравенство (5.34) в виде

$$\begin{aligned}\Delta_{n+q} - \Delta_{n+r} &= (\Delta_{n+q} - \Delta_{n+q-1}) + (\Delta_{n+q-1} - \Delta_{n+q-2}) + \dots + (\Delta_{n+r+1} - \Delta_{n+r}) \\ &> \frac{1}{40} \sqrt{\frac{L}{\log \log L}},\end{aligned}$$

несложно заключить, что по крайней мере при одном i , $r < i \leq q$, будет выполнена оценка

$$\Delta_{n+i} - \Delta_{n+i-1} > \frac{1}{40(q-r)} \sqrt{\frac{L}{\log \log L}} \geq \frac{1}{40(s-1)} \sqrt{\frac{L}{\log \log L}}.$$

В силу леммы 5.3 соответствующий промежуток $[\gamma_{n+i-1}, \gamma_{n+i})$ содержит не менее

$$k = \frac{1}{40(s-1)} \sqrt{\frac{L}{\log \log L}} + 1$$

точек Грама. Но тогда длина такого промежутка будет не меньше

$$(k-1)(t_{N+M} - t_{N+M-1}) > \frac{2\pi(k-1)}{\log t_{N+M}}.$$

Полагая $T = t_{N+M}$, $H = t_{N+M} - t_N$ в лемме 5.1, заключаем, что число таких промежутков $[\gamma_{n+i-1}, \gamma_{n+i})$ не превосходит

$$(1 + o(1))e^4 M \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2ec_0} - o(1) \right) (k-1) \right\}.$$

Поскольку каждому из этих промежутков отвечает не более s номеров m с условием

$$\Delta_m - \Delta_{m-1} \geq \frac{1}{40(s-1)} \sqrt{\frac{L}{\log \log L}},$$

то общее число ν_2 номеров n , отвечающих (5.33), не превосходит

$$(1 + o(1))e^4 s M \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2ec_0} - o(1) \right) (k-1) \right\} < M \exp \left\{ - \frac{0.004}{sc_0} \sqrt{\frac{L}{\log \log L}} \right\} < \frac{0.01M}{\sqrt{\log \log L}}.$$

Таким образом, по крайней мере

$$\nu_1 - \nu_2 > \frac{0.02M}{\sqrt{\log \log L}} - \frac{0.01M}{\sqrt{\log \log L}} = \frac{0.01M}{\sqrt{\log \log L}}$$

номеров n удовлетворяет условиям

$$1 \leq \Delta_n, \quad \Delta_{n+1}, \quad \dots, \quad \Delta_{n+s-1} \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\kappa_2} \frac{L}{\log \log L}} < 0.65 \sqrt{\frac{\log \log N}{\log \log \log N}}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.4. Для любого фиксированного числа $s \geq 2$ на промежутке $N < n \leq N + M$ найдется не менее

$$\frac{0.1M}{\sqrt{\log \log \log \log N}}$$

номеров n , удовлетворяющих условиям

$$\Delta_{n+j} > \frac{1}{2\pi} \sqrt{\log \log N} \sqrt{\log \log \log \log N}, \quad j = 0, 1, \dots, s-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\kappa_1 = 3.5$, $\kappa_2 = 0.25$,

$$x = \frac{1}{2}(\log \log \log L - \log \log \log \log L - \kappa_1), \quad y = \kappa_2 \log \log \log L$$

и рассмотрим множество номеров n с условиями

$$\Delta_n, \Delta_{n+1}, \dots, \Delta_{n+s-1} > 0, \quad \Delta_n \cdots \Delta_{n+s-1} > \left\{ \frac{\sqrt{xL}}{\pi} \right\}^s. \quad (5.35)$$

Согласно теореме 5.2 количество таких номеров оценивается снизу величиной

$$\nu_1 = \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du - \frac{2.15}{\sqrt{\log \log L}} \right\} > \frac{M}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - \frac{2.15}{\sqrt{\log \log L}} \right\} > \frac{0.07M}{\sqrt{\log \log L}}.$$

Далее, для каждого из таких n , очевидно, имеем

$$\max_{0 \leq j < s} \Delta_{n+j} > \frac{\sqrt{xL}}{\pi}.$$

Выделим теперь среди рассматриваемых номеров те, для которых

$$\min_{0 \leq j < s} \Delta_{n+j} \leq \frac{\sqrt{yL}}{\pi} \quad (5.36)$$

и, следовательно,

$$\max_{0 \leq j < s} \Delta_{n+j} - \min_{0 \leq j < s} \Delta_{n+j} > \frac{1}{\pi}(\sqrt{x} - \sqrt{y})\sqrt{L} > \frac{1}{2\pi}\sqrt{L}\sqrt{\log \log L}.$$

Зафиксировав такое значение n , обозначим через q и r те значения j , которые отвечают соответственно максимуму и минимуму Δ_{n+j} , $0 \leq j < s$. Рассуждая подобно тому, как это делалось при доказательстве теоремы 5.3, заключаем, что $0 \leq r < q$ и по крайней мере для одного i с условием $r, i \leq q$ будут выполнены неравенства

$$\Delta_{n+i} - \Delta_{n+i-1} > h, \quad \gamma_{n+i} - \gamma_{n+i-1} > \frac{2\pi h}{\log T}, \quad (5.37)$$

где

$$h = \frac{1}{2\pi(s-1)} \sqrt{L} \sqrt{\log \log L}, \quad T = t_N.$$

Но тогда в силу леммы 5.1 число ν_2 таких номеров n , для которых имеет место (5.36), не превосходит

$$(1 + o(1))e^4 s M \exp \left\{ - \left(\frac{1}{2ec_0} - o(1) \right) h \right\} < M \exp \left\{ - \frac{1}{4\pi ec_0 s} \sqrt{L} \sqrt{\log \log L} \right\} < \frac{0.02M}{\sqrt{\log \log L}}.$$

Следовательно, по меньшей мере для

$$\nu_1 - \nu_2 > \frac{0.07M}{\sqrt{\log \log L}} - \frac{0.02M}{\sqrt{\log \log L}} = \frac{0.05M}{\sqrt{\log \log L}}$$

значений n , $N < n \leq N + M$, справедливо неравенство

$$\min_{0 \leq j < s} \Delta_{n+j} > \frac{\sqrt{yL}}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{L} \sqrt{\log \log \log L}.$$

Теорема доказана.

Глава 6. Значения функции $\zeta(1/2 + it)$ в точках Грама

Вопросы, которые рассматриваются в этой главе, по сути принадлежат к дискретной теории дзета-функции Римана. Такое название носит целый класс задач, в которых исследуется поведение $\zeta(s)$ и связанных с ней функций на различных дискретных множествах точек $\{s_n\}$.

Дискретная теория $\zeta(s)$ берет свое начало в работах Титчмарша. Его статья [7] содержала новое доказательство теоремы Харди о бесконечности множества нулей $\zeta(s)$ на критической прямой. Это доказательство основано на вычислении сумм

$$\sum_{n \leq N} Z(t_{2n}) = - \sum_{n \leq N} \zeta\left(\frac{1}{2} + it_{2n}\right), \quad \sum_{n \leq N} Z(t_{2n+1}) = \sum_{n \leq N} \zeta\left(\frac{1}{2} + it_{2n+1}\right).$$

К числу наиболее известных результатов этой области следует отнести и приводимые ниже формулы «дискретных моментов» функции Харди

$$\sum_{n \leq N} Z^2(t_n) = N(\log N)(1 + o(1)), \quad (6.1)$$

$$\sum_{n \leq N} Z^4(t_n) = \frac{N}{2\pi^2}(\log N)^4(1 + o(1)). \quad (6.2)$$

которые были получены Мозером¹ (см. [9], [10]).

Как следует из определения точек Грама, вещественные числа $\zeta(1/2 + it_n)$ служат абсциссами точек пересечения вещественной оси с кривой

$$\mathcal{C}: t \mapsto \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = \left(\operatorname{Re} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \operatorname{Im} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)\right)$$

(рис. 11). Пересечениям $\mathcal{C}$ с вещественной осью отвечают и нули $t = \mathfrak{c}_n$ функции Харди $Z(t)$, но в этих случаях такие точки совпадают с началом координат.

Естественно поставить следующий вопрос: могут ли точки пересечения $\mathcal{C}$ с вещественной осью, отвечающие значениям $t = t_n$, совпадать с началом координат? Иными словами, возможно ли равенство $\zeta(1/2 + it_n) = 0$? Случай совпадения точки Грама t_n с какой-либо из ординат γ_m представляется совершенно неправдоподобным. Это позволяет предположить, что

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \neq 0 \quad (6.3)$$

при всех $n \geq 0$. При попытке доказать или опровергнуть такое предположение возникают две задачи. Первая состоит в нахождении нижней оценки числа $Q(N)$ тех номеров n , $n \leq N$, что удовлетворяют условию (6.3). Вторая задача заключается в том, чтобы определить, насколько близкими к нулю могут оказаться величины $\zeta(1/2 + it_n)$ при неограниченном возрастании n .

Обратимся сначала к первому вопросу. Прежде всего, несложно показать, что величина $Q(N)$ неограниченно возрастает с ростом N . Действительно, применяя неравенство Коши

¹Вторая формула была независимо получена А. А. Лаврик в работе [8].

Рис. 11. Фрагменты кривой $C: t \mapsto \zeta(1/2 + it)$, отвечающие промежуткам (a) $0 \leq t \leq 32$ и (b) $0 \leq t \leq 51$. Абсциссы точек пересечения C с вещественной осью совпадают с величинами $\zeta(1/2 + it_n)$.

к сумме из (6.1) и используя асимптотическую формулу (6.2), получим

$$\begin{aligned} N(\log N)(1 + o(1)) &= \sum_{n \leq N} Z^2(t_n) \\ &\leq \left(Q(N) \sum_{n \leq N} Z^4(t_n) \right)^{1/2} \leq (1 + o(1)) \left(Q(N) \cdot \frac{N}{2\pi^2} (\log N)^4 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

откуда

$$Q(N) > (1 - \varepsilon) \frac{2\pi^2 N}{(\log N)^2}. \quad (6.4)$$

Оценка $Q(N)$, более точная, чем (6.4), была получена в 2011 г. Штойдингом и Калпокасом. В работе [11] ими была рассмотрена «обобщенная» последовательность точек Грама t_n^φ , определяемых при фиксированном φ с условием $0 \leq \varphi < \pi$ как решение уравнения

$$\vartheta(t_n^\varphi) = (n - 1)\pi + \varphi,$$

и получена следующая асимптотическая² формула:

$$\sum_{n \leq N} \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n^\varphi\right) = 2e^{i\varphi}(\cos \varphi)N + O(N^{1/2+\varepsilon}).$$

Положив в ней $\varphi = 0$ и воспользовавшись неравенством Коши наряду с равенством (6.1) подобно тому, как это делалось выше, можно заключить, что

$$Q(N) > (1 - \varepsilon) \frac{4N}{\log N}. \quad (6.5)$$

²При $\varphi \neq \pi/2$.

Необходимо, впрочем, отметить, что из сформулированной Сельбергом на с. 198 работы [3] теоремы следует, что

$$Q(N) > KN \quad (6.6)$$

при некотором постоянном $K > 0$ ³. В силу того, что доказательство этого утверждения так и не было опубликовано, задача нахождения оценок $Q(N)$, уточняющих (6.5), хотя бы и уступающих по точности (6.6), все же сохраняет смысл. Одна из такого рода оценок и помещена в настоящей главе. Именно, приведенная ниже теорема 6.1 дает неравенство вида

$$Q(N + M) - Q(N) \geq Me^{-c(\log \log \log N)^2}, \quad c > 0.$$

Вывод этой и иных подобных ей оценок опирается на факт существования у функции $S(t)$ большого числа точек перемены знака.

Перейдем теперь к задаче нахождения малых значений $|\zeta(1/2 + it_n)|$. Численные данные доставляют примеры точек Грама t_n , для которых такие значения «аномально» близки к нулю. Таблица 1 содержит все такие значения, не превосходящие 10^{-7} и отвечающие промежутку $n \leq 10^8$ (см. также таблицу II.7 приложения II).

Таблица 1

№	n	$\zeta(1/2 + it_n)$	№	n	$\zeta(1/2 + it_n)$
1	368 383	$8.908459 \cdot 10^{-8}$	7	55 785 549	$3.751899 \cdot 10^{-8}$
2	12 984 109	$-2.052298 \cdot 10^{-8}$	8	61 769 885	$8.026449 \cdot 10^{-8}$
3	21 567 185	$-6.709404 \cdot 10^{-8}$	9	65 463 721	$1.083783 \cdot 10^{-8}$
4	45 898 152	$8.302024 \cdot 10^{-8}$	10	69 612 841	$9.033652 \cdot 10^{-8}$
5	50 550 325	$-6.397503 \cdot 10^{-8}$	11	74 201 244	$2.875945 \cdot 10^{-8}$
6	52 220 649	$-6.529425 \cdot 10^{-8}$			

Из приведенных ниже теорем следует, что величина $|\zeta(1/2 + it_n)|$ может быть сколь угодно близкой к нулю. Оказывается даже, что какова бы ни была положительная постоянная A , номера n , $n \leq N$, удовлетворяющие условию

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \right| < e^{-A\sqrt{\log \log n}},$$

образуют множество положительной плотности (зависящей от A).

Укажем на те соображения, которые приводят к такого рода утверждениям. Прежде всего, известно (см., например, [4; теорема 6.1], [12]), что при любом вещественном x мера множества $\mathcal{E}(T; x)$ точек t промежутка $(0, T]$, для которых величина

$$\xi(t) = \frac{\sqrt{2} \log |\zeta(1/2 + it)|}{\sqrt{\log \log T}}$$

удовлетворяет неравенству $\xi(t) \leq x$, равна

$$\text{mes } \mathcal{E}(T; x) = T \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du + O\left(\frac{(\log \log \log T)^2}{\sqrt{\log \log T}}\right) \right).$$

³Приведем соответствующую цитату из работы Сельберга [3]: «Исследуя колебания аргумента $\zeta(1/2 + it)$ более детально, я преуспел в доказательстве того, что существуют абсолютные положительные постоянные K и N_0 такие, что при $N > N_0$, $1 \leq \nu \leq N$ числа $\zeta(1/2 + it_{\nu-1})$ и $\zeta(1/2 + it_\nu)$ имеют разные знаки в более чем KN случаях, и одинаковый знак также в более чем KN случаях.»

Положив $x = -A\sqrt{2}$, несложно заключить, что неравенство

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| < e^{-A\sqrt{\log \log T}}$$

выполняется для положительной доли точек t рассматриваемого промежутка.

Однако попытка применить подобные рассуждения к последовательности

$$\xi(t_n) = \frac{\sqrt{2} \log |\zeta(1/2 + it_n)|}{\sqrt{\log \log N}}, \quad n \leq N,$$

наталкивается на самые серьезные препятствия, которые заключаются в следующем.

Формула для вещественной части логарифма $\zeta(s)$ на критической прямой, используемая при выводе (6.6), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \log \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| &= \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}} \frac{\cos(t \log m)}{\log m} \\ &\quad + O\left(\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \left\{ \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \log x + \log \chi(t) \right\} \left\{ \left| \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t} + it}} \right| + \log t \right\}\right), \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\chi(t) = 1 + \frac{1}{\eta(t) \log x},$$

где величины $\sigma_{x,t}, \Lambda_x(m)$ определены в параграфе 2.1, а $\eta(t) = \min_{\varrho = \beta + i\gamma} |t - \gamma|$ обозначает расстояние от t до ближайшей ординаты нуля $\zeta(s)$, так что $\chi(\gamma_n) = +\infty$. Вычисление моментов

$$\int_0^T \left(\log \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \right)^k dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

также необходимых для вывода (6.6), сводится, помимо прочего, к оценке интегралов вида

$$\int_0^T \log^m \chi(t) dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.8)$$

Интегралы (6.8) конечны, поскольку, например, конечен всякий интеграл

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{t} \right)^m dt.$$

В дискретном же случае вместо интегралов в (6.8) приходится иметь дело с суммами

$$\sum_n \log^m \chi(t_n).$$

Отсутствие точной информации о взаимном расположении точек Грама и ординат нулей $\zeta(s)$ не позволяет утверждать, что суммы эти конечны.

Идея доказательства теорем 6.1–6.3 состоит в следующем. Наличие в формуле (6.7) множителя

$$\log \chi(t) \quad (6.9)$$

необходимо, поскольку отражает суть дела: в точках t , совпадающих с нулями функции $\zeta(1/2 + it)$, левая часть (6.7) обращается в $(-\infty)$, и то же должно происходить и с правой

частью. Но поскольку множитель (6.9) в таких точках обращается в $+\infty$, то естественно предположить, что существует приближение $\log |\zeta(1/2 + it)|$, подобное (6.7), в которое слагаемое, содержащее множителем (6.9), входит с отрицательным коэффициентом. Соответственно при переходе от точного равенства к верхней оценке это слагаемое может быть опущено. Выводу подобного неравенства и посвящена лемма 6.4.

Правая часть $C(t)$ полученного в этой лемме неравенства свободна от перечисленных выше недостатков формулы (6.7). К ней оказывается возможным применить технику, которая была использована в гл. 2 для нахождения моментов величин $\Delta(n) = S(t_n + 0)$ и их функции распределения.

6.1. Верхняя оценка $\log |\zeta(1/2 + it)|$

Доказательства теорем 6.1–6.3 опираются на ряд вспомогательных утверждений, которые собраны в настоящем параграфе.

ЛЕММА 6.1. *Если $\zeta(1/2 + it) \neq 0$, то справедливо равенство*

$$\log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| = -\operatorname{Re} \left\{ \text{v.p.} \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma \right\}. \quad (6.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если t не является ординатой нуля $\zeta(s)$, то всякая ветвь функции $\log \zeta(s)$, непрерывная вдоль луча $[1/2 + it, +\infty + it)$, будет и аналитической в некоторой его окрестности. Фиксируя такую ветвь, будем иметь

$$\begin{aligned} \log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| &= \operatorname{Re} \log \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) = \operatorname{Re} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left\{ \log \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) - \log \zeta(a + it) \right\} \\ &= -\operatorname{Re} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{1/2}^a \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma = -\operatorname{Re} \int_{1/2}^{+\infty} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma. \end{aligned}$$

Так как несобственный интеграл совпадает в данном случае с несобственным интегралом в смысле главного значения, то мы приходим к утверждению леммы.

Пусть, далее, $\varrho = \beta + it$ – единственный нуль $\zeta(s)$ с условием $1/2 < \beta < 1$. Обозначая через j правую часть (6.10), будем иметь

$$\begin{aligned} j &= -\operatorname{Re} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_{1/2}^{\beta-h} + \int_{\beta+h}^{+\infty} \right\} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma \\ &= \operatorname{Re} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \log \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) + \log \zeta(\beta + h + it) - \log \zeta(\beta - h + it) \right\} \\ &= \log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| + \lim_{h \rightarrow 0} \log \left| \frac{\zeta(\varrho + h)}{\zeta(\varrho - h)} \right|. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Обозначим кратность нуля ϱ через m . Определив $g(s)$ равенством $\zeta(s) = (s - \varrho)^m g(s)$ и замечая, что $g(s)$ аналитична вблизи точки $s = \varrho$ и отлична там от нуля, получим

$$\begin{aligned} |\zeta(\varrho + h)| &= h^m |g(\varrho + h)| = h^m (|g(\varrho)| + o(1)) = h^m |g(\varrho)| (1 + o(1)), \\ |\zeta(\varrho - h)| &= h^m |g(\varrho)| (1 + o(1)), \end{aligned}$$

откуда

$$\log \left| \frac{\zeta(\varrho + h)}{\zeta(\varrho - h)} \right| = \log (1 + o(1)) = o(1)$$

при $h \rightarrow 0$. Возвращаясь к (6.11), получаем

$$j = \log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|.$$

Случай, когда t является ординатой нескольких различных нулей $\zeta(s)$, аналогичен рассмотренному. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2. При $10 \leq x \leq t^\delta$, $800\delta = 1$ справедливо неравенство

$$\log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| \leq C(t),$$

где

$$C(t) = \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}} \frac{\cos(t \log m)}{\log m} + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (\log x) \left(a_3 \log t + a_4 \left| \sum_{p \leq x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t} + it}} \right| \right)$$

и $a_3 = 4.01$, $a_4 = 7.52$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $1/2 + it$ — нуль $\zeta(s)$, то неравенство леммы выполнено, поскольку в этом случае его левая часть обращается в $(-\infty)$. Поэтому далее предполагаем, что $\zeta(1/2 + it) \neq 0$. Используя лемму 6.1, будем иметь

$$\log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| = -\operatorname{Re} \left\{ \text{v.p.} \left(\int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} + \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \right) \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma \right\} = -I_1 - I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)},$$

$$I_2 = \operatorname{Re} \left\{ \text{v.p.} \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma \right\}, \quad I_3 = \operatorname{Re} \left\{ \text{v.p.} \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \left(\frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} - \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) d\sigma \right\}.$$

Согласно лемме 1.5 первый интеграл удовлетворяет неравенству

$$|I_1| \leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) (2.6|r(x, t)| + 0.8 \log t + 4.82), \quad (6.12)$$

где

$$r(x, t) = \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t} + it}}.$$

Используя оценку

$$\frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \log x \geq 1, \quad (6.13)$$

перепишем (6.12) в виде

$$|I_1| \leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (\log x) \{ a_3^{(1)} \log t + a_4^{(1)} |r(x, t)| + a_5^{(1)} \},$$

где $a_3^{(1)} = 0.4$, $a_4^{(1)} = 1.3$, $a_5^{(1)} = 2.41$. Далее, применив лемму 1.19, придем к равенству

$$I_2 = -\operatorname{Re} \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \left\{ \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma + it}} + \frac{13\theta}{3} x^{1/4 - \sigma/2} \left(|r(x, t)| + \frac{1}{2} \log t + 4 \right) \right\} d\sigma,$$

которое наряду с оценками (6.13) и

$$\int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} x^{1/4-\sigma/2} d\sigma = \frac{2}{\log x} x^{-(1/2) \cdot (\sigma_{x,t}-1/2)} \leq \frac{2}{e} \frac{1}{\log x},$$

дает

$$I_2 = -\operatorname{Re} \left\{ \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{\log m} \frac{1}{m^{\sigma_{x,t}+it}} \right\} + \theta \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (\log x) \{ a_3^{(2)} \log t + a_4^{(2)} |r(x, t)| + a_5^{(2)} \},$$

где $a_3^{(2)} = 13/(12e)$, $a_4^{(2)} = 13/(6e)$, $a_5^{(2)} = 26/(3e)$. Оценим, наконец, интеграл I_3 . Воспользовавшись леммой 1.20, при $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ получим

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} - \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right\} = \sum_{\varrho} \kappa(\varrho) + \theta_1(\log t + 6),$$

где

$$\begin{aligned} \kappa(\varrho) &= \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} - \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\ &= \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(t - \gamma)^2 + (\sigma_{x,t} - \sigma)(\sigma_{x,t} - \beta)(\beta - \sigma)}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2\} \{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2\}} = \kappa_1(\varrho) + \kappa_2(\varrho), \end{aligned}$$

где смысл обозначений $\kappa_r(\varrho)$, $r = 1, 2$, очевиден. Положим также

$$j_r(\varrho) = \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \kappa_r(\varrho) d\sigma, \quad j(\varrho) = j_1(\varrho) + j_2(\varrho).$$

Так как на всем промежутке $1/2 \leq \sigma \leq \sigma_{x,t}$ выполняются оценки

$$0 \leq \kappa_1 = \frac{\sigma_{x,t} - \sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \cdot \frac{(t - \gamma)^2}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \leq \frac{\sigma_{x,t} - \sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2},$$

то для любого нуля $\varrho = \beta + i\gamma$ имеем

$$\begin{aligned} j_1 &\leq \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma) d\sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) (\log x) \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Для оценки κ_2 и j_2 отметим сначала, что при $\beta \leq 1/2$ или $\beta \geq \sigma_{x,t}$ числитель κ_2 неположителен на всем промежутке интегрирования, так что для всех таких нулей имеем $j_2 \leq 0$. Поэтому всюду далее предполагаем, что $1/2 < \beta < \sigma_{x,t}$. Обозначим $\tau = |t - \gamma|$ и рассмотрим два случая.

Случай 1: $\tau > (\log x)^{-1}$. Преобразуя κ_2 , получим

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\sigma_{x,t} - \sigma + \sigma - \beta)(\beta - \sigma)}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\} \{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\}} = \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2(\beta - \sigma) - (\sigma_{x,t} - \sigma)(\beta - \sigma)^2}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\} \{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\}} \\ &\leq \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2(\beta - \sigma)}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\} \{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\}}. \end{aligned}$$

Далее, замечая, что последняя дробь отрицательна при $\sigma > \beta$, получаем

$$\begin{aligned}
 j_2 &\leq \int_{1/2}^{\beta} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2 (\beta - \sigma) d\sigma}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\} \{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\}} \\
 &\leq \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \int_{1/2}^{\beta} \frac{(\beta - \sigma) d\sigma}{(\beta - \sigma)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \log \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2 + \tau^2}{\tau^2} \\
 &\leq \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \log \left(1 + \frac{\sigma_{x,t} - 1/2}{\tau} \right) \leq \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \frac{\sigma_{x,t} - 1/2}{\tau} \\
 &< \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \log x.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Случай 2: $0 \leq \tau \leq (\log x)^{-1}$. Допустим сначала, что

$$\sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2 \left(\beta_0 - \frac{1}{2} \right),$$

где $\beta_0 > 1/2$ – абсцисса некоторого нуля $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ с условием

$$|t - \gamma_0| \leq \frac{x^{3|\beta_0 - 1/2|}}{\log x}.$$

Из определения $\sigma_{x,t}$ следует тогда, что β_0 – наибольшая среди абсцисс нулей $\varrho^* = \beta^* + i\gamma^*$ таких, что

$$|t - \gamma^*| \leq \frac{x^{3|\beta^* - 1/2|}}{\log x}. \tag{6.15}$$

Но для всякого β^* верна оценка

$$\frac{x^{3|\beta^* - 1/2|}}{\log x} \geq \frac{1}{\log x}.$$

А поскольку для рассматриваемого нуля $\varrho = \beta + i\gamma$ имеет место неравенство $\tau = |t - \gamma| \leq (\log x)^{-1}$, то этот нуль ϱ заведомо содержится в числе нулей ϱ^* , удовлетворяющих (6.15). Следовательно, его абсцисса β не может превосходить β_0 :

$$\beta \leq \beta_0 = \frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} + \frac{1}{2} \right).$$

Из последнего неравенства несложно заключить, что

$$0 \leq \beta - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \leq \sigma_{x,t} - \beta. \tag{6.16}$$

Предположим теперь, что $\sigma_{x,t} = 1/2 + 2(\log x)^{-1}$. В этом случае для всех нулей, удовлетворяющих условию (6.15) (и, в частности, для нуля $\varrho = \beta + i\gamma$), будем иметь

$$\left| \beta^* - \frac{1}{2} \right| \leq (\log x)^{-1} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, и в этом случае абсцисса β удовлетворяет (6.16).

Переходя к оценке $j_2(\varrho)$, получаем

$$j_2 = \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \left(\int_{1/2}^{\beta} + \int_{\beta}^{\sigma_{x,t}} \right) \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\beta - \sigma)}{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2} d\sigma = \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} (j_3 - j_4),$$

где

$$j_3 = \int_{1/2}^{\beta} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\beta - \sigma) d\sigma}{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2}, \quad j_4 = \int_{\beta}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\beta - \sigma) d\sigma}{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2}.$$

Полагая $u = \beta - \sigma$, $v = \sigma - \beta$ в j_3 и j_4 соответственно, получаем

$$\begin{aligned} j_3 &= (\sigma_{x,t} - \beta) \int_0^{\beta-1/2} \frac{u du}{u^2 + \tau^2} + \int_0^{\beta-1/2} \frac{u^2 du}{u^2 + \tau^2} \\ &\leq (\sigma_{x,t} - \beta) \frac{1}{2} \log \frac{(\beta - 1/2)^2 + \tau^2}{\tau^2} + \left(\beta - \frac{1}{2} \right), \\ j_4 &= (\sigma_{x,t} - \beta) \int_0^{\sigma_{x,t}-\beta} \frac{v dv}{v^2 + \tau^2} - \int_0^{\sigma_{x,t}-\beta} \frac{v^2 dv}{v^2 + \tau^2} \\ &\geq (\sigma_{x,t} - \beta) \frac{1}{2} \log \frac{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2}{\tau^2} - (\sigma_{x,t} - \beta), \end{aligned}$$

откуда

$$j_3 - j_4 \leq (\sigma_{x,t} - \beta) \frac{1}{2} \log \frac{(\beta - 1/2)^2 + \tau^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right).$$

В силу неравенства (6.16) дробь, стоящая под знаком логарифма, не превосходит единицы. Следовательно,

$$j_2 \leq \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \log x. \quad (6.17)$$

Сравнивая (6.14) и (6.17), заключаем, что неравенство (6.14) имеет место при любом β . Таким образом,

$$j(\varrho) = j_1(\varrho) + j_2(\varrho) \leq \frac{5}{4} \frac{(\sigma_{x,t} - 1/2)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \log x.$$

Итак, для оценки I_3 остается воспользоваться леммой I.5. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho} j(\varrho) &\leq \frac{5}{4} (\log x) \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - 1/2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\ &\leq \frac{5}{4} (\log x) \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{5}{3} \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} + \frac{5}{6} \log t + 5 \right) \\ &\leq (\log x) \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{65}{24} \log t + \frac{13}{4} |r(x, t)| + 16.3 \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \sum_{\varrho} j(\varrho) + (\log x) \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \log t + 3 \right) \\ &= (\log x) \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 (a_3^{(3)} \log t + a_4^{(3)} |r(x, t)| + a_5^{(3)}), \end{aligned}$$

где $a_3^{(3)} = 77/24$, $a_4^{(3)} = 13/12$, $a_5^{(3)} = 19.3$. Таким образом,

$$\ln |\zeta(0.5 + it)| \leq \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}} \frac{\cos(t \log m)}{\log m} + R,$$

$$R = (\log x) \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^2 \{ a_3^{(4)} \log t + a_4^{(4)} |r(x, t)| + a_5^{(4)} \}, \quad a_j^{(4)} = \sum_{k=1}^3 a_j^{(k)},$$

причем $a_3^{(4)} < 4.00687$, $a_4^{(4)} < 7.51374$, $a_5^{(4)} < 24.89829$. Далее, полагая

$$q(x, t) = \sum_{p \leq x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t} + it}}$$

и замечая, что

$$\begin{aligned} |r(x, t)| &\leq |q(x, t)| + \sum_{k \geq 2} \sum_{p \leq x^{3/k}} \frac{\log p}{p^{k/2}} \leq |q(x, t)| + \sum_{p \leq x^{3/2}} \frac{\log p}{p} + \sum_p \frac{\log p}{p(\sqrt{p} - 1)} \\ &< |q(x, t)| + 1.5 \log x + 2.48, \end{aligned}$$

при $10 \leq x \leq t^\delta$, $\delta = 800^{-1}$ получим

$$\begin{aligned} a_3^{(4)} \log t + a_4^{(4)} |r(x, t)| + a_5^{(4)} &< a_3^{(4)} \log t + a_4^{(4)} (|q(x, t)| + 1.5 \delta \log t + 2.48) + a_5^{(4)} \\ &\leq (\log t) \left(a_3^{(4)} + 1.5 \delta a_4^{(4)} + \frac{\delta}{\log 2} (2.48 a_4^{(4)} + a_5^{(4)}) \right) + a_4^{(4)} |q(x, t)| \\ &< 4.01 \log t + 7.52 |q(x, t)|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq c \log X$, где c – достаточно малая абсолютная постоянная, $x = X^{1/(8k+3)}$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_n \left| C(t_n) - \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m) \cos(t_n \log m)}{m^{\sigma_{x,t_n}} \log m} \right|^{2k} < \frac{31.8}{\varepsilon} M \left(\frac{2252.8k}{\varepsilon} \right)^{2k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы практически дословно повторяет доказательство леммы 2.5; возникающая там постоянная $320a_1 = 1440$ заменится теперь величиной $640a_3 = 2566.4$ (a_1 и a_3 определены соответственно в леммах 2.4 и 6.2).

ЛЕММА 6.4. Если выполнены условия леммы 6.3, то имеет место неравенство

$$\sum_n \left| \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m) \cos(t_n \log m)}{m^{\sigma_{x,t_n}} \log m} - \sum_{p \leq x} \frac{\cos(t_n \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} < \frac{M}{8\varepsilon} (1152e^4 k)^k. \quad (6.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы полностью аналогично доказательству леммы 2.6.

ЛЕММА 6.5. Если выполнены условия леммы 6.3, то имеет место неравенство

$$\sum_n \left| C(t_n) - \sum_{p \leq x} \frac{\cos(t_n \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} < \frac{c_6}{280} (c_6 k)^{2k} M,$$

где $c_6 = 5132.8\varepsilon^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью повторяет доказательство леммы 2.7. Фигурирующая в ней постоянная c_0 заменится при этом величиной

$$c_6 = 2 \cdot 640a_3 = 5132.8\varepsilon^{-1}.$$

6.2. Основные теоремы

Пусть, как и выше, $Q(N)$ обозначает количество номеров n с условием $1 \leq n \leq N$, удовлетворяющих (6.3). Имеет место

ТЕОРЕМА 6.1. *Существуют положительные постоянные b_1, b_2 , зависящие лишь от ε и такие, что при всех $N \geq N_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства*

$$Q(N + M) - Q(N) \geq M e^{-b_1 (\log \log \log N)^2} \quad (6.19)$$

и, если гипотеза Римана верна,

$$Q(N + M) - Q(N) \geq M e^{-b_2 \log \log \log N} = \frac{M}{(\log \log N)^{b_2}}. \quad (6.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выводе теорем 4.7 и 4.8 было установлено, что число нулей функции $\varphi(t) = S(t + 0)$, отличных от ординат нулей $\zeta(s)$ и лежащих на промежутке $(t_N, t_{N+M}]$, оценивается снизу величинами (6.20) или (6.19) в зависимости от того, предполагается гипотеза Римана справедливой или нет. Там же было установлено, что все нули $\varphi(t)$ являются точками Грама. Отсюда сразу следует утверждение теоремы.

Докажем теперь ряд утверждений о существовании очень маленьких по модулю значений дзета-функции в точках Грама. Для этого мы сначала получим нижнюю оценку для функции распределения

$$\Psi(v) = \frac{1}{M} \# \left\{ n \mid N < n \leq N + M, C(t_n) \leq \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{\log \log N} \right\},$$

после чего, выбрав надлежащим образом параметр $v = -w\sqrt{2}$, $w > 0$, сделаем заключение о существовании большого количества номеров n с условием

$$C(t_n) \leq -w \sqrt{\log \log N}.$$

В силу леммы 6.2 для таких n будут выполняться и неравенства

$$\left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it_n \right) \right| = e^{\log |\zeta(1/2 + it_n)|} \leq e^{C(t_n)} \leq e^{-w \sqrt{\log \log N}}.$$

При оценке функции $\Psi(v)$ будем придерживаться схемы рассуждений из параграфа 2.4.

Положим

$$y = \exp \left(\frac{\log N}{288L} \right), \quad \mathfrak{S} = \sum_{p \leq y} \frac{1}{p}, \quad V_z(t) = \sum_{p \leq z} \frac{\cos(t \log p)}{\sqrt{p}}.$$

Пусть, кроме того, $f(u)$ – неограниченная сверху и монотонно возрастающая при $u \rightarrow +\infty$ функция, подчиненная при $N \leq u \leq N + M$ условиям

$$1 \ll f(u) \leq \frac{c_6 L}{12 \log L}$$

(c_6 – постоянная леммы 6.5), и пусть $\mathcal{F} = f(N)$.

ЛЕММА 6.6. *Для всех n с условием $N < n \leq N + M$, за исключением не более $M\delta_1$ номеров,*

$$\delta_1 = 136\varepsilon^{-1} \exp \left\{ -\frac{2L}{3\mathcal{F}c_6} \right\},$$

справедливо неравенство

$$C(t_n) \leq V_y(t_n) + \frac{2L}{3\mathcal{F}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$k_1 = \left\lfloor \frac{L}{3\mathcal{F}ec_6} \right\rfloor, \quad x = X^{1/(8k_1+3)}.$$

Пусть $\mathcal{A}_1$ – множество тех n , $N < n \leq N + M$, для которых

$$|C(t_n) - V_x(t_n)| > \frac{L}{3\mathcal{F}}.$$

Тогда, используя лемму 6.5, получаем

$$|\mathcal{A}_1| \left(\frac{L}{3\mathcal{F}} \right)^{2k_1} \leq \sum_{n \in \mathcal{A}_1} (C(t_n) - V_x(t_n))^{2k_1} \leq \sum_n (C(t_n) - V_x(t_n))^{2k_1} < \frac{c_6}{280} (c_6 k_1)^{2k_1} M,$$

откуда

$$|\mathcal{A}_1| < \frac{c_6}{280} \left(\frac{3\mathcal{F}c_6 k_1}{L} \right)^{2k_1} M < \frac{c_6}{280} e^{-2k_1} M.$$

Далее, несложно заметить, что

$$\log x = \frac{0.1\varepsilon \log N}{8k_1 + 3} > \frac{0.1\varepsilon \log N}{3L} \mathcal{F}ec_6 > \frac{a_0 e \log N}{30} \frac{1}{L} > 10^5 \log y,$$

так что $x > y^{10^5}$. Обозначая через $\mathcal{A}_2$ множество тех n , для которых

$$|V_x(t_n) - V_y(t_n)| > \frac{L}{3\mathcal{F}},$$

и применяя лемму 2.1, найдем:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_2| \left(\frac{L}{3\mathcal{F}} \right)^{2k_1} &\leq \sum_n (V_x(t_n) - V_y(t_n))^{2k_1} \leq \sum_n \left| \sum_{y < p \leq x} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \right|^{2k_1} \\ &\leq k_1! M \left(\sum_{y < p \leq x} \frac{1}{p} \right)^{k_1} + x^{k_1} \left(\sum_{p \leq x} \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^{2k_1} \log N \\ &< k_1! M (\log L)^{k_1} + X^{0.25} < 3\sqrt{k_1} \left(\frac{k_1 \log L}{e} \right)^{k_1} M, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_2| &< 3M\sqrt{k_1} \left(\frac{9\mathcal{F}^2}{L^2} \cdot \frac{\log L}{e} \cdot \frac{L}{3\mathcal{F}ec_6} \right)^{k_1} = 3M\sqrt{k_1} \left(\frac{3\mathcal{F}}{e^2 c_6} \cdot \frac{\log L}{L} \right)^{k_1} M \\ &\leq 3M\sqrt{k_1} (2e)^{-2k_1} < Me^{-2k_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, исключив из рассмотрения не более чем

$$|\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| \leq \frac{c_6}{280} e^{-2k_1} + Me^{-2k_1} < 136\varepsilon^{-1} M \exp \left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6} \right)$$

точек Грама t_n , для оставшихся будем иметь

$$C(t_n) = V_y(t_n) + (V_x(t_n) - V_y(t_n)) + (C(t_n) - V_x(t_n)) \leq V_y(t_n) + \frac{2L}{3\mathcal{F}}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6.7. Для всех номеров n , $N < n \leq N + M$, за исключением не более чем $M\delta_2$ номеров, $\delta_2 = 9e\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-9\mathfrak{S}}$, справедливо неравенство

$$|V_y(t_n)| \leq 3\mathfrak{S}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_3$ – множество тех n , для которых $|V_y(t_n)| > 3\mathfrak{S}$. Полагая $k_2 = [9\mathfrak{S}]$, с учетом замечания к лемме 2.1 получаем

$$|\mathcal{A}_3| \cdot (3\mathfrak{S})^{2k_2} \leq \sum_n V_y^{2k_2}(t_n) \leq \sum_n \left| \sum_{p \leq y} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \right|^{2k_2} \leq k_2! M \mathfrak{S}^{k_2} + y^{2k_2} \log N < 3\sqrt{k_2} M \left(\frac{k_2 \mathfrak{S}}{e} \right)^{k_2},$$

откуда и следует искомая оценка.

ЛЕММА 6.8. Пусть

$$K(s) = \sum_{n \in \mathcal{A}} \exp \{s V_y(t_n)\}.$$

Тогда для комплексных s с условием $|s| \leq 1$ справедливо равенство

$$K(s) = M F_y(s) (1 + \theta(\log N)^{-3}),$$

в котором

$$F_y(s) = \prod_{p \leq y} J_0 \left(\frac{is}{\sqrt{p}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.13, положим $K = [3e^2 \mathfrak{S}] + 1$. Тогда, определяя $R_1(s)$ соотношениями

$$K(s) = \sum_{n \in \mathcal{A}} \left(\sum_{k=0}^K + \sum_{k>K} \right) \frac{s^k}{k!} V_y^k(t_n) = K_1(s) + R_1(s),$$

получим

$$|R_1(s)| \leq M \sum_{k>K} \frac{(3\mathfrak{S})^k}{k!} < M \sum_{k>K} \left(\frac{3\mathfrak{S}e}{k} \right)^k < M e^{-22\mathfrak{S}}.$$

Далее, представим $K_1(s)$ в виде

$$\sum_{k=0}^K \frac{s^k}{k!} \sum_{n \in \mathcal{A}} V_y^k(t_n) = \sum_{k=0}^K \frac{s^k}{k!} \left(\sum_n V_y^k(t_n) - \sum_{n \in \mathcal{A}_3} V_y^k(t_n) \right) = K_2(s) - R_2(s)$$

и заметим, что

$$|R_2(s)| \leq |\mathcal{A}_3| + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \sum_{n \in \mathcal{A}_3} |V_y(t_n)|^k.$$

В силу замечания к лемме 2.1 и оценки леммы 6.7 имеем

$$\begin{aligned} |R_2(s)| &\leq M\delta_2 + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \left(|\mathcal{A}_3| \sum_n V_y^{2k}(t_n) \right)^{1/2} \\ &\leq M\delta_2 + \sqrt{M\delta_2} \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} (k! M \mathfrak{S}^k)^{1/2} \leq M\delta_2 + \frac{M\sqrt{\delta_2}}{\sqrt[4]{2\pi}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \left(\frac{e\mathfrak{S}}{k} \right)^{k/2} < 43 M e^{-4\mathfrak{S}}. \end{aligned}$$

Чтобы вычислить $K_2(s)$, положим

$$v_k = \sum_n V_y^k(t_n), \quad U(t) = \sum_{p \leq y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}}.$$

Если $k \leq K$ – нечетное число, то в силу леммы 1.2 имеем $|v_k| < y^k \log N < M^{0.25}$. При четном $k = 2m$ с помощью леммы 1.4 приходим к равенству

$$v_k = 2^{-2m} \binom{2m}{m} m! H_y^{(m)}(0) + \theta M^{0.25}, \quad \text{где} \quad H_y(z) = \prod_{p \leq y} J_0\left(2i\sqrt{\frac{z}{p}}\right).$$

Следовательно, в силу леммы 1.17 имеем

$$\begin{aligned} K_2(s) &= M \sum_{0 \leq m \leq 0.5K} \frac{H_y^{(m)}(0)}{m!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} + 2\theta M^{0.25} \\ &= M \left(\sum_{m=0}^{+\infty} - \sum_{m > 0.5K} \right) \frac{H_y^{(m)}(0)}{m!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} + 2\theta M^{0.25} \\ &= MF_y(s) + \theta M \sum_{m > 0.5K} \frac{1}{m!} \left(\frac{\mathfrak{S}}{4}\right)^m + 2\theta M^{0.25} = MF_y(s) + \theta M e^{-30\mathfrak{S}}, \end{aligned}$$

где

$$F_y(s) = H_y\left(\frac{s^2}{4}\right) = \prod_{p \leq y} J_0\left(\frac{is}{\sqrt{p}}\right).$$

Сложив полученные выше оценки, имеем

$$K(s) = M(F_y(s) + 44\theta\mathfrak{S}e^{-4\mathfrak{S}}).$$

Оценивая модуль функции $F_y(s)$ снизу в круге $|s| \leq 1$ подобно тому, как это делалось при доказательстве леммы 2.13, получаем

$$\min_{|s| \leq 1} |F_y(s)| = \min_{|s| \leq 1} \left| H_y\left(\frac{s^2}{4}\right) \right| > 0.99e^{-0.25\mathfrak{S}}.$$

Таким образом,

$$K(s) = MF_y(s)(1 + 44\theta\mathfrak{S}|F_y(s)|^{-1}e^{-4\mathfrak{S}}) = MF_y(s)(1 + \theta(\log N)^{-3}).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть $f(u)$ – произвольная монотонная функция, неограниченно возрастающая при $u \rightarrow +\infty$ и удовлетворяющая на промежутке $N \leq u \leq N + M$ неравенствам

$$1 \ll f(u) \leq \sqrt{\log \log u},$$

и пусть $\mathcal{F} = f(N)$. Тогда на указанном промежутке найдется по крайней мере

$$\frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}} \exp\left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2}\right)$$

номеров n , для которых выполнены неравенства

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \right| < \exp\left(-\frac{1}{\mathcal{F}} \log \log N\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. После публикации результатов настоящей главы Калпокас и Сарка в совместной работе [13] доказали неравенство

$$\min_{t_n \leq T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it_n \right) \right| < \exp \left(-(1 - \varepsilon) \sqrt{\frac{\log T}{6 \log \log T}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Пусть $K_N(s)$ – производящая функция моментов дискретной случайной величины ξ_N со значениями $V_y(t_n)$, $N < n \leq N + M$, $n \in \mathcal{A}$. Тогда из лемм 6.7 и 6.8 несложно заключить, что в круге $|s| \leq 1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} K_N(s) &= |\mathcal{A}|^{-1} \sum_{n \in \mathcal{A}} \exp \{s V_y(t_n)\} = |\mathcal{A}|^{-1} M F_y(s) (1 + \theta(\log N)^{-3}) \\ &= F_y(s) (1 - 9\theta e \sqrt{\mathfrak{S}} e^{-9\mathfrak{S}})^{-1} (1 + \theta(\log N)^{-3}). \end{aligned}$$

Далее, заменяя $F_y(s)$ величиной

$$\exp \left(\frac{s^2}{4} \mathfrak{S} \right) F(s) (1 + \theta y^{-1}), \quad \text{где} \quad F(s) = \prod_p \varphi \left(\frac{s^2}{4p} \right)$$

($\varphi(u)$ – функция, введенная по ходу доказательства леммы 1.6), получаем

$$K_N(s) = \exp \left(\frac{s^2}{4} \mathfrak{S} \right) F(s) (1 + 2\theta(\log N)^{-3}).$$

Полагая $\sigma(N) = \mathfrak{S}$, $\kappa(N) = (\log N)^{-3}$, $u = \sqrt{6L}/\mathcal{F}$ в лемме 1.8 и замечая, что $u \geq \sqrt{6} > 1$, заключаем, что по крайней мере для

$$\frac{|\mathcal{A}|}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_u^{+\infty} e^{-v^2/2} dv \right) (1 + O(\mathcal{F}^{-1})) > 0.99 \frac{|\mathcal{A}|}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-u^2/2}}{2u} > \frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2} \right)$$

точек Грама выполнено неравенство $V_y(t_n) \leq -u\sqrt{\mathfrak{S}/2}$. Пользуясь леммой 6.6 и исключая из этого числа не более $M\delta_1$ точек t_n , при $\mathcal{F} \geq 9ec_6$ для оставшихся в количестве не менее

$$\begin{aligned} &\frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2} \right) - 13M \exp \left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6} \right) \\ &= \frac{2M\mathcal{F}}{25\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2} \right) \left(1 - \frac{1700\sqrt{L}}{\mathcal{F}} \exp \left(-\frac{2L}{3\mathcal{F}ec_6} \left(1 - \frac{9ec_6}{2\mathcal{F}} \right) \right) \right) > \frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2} \right) \end{aligned}$$

имеем неравенства

$$\log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it_n \right) \right| \leq C(t_n) \leq V_y(t_n) + \frac{2L}{3\mathcal{F}} \leq -\frac{L\sqrt{3}}{\mathcal{F}} + \frac{2L}{3\mathcal{F}} < -\frac{L}{\mathcal{F}}.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. При любом фиксированном $\delta > 0$ и $N \geq N_0(\varepsilon, \delta)$ имеет место оценка

$$\sum_n \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it_n \right) \right|^{-1} > M \exp \left(\frac{\log \log N}{(\log \log \log N)^\delta} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в теореме $f(u) = 0.5(\log \log \log u)^\delta$; получим

$$\sum_n \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it_n \right) \right|^{-1} > \frac{M\mathcal{F}}{13\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\mathcal{F}^2} \right) \cdot \exp \left(\frac{L}{\mathcal{F}} \right) > M \exp \left(\frac{L}{(\log L)^\delta} \right),$$

что и требовалось.

Приведенные в приложении II (таблица II.8) численные данные о значениях дзета-функции Римана в точках Грама позволяют предположить существование бесконечного числа пар точек t_n, t_{n+1} , для которых оба значения $\zeta(1/2 + it_n), \zeta(1/2 + it_{n+1})$ будут очень маленькими. Более точно, весьма вероятным представляется предположение о том, что

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \right| + \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_{n+1}\right) \right| \right) = 0$$

или даже

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \right| + \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_{n+1}\right) \right| \right) f(n) = 0,$$

где $f(x)$ – некоторая положительная, неограниченная и монотонно возрастающая функция. Подобные предположения можно формулировать для троек, четверок и вообще для любого фиксированного числа k соседних точек Грама $t_{n+1}, \dots, t_{n+k}$.

Аргументами в пользу истинности этих предположений (за исключением численных данных) мы не располагаем. Вместе с тем ниже мы приводим доказательство теоремы, которая утверждает существование бесконечного числа пар соседних точек Грама t_n и t_{n+1} , в каждой из которых логарифм модуля дзета-функции оказывается существенно меньшим своего среднего значения $\sqrt{\log \log n}$.

ТЕОРЕМА 6.3. *На промежутке $N < n \leq N + M$ найдется не менее*

$$\frac{0.1M}{\sqrt{\log \log \log N}}$$

номеров n таких, что

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \right| < R, \quad \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_{n+1}\right) \right| < R, \quad R = \exp \left\{ 3.24 \sqrt{\frac{\log \log N}{\log \log \log N}} \right\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Используя теорему 5 из работы Бояринова [5], теорему 6.3 можно доказать с гораздо меньшим R , а именно с

$$R = (\log \log N)^c,$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.3. Положим $h = 1.81\sqrt{2\pi/\log L}$ и рассмотрим множество E_1 тех n , для которых

$$\log \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \right| \leq \frac{h}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\log \log N}. \quad (6.21)$$

Дословно повторяя рассуждения теоремы 2.4 и строя приближение для функции распределения величин $C(t_n)$, несложно заключить, что число m_1 номеров n , попавших в E_1 , оценивается снизу величиной

$$\begin{aligned} & M \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^h e^{-u^2/2} du - \frac{1.78}{\sqrt{\log L}} \right) \\ &= M \left(\frac{1}{2} + \int_0^h e^{-u^2/2} du - \frac{1.78}{\sqrt{\log L}} \right) > M \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^h \left(1 - \frac{u^2}{2} \right) du - \frac{1.78}{\sqrt{\log L}} \right) \\ &= M \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(h - \frac{h^3}{6} \right) - \frac{1.78}{\sqrt{\log L}} \right) > M \left(\frac{1}{2} + 0.02 \sqrt{\frac{2\pi}{\log L}} \right). \end{aligned}$$

Аналогично, определив E_2 как множество номеров n , $N < n \leq N + M$, удовлетворяющих условию

$$\log \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it_{n+1} \right) \right| \leq \frac{h}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\log \log N}, \quad (6.22)$$

число m_2 его элементов оценим снизу величиной

$$M \left(\frac{1}{2} + 0.02 \sqrt{\frac{2\pi}{\log L}} \right).$$

Так как и E_1 и E_2 содержатся во множестве $N < n \leq N + M$, то их пересечение непусто и состоит не менее чем из

$$2 \cdot M \left(\frac{1}{2} + 0.02 \sqrt{\frac{2\pi}{\log L}} \right) - M = 0.04M \sqrt{\frac{2\pi}{\log L}}$$

элементов. Но для каждого из n , принадлежащих пересечению E_1 и E_2 , выполнены оба неравенства (6.21) и (6.22). Замечая, что

$$\frac{h}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\log \log N} < 3.24 \sqrt{\frac{\log \log N}{\log \log \log N}},$$

приходим к утверждению теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. В доказательстве теоремы 6.3 мы пользуемся утверждением, на первый взгляд более слабым, чем то, которое получилось бы применением теоремы Хванга (лемма 1.8). Однако приближение функции распределения $\Psi(u)$ нормированных величин $C(t_n)$, полученное таким образом, годится лишь в области $|u| \geq 1$, в то время как мы пользуемся приближением $\Psi(u)$ в ситуации, когда $u \rightarrow +0$.

Приложение I. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА I.1 (ван-дер Корпут). Пусть $f(x)$ в интервале $a < x < b$ – вещественная дифференцируемая функция, производная которой монотонна, знакопостоянна и при постоянном δ с условием $0 < \delta < 1$ удовлетворяет неравенству $|f'(x)| \leq \delta$. Тогда

$$\sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + \theta \left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta} \right).$$

Если сверх того a и b целые, то число 3 в последнем слагаемом можно заменить на 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [14; гл. 2].

При выводе неравенства для леммы 1.10 для коэффициентов ϖ_n разложения

$$\varphi(v) = e^{-v} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{v^m}{m!} = e^{-v} J_0(2i\sqrt{v}).$$

используются оценки модуля функции Бесселя $J_0(z)$ на полуокружностях вида $|z| = R$, $|\arg z| \leq \pi/2$.

В случае, когда $z = R$ – вещественное положительное число, из классических разложений для $J_0(z)$ легко получить неравенство

$$|J_0(z)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 + \frac{1}{4R} \right).$$

При замене вещественного z комплексным числом $Re^{i\psi}$ с условием $|\psi| \leq \pi/2 - \delta$, где $0 \leq \delta < \pi/2$, эта оценка заменяется следующей:

$$|J_0(z)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 + \frac{c}{R} \right) e^{R|\sin \psi|},$$

где $c = c(\delta)$ – некоторая постоянная.

В силу того, что в доступных нам руководствах по бесселевым функциям не удалось обнаружить необходимой для дальнейших выкладок оценки постоянной $c(\delta)$ для $\delta = 0$, мы сочли возможным поместить здесь полное доказательство оценки такого типа.

ЛЕММА I.2. Для любого $z = Re^{i\psi}$ с условием $|\psi| \leq \pi/2$ справедливо неравенство

$$|J_0(z)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 + \frac{1}{2R\sqrt{2}} \right) e^{R|\sin \psi|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (1) из [15; § 3.61] имеем

$$J_0(z) = \frac{1}{2} (H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z)), \quad (\text{I.1})$$

где $H_0^{(1)}(z)$, $H_0^{(2)}(z)$ – функции Бесселя третьего рода. Далее, положив $\beta = -\pi/4$ в формуле (3) из [15; § 6.12], для z с условием $-3\pi/4 < \arg z < 5\pi/4$ получим

$$H_0^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \frac{e^{i(z-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 + \frac{iu}{2z} \right)^{-1/2} du.$$

Используя тождество

$$\left(1 + \frac{i u}{2z}\right)^{-1/2} = \sum_{m=0}^{p-1} \binom{1/2}{m} \left(\frac{u}{2iz}\right)^m + p \binom{1/2}{p} \left(\frac{u}{2iz}\right)^p \int_0^1 (1-t)^{p-1} \left(1 + \frac{i u t}{2z}\right)^{-p-1/2} dt,$$

которое справедливо при любом целом $p \geq 1$, получаем

$$H_0^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{i(z-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sum_{m=0}^{p-1} \binom{1/2}{m} \frac{\Gamma(m+1/2)}{(2iz)^m} + R_p^{(1)}(z) \right\},$$

где

$$\begin{aligned} |R_p^{(1)}(z)| &= \left| p \binom{1/2}{p} \int_0^{\infty e^{-\pi i/4}} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\frac{u}{2iz}\right)^p \int_0^1 (1-t)^{p-1} \left(1 + \frac{i u t}{2z}\right)^{-p-1/2} dt du \right| \\ &\leq \frac{p}{(2|z|)^p} \left| \binom{1/2}{p} \right| \int_0^1 (1-t)^{p-1} \left| \int_0^{\infty e^{-\pi i/4}} e^{-u} u^{p-1/2} \left(1 + \frac{i u t}{2z}\right)^{-p-1/2} du \right| dt. \end{aligned}$$

Пусть теперь $0 < t \leq 1$, $z = Re^{i\psi}$. Тогда

$$\frac{i u t}{2z} = \frac{|u| t e^{\pi i/4}}{2R e^{i\psi}} = r e^{i(\pi/4-\psi)}, \quad \text{где } r = \frac{|u| t}{2R}.$$

Если угол ψ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то величина $\pi/4 - \psi$ убывает от $3\pi/4$ до $-\pi/4$, причем наименьшее расстояние от точки $1 + r e^{i(\pi/4-\psi)}$ до начала координат отвечает значению $\psi = -\pi/2$ и составляет, таким образом,

$$|1 + r e^{i(\pi/4-\psi)}| = \sqrt{\left(1 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \left(r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Итак, при любых рассматриваемых u, z и t имеем

$$\left|1 + \frac{i u t}{2z}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому, положив $u = v e^{-\pi i/4}$ в последнем интеграле по u , получим

$$\left| \int_0^{\infty e^{-\pi i/4}} e^{-u} u^{p-1/2} \left(1 + \frac{i u t}{2z}\right)^{-p-1/2} du \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-v/\sqrt{2}} v^{p-1/2} (\sqrt{2})^{p+1/2} dv = 2^p \sqrt{2} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$|R_p^{(1)}(z)| \leq \frac{p}{(2|z|)^p} \left| \binom{1/2}{p} \right| 2^p \sqrt{2} \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) \int_0^1 (1-t)^{p-1} dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2p-1} \left(\frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}\right)^2 \frac{1}{|z|^p}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i(z-\pi/4)} \left\{ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left(\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}\right)^2 \frac{1}{(2iz)^m} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta\sqrt{2}}{2p-1} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \left(\frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}\right)^2 \frac{1}{|z|^p} \right\}. \end{aligned}$$

В частности, беря $p = 1$, придем к формуле

$$H_0^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i(z-\pi/4)} \left\{ 1 + \frac{\theta_1}{2|z|\sqrt{2}} \right\},$$

справедливой для $|\psi| \leq \pi/2$.

Подобным образом, отправляясь от формулы

$$H_0^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{-i(z-\pi/4)}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(1 - \frac{iu}{2z}\right)^{-1/2} du,$$

которая справедлива для $-5\pi/4 < \arg z < 3\pi/4$ (см. [15; § 6.12]), при любом целом $p \geq 1$ и любом z с условием $|\arg z| \leq \pi/2$ устанавливаем равенство

$$H_0^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z-\pi/4)} \left\{ \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \left(\frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m}\right)^2 \frac{1}{(2iz)^m} + \frac{\theta\sqrt{2}}{2p-1} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \left(\frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p}\right)^2 \frac{1}{|z|^p} \right\}.$$

Отсюда при $p = 1$ имеем

$$H_0^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z-\pi/4)} \left\{ 1 + \frac{\theta_2}{2|z|\sqrt{2}} \right\},$$

Возвращаясь к формуле (I.1), будем иметь

$$|J_0(z)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 + \frac{1}{2R\sqrt{2}}\right) \frac{1}{2} (e^{R \sin \psi} + e^{-R \sin \psi}) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \left(1 + \frac{1}{2R\sqrt{2}}\right) e^{R|\sin \psi|}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА I.3. При любых $x > 1$ и $n \geq 2$ справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + c + \frac{\theta}{(\log x)^2}, \quad (I.2)$$

где $-0.5 \leq \theta \leq 1$, а $c = 0.261\,497\,212\,847\dots$ – постоянная Мертенса;

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \frac{a\sqrt{n}}{\log n}, \quad a = 2.784; \quad (I.3)$$

$$\pi(n) = \sum_{p \leq n} 1 \leq \frac{bn}{\log n}, \quad b = 1.255\,06, \quad (I.4)$$

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} < \log x. \quad (I.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО соотношений (I.2), (I.4) и (I.5) см. в статье [16]. Оценка (I.3) при $n \leq 1.5 \cdot 10^6$ проверяется непосредственно (например, с помощью программного пакета Wolfram Mathematica 7.0.0), а при $n > 1.5 \cdot 10^6$ получается из (I.4) с помощью преобразования Абеля.

ЛЕММА I.4 (А. А. Карацуба). Пусть $T \geq T_0(\varepsilon)$, $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leq H \leq T^{\alpha+\varepsilon}$, где $\alpha = 27/82$, $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$. Тогда при любом σ с условием $1/2 \leq \sigma \leq 1$ имеет место неравенство

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) < 13H(\log T)T^{-0.1\varepsilon(2\sigma-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой плотностной теоремы см. в [17]. Вычисление постоянной в правой части неравенства содержится в обзорной статье [18].

ЛЕММА I.5. При $2 \leq x \leq t^2$ справедливы неравенства

$$\sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - 1/2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \leq \frac{5}{3} \left(\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} + \frac{1}{2} \log t + 3 \right),$$

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} \right| < 2.6 \left| \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t} + it}} \right| + 0.8 \log t + 4.82.$$

Все эти неравенства принадлежат Сельбергу [1]. По поводу вычисления постоянных в правых частях см. обзорную статью [19].

ЛЕММА I.6. Пусть $e^{16} \leq x \leq t^\delta$, $110\delta = 1$, и пусть

$$R(t) = S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}} \frac{\sin(t \log m)}{\log m}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\pi |R(t)| \leq \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \left(A \log t + B r(x, t) + C + \sum_{\varrho} \frac{\kappa(\varrho)}{(\sigma_{x,t} - 1/2) + (t - \gamma)^2} \right),$$

в котором

$$A = \frac{13}{6e} + 1.8, \quad B = \frac{13}{3e} + 2.6, \quad C = \frac{52}{3e} + 10.82,$$

$$r(x, t) = \left| \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{m^{\sigma_{x,t} + it}} \right|, \quad \kappa(\varrho) = \int_{1/2}^{\sigma_{x,t}} \frac{|t - \gamma| \cdot |\sigma_{x,t} + \sigma - 2\beta|}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} d\sigma.$$

Кроме того, если нуль $\varrho = \beta + i\gamma$ удовлетворяет условию

$$\left| \beta - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right),$$

то для интеграла $\kappa(\varrho)$ имеет место оценка

$$\kappa(\varrho) < 2 \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в работе Сельберга [1]. Вычисление постоянных A , B и C , а также постоянной в оценке интеграла $\kappa(\varrho)$ см. в [19; теорема 1].

ЛЕММА I.7 (неравенство Берри–Эссеена). Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – функции распределения, причем $G'(x) \leq B < +\infty$ при любом x , и пусть $f(t)$, $g(t)$ – отвечающие им характеристические функции. Тогда при любом $\lambda > 0$ имеет место оценка

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq a \frac{B}{\lambda} + b \int_0^\lambda \frac{|f(t) - g(t)|}{|t|} dt,$$

где $a = 4.438998$, $b = 0.594499$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения следует из того варианта неравенства Берри–Эссеена, который содержится в работе Шевцовой [20]. В нем следует положить ядро $p(x)$ равным

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2$$

и затем минимизировать по α выражение

$$a(\alpha) = \frac{2\alpha j(\alpha)}{4j(\alpha) - 1}, \quad j(\alpha) = \int_0^\alpha p(x) dx.$$

ЛЕММА I.8. Пусть $\{\xi_N\}$ – последовательность случайных величин. Предположим, что существует фиксированное число $r > 0$ и положительные параметры $\sigma(N)$ и $\kappa(N)$, неограниченно возрастающие при $N \rightarrow +\infty$, такие, что для производящей функции $K_N(s) = E(e^{s\xi_N})$ моментов случайной величины ξ_N в круге $|s| \leq r$ справедливо равенство

$$K_N(s) = \exp \left\{ \frac{s^2}{4} \sigma(N) \right\} \Phi(s) (1 + O(\kappa^{-1}(N))),$$

где функция $\Phi(s)$ не зависит от N , аналитична в круге $|s| \leq r$, причем $\Phi(0) = 1$, а постоянная в знаке O абсолютная. Тогда для функции распределения

$$F_N(u) = P \left\{ \frac{\xi_N \sqrt{2}}{\sqrt{\sigma(N)}} \leq u \right\}$$

нормированной случайной величины ξ_N при любом $u = o(\min(\kappa(N), \sqrt{\sigma(N)}))$, $u > 1$, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1 - F_N(u)}{1 - G(u)} = 1 + O(r(u; N)), \quad \frac{F_N(-u)}{G(-u)} = 1 + O(r(u; N)),$$

где

$$r(u; N) = u \left(\frac{1}{\kappa(N)} + \frac{1}{\sqrt{\sigma(N)}} \right),$$

а постоянные в знаках O являются абсолютными.

Эта лемма является частным случаем теоремы из работы Хванга [21].

ЛЕММА I.9. При $t > 51.4$ имеет место оценка

$$|S(t)| < 0.137 \log t + 0.443 \log \log t + 4.35.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [22] (различные варианты этого неравенства были получены в разное время Х. фон Мангольдтом, Дж. Гроссманном, Р. Дж. Бэкундом, Дж. Б. Россером и Т. С. Труджианом. Подробную библиографию по этому вопросу см. в [23].

ЛЕММА I.10. Пусть a_n – произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда при любых A, B, Y с условиями $0 < A \leq B$, $Y \geq 2$ справедливо равенство

$$\int_B^{A+B} \left| \sum_{m \leq Y} a_m m^{it} \right|^2 dt = A \sum_{m \leq Y} |a_m|^2 + \theta c \sum_{m \leq Y} m |a_m|^2,$$

где $c > 0$ – некоторая абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [24; теорема 5.2].

ЛЕММА I.11 (Б. Конри). При $t > t_0 > 1$ имеет место неравенство

$$N_0(t) > (0.4 + 7 \cdot 10^{-3}) N(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [25].

ЛЕММА I.12. Пусть $0 < \delta < 10^{-7}$ – сколь угодно малое фиксированное число, $T \geq T_0(\delta) > 0$, $T^{\alpha+\delta_1} \leq H \leq T^{\alpha+\delta}$, где $\alpha = 27/82$, $\delta_1 = 0.9\delta$. Тогда справедливы неравенства

$$\sup_{T-H \leq t \leq T+2H} \{\pm S(t)\} \geq \frac{\delta^{5/4}}{1000} \left(\frac{\log T}{\log \log T} \right)^{1/3}.$$

Существование на длинном промежутке $(T, 2T]$ чисел T_j таких, что

$$(-1)^j S(T_j) \geq c \left(\frac{\log T}{\log \log T} \right)^{1/3}, \quad j = 1, 2,$$

где $c > 0$ – некоторая абсолютная постоянная, было впервые доказано Тсангом в [4] (см. также [26]). Доказательство неравенств из условия леммы для случая $H = T^{\alpha+\delta}$ проводится, по сути, тем же методом, но с использованием плотностной теоремы А. А. Карацубы (лемма I.4; подробнее см. [19]). Это же доказательство практически дословно переносится и на случай $T^{\alpha+\delta_1} \leq H \leq T^{\alpha+\delta}$.

ЛЕММА I.13. Если верна гипотеза Римана, то при любом $T > T_0 > 0$ и любом H с условием

$$(\log T)(\log \log T)^{-3/2} < H \leq \frac{T}{3}$$

справедливы неравенства

$$\sup_{T-H < t \leq T+2H} \{\pm S(t)\} \geq \frac{1}{90\pi} \left(\frac{\log H}{\log \log H} \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [27].

ЛЕММА I.14. Если верна гипотеза Римана, то при любом $T > T_0 > 0$ и любом H с условием

$$\sqrt{\log \log T} \leq H \leq (\log T)(\log \log T)^{-3/2}$$

справедливы неравенства

$$\sup_{T-H < t \leq T+2H} \{\pm S(t)\} \geq \frac{\sqrt{\log H}}{900 \log \log H}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [28].

ЛЕММА I.15 (К.-М. Тсанг, Р. Н. Бояринов). Пусть $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, H – произвольное число с условием $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leq H \leq T^{\alpha+\varepsilon}$, и пусть

$$\frac{(\log \log T)^2}{\log T} < h < \frac{1}{\sqrt{\log T}}. \quad (\text{I.6})$$

Тогда справедливы равенства

$$\int_T^{T+H} |S(t)| dt = \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log \log T} \left(1 + \frac{\theta_1 c}{\sqrt{\log \log T}} \right), \quad (\text{I.7})$$

$$\int_T^{T+H} \left| \int_0^h S(t+u) du \right| dt = \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\log \frac{1}{h}} \left(1 + \frac{\theta_2 c}{\sqrt{\log \log T}} \right), \quad (\text{I.8})$$

где $c = c(\varepsilon) > 0$ – достаточно большая постоянная.

Доказательства равенств (I.7), (I.8) см. в [4; теорема 5.2], [5].

ЛЕММА I.16. При выполнении условий предыдущей леммы имеют место равенства

$$\int_0^T S(t) dt = O(\log T), \quad (\text{I.9})$$

$$\int_T^{T+H} S^2(t) dt = \frac{H}{2\pi^2} (\log \log T) \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log \log T}} \right) \right). \quad (\text{I.10})$$

Равенство (I.9) представляет собой классический результат Литтлвуда (см. [6]). Асимптотическая формула (I.10) для случая $T^{0.5+\varepsilon} \leq H \leq T$ была впервые доказана А. Сельбергом в [1]. Ее доказательство для случая $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ содержится в статье [17] (по поводу вычисления постоянной в оценке остаточного члена см. [18]). Те же рассуждения остаются в силе и в случае $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leq H \leq T^{\alpha+\varepsilon}$.

ЛЕММА I.17 (А. Сельберг, К.-М. Тсанг, Р. Н. Бояринов). Пусть $T \geq T_0(\varepsilon)$, $T^{0.5+\varepsilon} \leq H \leq T$. Тогда функция $S(t)$ имеет на промежутке $(T, T+H]$ не менее

$$H(\log T)e^{-c_1(\log \log \log T)^2}$$

точек перемены знака. Если верна гипотеза Римана, то число точек указанного промежутка, в которых $S(t)$ меняет знак, оценивается снизу величиной

$$H(\log T)e^{-c_2 \log \log \log T} = \frac{H \log T}{(\log \log T)^{c_2}}$$

(c_1, c_2 – некоторые постоянные, зависящие от ε).

Доказательство этого утверждения для случая $H = T^{0.5+\varepsilon}$ см. в [4; гл. VII]; случай $H = T^{27/82+\varepsilon}$ рассмотрен в работе Бояринова [5].

ЛЕММА I.18. Пусть $T \geq T_0(\varepsilon)$, $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leq H \leq T^{\alpha+\varepsilon}$, $\varepsilon_1 = 0.9\varepsilon$, и пусть

$$h = 4.39 \log \log \log T.$$

Тогда мера множества точек t промежутка $T \leq t \leq T+H$, для которых интервал $(t-h, t+h)$ не содержит точек перемены знака функции $S(t)$, есть

$$O(H(\log \log T)^{-0.5}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения для случая $H = T^{\alpha+\varepsilon}$ см. в статье [27]. В случае $T^{\alpha+\varepsilon_1} \leq H \leq T^{\alpha+\varepsilon}$ доказательство проводится аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценка леммы была уточнена в работе Бояринова [29], в которой понижающий множитель $(\log \log T)^{-0.5}$ был заменен на

$$(\log \log T)^{-1}(\log \log \log T)^{-0.5}.$$

ЛЕММА I.19. Пусть $T^{\alpha+\varepsilon} \leq H \leq T$, и пусть $\mu(x)$ – мера множества точек t промежутка $T \leq t \leq T+H$, для которых выполнено неравенство

$$S(t) \leq \frac{x}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\log \log T}.$$

Тогда при любом фиксированном x справедливо соотношение

$$\mu(x) \sim \frac{H}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения с разной степенью точности оценки остаточного члена и для различных значений длины H исследуемого промежутка можно найти в работах [30], [31], [18], [4], [5], [32].

ЛЕММА I.20. Пусть $s = \sigma + it$, где $10 \leq x \leq t^2$, $\sigma \geq \sigma_{x,t}$, и пусть $\zeta(s) \neq 0$. Тогда

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^s} + \frac{13\theta}{3} x^{1/4-\sigma/2} \left(\left| \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}+it}} \right| + \frac{1}{2} \log t + 4 \right).$$

Эта лемма заимствована из работы Сельберга [1]; вычисление постоянных в правой части равенства см. в статье [19] (в формулировке этой леммы в работе [19] содержится опечатка: вместо $1/2 - \sigma/2$ должно быть $1/4 - \sigma/2$).

ЛЕММА I.21. *Для вещественных σ и t с условиями $|\sigma| \leq 2$, $|t| \geq 10$, $s = \sigma + it$ справедливо равенство*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho} + \theta \left(\frac{1}{2} \log |t| + 3 \right), \quad \text{где} \quad \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho} = \sum_{\operatorname{Im} \varrho > 0} \left(\frac{1}{s - \varrho} + \frac{1}{s - \bar{\varrho}} \right).$$

Эта лемма по сути принадлежит Ландау (см. [33; §§ 76–77]); вычисление постоянных в последнем слагаемом правой части см. в обзорной статье [19].

Приложение II. Таблицы

II.1. Статистика нарушений правила Грама

Одним из следствий высказанного А. Сельбергом утверждения о том, что величины $\Delta_n/\sqrt{\log \log n}$ распределены по нормальному закону (см. гл. 3), служит тот факт, что примерно в половине случаев величина Δ_n строго отрицательна, а в половине случаев – строго положительна. Приведенные ниже численные данные, полученные при обработке значений первых 10 млн нулей $\zeta(s)$, показывают, что при сравнительно небольших значениях N случаи, когда для ординаты γ_n , $n \leq N$, не наблюдается явление Грама–Сельберга (т.е. когда $\Delta_n \neq 0$), встречаются достаточно редко.

Таблица II.1. Количество и доля номеров n , $n \leq N$, отвечающих условиям $\Delta_n = -1$, $\Delta_n = 1$

N	$\Delta_n = -1$	%	$\Delta_n = 1$	%
250	2	0.80	3	1.20
500	5	1.00	8	1.60
1 000	16	1.60	26	2.60
2 000	54	2.70	63	3.15
3 000	91	3.03	100	3.33
4 000	135	3.38	142	3.55
5 000	178	3.56	184	3.68
10 000	405	4.05	419	4.19
20 000	899	4.50	939	4.70
30 000	1 438	4.79	1 494	4.98
40 000	1 992	4.98	2 056	5.14
50 000	2 580	5.16	2 633	5.27
100 000	5 509	5.51	5 553	5.55
200 000	11 702	5.85	11 652	5.83
300 000	18 015	6.01	17 962	5.99
400 000	24 506	6.13	24 443	6.11
500 000	31 121	6.22	31 063	6.21
1 000 000	65 097	6.51	65 005	6.50
2 000 000	135 402	6.77	135 275	6.76
3 000 000	207 459	6.92	207 290	6.91
4 000 000	280 891	7.02	280 641	7.02
5 000 000	354 725	7.09	354 293	7.09
6 000 000	429 737	7.16	428 841	7.15
7 000 000	504 805	7.21	503 808	7.20
8 000 000	580 330	7.25	579 252	7.24

9 000 000	656 103	7.29	655 114	7.28
10 000 000	732 315	7.32	731 252	7.31

II.2. Соседние члены последовательности Δ_n , отличные от нуля

Пусть $\mathbf{e}$ обозначает набор из k чисел -1 и l чисел $+1$, т.е.

$$\mathbf{e} = (\underbrace{-1, \dots, -1}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_l),$$

и пусть $r = k + l$. В гл. 5 было установлено, что число номеров $n \leq N$, для которых распределение знаков в наборе $(\Delta_n, \dots, \Delta_{n+r-1})$ совпадает с распределением знаков в наборе $\mathbf{e}$, при неограниченном возрастании N эквивалентно $0.5N$, если все числа в наборе имеют один знак (т.е. одно из чисел k, l равно нулю), и равно $o(N)$ в противном случае.

Однако эта закономерность начинает проявляться лишь при очень больших значениях N . Приведенные ниже численные данные, отвечающие первым 10 млн нулей $\zeta(s)$, показывают, например, что на соответствующем промежутке в среднем лишь одна из 95 пар соседних значений Δ_n отвечает распределению знаков $(1, 1)$, одна из 1 170 троек – распределению знаков $(1, 1, 1)$, одна из 65 000 четверок – распределению знаков $(1, 1, 1, 1)$. Пятерок, шестерок и т.д. соседних членов последовательности Δ_n , имеющих одинаковые знаки, при этом обнаружено не было.

Таблица II.2. Количество номеров $n, n \leq N$, отвечающих парам (Δ_n, Δ_{n+1}) указанного вида

N	$(-1, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 1)$	N	$(-1, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 1)$
50 000	145	263	153	5 000 000	47 537	23 345	47 228
100 000	351	535	382	5 500 000	53 077	25 634	52 772
500 000	2 963	2 489	2 985	6 000 000	58 788	27 877	58 312
1 000 000	7 055	4 865	6 992	6 500 000	64 427	30 179	63 935
1 500 000	11 493	7 210	11 384	7 000 000	70 127	32 450	69 626
2 000 000	16 175	9 546	16 061	7 500 000	75 880	34 675	75 426
2 500 000	21 077	11 882	21 024	8 000 000	81 589	36 864	81 246
3 000 000	26 187	14 200	26 126	8 500 000	87 452	39 132	87 067
3 500 000	31 378	16 483	31 223	9 000 000	93 347	41 418	92 918
4 000 000	36 761	18 831	36 531	9 500 000	99 237	43 654	98 835
4 500 000	42 092	21 087	41 852	10 000 000	105 165	45 894	104 847

Таблица II.3. Количество номеров $n, n \leq N$, отвечающих тройкам $(\Delta_n, \Delta_{n+1}, \Delta_{n+2})$ указанного вида

N	$(-1, -1, -1)$	$(-1, -1, 1)$	$(-1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$
50 000	0	37	34	0
100 000	2	92	89	4
500 000	78	539	537	71

1 000 000	279	1 134	1 136	246
1 500 000	535	1 702	1 731	476
2 000 000	832	2 324	2 299	779
2 500 000	1 176	2 910	2 916	1 124
3 000 000	1 579	3 500	3 532	1 523
3 500 000	1 988	4 086	4 075	1 894
4 000 000	2 445	4 690	4 658	2 306
4 500 000	2 869	5 265	5 244	2 744
5 000 000	3 325	5 814	5 823	3 177
5 500 000	3 787	6 389	6 432	3 661
6 000 000	4 283	6 991	7 013	4 131
6 500 000	4 781	7 590	7 604	4 654
7 000 000	5 288	8 187	8 201	5 156
7 500 000	5 834	8 774	8 802	5 699
8 000 000	6 347	9 334	9 386	6 233
8 500 000	6 920	9 923	9 969	6 789
9 000 000	7 503	10 518	10 550	7 354
9 500 000	8 089	11 121	11 168	7 941
10 000 000	8 677	11 735	11 755	8 525

Таблица II.4. Количество номеров n , $n \leq N$, отвечающих четверкам $(\Delta_n, \dots, \Delta_{n+3})$ указанного вида

N	$(-1, -1, -1, -1)$	$(-1, -1, -1, 1)$	$(-1, -1, 1, 1)$	$(-1, 1, 1, 1)$	$(1, 1, 1, 1)$
50 000	0	0	8	0	0
100 000	0	0	17	1	0
500 000	0	30	150	33	1
1 000 000	0	83	350	86	1
1 500 000	0	144	539	147	1
2 000 000	1	231	759	226	4
2 500 000	2	318	967	327	7
3 000 000	8	422	1 176	428	13
3 500 000	11	525	1 355	510	20
4 000 000	14	632	1 544	603	26
4 500 000	20	726	1 742	703	32
5 000 000	26	828	1 926	812	39
5 500 000	35	939	2 136	908	49
6 000 000	43	1 057	2 338	1 021	58
6 500 000	52	1 177	2 547	1 140	72
7 000 000	62	1 286	2 750	1 259	82
7 500 000	69	1 395	2 965	1 370	94

8 000 000	80	1 512	3 159	1 474	104
8 500 000	95	1 631	3 362	1 581	111
9 000 000	117	1 754	3 558	1 690	118
9 500 000	129	1 869	3 772	1 801	136
10 000 000	141	1 993	3 987	1 917	154

Таблица II.5. Количество номеров n , $n \leq N$, отвечающих пятеркам $(\Delta_n, \dots, \Delta_{n+4})$ указанного вида

N	$(-1, -1, -1, -1, 1)$	$(-1, -1, -1, 1, 1)$	$(-1, -1, 1, 1, 1)$	$(-1, 1, 1, 1, 1)$
100 000	0	0	0	0
500 000	0	11	10	1
1 000 000	0	28	28	1
1 500 000	0	51	53	1
2 000 000	0	82	85	3
2 500 000	1	112	122	5
3 000 000	2	153	163	6
3 500 000	3	191	184	9
4 000 000	3	231	225	13
4 500 000	4	261	265	16
5 000 000	8	292	301	19
5 500 000	10	337	343	25
6 000 000	13	374	386	27
6 500 000	16	420	436	30
7 000 000	19	465	483	34
7 500 000	22	515	524	39
8 000 000	28	560	559	43
8 500 000	33	611	598	45
9 000 000	42	656	647	46
9 500 000	45	709	694	53
10 000 000	51	752	743	58

Таблица II.6. Количество номеров n , $n \leq N$, отвечающих шестеркам $(\Delta_n, \dots, \Delta_{n+5})$ указанного вида

N	$(-1, -1, -1, -1, 1, 1)$	$(-1, -1, -1, 1, 1, 1)$	$(-1, -1, 1, 1, 1, 1)$
500 000	0	0	0
1 000 000	0	1	0
1 500 000	0	4	0
2 000 000	0	12	0

2 500 000	0	20	0
3 000 000	1	28	1
3 500 000	1	29	2
4 000 000	1	39	4
4 500 000	1	45	7
5 000 000	3	47	7
5 500 000	4	56	9
6 000 000	4	62	10
6 500 000	5	72	12
7 000 000	5	85	13
7 500 000	7	94	14
8 000 000	10	98	15
8 500 000	13	109	15
9 000 000	16	117	15
9 500 000	19	125	17
10 000 000	22	136	19

II.3. Маленькие значения $\zeta(1/2 + it)$ в точках Грама

В гл. 6 было доказано, что значения функции $\zeta(1/2 + it)$ в точках Грама $t = t_n$ могут быть сколь угодно близки к нулю. Например, при сколь угодно малом, но фиксированном δ , $0 < \delta < 1$, и достаточно большом $N \geq N_0(\delta)$ на промежутке $n \leq N$ найдется достаточно много номеров n , для которых

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \right| < e^{-(\log \log N)^{1-\delta}}.$$

Между тем приводимые ниже численные данные как будто указывают на существование точек Грама t_n , в которых значения дзета-функции аномально близки к нулю. Действительно, даже при $\delta = 0$ и $N = 10^7$ упомянутая теорема могла бы гарантировать лишь существование значений $\zeta(1/2 + it_n)$, не превосходящих по модулю

$$e^{-\log \log N} = \frac{1}{\log N} \approx 0.06.$$

В то же время среди первых 10 млн значений дзета-функции Римана в точках Грама имеется 11, не превосходящих по модулю $10^{-7} = N^{-1}$.

Поэтому не лишним оснований представляется предположение о том, что при некотором α , $0 < \alpha \leq 1$, неравенство

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it_n\right) \right| < n^{-\alpha}$$

имеет бесконечно много решений.

Ниже мы помещаем две таблицы, содержащие пары и тройки значений дзета-функции в последовательных точках Грама, одновременно близкие к нулю. Существование бесконечных последовательностей точек Грама с такими свойствам представляется несомненным, хотя и не получило еще теоретического обоснования.

Таблица II.7 содержит все значения $\zeta(1/2 + it_n)$ среди первых 100 млн, не превосходящие по абсолютной величине 10^{-6} .

Рис. 12. График функции Харди вблизи нуля γ_n с номером 842 602 – наименьшим значением n , для которого шесть подряд идущих членов последовательности Δ_n отличны от нуля: $\Delta_n = \Delta_{n+1} = \Delta_{n+2} = -1$, $\Delta_{n+3} = \Delta_{n+4} = \Delta_{n+5} = 1$

Таблица II.8 содержит все пары $\zeta(1/2 + it_n)$, $\zeta(1/2 + it_{n+1})$ среди первых 100 млн, в которых каждое из чисел не превосходит по модулю 10^{-3} .

Таблица II.9 содержит все тройки $\zeta(1/2 + it_n)$, $\zeta(1/2 + it_{n+1})$ и $\zeta(1/2 + it_{n+2})$ среди первых 100 млн, в которых каждое из чисел не превосходит по модулю 10^{-2} .

Таблица II.7. Значения дзета-функции Римана в точках Грама, близкие к нулю

№	n	$\zeta(0.5 + it_n)$	№	n	$\zeta(0.5 + it_n)$
1	368 383	$8.908459177 \cdot 10^{-8}$	31	55 397 801	$-7.724510329 \cdot 10^{-7}$
2	1 081 356	$3.286697349 \cdot 10^{-7}$	32	55 785 549	$3.751898927 \cdot 10^{-8}$
3	1 703 469	$-6.782496166 \cdot 10^{-7}$	33	56 977 438	$-1.281331084 \cdot 10^{-7}$
4	2 221 534	$8.913991560 \cdot 10^{-7}$	34	57 923 398	$-8.600911945 \cdot 10^{-7}$
5	2 566 428	$-5.017685320 \cdot 10^{-7}$	35	61 769 885	$8.026448664 \cdot 10^{-8}$
6	3 932 141	$-5.815426965 \cdot 10^{-7}$	36	65 463 721	$1.083783062 \cdot 10^{-8}$
7	10 552 409	$-2.168827302 \cdot 10^{-7}$	37	66 712 683	$9.467610207 \cdot 10^{-7}$
8	12 984 109	$-2.052297697 \cdot 10^{-8}$	38	67 185 440	$-3.026334096 \cdot 10^{-7}$
9	17 192 658	$-7.976228419 \cdot 10^{-7}$	39	67 817 448	$3.065987007 \cdot 10^{-7}$
10	18 492 584	$1.955139500 \cdot 10^{-7}$	40	68 116 120	$-4.964761089 \cdot 10^{-7}$
11	19 190 466	$-2.803305286 \cdot 10^{-7}$	41	68 804 262	$-9.356895220 \cdot 10^{-7}$
12	19 652 116	$3.938189772 \cdot 10^{-7}$	42	69 612 841	$9.033652260 \cdot 10^{-8}$
13	21 380 358	$3.869268958 \cdot 10^{-7}$	43	73 877 566	$8.688378781 \cdot 10^{-7}$
14	21 567 185	$-6.709404500 \cdot 10^{-8}$	44	74 201 244	$2.875945334 \cdot 10^{-8}$

15	22 596 681	$-3.443463124 \cdot 10^{-7}$	45	74 501 450	$-9.894745552 \cdot 10^{-7}$
16	23 521 820	$-2.672575299 \cdot 10^{-7}$	46	74 549 035	$-6.786590341 \cdot 10^{-7}$
17	24 100 729	$6.250046215 \cdot 10^{-7}$	47	74 939 457	$-9.707059351 \cdot 10^{-7}$
18	25 841 031	$-3.720614072 \cdot 10^{-7}$	48	76 315 239	$-1.737656419 \cdot 10^{-7}$
19	36 596 593	$9.536161749 \cdot 10^{-7}$	49	76 666 987	$-4.813843438 \cdot 10^{-7}$
20	37 144 211	$-6.532751077 \cdot 10^{-7}$	50	82 021 362	$3.054704527 \cdot 10^{-7}$
21	38 149 300	$1.883071757 \cdot 10^{-7}$	51	83 544 119	$1.785705074 \cdot 10^{-7}$
22	40 691 692	$-5.549799612 \cdot 10^{-7}$	52	84 026 196	$-3.880595918 \cdot 10^{-7}$
23	43 005 627	$9.335807026 \cdot 10^{-7}$	53	86 680 958	$-2.600521850 \cdot 10^{-7}$
24	45 898 152	$8.302024309 \cdot 10^{-8}$	54	89 039 640	$8.806346508 \cdot 10^{-7}$
25	46 555 309	$-6.184960394 \cdot 10^{-7}$	55	93 186 166	$-9.021584705 \cdot 10^{-7}$
26	49 016 454	$-5.510043425 \cdot 10^{-7}$	56	93 796 535	$5.326477354 \cdot 10^{-7}$
27	49 092 047	$1.457889033 \cdot 10^{-7}$	57	93 869 701	$-4.703062781 \cdot 10^{-7}$
28	50 550 325	$-6.397502838 \cdot 10^{-8}$	58	94 842 148	$-7.418568754 \cdot 10^{-7}$
29	52 220 649	$-6.529424698 \cdot 10^{-8}$	59	95 788 773	$-7.262093847 \cdot 10^{-7}$
30	53 253 362	$6.684365546 \cdot 10^{-7}$	60	95 988 225	$-4.872821625 \cdot 10^{-7}$

Таблица II.8. Значения дзета-функции Римана в соседних точках Грама, близкие к нулю

№	n	$\zeta(0.5 + it_n)$	$\zeta(0.5 + it_{n+1})$
1	816 747	$-0.00099\ 82444$	$-0.00047\ 15144$
2	1 992 269	$-0.00074\ 13299$	$-0.00048\ 31443$
3	5 192 539	$-0.00091\ 95711$	$-0.00063\ 63480$
4	5 569 839	$-0.00068\ 28763$	$-0.00047\ 92222$
5	9 008 869	$0.00090\ 02257$	$0.00070\ 81692$
6	13 832 731	$-0.00000\ 80280$	$0.00098\ 28156$
7	18 163 000	$0.00040\ 09274$	$-0.00079\ 37788$
8	30 077 815	$0.00048\ 93125$	$0.00017\ 49607$
9	35 875 340	$-0.00080\ 43341$	$-0.00085\ 30483$
10	38 287 466	$-0.00077\ 17557$	$-0.00050\ 55571$
11	39 046 347	$0.00046\ 61767$	$0.00002\ 19750$
12	40 142 820	$-0.00081\ 68821$	$-0.00084\ 57050$
13	43 029 919	$-0.00085\ 47402$	$0.00095\ 16843$
14	49 780 945	$0.00008\ 28373$	$0.00008\ 65893$
15	51 201 822	$-0.00006\ 83471$	$0.00003\ 75653$
16	51 594 505	$0.00018\ 17627$	$0.00068\ 87363$
17	54 166 549	$-0.00089\ 28189$	$-0.00041\ 69653$
18	56 769 908	$0.00059\ 69652$	$0.00073\ 58172$
19	57 489 193	$-0.00023\ 61312$	$-0.00090\ 58221$
20	57 539 118	$-0.00086\ 11471$	$0.00021\ 29330$

21	57 584 929	−0.00050 58439	−0.00022 00641
22	59 187 069	0.00030 00735	−0.00098 32528
23	63 890 968	0.00001 47495	0.00045 19164
24	70 699 520	−0.00056 44376	0.00095 12555
25	75 078 864	0.00026 87740	−0.00022 52979
26	76 371 912	−0.00059 11880	−0.00096 41903
27	78 991 010	−0.00063 76352	−0.00093 41621
28	82 566 363	0.00074 27305	−0.00025 55093
29	82 915 114	−0.00031 55988	−0.00083 92445
30	84 807 620	0.00027 60681	−0.00033 73168
31	92 088 995	−0.00079 77560	−0.00095 57573
32	94 279 811	0.00010 94287	−0.00017 04603
33	97 537 083	−0.00050 04338	0.00032 06898

Таблица II.9. Значения дзета-функции Римана в трех соседних точках Грама, близкие к нулю

№	n	$\zeta(0.5 + it_n)$	$\zeta(0.5 + it_{n+1})$	$\zeta(0.5 + it_{n+2})$
1	3 333 401	−0.00232 65321	−0.00162 21856	0.00844 88197
2	10 265 739	0.00219 53893	−0.00101 16015	0.00290 43398
3	20 700 019	−0.00606 78549	0.00464 15922	−0.00673 17207
4	22 060 602	−0.00145 76244	0.00477 93071	0.00082 91226
5	22 930 085	−0.00941 75668	0.00202 31619	0.00221 27749
6	26 744 861	0.00428 23469	0.00091 68454	−0.00785 36040
7	27 838 191	−0.00977 93752	0.00260 31443	0.00807 66231
8	31 529 739	0.00013 79851	−0.00390 41453	−0.00641 21563
9	32 980 449	−0.00448 75141	0.00542 06063	0.00852 44378
10	45 513 704	−0.00317 38499	−0.00238 94084	−0.00224 79058
11	45 970 390	0.00290 56653	0.00085 77340	−0.00777 69921
12	46 104 506	−0.00346 35139	0.00552 73770	0.00263 29073
13	49 086 832	0.00028 30038	−0.00497 27257	−0.00046 25985
14	49 845 648	0.00836 44817	−0.00763 14230	−0.00977 40154
15	50 941 296	−0.00297 24145	0.00895 75515	0.00899 21534
16	52 876 965	0.00876 42238	−0.00787 38824	0.00024 95172
17	53 335 581	−0.00198 51916	0.00069 11725	0.00194 18227
18	74 972 824	−0.00213 50399	−0.00056 66266	−0.00973 89106
19	75 603 058	−0.00486 46810	0.00316 55734	0.00759 96091
20	81 755 052	0.00950 16993	0.00844 36909	0.00898 67914
21	82 514 089	0.00742 58341	−0.00062 90315	−0.00643 91133
22	82 978 419	0.00847 64232	−0.00086 78237	0.00204 52694
23	84 153 877	−0.00150 13153	0.00633 52150	−0.00617 37619

24	85 691 854	−0.00847 60289	−0.00422 67876	−0.00844 38678
25	86 813 816	0.00758 55428	−0.00687 82447	−0.00375 07974
26	91 962 033	0.00692 04691	0.00002 46855	−0.00243 88692

II.4. Дискретный момент дзета-функции Римана

Из результатов гл. 6 следует, что отношение $\mathfrak{M}(N)/N$, где

$$\mathfrak{M}(N) = \sum_{n \leq N} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it_n \right) \right|^{-1}$$

– дискретный момент дзета-функции Римана, при $N \rightarrow +\infty$ возрастает быстрее, чем любая функция вида

$$e^{(\log \log N)^{1-\delta}}, \quad 0 < \delta < 0.5.$$

Вопрос об истинном порядке суммы $\mathfrak{M}(N)$ (и даже о том, конечна она или нет), остается открытым.

Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение. Тогда при любом $\mathcal{L} > 0$ справедливо равенство

$$\mathbb{E}(e^{\xi \sqrt{\mathcal{L}/2}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u \sqrt{\mathcal{L}/2}} dG(u) = e^{\mathcal{L}/4}.$$

Поэтому если бы величины

$$\xi_n = \frac{\sqrt{2} \log |\zeta(1/2 + it_n)|}{\sqrt{\log \log N}}, \quad n \leq N,$$

были распределены по закону, «близкому» к нормальному, то естественно было бы ожидать, что

$$\mathfrak{M}(N) = \sum_{n \leq N} e^{\xi_n \sqrt{(1/2) \log \log N}} \sim N(\log N)^{1/4}.$$

Между тем численные данные, приведенные в таблице II.10, показывают, что отношение $\mathfrak{M}(N)/(N(\log N)^{1/4})$ достаточно далеко от единицы.

Таблица II.10. Дискретный момент степени (-1) дзета-функции Римана

N	$\mathfrak{M}(N)$	$\mathfrak{M}(N)/N$	$\mathfrak{M}(N)/(N(\log N)^{1/4})$
1 000	2 281.67	2.28	1.41
2 000	5 237.67	2.62	1.58
3 000	7 494.98	2.50	1.49
4 000	24 561.26	6.14	3.62
5 000	26 933.05	5.39	3.15
10 000	44 566.50	4.46	2.56
20 000	115 562.76	5.78	3.26
30 000	167 058.27	5.57	3.11
40 000	214 220.65	5.36	2.97

50 000	267 472.98	5.35	2.95
100 000	601 939.09	6.02	3.27
200 000	1 339 389.70	6.70	3.58
300 000	2 010 849.64	6.70	3.56
400 000	13 815 874.94	34.54	18.23
500 000	14 476 098.90	28.95	15.21
1 000 000	17 507 650.56	17.51	9.08
2 000 000	29 299 867.03	14.65	7.51
3 000 000	40 814 274.43	13.60	6.92
4 000 000	50 254 864.88	12.56	6.36
5 000 000	59 169 353.81	11.83	5.97
10 000 000	98 075 035.16	9.81	4.89

«Всплеск» в правой колонке при переходе от $N = 3000$ к $N = 4000$ вызван появлением слишком малых по модулю значений дзета-функции в точках Грама t_n с номерами $n = 3383, 3783, 3804$, вклады от которых в $\mathfrak{M}(N)$ составляют соответственно 4924.53, 1315.28 и 7263.06. Аналогично, большой всплеск между $N = 300000$ и $N = 400000$ возник благодаря одному лишь слагаемому суммы $\mathfrak{M}(N)$, которое отвечает слишком маленькому значению $|\zeta(0.5 + it_n)|$ в точке Грама с номером 368383 (см. Таблицу II.7). Вклад от этого слагаемого, равный 11225285.77, составляет более 80 % от величины $\mathfrak{M}(N)$.

Причина отклонения отношения в правой колонке таблицы от единицы состоит, по-видимому, в том, что вероятности $P\{\xi_n \leq -x\}$ при слишком больших $x > 0$ (так называемые вероятности больших уклонений) перестают подчиняться нормальному закону. Не исключено, что для таких вероятностей справедлив аналог гипотезы, сформулированной в 2001 г. Хьюджесом (см. [34]). Согласно этой гипотезе при любых $\varepsilon > 0$, $T \geq T_0(\varepsilon)$ и u с условием

$$u \geq \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{\log \log T}$$

мера множества точек t промежутка $0 < t \leq T$, для которых

$$\frac{\sqrt{2} \log |\zeta(1/2 + it)|}{\sqrt{\log \log T}} \leq -u,$$

эквивалентна $T\Delta$,

$$\Delta = c \cdot a(-0.5) \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{u}{\sqrt{2}} \sqrt{\log \log T} \right),$$

где

$$c = \exp \left\{ 3\zeta'(-1) + \frac{1}{12} \log 2 - \frac{1}{2} \log \pi \right\} \approx 0.364,$$

$$a(\lambda) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{\lambda^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\Gamma(m + \lambda)}{m! \Gamma(\lambda)} \right)^2 \frac{1}{p^m},$$

так что $a(-0.5) \approx 0.919$.

Список литературы

- [1] A. Selberg, “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function”, *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155; A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 214–280.
- [2] D. A. Goldston, S. M. Gonek, *A Note on $S(t)$ and the Zeros of the Riemann Zeta-Function*, arXiv: math.NT/0511092v1.
- [3] A. Selberg, “The zeta-function and the Riemann hypothesis”, *C. R. Dixième Congrès Math. Skandinaves* 1946, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200; A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 341–355.
- [4] K.-M. Tsang, *The Distribution of the Values of the Riemann Zeta-Function*, Ph.D. Thesis, Princeton Univ., 1984.
- [5] Р. Н. Бояринов, “О распределении значений дзета-функции Римана”, *Докл. РАН*, **438**:1 (2011), 14–16.
- [6] J. E. Littlewood, “Two notes on the Riemann zeta-function”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22** (1924), 234–242.
- [7] E. C. Titchmarsh, “The mean-value of the zeta-function on the critical line”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **27**:1 (1928), 137–150.
- [8] А. А. Лаврик, “Проблема Титчмарша дискретной теории дзета-функции Римана”, *Теория чисел и анализ*, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 197–230.
- [9] Я. Мозер, “Арифметический аналог одной формулы Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана”, *Acta Math. Univ. Comenian.*, **37** (1980), 109–120.
- [10] Я. Мозер, “О порядке одной суммы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана”, *Czechoslovak Math. J.*, **41** (116):4 (1991), 663–684.
- [11] J. Kalpokas, J. Steuding, “On the value distribution of the Riemann zeta-function on the critical line”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **1**:1 (2011), 26–42.
- [12] A. Selberg, “Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series”, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory* (Maiori, September, 25–29, 1989), Salerno, Univ. Salerno, 1992, 367–385; A. Selberg, *Collected Papers*, Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 47–64.
- [13] J. Kalpokas, P. Šarka, “Small values of the Riemann zeta function on the critical line”, *Acta Arith.*, **169**:3 (2015), 201–220.
- [14] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1971.
- [15] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Ч. 1, ИЛ, М., 1949.
- [16] J. B. Rosser, L. Schoenfeld, “Approximate formulas for some functions of prime numbers”, *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 64–94.
- [17] А. А. Карацуба, “О функции $S(t)$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:5 (1996), 27–56.
- [18] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой”, *УМН*, **61**:3 (2006), 3–92.
- [19] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96.
- [20] И. Г. Шевцова, “О неравенстве сглаживания”, *Докл. РАН*, **430**:5 (2010), 600–602.
- [21] H.-K. Hwang, “Large deviations for combinatorial distributions. I: Central limit theorems”, *Ann. Appl. Probab.*, **6**:1 (1996), 297–319.
- [22] R. J. Backlund, “Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion”, *Acta Math.*, **41** (1916), 345–375.
- [23] T. S. Trudgian, *An Improved Upper Bound for the Argument of the Riemann Zeta-Function on the Critical Line II*, arXiv: math.NT/1208.5846v1.
- [24] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. Theory and Applications*, Dover Publ., New York, 2003.
- [25] J. B. Conrey, “More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta-function are on the critical line”, *J. Reine Angew. Math.*, **399** (1989), 1–26.
- [26] K.-M. Tsang, “Some Ω -theorems for the Riemann zeta-function”, *Acta Arith.*, **46**:4 (1986), 369–395.

- [27] М. А. Королёв, “О больших значениях функции $S(t)$ на коротких промежутках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 115–124.
- [28] Р. Н. Бояринов, “О больших значениях функции $S(t)$ на коротких интервалах”, *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 495–502.
- [29] Р. Н. Бояринов, “Изменение знака функции $S(t)$ на коротких интервалах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, №3, 51–53.
- [30] M. Radziwill, *Large Deviations in Selberg’s Central Limit Theorem*, arXiv:math.NT/1108.5092v1.
- [31] A. Ghosh, “On the Riemann zeta-function – mean value theorems and the distribution of $|S(t)|$ ”, *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93–102.
- [32] М. А. Королёв, “Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 83–118.
- [33] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, B. I, B. G. Teubner, Berlin, 1909.
- [34] C. P. Hughes, *Characteristic Polynomial of a Random Unitary Matrix and the Riemann Zeta Function*, Ph.D. Thesis, University of Bristol, 2001.