Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, О локальном представлении нуля формой. Доклад в Чандигархе, *Совр. пробл. матем.*, 2016, выпуск 23, 7–11

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:15:38

О локальном представлении нуля формой (Доклад в Чандигархе)

А. А. Карацуба

karatsuba@mi.ras.ru

Проблема поставлена Артином и состоит в следующем. Пусть p – простое число, Q_p – поле p -адических чисел. Пусть $F = F(x_1, \dots, x_k)$ – форма от переменных $x_1, \dots, x_k$ степени n с целыми коэффициентами, т.е.

$$F = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} a(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k},$$

$a(n_1, \dots, n_k)$ – целые числа.

ГИПОТЕЗА (Артин). Если $k > n^2$, то существуют $x_1, \dots, x_k$, не все равные нулю и такие, что

$$F(x_1, \dots, x_k) = 0 \quad \text{в } Q_p.$$

При $n = 2$ это теорема Минковского–Хассе. При $n = 3$ это теорема Демьянова–Льюиса.

В 1966 г. Терджанян (Terjanian) опроверг эту гипотезу. Он доказал [1], что существуют формы, у которых число переменных

$$k \geq n^{\log_4 20},$$

и из $F(x_1, \dots, x_k) = 0$ в Q_p следует $x_1, \dots, x_k = 0$. В том же 1966 г. этот результат был усилен Бровкиным (Browkin) [2] до

$$k \geq n^{3-\varepsilon},$$

$\varepsilon > 0$ сколь угодно мало.

В 1981 г. автор и Г. И. Архипов доказали [3], что

$$k \geq e^u, \quad u = \frac{n}{\ln n \ln \ln n \dots \underbrace{\ln \dots \ln n}_r (\underbrace{\ln \dots \ln n}_{r+1})^3},$$

т.е., грубо говоря, k должно иметь порядок $\exp n$.

Мы получим этот результат здесь. Проблему можно сформулировать на языке теории сравнений. Везде ниже мы рассматриваем формы $F = F(x_1, \dots, x_k)$ от k переменных $x_1, \dots, x_k$ степени n с целыми коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что форма $F = F(x_1, \dots, x_k)$ тривиально представляет нуль по модулю p , если при некотором натуральном числе r из сравнения

$$F(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{p^r}$$

следует, что

$$x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \pmod{p}.$$

Например, пусть $p = 2$. Тогда форма

$$F = F(x_1, \dots, x_k) = x_1^n + \dots + x_k^n,$$

где $n = 2^h$, $h \geq 2$, тривиально представляет нуль по модулю 2, если $k < 4n$. Действительно, рассмотрим сравнение

$$x_1^n + \dots + x_k^n \equiv 0 \pmod{4n}.$$

Если $x_j \equiv 0 \pmod{2}$, то $x_j^n \equiv 0 \pmod{4n}$, так как из $2^n \geq 4n$ следует $2^{n-2} \geq n$, $n \geq 4$.

Если $x_j \equiv 1 \pmod{2}$, то $x_j = 1 \pm 4y_j$,

$$x_j^n = (1 \pm 4y_j)^n = 1 + \binom{n}{1}(\pm 4y_j) + \binom{n}{2}(\pm 4y_j)^2 + \dots \equiv 1 \pmod{4n},$$

и если $k < 4n$ и хотя бы одно $x_j \not\equiv 0 \pmod{2}$, то

$$x_1^n + \dots + x_k^n \not\equiv 0 \pmod{4n}.$$

Эта форма – левая часть формулы известной проблемы Варинга.

Из определения легко доказать следующую лемму.

ЛЕММА. Если $F = F(x_1, \dots, x_k)$ тривиально представляет нуль по модулю p , то для любого $m \geq 1$ найдется M такое, что из сравнения

$$F(x_1, \dots, x_k) \equiv 0 \pmod{p^M}$$

следует

$$x_1 \equiv \dots \equiv x_k \equiv 0 \pmod{p^m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $M = mn + r$. Легко видеть, что если $x_j = px'_j$, то

$$p^n F(x'_1, \dots, x'_k) \equiv 0 \pmod{p^M},$$

откуда

$$F(x'_1, \dots, x'_k) \equiv 0 \pmod{p^{M-n}}$$

и т.д. при $x'_j = px''_j, \dots, x_j = p^m x_j^{(m)}$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть p – простое число. Для любого натурального $r \geq 1$ существует $n_0 = n_0(r)$ такое, что при любом $n \geq n_0$ существует форма $F = F(x_1, \dots, x_k)$ степени, не превосходящей n , с целыми коэффициентами, число переменных которой k ,

$$k \geq e^u, \quad u = \frac{n}{\ln n \ln \ln n \dots \underbrace{\ln \dots \ln}_r n (\underbrace{\ln \dots \ln}_{r+1} n)^3},$$

тривиально представляющая нуль по модулю p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем теорему для $p = 2$. Для любого другого p она доказывается аналогично.

Основой доказательства является следующая лемма.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть $1024 \leq n \leq 96m$, $j_1, \dots, j_m$ – любые целые числа с условием

$$\frac{3n}{16} < j_1 < \dots < j_m \leq \frac{n}{2}.$$

$$\begin{cases} x_1^{2^{j_1}} + \cdots + x_k^{2^{j_1}} \equiv 0 \pmod{2^{2^{j_1}}}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{2^{j_s}} + \cdots + x_k^{2^{j_s}} \equiv 0 \pmod{2^{2^{j_s}}}, \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{2^{j_m}} + \cdots + x_k^{2^{j_m}} \equiv 0 \pmod{2^{2^{j_m}}}. \end{cases}$$
$$k \geq 2^u, \quad u \geq \frac{n}{32}.$$
$$x_j \equiv \pm 5^{\alpha_j} \pmod{2^n}.$$
$$f(t) = t^{\alpha_1} + \dots + t^{\alpha_k}.$$
$$f(1) = k \geq 1.$$
$$f(1) \equiv 0 \pmod{2^u}, \quad u \geq \frac{n}{32}.$$
$$f(5^{2j_s}) = (t^{\alpha_1})^{2j_s} + (t^{\alpha_2})^{2j_s} + \cdots + (t^{\alpha_k})^{2j_s} \equiv 0 \pmod{2^{2j_s}}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$
$$(t - 5^{2j_m}) \cdots (t - 5^{2j_s}) \cdots (t - 5^{2j_1}).$$
$$f(t) = \varphi(t) + (t - 5^{2j_m}) \cdots (t - 5^{2j_s}) \cdots (t - 5^{2j_1})q(t),$$
$$\varphi(5^{2j_s}) = f(5^{2j_s}) \equiv 0 \pmod{2^{2j_s}}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$
$$\varphi(t) = \sum_{s=1}^m \frac{(t - 5^{2j_1}) \cdots (t - 5^{2j_{s-1}})(t - 5^{2j_{s+1}}) \cdots (t - 5^{2j_m})}{(5^{2j_s} - 5^{2j_1}) \cdots (5^{2j_s} - 5^{2j_{s-1}})(5^{2j_s} - 5^{2j_{s+1}}) \cdots (5^{2j_s} - 5^{2j_m})} \varphi(5^{2j_s}).$$
$$2^{\delta(v)} \mid v, \quad \text{HO} \quad 2^{\delta(v)+1} \nmid v.$$
$$\delta(5^a - 1) = \delta(a) + 2,$$

$$\begin{aligned} 5^a - 1 &= (5 - 1)(5^{a-1} + 5^{a-2} + \cdots + 1) \\ &= 4(1 + (4 + 1) + (4 + 1)^2 + \cdots + (4 + 1)^{a-1}) = 4(a + 4a + 8a + \cdots) = 4a(1 + 2A), \\ \delta(a!) &= \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{2^2} \right\rfloor + \cdots < \frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \cdots = a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta \left(\varphi(5^{2j_s}) \frac{(1-5^{2j_1}) \cdots (1-5^{2j_{s-1}})(1-5^{2j_{s+1}}) \cdots (1-5^{2j_m})}{(1-5^{2(j_s-j_1)}) \cdots (1-5^{2(j_s-j_{s-1})})(1-5^{2(j_{s+1}-j_s)}) \cdots (1-5^{2(j_m-j_s)})} \right) \\ &= \delta(\varphi(5^{2j_s})) + 2(s-1) + \delta(2j_1) + \cdots + \delta(2j_{s-1}) + \delta(2j_{s+1}) + \cdots + \delta(2j_m) - 2(s-1) \\ &\quad - \delta(2(j_s-j_1)) - \cdots - \delta(2(j_s-j_{s-1})) - \delta(2(j_{s+1}-j_s)) - \cdots - \delta(2(j_m-j_s)) \\ &\geq 2j_s - \delta(j_s-j_1) - \cdots - \delta(j_s-j_{s-1}) - \delta(j_{s+1}-j_s) - \cdots - \delta(j_m-j_s). \end{aligned} \quad (*)$$
$$\begin{aligned}\delta(j_s - j_1) + \cdots + \delta(j_s - j_{s-1}) &= \delta((j_s - j_1) \cdots (j_s - j_{s-1})) \leq \delta((j_s - j_1)!) < j_s - j_1, \\ \delta(j_{s+1} - j_s) + \cdots + \delta(j_m - j_s) &= \delta((j_{s+1} - j_s) \cdots (j_m - j_s)) \leq \delta((j_m - j_s)!) < j_m - j_s,\end{aligned}$$
$$2j_s - (j_s - j_1) - (j_m - j_s) = 2j_s + j_1 - j_m > \frac{9n}{16} - \frac{n}{2} = \frac{n}{16}.$$
$$\delta(g(1)(1-5^{2j_m})\dots(1-5^{2j_1})) \geq 3m > \frac{3n}{96} = \frac{n}{32},$$

Теперь вернемся к доказательству теореме. Оно состоит в построении формы F с большим количеством переменных, тривиально представляющей нуль по модулю 2. Форму F будем строить последовательно.

$$F = y_0^r + \cdots + y_{r-1}^r, \quad r = 2^h, \quad h \geq 8.$$

$$y_j = s_{2j}s_{4r-2j}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1, \quad s_\nu = x_0^\nu + x_1^\nu + \dots + x_{k-1}^\nu, \quad k = 2^{r/16}.$$

$$F \equiv 0 \pmod{2^M}$$
$$y_j \equiv 0 \pmod{2^{8r}}, \quad j = 0, 1, \dots, r-1,$$
$$s_{2j}s_{4r-2j} \equiv 0 \pmod{2^{8r}},$$
[illegible]
$$\frac{3r}{4} \leq j_{3r/4+1} < \cdots < j_r < 2r = \frac{n}{2}, \quad m = r - \left(\frac{3r}{4} + 1\right) + 1 = \frac{r}{4} = \frac{n}{16} \geq \frac{n}{96}.$$
$$k < 2^{n/32}.$$
$$k = 2^{r/16} = 2^{\sqrt{4r^2}/32}.$$

Если n – степень, то $k = 2^{\sqrt{n}/32}$.

Шаг 2. Рассмотрим форму $G = G(z_0, \dots, z_{K-1})$, $G = F(x_0, \dots, x_{k-1})$, где

$$x_j = S_{2j}S_{4k-2j}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad S_\nu = z'_0 + \dots + z'_{K-1}, \quad K = 2^{k/16}.$$

Форма G тривиально представляет нуль по модулю 2. Степень G равна $4k \cdot 4r^2 = 16kr^2$, число переменных $K = 2^{k/16}$. Но $k = 2^{r/16}$, т.е. $r = 16 \log_2 k$; степень G равна $16^2 k \log_2^2 k$, т.е. $n = 16^2 k \log_2^2 k$, откуда

$$k = c_1 \frac{n}{\ln^2 n}, \quad K = 2^{c_2 n / \ln^2 n}.$$

Повторяя вышеприведенные действия несколько раз, получаем утверждение теоремы.

Мы считаем, что имеет место следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА. Пусть степень F равна n . Если

$$k \geq p^{(1+\varepsilon)(\alpha_p(n!)+2)},$$

то F нетривиально представляет нуль по модулю p . Существуют бесконечная последовательность n и такие формы степени n с числом переменных

$$k \geq p^{(1-\varepsilon)(\alpha_p(n!)+2)},$$

которые только тривиально представляют нуль по модулю p .

Список литературы

- [1] G. Terjanian, “Un contre-exemple à une conjecture d’Artin”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **262** (1966), 612.
- [2] J. Browkin, “On forms over p -adic fields”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **14** (1966), 489–492.
- [3] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, “О локальном представлении нуля формой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:5 (1981), 948–961.
- [4] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, “О представлении нуля формой в поле p -адических чисел”, *Докл. АН СССР*, **262**:1 (1982), 11–13.