Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, О нулях некоторых рядов Дирихле. Доклад в Обервольфахе, *Совр. пробл. матем.*, 2016, выпуск 23, 12–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm57>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:06:35

О нулях некоторых рядов Дирихле

(Доклад в Обервольфахе)

А. А. Карацуба

karatsuba@mi.ras.ru

Некоторые проблемы теории чисел тесно связаны с нулями специальных функций, к которым, например, относятся дзета-функция Римана $\zeta(s)$, функции Дирихле $L(s, \chi)$, дзета-функции алгебраических числовых полей и др. Эти функции задаются рядами Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Re} s > a$ и имеют функциональное уравнение. Например, дзета-функция Римана $\zeta(s)$ задается при $\operatorname{Re} s > 1$ рядом Дирихле вида

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad (1)$$

продолжается на всю s -плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \quad (2)$$

Условия (1) и (2) очень жесткие, они однозначно определяют $\zeta(s)$. Г. Гамбургер доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $G(s)$ – целая функция конечного порядка, $P(s)$ – многочлен, $f(s) = G(s)/P(s)$, и пусть ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$. Пусть, далее,

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) g(1-s), \quad (3)$$

где ряд

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-1+s}$$

абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s < -\alpha < 0$. Тогда

$$f(s) = C \zeta(s), \quad C - \text{постоянная.}$$

Заметим, что (3) даже слабее, чем (2). Естественно возник вопрос: не будет ли функциональное уравнение типа (2) определять местоположение нулей соответствующей функции? Оказалось, что это не так. Простейшей функцией, которая дает отрицательный ответ на поставленный вопрос, является функция $f(s)$, введенная Г. Дэвепортом и Г. Хейльбронном в 1936 г.,

$$f(s) = \frac{1-i\kappa}{2} L(s, \chi_1) + \frac{1+i\kappa}{2} L(s, \bar{\chi}_1),$$

где

$$\kappa = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-2}{\sqrt{5}-1},$$

$\chi_1 = \chi_1(n)$ – характер Дирихле по модулю 5, причем $\chi_1(2) = i$, $i^2 = -1$,

$$L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_1(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Функция $f(s)$ при $\operatorname{Re} s > 0$ имеет следующее представление в виде ряда Дирихле:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r(n) n^{-s},$$

где

$$r(1) = 1, \quad r(2) = \varkappa, \quad r(3) = -\varkappa, \quad r(4) = -1, \quad r(5) = 0$$

и

$$r(n) = r(n+5).$$

Кроме того, $f(s)$ удовлетворяет такому функциональному уравнению:

$$g(s) = g(1-s), \quad g(s) = \left(\frac{\pi}{5}\right)^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) f(s). \quad (4)$$

Сходство (2) и (4) очевидно. Однако для $f(s)$ аналог гипотезы Римана – все комплексные нули $f(s)$ лежат на одной прямой – не выполняется.

Чтобы удобно было формулировать результаты о нулях $f(s)$, введем три функции $N(T)$, $N_0(T)$ и $N(\sigma, T)$, которые соответственно обозначают количества нулей $f(s)$: в полосе $0 < \operatorname{Im} s \leq T$; в той же полосе, но лежащие на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$; в той же полосе, но с $\operatorname{Re} s > \sigma$.

Следующие результаты были известны до 1989 г.:

- 1) $N_0(T) \geq cT$, $c > 0$;
- 2) $N(1, T) \geq c_1 T$, $c_1 > 0$;
- 3) $N(\sigma_1, T) - N(\sigma_2, T) \geq c_2 T$, $c_2 = c_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq 1$;
- 4) $N_0(T) \geq c_3 T \exp(0.05 \sqrt{\log \log \log \log T})$, $c_3 > 0$;
- 5) $N(T) - N_0(T) \geq c_4 T \sqrt{\log \log T}$, $c_4 > 0$.

Утверждения 1) и 2) доказаны Г. Дэвенпортом и Г. Хейльбронном (1936 г.), утверждения 3) и 4) доказаны С.М. Ворониным (1977, 1980 гг.), утверждение 5) доказано А. Сельбергом (сообщено Э. Бомбьери в Амальфи, сентябрь 1989 г.).

Отметим также доклад Д. Хейчала (Международный конгресс математиков в Беркли, 1986 г.), в котором сообщается, что “Сельбергу был известен результат, аналогичный 4), в 1942 г.”, и статью Э. Бомбьери и Д. Хейчала (Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 1987), “которая проливает новый свет на нули арифметических рядов Дирихле, имеющих функциональное уравнение, но не эйлерово произведение”.

В 1989 г. автор разработал метод, с помощью которого доказал, что

$$N_0(T) > T(\log T)^{1/2-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 \text{ любое}, \quad T \geq T_0(\varepsilon) > 0. \quad (5)$$

Справедливы и более общие утверждения. Для их формулировки введем ряд новых обозначений:

- k – произвольное натуральное число;
- χ – произвольный примитивный характер по модулю k ;
- $L(s, \chi)$ – ряд Дирихле, отвечающий χ ;
- $a = (\chi(1) - \chi(-1))/2$;

- $\tau(\chi)$ – сумма Гаусса,

$$\tau(\chi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{m=1}^k \chi(m) e^{2\pi i m/k}, \quad \varepsilon(\chi) \tau(\chi) = i^a \sqrt{k},$$

$$e^{i\theta(t, \chi)} = \left\{ \varepsilon(\chi) \left(\frac{k}{\pi} \right)^{it} \frac{\Gamma(1/4 + a/2 + it/2)}{\Gamma(1/4 + a/2 - it/2)} \right\}^{1/2}, \quad Z(t, \chi) = e^{i\theta(t, \chi)} L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right).$$

Пользуясь функциональным уравнением для $L(s, \chi)$,

$$\xi(1-s, \bar{\chi}) = \varepsilon(\chi) \xi(s, \chi), \quad \xi(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{k} \right)^{-(s+a)/2} \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(s, \chi),$$

легко доказать, что $Z(t, \chi)$ принимает вещественные значения при вещественных t и, следовательно, вещественные нули $Z(t, \chi)$ являются нулями $L(s, \chi)$, лежащими на критической прямой. При $k = 1$ полагаем $\chi(n) = 1$ при любом n ; в этом случае

$$Z(t, \chi) = Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть ε и ε_1 – произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие 0.01. Пусть $H = T^{27/82+\varepsilon_1}$, $m \geq 2$, $k_1, \dots, k_m$ – произвольные натуральные числа, $\chi_1, \dots, \chi_m$ – произвольные примитивные характеры Дирихле по модулям $k_1, \dots, k_m$ соответственно.

Пусть, далее, $a_1, \dots, a_m$ – произвольные вещественные числа,

$$G(t) = a_1 Z(t, \chi_1) + \dots + a_m Z(t, \chi_m).$$

Тогда функция $G(t)$ имеет на промежутке $(T, T+H)$ не меньше, чем

$$H(\log T)^{\beta-\varepsilon}$$

нулей нечетного порядка, где $\beta\varphi(k) = 1$, $\varphi(k)$ – функция Эйлера, $K = [k_1, \dots, k_m]$ – наименьшее общее кратное чисел $k_1, \dots, k_m$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, и пусть, кроме того, $K \geq 3$, и характеры $\chi_1, \dots, \chi_m$ имеют одинаковую четность.

Тогда функция $G(t)$ имеет на промежутке $(T, T+H)$ не меньше, чем

$$H(\log T)^{2\beta-\varepsilon}$$

нулей нечетного порядка.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $p \geq 3$, p – простое число, $\chi_1, \dots, \chi_m$ – четные (нечетные) характеры по модулю p , $a_1, \dots, a_m$ – произвольные вещественные числа,

$$G(t) = a_1 Z(t, \chi_1) + \dots + a_m Z(t, \chi_m).$$

Тогда $G(t)$ имеет на промежутке $(0, T)$ не меньше, чем

$$T(\log T)^{2/(p-1)-\varepsilon}$$

нулей нечетного порядка, где $\varepsilon > 0$ любое, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$.

Отсюда при $p = 5$ получаем аналог (5).

Новые идеи, которые позволили получить (5) и доказать теоремы 1 и 2, состоят в следующем. Основой изучения нулей, скажем $Z(t)$, служит идея Харди–Литтлвуда–Ландау сравнивать интегралы I_1 и I_2 , где

$$I_1 = \int_t^{t+h} |Z(u)| du, \quad I_2 = \left| \int_t^{t+h} Z(u) du \right|.$$

Если $I_1 \neq I_2$, то $Z(u)$ на промежутке $(t, t+h)$ меняет знак, т.е. на $(t, t+h)$ лежит нуль нечетного порядка $Z(u)$. Эта идея впоследствии была дополнена важным соображением А. Сельберга, который вместо $Z(u)$ стал рассматривать функцию $F(u)$,

$$F(u) = Z(u)|f(u)|^2,$$

где $f(u)$ выбирается так, чтобы $F(u)$ в среднем была близка к константе. При выборе $f(u)$ А. Сельберг существенно пользовался тем, что $\zeta(s)$ имеет эйлерово произведение (как подчеркивает сам А. Сельберг, это соображение было впервые применено Г. Бором и Э. Ландау в их исследованиях, касающихся $N(\sigma, T)$ для фиксированного $\sigma > 1/2$).

Функции $G(t)$, определенной в теоремах 1 и 2, отвечает функция $\Phi(s)$,

$$\Phi(s) = \sum_{j=1}^m a_j (\rho(s, \chi_j))^{-1/2} L(s, \chi_j),$$

где

$$\rho(s, \chi_j) = \varepsilon(\bar{\chi}_j) \left(\frac{k}{\pi} \right)^{1/2-s} \frac{\Gamma((1-s)/2 + a/2)}{\Gamma(s/2 + a/2)},$$

т.е.

$$G(t) = \Phi\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

Функция $\Phi(s)$, вообще говоря, не имеет эйлерова произведения. Однако $\Phi(s)$ при $\operatorname{Re} s > 1$ делится на эйлерово произведение $h(s)$,

$$h(s) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{K}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}, \quad K = [k_1, \dots, k_m],$$

так как на $h(s)$ делится каждое $L(s, \chi_j)$, $j = 1, \dots, m$. Поэтому для $G(t)$ существует такая функция $f(t)$, что произведение

$$F(t) = G(t)|f(t)|^2$$

хотя и растет в среднем, но растет “не очень быстро”. Одно только это соображение еще не приводит к желаемой цели. Другим соображением является идея сравнивать малые положительные степени аналогов интегралов I_1 и I_2 , т.е. сравнивать I_1^a и I_2^a , $a \rightarrow +0$,

$$I_1 = \int_t^{t+h} |F(u)| du, \quad I_2 = \left| \int_t^{t+h} F(u) du \right|.$$

Малая положительная степень a интегралов I_1 и I_2 нейтрализует в определенной мере рост среднего значения $F(t)$.

Эти две идеи позволили получить (5) и доказать теоремы 1 и 2. Ясно, как применять эти соображения при изучении нулей и более сложных функций, чем $\Phi(s)$ и $G(t)$.

Список литературы

- [1] А. А. Карацуба, “Распределение нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:6 (1984), 1214–1224.
- [2] А. А. Карацуба, “О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 303–315.
- [3] А. А. Карацуба, “О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:3 (1991), 483–514.
- [4] A. Selberg, “On the zeros of Riemann’s zeta-function”, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I*, **10** (1942), 1–59.
- [5] А. А. Карацуба, “О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:3 (1984), 569–584.
- [6] А. А. Карацуба, “Дзета-функция Римана и ее нули”, *УМН*, **40**:5 (245) (1985), 19–70.
- [7] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.
- [8] R. M. Gabriel, “Some results concerning integrals of moduli of regular functions along curves of certain types”, *Proc. London Math. Soc.*, **2** (1927), 112–117.