Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Космология и Дзета. Доклад в Москве,
Совр. пробл. матем., 2016, выпуск 23, 17–23

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm58>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:28:00

Космология и Дзета

(Доклад в Москве)

А. А. Карацуба

karatsuba@mi.ras.ru

1. Дзета

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right). \quad (1)$$

При вещественных t функция $Z(t)$ вещественная. Возьмем логарифмическую производную от (1):

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = i\theta'(t) + i \frac{\zeta'(1/2 + it)}{\zeta(1/2 + it)} = -\operatorname{Im} \frac{\zeta'(1/2 + it)}{\zeta(1/2 + it)}. \quad (2)$$

Из теории дзета-функции знаем, что

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) + C, \quad (3)$$

где C – абсолютная постоянная, вещественное число. Подставим в (3) $s = 1/2 + it$:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(1/2 + it)}{\zeta(1/2 + it)} &= -\frac{1}{-1/2 + it} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/2 - \beta_n + i(t - \gamma_n)} + \frac{1}{\beta_n + i\gamma_n} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1/2 + 2n + it} - \frac{1}{2n} \right) + C. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{Im} \frac{\zeta'(1/2 + it)}{\zeta(1/2 + it)} = \frac{t}{t^2 + 1/4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t - \gamma_n}{(1/2 - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{(2n + 1/2)^2 + t^2}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) получили:

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = -\frac{t}{t^2 + 1/4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t - \gamma_n}{(1/2 - \beta_n)^2 + (t - \gamma_n)^2} + t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1/2)^2 + t^2}. \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть есть RH, т.е. $\beta_n = 1/2$. Тогда из (5)

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t - \gamma_n} + t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1/2)^2 + t^2} - \frac{t}{t^2 + 1/4}. \quad (6)$$

Собирая в (6) члены с одним значением γ_n , приходим к формуле

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{t - \gamma_k} + t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1/2)^2 + t^2} - \frac{t}{t^2 + 1/4}, \quad (7)$$

где

$$0 < |\gamma_1| < |\gamma_2| < \dots < |\gamma_k| < |\gamma_{k+1}| < \dots$$

и $a(k) \geq 1$ ($a(k)$ – кратности нулей). Пусть теперь $0 < \gamma_k < \gamma_{k+1}$, $k \geq 1$. Рассмотрим промежуток $\gamma_k < t < \gamma_{k+1}$. Выделяя соответствующее слагаемое в (7), получим

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \frac{a(k)}{t - \gamma_k} + \frac{a(k+1)}{t - \gamma_{k+1}} + \Phi_k(t),$$

где $\Phi_k(t)$ – непрерывная на $\gamma_k \leq t \leq \gamma_{k+1}$ функция и, следовательно, ограниченная, т.е.

$$|\Phi_k(t)| \leq c(k) \quad \text{при} \quad \gamma_k \leq t \leq \gamma_{k+1}.$$

Поэтому график $Z'(t)/Z(t)$ выглядит, как на рис. 1.

Рис. 1

То, что функция $Z'(t)/Z(t)$ является монотонно убывающей на интервале (γ_k, γ_{k+1}) , следует из отрицательности ее производной на (γ_k, γ_{k+1}) . Действительно,

$$\frac{d}{dt} \frac{Z'(t)}{Z(t)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{(t - \gamma_k)^2} + K(t),$$

где

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1/2)^2 + t^2} - 2t^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{((2n + 1/2)^2 + t^2)^2} - \frac{1}{t^2 + 1/4} + \frac{2t^2}{(t^2 + 1/4)^2}.$$

Следовательно, при $t \geq 1$

$$|K(t)| \leq \sum_{1 \leq n \leq t} \frac{1}{t^2} + \sum_{n > t+1} \frac{1}{4n^2} + 2t^2 \sum_{1 \leq n \leq t} \frac{1}{t^4} + 2t^2 \sum_{n > t+1} \frac{1}{16n^4} + \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^2} \leq \frac{8}{t}.$$

Так как $\gamma_{k+1} - \gamma_k \leq 1$ при $k \geq k_0$, то при $k \geq k_0$ и $\gamma_k < t < \gamma_{k+1}$ имеем

$$\frac{a(k)}{(t - \gamma_k)^2} \geq 1, \quad \frac{d}{dt} \frac{Z'(t)}{Z(t)} \leq -1 + \frac{8}{\gamma_k} < 0.$$

Получили, что $Z(t)$ на (γ_k, γ_{k+1}) имеет ровно одно экстремальное значение, т.е. при положительном $Z(t)$ график $Z(t)$ выглядит, как на рис. 2.

Отметим, что из (6) следует также

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{t - \gamma_k} + K_1(t),$$

где

$$K_1(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \geq t_1 > 0.$$

Рис. 2

2. Космология

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна–Фридмана имеют вид (см. [1; с. 604])

$$\begin{cases} \frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} + 2\frac{G''}{G} = 0, \\ \frac{\zeta}{G^2} + \frac{G'^2}{G^2} - \frac{1}{3}\varkappa\varrho = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где ζ/G^2 равно кривизне в пространственном сечении $t = \text{const}$. Пространство однородно и изотропно по пространственным переменным. Случай положительной кривизны: $\zeta = +1$.

Здесь G – относительная мера метрического расстояния между двумя материальными точками как функция времени; $\varkappa > 0$ – постоянная, ϱ – плотность.

Можно считать, что $G = R(t)$, $\varrho = \varrho(t)$.

Уравнения Фридмана (в его статье [2; с. 324]):

$$\begin{cases} \frac{(R')^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \\ \frac{3(R')^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \varkappa c^2 \varrho, \end{cases} \quad (9)$$

где λ – космологический член,

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = H$$

– постоянная Хаббла. Ясно, что при $\lambda = 0$ с точностью до постоянного множителя уравнения (8) и (9) совпадают.

В статье Мозера (см. [3; с. 116]) уравнения Эйнштейна–Фридмана имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\varkappa c^2}{3} \varrho(t) = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2}, \\ \varkappa p(t) = -\frac{2R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{kc^2}{R^2}, \end{cases} \quad (10)$$

где $k = -1, 0, +1$ и $p = p(t)$ – давление, $\varrho = \varrho(t)$ – средняя плотность вещества. Случай сферической Вселенной (положительная кривизна): $k = +1$.

В случае нулевого давления

$$p(t) = 0 \quad (11)$$

получаем из (10) уравнение (8). По теории Эйнштейна должно быть

$$0 \leq p(t) \leq \frac{c^2}{3} \varrho(t). \quad (12)$$

Случай (11) соответствует Вселенной, равномерно заполненной пылью, случай $p(t) = (c^2/3)\varrho(t)$ соответствует Вселенной заполненной излучением.

Неравенства (12) эквивалентны таким:

$$E(t) = \frac{\kappa c^2}{3} \varrho(t) - \kappa p(t) \geq 0, \quad p(t) \geq 0, \quad (13)$$

причем

$$E(t) = \frac{2R''}{R} + 2\left(\frac{R'}{R}\right)^2 + \frac{2kc^2}{R^2}. \quad (14)$$

Отметим, что при $p(t) \equiv 0$ второе из уравнений (10) интегрируется. Действительно, запишем его так:

$$a + 2RR'' + R'^2 = 0, \quad a = kc^2, \quad (15)$$

$$R = R(t). \quad (16)$$

Дифференцируя (16) по R , находим

$$R'_t = \frac{1}{t'_R}, \quad R''_{tt} t'_R = \left(\frac{1}{t'_R}\right)'_R,$$

или

$$R''_{tt} = \frac{1}{t'_R} \left(\frac{1}{t'_R}\right)'.$$

Положим $1/t'_R = u = u(R)$. Тогда (15) переписывается так:

$$a + 2Ru u' + u^2 = 0$$

или

$$a + (Ru^2)'_R = 0.$$

Отсюда

$$aR + Ru^2 = R_0, \quad u^2 = \frac{R_0}{R} - a.$$

Но

$$u = \frac{1}{t'_R} = \frac{dR}{dt},$$

т.е.

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{R_0}{R} - a. \quad (17)$$

При $k = +1$, $a = c^2$ из (17) следует, что

$$\frac{R_0}{R} - c^2 \geq 0, \quad 0 \leq R \leq \frac{R_0}{c^2}$$

и

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{R_0}{R} - c^2}.$$

Рис. 3

График R выглядит, как на рис. 3.

Складывая уравнения (10), видим, что

$$-\frac{2R''}{R} = \frac{\kappa c^2}{3} \varrho(t) + \kappa p(t) \geq 0,$$

т.е. $R'' \leq 0$, и R' – монотонно убывающая функция, которая начиная с положительных значений переходит через нуль и идет к отрицательным значениям. Тем самым, R идет от нуля до своего максимального значения, равного R_0 , и далее к нулю.

3. Мозеровская космология

Ян Мозер заметил сходство рис. 2 и рис. 3, а также сходство поведения $R(t)$ и $Z(t)$. Поэтому он предложил рассматривать $R(t)$ в виде

$$R(t) = \mu |Z(t)|,$$

или, предполагая $Z(t) \geq 0$ при $\gamma_k \leq t \leq \gamma_{k+1}$,

$$R(t) = \mu Z(t),$$

где $\mu > 0$ – постоянная (Мозера). При данном $k \geq k_1$ получается модель сферической Вселенной.

Каковы могут быть физические интерпретации этого предположения?

Более точно.

ПОСТУЛАТ МОЗЕРА. При $\gamma_k < t < \gamma_{k+1}$ положим

$$R(t) = \alpha(t_0) |Z(t)|, \quad (18)$$

где

$$\alpha(t_0) = \frac{c}{|Z(t_0)|} \left\{ \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{(t_0 - \gamma_k)^2} \right\}^{-1/2}, \quad (19)$$

β – постоянная, $1 < \beta < 2$, а число t_0 – корень уравнения $Z'(t_0) = 0$ (см. рис. 2).

Тем самым, между любыми соседними нулями $Z(t)$ есть (может быть построена) модель сферической Вселенной.

Будем предполагать далее справедливость постулата Мозера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Физической областью* назовем множество $t \in (\gamma_k, \gamma_{k+1})$ таких, что

$$p(t) \geq 0, \quad (20)$$

$$E(t) \geq 0, \quad (21)$$

где функции $p(t)$ и $E(t)$ определяются системой (10) и соотношением (13) соответственно.

ТЕОРЕМА (Мозер). *При $k \geq k_1$ каждый промежуток (γ_k, γ_{k+1}) содержит в себе физическую область, которая является непустым интервалом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10) имеем

$$\kappa p(t) = -\frac{2R''}{R} - \left(\frac{R'}{R}\right)^2 - \frac{c^2}{R^2}.$$

В п. 1 имели

$$\frac{d}{dt} \frac{Z'(t)}{Z(t)} = \frac{Z''(t)}{Z(t)} - \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right)^2 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{(t-\gamma_k)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Поэтому, предполагая $Z(t) \geq 0$ при $\gamma_k \leq t \leq \gamma_{k+1}$, получаем

$$\kappa p(t) = 2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} - 3 \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right)^2 - \beta \left(\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right)^2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (22)$$

$$E(t) = -2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t-\gamma)^2} + 4 \left(\frac{Z'(t)}{Z(t)}\right)^2 + 2\beta \left(\frac{Z(t_0)}{Z(t)}\right)^2 \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (23)$$

Полагая в (22) и (23) $t = t_0$, находим

$$\begin{aligned} \kappa p(t_0) &= (2-\beta) \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right), \\ E(t_0) &= 2(\beta-1) \sum_{\gamma} \frac{1}{(t_0-\gamma)^2} + O\left(\frac{1}{t_0}\right). \end{aligned}$$

Так как $\gamma_k < t < \gamma_{k+1}$ и

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \leq \frac{c_1}{\log \log \gamma_k}, \quad (24)$$

то

$$\begin{aligned} \kappa p(t_0) &\geq \frac{2-\beta}{c_1} \log \log \gamma_k - c_2 \frac{1}{\gamma_k}, \\ E(t_0) &\geq \frac{2(\beta-1)}{c_1} \log \log \gamma_k - c_3 \frac{1}{\gamma_k}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $k \geq k_1$ имеем

$$\begin{cases} \kappa p(t_0) > 0, \\ E(t_0) > 0. \end{cases}$$

В силу непрерывности функций $p(t)$ и $E(t)$ в промежутке (γ_k, γ_{k+1}) последние неравенства выполняются в некоторой окрестности точки t_0 , т.е. в промежутке $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, что и требовалось доказать.

Вместо (24) можно пользоваться безусловным результатом

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k \leq c_1, \quad c_1 - \text{постоянная,}$$

и, далее,

$$\begin{aligned} \kappa p(t_0) &\geq \frac{2 - \beta}{c_1} - c_2 \frac{1}{\gamma_k} > 0, \\ E(t_0) &\geq \frac{2(\beta - 1)}{c_1} - c_3 \frac{1}{\gamma_k} > 0 \end{aligned}$$

при $k \geq k_1 > 0$.

Далее, Я. Мозер изучает физические области, их тополого-геометрические возможности (связность и т.д.). В частности, что правая окрестность γ_k и левая окрестность γ_{k+1} содержат не физические области.

Что все это значит?

Как указывает Мозер, это красивая математическая связь двух красивых научных теорий: космологии и теории простых чисел, которыми в свою очередь “располагается” функция $\zeta(s)$.

Список литературы

- [1] А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов*, Т. 2, Наука, М., 1966.
- [2] А. А. Фридман, “О кривизне пространства”, *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Мир, М., 1979, 320–330.
- [3] Я. Мозер, “Дзета-функция Римана и уравнения Эйнштейна–Фридмана”, *Acta Math. Univ. Comenian*, **44-45** (1984), 115–125.