Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Бланк, Условная оптимальная оценка сверху аргумента дзета-функции Римана на критической прямой, *Совр. пробл. матем.*, 2016, выпуск 23, 24–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm59>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:34:35

Условная оптимальная оценка сверху аргумента дзета-функции Римана на критической прямой

Ф. Бланк

Haute École d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud, Switzerland

philippe.blanc@heig-vd.ch

1. Введение

Пусть ζ есть дзета-функция Римана, определяемая при $\operatorname{Re}(s) > 1$ как

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

а в остальном – аналитическим продолжением, и пусть Z есть функция Харди, определяемая равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

где

$$\theta(t) = \arg\left(\pi^{-it/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right)\right),$$

а аргумент определяется непрерывным варьированием t , начиная со значения 0 при $t = 0$. Можно показать (см. [1]), что

$$\theta(t) = \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Вещественные нули Z совпадают с нулями ζ , расположенными на прямой с вещественной частью $1/2$. Если гипотеза Римана верна, то для числа нулей Z на интервале $]0, t]$ справедливо соотношение (см. [1])

$$N(t) = \frac{1}{\pi} \theta(t) + 1 + S(t),$$

где

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right),$$

если t не является нулем Z , и $\arg \zeta(1/2 + it)$ определяется непрерывной вариацией вдоль прямых соединяющих 2 , $2 + it$ и $1/2 + it$, начиная с исходного значений $\arg \zeta(2) = 0$. Если t – это нуль Z , положим

$$S(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} S(t + \epsilon).$$

Известно (см. [1]), что если гипотеза Римана верна, то

$$S(t) = O\left(\frac{\log t}{\log \log t}\right),$$

но предполагается, что

$$S(t) = O((\log t)^{1/2+o(1)}).$$

В настоящей статье мы получим при некоторых условиях оценку

$$S(t) = O((\log t)^{1/2} \log \log \log t).$$

Поводом к нашему исследованию послужила захватывающая статья Ивича [2], в которой автор дает среди прочего условное опровержение гипотезы Римана, применяя производные Z высокого порядка.

В настоящей статье используются стандартные обозначения: $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ для обычных функций антье и потолка (округление до ближайшего целого в большую сторону) и $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$. Запись $f(x) \ll g(x)$ означает, что существуют x_0 и положительная константа C такие, что $|f(x)| \leq Cg(x)$ при $x \geq x_0$, где $g(x)$ положительна при $x \geq x_0$; аналогично $f(x) \gg g(x)$ и $f(x) \asymp g(x)$ означает, что $g(x) \ll f(x) \ll g(x)$. Многочлены Бернулли и Чебышёва степени n обозначаются через $B_n(x)$ и $T_n(x)$ соответственно и определяются как

$$\int_x^{x+1} B_n(t) dt = x^n \quad \text{и} \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

Наконец, при $r \geq 1$ и $t \geq t_r$ положим $\log_1 t \equiv \log t$ и $\log_r t = \log(\log_{r-1} t)$ при $r \geq 2$.

Статья организована следующим образом: в п. 2 представлены основные результаты. Пункт 3 посвящен ключевому тождеству, доказанному автором в [3], и предварительным леммам. Доказательства теорем даны в п. 4.

В настоящей статье мы предполагаем справедливой гипотезу Римана и для простоты представления предполагаем также, что нули ζ являются простыми.

2. Основные результаты

В вычислениях, проведенных в [3], мы обнаружили, что функции $(-1)^{k+1} Z^{(2k-1)}$ из [3] имеют, вообще говоря, те же знаки, и поступая как в [4] можно показать, что если t_n таково, что $\theta(t_n) = (n+1/2)\pi$, то для достаточно больших n числа $(-1)^{k+1} Z^{(2k-1)}(t_n)$ имеют одинаковые знаки при $k \in [(3/4)\theta'(t_n), (7/8)\theta'(t_n)]$. Несмотря на то, что это не используется в наших доказательствах, это показывает, что производные высокого порядка Z имеют правильное поведение.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть T достаточно велико, $(\log T)^{-1/2} \ll a \ll (\log \log T)^{-1}$ такое, что $Z(T \pm a) \neq 0$, и

$$(-1)^{k+1} Z^{(2k-1)}(T \pm a) \geq 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\theta'(T)}{4} \right\rceil. \quad (1)$$

Далее, предполагаем, что существует положительная постоянная c такая, что $Z'(T \pm a) \gg \theta'(T)^{-c}$. Тогда

$$S(T+a) - S(T-a) \leq 2 + \frac{4 \log 2}{\pi^2} a^2 \log T (1 + o(1)).$$

Из доказательства этой теоремы следует, что ее утверждение справедливо, если заменить неравенства (1) одним неравенством, включающим линейную комбинацию производных Z нечетного порядка, вычисленных в $T \pm a$. Чтобы увидеть, что достаточные условия (1) могут быть удовлетворены, когда $S(T+a) - S(T-a)$ “большое”, имеет смысл построить графики функций $S(T+t)$ и

$$f_{2k-1}(t) := (-1)^{k+1} \frac{Z^{(2k-1)}(T+t)}{\theta'(T)^{2k-1}}$$

для значений T , расположенных в окрестности точек, в которых S “большое”, и при $k = 1, \dots, \lceil \theta'(T)/4 \rceil$. Заметим, что член $\theta'(T)^{-(2k-1)}$ – это просто масштабный коэффициент. На

рис. 1 и 2 эти графики изображены для значения $T = 7.1934200352263673 \times 10^{14}$, для которого

$$S(T + 0.46009) = 2.545 \dots, \quad Z(T + 0.9443) = 738.756 \dots, \quad \left\lceil \frac{\theta'(T)}{4} \right\rceil = 5.$$

Другой выбор T порождает похожие графики.

Рис. 1. График $S(T+t)$

Рис. 2. Графики f_{2k-1}

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть существуют последовательность (T_j) и положительная константа c такие, что $T_{j+1} - T_j \asymp (\log T_j)^{-1/2}$, $Z(T_j) \neq 0$ и $Z'(T_j) \gg \theta'(T_j)^{-c}$ при $j = 0, 1, \dots$. Пусть, далее,

$$(-1)^{k+1} Z^{(2k-1)}(T_j) \geq 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{\theta'(T_{j+1})}{4} \right\rceil, \quad j = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$S(T) = O((\log T)^{1/2} \log_3 T). \quad (2)$$

Заметим, что (2) соответствует гипотезе Монтгомери [5], которая утверждает, что $S(T) = O((\log T)^{1/2} (\log_2 T)^{-1/2})$. Также уместно процитировать статью Мозера [6], на которую было указано рецензентом и в которой автор доказывает, что если число пар последовательных ординат γ_n, γ_{n+1} нулей ζ , расположенных на $]T, 2T[$ и удовлетворяющих неравенству

$$0 < \gamma_{n+1} - \gamma_n \leq \frac{4\pi^2}{(\log T)^2},$$

есть $o(T \log T)$, то для положительной доли интервалов $]\gamma_n, \gamma_{n+1}[\subset]T, 2T[$ имеем $S(t) = O((\log t)^{1/2} (\log_2 t)^{2/3})$ для любого $t \in]\gamma_n, \gamma_{n+1}[$.

3. Предварительные результаты

Ключом к нашей аргументации является соотношение, которое связывает значение функции $f \in C^{2r}[-a, a]$ в x_0 , нули f и значения ее производных нечетного порядка на границах интервала.

ЛЕММА 3.1. Пусть $r \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, $f \in C^{2r}[-a, a]$ и $x_0 \in]-a, a[$ такое, что $f(x_0) \neq 0$. Предположим, что f имеет только конечное число нулей в $]-a, a[$, все они простые, обозначаемые x_k с $k \neq 0$ и так пронумерованные, что $-a < x_{-m} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_n < a$. Далее, при $l \geq 1$ пусть Ψ_{2l-1} определяется как

$$\Psi_{2l-1}(x) = \frac{(4a)^{2l-1}}{(2l)!} \sum_{k=-m}^n \mu_k \left(B_{2l} \left(\frac{1}{2} + \frac{x+x_k}{4a} \right) + B_{2l} \left(\left\{ \frac{x-x_k}{4a} \right\} \right) \right), \quad (3)$$

где $\mu_k = \alpha_k / \alpha_0$ и

$$\alpha_k = \frac{1}{\prod_{\substack{-m \leq j \leq n \\ j \neq k}} \left(\sin \left(\pi \frac{x_k}{2a} \right) - \sin \left(\pi \frac{x_j}{2a} \right) \right)} \quad \text{при } k = -m, \dots, n.$$

Тогда

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^r \Psi_{2k-1}(a) f^{(2k-1)}(a) - \sum_{k=1}^r \Psi_{2k-1}(-a) f^{(2k-1)}(-a) - \int_{-a}^a \Psi_{2r-1}(x) f^{(2r)}(x) dx. \quad (4)$$

Мы доказали в [3], что тождество (4) справедливо для функций Ψ_{2l-1} , определяемых равенством (3), единственно лишь условиями $\mu_0 = 1$ и $\sum_{k=-m}^n \mu_k = 0$. Наш особый выбор коэффициентов μ_k имеет решающее значение для получения хороших свойств функции Ψ_{2l-1} , что станет понятным при доказательстве леммы 3.6. В [3] мы доказали также, что лемма 3.1 распространяема на кратные нули.

ЛЕММА 3.2. Пусть Ψ_{2l-1} функция, определяемая равенством (3), и пусть

$$\bar{t} = \frac{1}{m+n+1} \sum_{k=-m}^n \sin \left(\pi \frac{x_k}{2a} \right).$$

Тогда

$$(-1)^{n+l+1} \Psi_{2l-1}(a) > 0 \quad \text{и} \quad (-1)^{m+l+1} \Psi_{2l-1}(-a) > 0. \quad (5)$$

Кроме того,

$$(-1)^n \Psi_1(a) > \frac{2a(1+\bar{t})^{m+n}}{3|\alpha_0|\pi^2(m+n)^2}, \quad (6)$$

$$(-1)^m \Psi_1(-a) > \frac{2a(1-\bar{t})^{m+n}}{3|\alpha_0|\pi^2(m+n)^2}. \quad (7)$$

Для доказательства леммы 3.2 требуются два технических результата, полученные в леммах 3.3 и 3.4.

ЛЕММА 3.3. Для всех $l, k \in \mathbb{N}^*$ и $x \in [0, 1[$ имеем неравенства

$$\begin{aligned} (-1)^{l+1} \frac{d^k}{dx^k} B_{2l} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \right) &> 0, \\ \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} B_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \right) &> \frac{2^{2k}}{6\pi^2 k^2} x^k. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство доказано в [3]. Для получения второго утверждения, заметим, что $B_2(1/2 + x) = -1/12 + x^2$,

$$B_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \right) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{2j}((j-1)!)^2}{2(2j)!} x^j$$

и, следовательно, имеем

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} B_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{x} \right) = \frac{1}{\pi^2} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{2^{2j}((j-1)!)^2 j!}{2(2j)!(j-k)!k!} x^{j-k} > c_k \frac{2^{2k}}{\pi^2 k^2} x^k, \quad (8)$$

где сумма тривиально оценивается снизу членом с индексом $j = 2k$ и

$$c_k = \frac{2^{2k}((2k-1)!)^2(2k)!}{2(4k)!((k-1)!)^2}.$$

Далее, замечаем, что

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(4k+2)^2}{(4k+2)^2 - 1} > 1,$$

откуда следует, что $c_k > c_1 = 1/6$, и мы завершаем доказательство, пользуясь (8).

ЛЕММА 3.4. Пусть $I =]-a, a[$, функция $f \in C^{m+n+2}(I)$ такая, что $f^{(m+n+2)} > 0$ на I , и пусть $t_{-m}, \dots, t_n \in I$ — попарно различные числа. Тогда

$$\sum_{k=-m}^n \frac{f(t_k)}{\prod_{\substack{-m \leq j \leq n \\ j \neq k}} (t_k - t_j)} > \frac{f^{(m+n)}(\bar{t})}{(m+n)!},$$

где $\bar{t} = (\sum_{k=-m}^n t_k)/(m+n+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение — непосредственное следствие результата Флоатера [7], который утверждает, что существует $\eta \in [t_{-m}, t_n]$ такое, что

$$\sum_{k=-m}^n \frac{f(t_k)}{\prod_{\substack{-m \leq j \leq n \\ j \neq k}} (t_k - t_j)} = \frac{f^{(m+n)}(\bar{t})}{(m+n)!} + R_{m+n+2},$$

где

$$R_{m+n+2} = \frac{1}{2(m+n+1)} \left(\sum_{-m \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)^2 \right) \frac{f^{(m+n+2)}(\eta)}{(m+n+2)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Неравенства (5) доказаны в работе [3]. Поскольку $B_2(x) = B_2(1-x)$, имеем

$$\Psi_1(\pm a) = 4a \sum_{k=-m}^n \mu_k B_2\left(\frac{3}{4} \pm \frac{x_k}{4a}\right)$$

и, следовательно,

$$(-1)^n \Psi_1(\pm a) = \left(\frac{(-1)^n}{\alpha_0} \right) 4a \sum_{k=-m}^n \alpha_k h_{\pm}(t_k),$$

где $h_{\pm}(t) = B_2(3/4 \pm (1/(2\pi)) \operatorname{Arcsin} t)$, и $t_k = \sin(\pi x_k/(2a))$. Первый член в правой части положителен, и тождества

$$\frac{3}{4} \pm \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arcsin} t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1 \pm t}{2}} \quad \text{при } t \in [-1, 1]$$

вместе с леммой 3.3 показывают, что $h_+^{(m+n+2)}$ и $(-1)^{(m+n)} h_-^{(m+n+2)}$ положительны на $] -1, 1[$. Доказательство (6) и (7) завершается использованием леммы 3.4 и леммы 3.3 для вычисления нижних оценок для $h_+^{(m+n)}(\bar{t})$ и $(-1)^{(m+n)} h_-^{(m+n)}(\bar{t})$.

ЛЕММА 3.5. Пусть $b_{r,s}$ – числа, определенные для целых $r \geq 3$ и $s \geq 0$ как

$$b_{r,s} = \left(\frac{r}{r+s} \right)^{2r \log r / \log_2 r - 1} \binom{2r+s-1}{s}.$$

Тогда

$$\sum_{s=0}^{\infty} b_{r,s}^2 = e^{o(r)} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $b_{r,s} = O_r(s^{-2r \log r / \log_2 r + 2r}) = O_r(s^{-1})$, эта сумма сходится. Пользуясь формулой $\log n! = n \log n - n + O(\log n)$ и полагая $p = 2r \log r / \log_2 r - 1$, имеем $\log b_{r,s} = \phi_r(s) + O(\log r)$ при $1 \leq s \leq r$, где ϕ_r есть функция, определенная на отрезке $[1, r]$ как

$$\phi_r(x) = -p \log \left(1 + \frac{x}{r} \right) + (2r+x-1) \log(2r+x-1) - x \log x - (2r-1) \log(2r-1).$$

При достаточно больших r проверяется, что $\phi'_r(1) > 0$, $\phi'_r(r) < 0$ и ϕ''_r имеет единственную перемену знака, которая подразумевает, что ϕ_r имеет единственный максимум, расположенный в $x_r^* \in]1, r[$. Переписав уравнение $\phi'_r(x) = 0$ в виде

$$x = 2r e^{-p/r} \left(e^{px/(r(r+x))} \left(1 + \frac{x}{2r} - \frac{1}{2r} \right) \right),$$

закключаем, что

$$x_r^* = 2r^{1-2/\log_2 r} (1 + O(r^{-1/\log_2 r})), \quad \phi_r(x_r^*) = 2r^{1-2/\log_2 r} (1 + O(r^{-1/\log_2 r})),$$

откуда

$$\sum_{s=1}^r b_{r,s}^2 \leq r e^{2\phi_r(x_r^*) + O(\log r)} = e^{o(r)}.$$

При $s \geq r$ введем числа $c_{r,s} := b_{r,s+1}/b_{r,s}$ и проверим, что

$$s \log c_{r,s} = -sp \log \left(1 + \frac{1}{r+s} \right) + s \log \left(1 + \frac{2r-1}{s+1} \right) \leq -sp \left(\frac{1}{r+s} - \frac{1}{2(r+s)^2} \right) + 2r.$$

Замечая, что последнее выражение убывает с s , выбираем $s = r$, чтобы получить неравенство

$$s \log c_{r,s} \leq -p \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8r} \right) + 2r \leq -1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{b_{r,s+1}}{b_{r,s}} \leq e^{-1/s} \leq \frac{s}{s+1},$$

что подразумевает

$$b_{r,s} \leq \frac{r b_{r,r}}{s} \quad \text{при} \quad s = r, r+1, \dots$$

а поскольку $b_{r,r} \leq e^{\phi_r(x_r^*) + O(\log r)}$, мы заключаем, что $\sum_{s=r+1}^{\infty} b_{r,s}^2 = e^{o(r)}$.

ЛЕММА 3.6. Пусть Ψ_{2l-1} есть функция, определяемая (3), пусть $m+n$ достаточно большое и $l \geq (m+n) \log(m+n)/\log_2(m+n)$. Тогда

$$\|\Psi_{2l-1}\|_2 \leq \frac{2^{(m+n)(1+o(1))}}{|\alpha_0| \sqrt{a}} \left(\frac{2a}{(m+n)\pi} \right)^{2l} \quad \text{при} \quad m+n \rightarrow \infty,$$

где

$$\|\Psi_{2l-1}\|_2^2 = \int_{-a}^a (\Psi_{2l-1}(x))^2 dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя разложение в ряд Фурье

$$B_{2l}(x) = (-1)^{l+1} 2((2l)!) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j\pi)^{2l}} \cos(2j\pi x) \quad \text{для} \quad x \in [0, 1]$$

и тождество

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

приходим к выражению

$$\Psi_{2l-1}(x) = (-1)^{l+1} 2 \frac{(2a)^{2l-1}}{\alpha_0 \pi^{2l}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2l}} \left(\sum_{k=-m}^n \alpha_k \cos \left(j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x_k}{2a} \right) \right) \right) \cos \left(j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2a} \right) \right).$$

Пользуясь тождеством

$$\cos \left(j\pi \left(\frac{1}{2} + y \right) \right) = (-1)^j T_j(\sin(\pi y))$$

и полагая

$$a_{j,k} = (-1)^j T_j \left(\sin \left(\pi \frac{x_k}{2a} \right) \right),$$

имеем

$$\sum_{k=-m}^n \alpha_k a_{j,k} = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, m+n-1.$$

Последнее обосновывает наш особый выбор α_k при определении Ψ_{2l-1} . Отсюда имеем

$$\Psi_{2l-1}(x) = (-1)^{l+1} 2 \frac{(2a)^{2l-1}}{\alpha_0 \pi^{2l}} \sum_{j=m+n}^{\infty} \frac{1}{j^{2l}} \left(\sum_{k=-m}^n \alpha_k a_{j,k} \right) \cos \left(j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2a} \right) \right). \quad (9)$$

Применяя стандартный результат, касающийся разделенных разностей, возводя в квадрат (9) и интегрируя по отрезку $[-a, a]$, получаем

$$\|\Psi_{2l-1}\|_2^2 = \left(2 \frac{(2a)^{2l-1}}{\alpha_0 \pi^{2l}}\right)^2 \sum_{j=m+n}^{\infty} \frac{1}{j^{4l}} \left(\frac{T_j^{(m+n)}(\tau_j)}{(m+n)!}\right)^2 a$$

для некоторых $\tau_j \in]-1, 1[$. Известно (см. [8]), что

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_j^{(m+n)}(x)| = T_j^{(m+n)}(1) = 2^{m+n-1} (m+n-1)! j \binom{m+n+j-1}{j-m-n}$$

при $j = m+n, m+n+1, \dots$, и, следовательно,

$$\|\Psi_{2l-1}\|_2^2 \leq \left(\frac{2^{m+n-1}}{\alpha_0 \sqrt{a}} \left(\frac{2a}{(m+n)\pi}\right)^{2l}\right)^2 \sum_{j=m+n}^{\infty} \left(\frac{m+n}{j}\right)^{4l-2} \binom{m+n+j-1}{j-m-n}^2.$$

Положим $j = m+n+s$, а так как $l \geq (m+n) \log(m+n)/\log_2(m+n)$, имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi_{2l-1}\|_2^2 &\leq \left(\frac{2^{m+n-1}}{\alpha_0 \sqrt{a}} \left(\frac{2a}{(m+n)\pi}\right)^{2l}\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \left(\left(\frac{m+n}{m+n+s}\right)^{2l-1} \binom{2(m+n)+s-1}{s}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{2^{m+n-1}}{\alpha_0 \sqrt{a}} \left(\frac{2a}{(m+n)\pi}\right)^{2l}\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} b_{m+n,s}^2, \end{aligned}$$

и мы завершаем доказательство, пользуясь леммой 3.5.

4. Доказательства теорем

Для достаточно большого T и для $(\log T)^{-1/2} \ll a \ll (\log \log T)^{-1}$ такого, что $Z(T \pm a) \neq 0$ и $\Delta S := S(T+a) - S(T-a) \geq 0$, существуют $t_0 \in]T-a, T+a[$ и положительные целые числа m и n (четное и нечетное соответственно) такие, что $Z(t_0) > 0$ и

$$\gamma_{-m-2} < T-a < \gamma_{-m} < \dots < \gamma_{-1} < t_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n < T+a < \gamma_{n+2},$$

где γ_k — нули Z . Следует отметить, что мы не принимаем во внимание нули γ_{-m-1} и γ_{n+1} , даже если они принадлежат отрезку $[T-a, T+a]$. Поэтому

$$m+n = \frac{1}{\pi}(\theta(T+a) - \theta(T-a)) + \Delta S^*,$$

где $\Delta S^* = \Delta S - q$ и $q = 0, 1, 2$ в соответствии с положением γ_{-m-1} и γ_{n+1} относительно $T-a$ и $T+a$. Тожество (4) записывается как

$$Z(t_0) = \sum_{k=1}^K \Psi_{2k-1}(a) Z^{(2k-1)}(T+a) - \sum_{k=1}^K \Psi_{2k-1}(-a) Z^{(2k-1)}(T-a) + R, \quad (10)$$

где

$$R = - \int_{-a}^a \Psi_{2K-1}(x) Z^{(2K)}(T+x) dx,$$

и x_k , которые неявно используются в определении Ψ_{2l-1} , определяются как $x_0 = t_0 - T$ и $x_k = \gamma_k - T$ при $k \neq 0$.

ЛЕММА 4.1. Пусть T достаточно велико, пусть $(\log T)^{-1/2} \leq a \leq (\log \log T)^{-1}$ и $K = \lceil \theta'(T)/4 \rceil$. Предположим, далее, что $\Delta S^* \geq 0$. Тогда

$$|R| \leq \frac{1}{|\alpha_0|} \exp \left(\left(\left(\frac{2a}{\pi} \theta'(T) + \Delta S^* \right) \log 2 \right) (1 + o(1)) - \frac{\theta'(T)}{2} \log \left(1 + \pi \frac{\Delta S^*}{2a\theta'(T)} \right) \right). \quad (11)$$

Доказательство этой оценки требует следующей теоремы, доказанной автором в [4], которая справедлива без предположения справедливости гипотезы Римана.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть t достаточно велико, и пусть $c \geq e$ – фиксированная константа. Тогда при $0 \leq k \leq (c/2)\theta'(t)$ имеем равномерно по k

$$Z^{(k)}(t) = 2 \sum_{1 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} (\theta'(t) - \log n)^k \cos \left(\theta(t) - t \log n + k \frac{\pi}{2} \right) + O(t^{(1/4)(c \log c - c - 1)} \theta'(t)^{k+1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4.1. При $t \in [T - a, T + a]$ с учетом $2K \leq \theta'(T)/2 + 2$ и $\theta''(t) = O(1/t)$ можно воспользоваться теоремой 4.1 с $c = e$ для получения оценки

$$|Z^{(2K)}(t)| \leq \left(2 \left(\sum_{1 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{\log n}{\theta'(t)} \right)^{2K} \right) + O(t^{-1/4} \theta'(t)) \right) \theta'(t)^{2K}.$$

Кроме того, $2K \geq \theta'(T)/2$, $\theta'(T)/\theta'(t) = 1 + O(a/T)$ и, следовательно, имеют место неравенства

$$\left(1 - \frac{\log n}{\theta'(t)} \right)^{2K} \leq e^{-2K \log n / \theta'(t)} \leq n^{-1/2 + O(a/T)} \leq 2n^{-1/2}$$

при $1 \leq n \leq \sqrt{t/2\pi}$ и достаточно большом T . Отсюда следует, что

$$|Z^{(2K)}(t)| \leq \left(4 \left(\sum_{1 \leq n \leq \sqrt{t/(2\pi)}} \frac{1}{n} \right) + O(t^{-1/4} \theta'(t)) \right) \theta'(t)^{2K} \leq 4(\log T) \theta'(T)^{2K}.$$

Пользуясь формулой Тейлора и оценкой $\theta'''(t) = O(1/t^2)$, имеем

$$m + n = \frac{2a}{\pi} \theta'(T) + \Delta S^* + O\left(\frac{a^3}{T^2}\right). \quad (12)$$

Отсюда $K \geq (m + n) \log(m + n) / \log_2(m + n)$, так как $\Delta S^* = O(\log T / \log_2 T)$, если гипотеза Римана верна. Поэтому применяется лемма 3.6 и, пользуясь неравенством Коши–Шварца, получаем

$$|R| \leq 4\sqrt{2} \log T \frac{2^{(m+n)(1+o(1))}}{|\alpha_0|} \exp \left(-2K \log \left(\frac{(m+n)\pi}{2a\theta'(T)} \right) \right).$$

Для завершения доказательства воспользуемся (12) и заметим, что $K O(a^2/(\theta'(T)T^2))$ есть $o(a\theta'(T))$ и $4\sqrt{2} \log T$ может быть покрыто членом $e^{(2a/\pi)\theta'(T)o(1)}$.

ЛЕММА 4.2. Для достаточно малого $\epsilon > 0$ допустим, что $x \geq 0$ и $x = o(1)$ при ϵ , стремящемся к 0, и

$$(\epsilon + x) \log 2 + o(\epsilon) + o(x) - \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{x}{\epsilon} \right) \geq 0.$$

Тогда $x \in [0, (2 \log 2)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть T достаточно велико, и пусть a , K , ΔS^* , t_0 , m и n такие, какими определены в начале пункта. Заметим, что

$$S(T+a) - S(T-a) - 2 = \Delta S^* + q - 2 \leq \Delta S^*,$$

и, значит, теорема 2.1 верна, если $\Delta S^* \leq 0$. Следовательно, можно предположить, что $\Delta S^* > 0$, так что применима лемма 4.1. Из тождества (10) следует, что

$$R > - \sum_{k=1}^K \Psi_{2k-1}(a) Z^{(2k-1)}(T+a) + \sum_{k=1}^K \Psi_{2k-1}(-a) Z^{(2k-1)}(T-a),$$

и из (1) и (5) мы получаем

$$-\Psi_{2k-1}(a) Z^{(2k-1)}(T+a) \geq 0, \quad \Psi_{2k-1}(-a) Z^{(2k-1)}(T-a) \geq 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{\theta'(T)}{4} \right\rfloor.$$

Выбирая $k = 1$ и пользуясь (6) и (7) вместе с неравенством $(1 + \bar{t})^{m+n} + (1 - \bar{t})^{m+n} \geq 2$, получаем

$$R \gg \frac{a\theta'(T)^{-c}}{|\alpha_0|(m+n)^2},$$

откуда заключаем в силу (11), что

$$\left(\frac{2a}{\pi} \theta'(T) + \Delta S^* \right) \log 2 + o(a\theta'(T)) + o(\Delta S^*) - \frac{\theta'(T)}{2} \log \left(1 + \pi \frac{\Delta S^*}{2a\theta'(T)} \right) \geq 0.$$

Разделив на $\theta'(T)$, полагая $\epsilon = 2a/\pi$ и $x = \Delta S^*/\theta'(T)$ и замечая, что $x = o(1)$ при ϵ , стремящемся к 0, применением лемму 4.2 и получим

$$\Delta S^* \leq (2 \log 2) \epsilon^2 \theta'(T) (1 + o(1)) = 2 \log 2 \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 \theta'(T) (1 + o(1)).$$

Доказательство завершено, поскольку $\theta'(T) = (1/2) \log T (1 + o(1))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2. Пусть T достаточно велико, и предположим сначала, что $S(T) > 0$. В соответствии с [9], если гипотеза Римана верна, существует $\underline{t} < T$ такое, что $S(\underline{t}) < 0$ и $T - \underline{t} \ll \log_3 T$. По условию теоремы существуют целые $j < k$ такие, что

$$T_j < \underline{t} \leq T_{j+1} < \dots < T_{k-1} \leq T < T_k,$$

и вместе с тем $k - j = O((\log T)^{1/2} \log_3 T)$. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} S(T) &\leq S(T) - S(\underline{t}) = S(T_j) - S(\underline{t}) + \left(\sum_{l=j}^{k-1} S(T_{l+1}) - S(T_l) \right) + S(T) - S(T_k) \\ &\leq \frac{1}{\pi} (\theta(\underline{t}) - \theta(T_j)) + O((\log T)^{1/2} \log_3 T) + \frac{1}{\pi} (\theta(T_k) - \theta(T)) = O((\log T)^{1/2} \log_3 T), \end{aligned}$$

так как по теореме 2.1 существует константа C такая, что $S(T_{l+1}) - S(T_l) \leq C$. Теперь если $S(T) < 0$, то существуют $\bar{t} > T$ такое, что $S(\bar{t}) > 0$ и $\bar{t} - T \ll \log_3 T$, и целые числа $j < k$ такие, что

$$T_j < T \leq T_{j+1} < \dots < T_{k-1} \leq \bar{t} < T_k$$

и $k - j = O((\log T)^{1/2} \log_3 T)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} -S(T) &\leq -S(T) + S(T_j) + \left(\sum_{l=j}^{k-1} S(T_{l+1}) - S(T_l) \right) + S(\bar{t}) - S(T_k) \\ &\leq \frac{1}{\pi} (\theta(T) - \theta(T_j)) + O((\log T)^{1/2} \log_3 T) + \frac{1}{\pi} (\theta(T_k) - \theta(\bar{t})) = O((\log T)^{1/2} \log_3 T), \end{aligned}$$

и доказательство завершено.

Список литературы

- [1] A. Ivić, *The Theory of Hardy's Z-function*, Cambridge Tracts in Math., **196**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
- [2] A. Ivić, "On some reasons for doubting the Riemann hypothesis", *The Riemann Hypothesis. A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*, Springer, New York, 2008, 130–160.
- [3] Ph. Blanc, "An unexpected property of odd order derivatives of Hardy's function", *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **95 (109)** (2014), 173–188.
- [4] Ph. Blanc, "Optimal upper bound for the maximum of the k -th derivative of Hardy's function", *J. Number Theory*, **154** (2015), 105–117.
- [5] H.L. Montgomery, "Extreme values of the Riemann zeta function", *Comment. Math. Helv.*, **52:4** (1977), 511–518.
- [6] J. Moser, "The function $S(t)$ in the theory of the Riemann zeta-function", *Acta Arith.*, **30:2** (1976), 145–158.
- [7] M. S. Floater, "Error formulas for divided difference expansions and numerical differentiation", *J. Approx. Theory*, **122:1** (2003), 1–9.
- [8] T. J. Rivlin, *Chebyshev Polynomials. From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1990.
- [9] J. Mueller, "On the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ -gaps between sign changes of $S(t)$ ", *Mathematika*, **29:2** (1983), 264–269.