Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Н. Герман, Диофантовы экспоненты решеток, *Совр. пробл. матем.*, 2016, выпуск 23, 35–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm60>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:55:54

Диофантовы экспоненты решеток

О. Н. Герман

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

german.oleg@gmail.com

1. Введение

Существует множество задач, в которых естественным образом возникают разного рода *диофантовы экспоненты*. В самой общей постановке имеется n линейно независимых линейных форм $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z})$ от d вещественных переменных, $n < d$. И вопрос заключается в том, *насколько малым может быть набор $(\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_n(\mathbf{z}))$, если $\mathbf{z}$ пробегает множество ненулевых точек с целыми координатами*. Есть два классических способа измерения «величины» этого набора: во-первых, можно рассматривать какую-нибудь норму, во-вторых – произведение модулей элементов. После чего исследуется вопрос, насколько быстро эта величина может стремиться к нулю с ростом «размера» $\mathbf{z}$.

Два примера для $n < d$. В качестве простейших примеров, иллюстрирующих два описанных выше подхода, можно привести задачу о совместных приближениях двух вещественных чисел и знаменитую гипотезу Литтлвуда (см. также [1], [2]). И там, и там речь идет о двух формах $\ell_1(\mathbf{z}), \ell_2(\mathbf{z})$ от трех переменных, коэффициенты которых записаны в строках матрицы

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & 1 & 0 \\ \theta_n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $|\cdot|$ обозначает $\sup$ -норму. Тогда супремум вещественных γ таких, что неравенство

$$\max_{i=1,2} |\ell_i(\mathbf{z})| \leq |\mathbf{z}|^{-\gamma}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3$, называется *диофантовой экспонентой* пары (θ_1, θ_2) и описывает, насколько хорошо можно одновременно приблизить θ_1 и θ_2 рациональными числами с одним и тем же знаменателем.

С другой стороны, знаменитая гипотеза Литтлвуда утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\prod_{i=1,2} |\ell_i(\mathbf{z})| \leq \varepsilon z_1^{-1}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{Z}^3$, $z_1 \neq 0$. Как и в случае совместных приближений, *мультипликативная диофантова экспонента* пары (θ_1, θ_2) определяется как супремум вещественных γ таких, что неравенство

$$\prod_{i=1,2} |\ell_i(\mathbf{z})|^{1/2} \leq z_1^{-\gamma}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{Z}^3$, $z_1 \neq 0$.

Случай $n = d$. В приведенных выше примерах было важно, что количество линейных форм строго меньше размерности объемлющего пространства. Благодаря этому условию область, в которой мы ищем целые точки, хотя бы не ограничена. Но если $n = d$, а формы линейно независимы, то «норменный» подход дает нам ограниченную область, параллелепипед, для которого можно определять что-нибудь типа последовательных минимумов, но никак не диофантовы экспоненты. Однако если рассматривать произведение координат, то все намного интереснее. В такой постановке мы приходим к понятию *диофантовой экспоненты решетки*.

2. Экспоненты решеток

Напомним (см. [3]), что гипотеза Литтлвуда тесно связана с так называемой гипотезой Оппенгейма для линейных форм, которая имеет дело с решеткой

$$\Lambda = \{(\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})) \mid \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d\}, \quad (1)$$

где $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – линейно независимые линейные формы от d переменных. Она утверждает, что при $d \geq 3$ величина

$$N(\Lambda) = \inf_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})|, \quad (2)$$

называемая *норменным минимумом* решетки Λ , положительна тогда и только тогда, когда Λ эквивалентна по модулю действия группы диагональных матриц решетке полного модуля вполне вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}$ степени d (о таких *алгебраических* решетках см. [4]). Таким образом, если для каждого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положить

$$\Pi(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i \leq d} |x_i|^{1/d},$$

можно сказать, что гипотеза Оппенгейма предлагает критерий отделимости от нуля величины $\Pi(\mathbf{x})$ в ненулевых точках решетки Λ . Но если эта величина принимает сколь угодно близкие к нулю значения, то можно говорить о соответствующей диофантовой экспоненте. Как и прежде, через $|\cdot|$ будем обозначать *sup*-норму.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем называть *диофантовой экспонентой* решетки Λ супремум вещественных γ таких, что неравенство

$$\Pi(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{x}|^{-\gamma}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{x} \in \Lambda$. Обозначать эту величину будем $\omega(\Lambda)$.

Из теоремы Минковского о выпуклом теле следует, что для любой решетки Λ справедливо тривиальное неравенство

$$\omega(\Lambda) \geq 0.$$

В то же время $\omega(\Lambda) = 0$ всякий раз, когда $N(\Lambda) > 0$, например когда Λ – решетка полного модуля вполне вещественного алгебраического расширения $\mathbb{Q}$, откуда, кстати, следует «достаточность» в утверждении гипотезы Оппенгейма.

Есть еще одно семейство решеток, для которых $\omega(\Lambda) = 0$ в силу знаменитой теоремы о подпространствах, доказанной В. М. Шмидтом [5] в 1972 г. (см. также [6]).

ТЕОРЕМА 1 (теорема Шмидта о подпространствах, 1972). *Если $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – линейно независимые линейные формы от d переменных с алгебраическими коэффициентами, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число собственных подпространств $\mathbb{Q}^d$, содержащих все целочисленные решения неравенства*

$$\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| < |\mathbf{z}|^{-\varepsilon}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – линейно независимые линейные формы от d переменных с алгебраическими коэффициентами. Пусть также для любого k -набора $(i_1, \dots, i_k)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d$, $1 \leq k \leq d$, коэффициенты поливектора

$$\ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_k}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число точек $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ таких, что

$$\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| < |\mathbf{z}|^{-\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограничения на коэффициенты следует, что в любом k -мерном рациональном подпространстве $\mathcal{L}$ пространства $\mathbb{R}^d$ любые k из заданных линейных форм индуцируют k линейно независимых линейных форм в $\mathcal{L}$.

Пусть теперь $\mathcal{L}$ – одно из рациональных подпространств, о которых идет речь в теореме о подпространствах. Можно считать, что $\dim \mathcal{L} = d - 1$. Тогда ранг решетки $\mathcal{L} \cap \mathbb{Z}^d$ равен $d - 1$. Выберем в этой решетке произвольный базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{d-1}$ и дополним его до базиса $\mathbb{Z}^d$ каким-нибудь вектором $\mathbf{b}_d$. Обозначим через B матрицу, в столбцах которой записаны координаты векторов $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$, и рассмотрим линейное преобразование с матрицей B^{-1} . При этом преобразовании $\mathcal{L}$ переходит в подпространство

$$\{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid z_d = 0\},$$

естественно отождествляемое с $\mathbb{R}^{d-1}$, а решетка $\mathcal{L} \cap \mathbb{Z}^d$ – в решетку

$$\{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d \mid z_d = 0\},$$

естественно отождествляемую с $\mathbb{Z}^{d-1}$.

Тогда исходные формы $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ индуцируют новые формы $\tilde{\ell}_1(\tilde{\mathbf{z}}), \dots, \tilde{\ell}_d(\tilde{\mathbf{z}})$ от $d - 1$ -й переменной с алгебраическими коэффициентами, причем любые $d - 1$ из этих форм линейно независимы. Существует константа R , зависящая лишь от коэффициентов этих форм такая, что множество

$$\left\{ \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \prod_{1 \leq i \leq d} |\tilde{\ell}_i(\tilde{\mathbf{z}})| < |\tilde{\mathbf{z}}|^{-\varepsilon}, |\tilde{\mathbf{z}}| > R \right\}$$

содержится в объединении

$$\bigcup_{1 \leq j \leq d} \left\{ \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq j}} |\tilde{\ell}_i(\tilde{\mathbf{z}})| < |\tilde{\mathbf{z}}|^{-\varepsilon} \right\}.$$

Остается применить индукцию по размерности, ибо база ее – случай $d = 2$ – очевидна.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть линейные формы $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – такие же, как в следствии 1, и пусть Λ – решетка, определяемая (1). Тогда

$$\omega(\Lambda) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$|\mathbf{z}| \asymp \max_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})|, \tag{3}$$

и применить следствие 1.

Возникает естественный вопрос: достигается ли каждое положительное значение $\omega(\Lambda)$. Однако соответствующие примеры еще предстоит построить. А пока мы хотели бы обратиться к принципу переноса.

3. Теорема переноса

Пусть Λ – произвольная решетка в $\mathbb{R}^d$ ранга d . Рассмотрим *двойственную* решетку

$$\Lambda^* = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для любого } \mathbf{x} \in \Lambda\},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение. Оказывается, так же, как и во многих других задачах теории диофантовых приближений, можно доказывать теоремы переноса, т.е. утверждения, связывающие $\omega(\Lambda)$ и $\omega(\Lambda^*)$.

Конечно, при $d = 2$ решетка Λ^* совпадает с точностью до гомотетии с решеткой Λ , повернутой на $\pi/2$, так что в двумерном случае справедливо очевидное равенство $\omega(\Lambda) = \omega(\Lambda^*)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d \geq 3$. Тогда

$$\omega(\Lambda) \geq \frac{\omega(\Lambda^*)}{(d-1)^2 + d(d-2)\omega(\Lambda^*)}. \quad (4)$$

Здесь имеется в виду, что при $\omega(\Lambda^*) = \infty$ справедливо

$$\omega(\Lambda) \geq \frac{1}{d(d-2)}.$$

Мы докажем теорему 2 при помощи понятия *псевдоприсоединенного параллелепипеда* (см. также [7]) и при помощи общей теоремы переноса, доказанной в [8]. Мы дадим соответствующее определение в самом простом случае, ибо этого случая нам вполне достаточно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\eta_1, \dots, \eta_d$ – положительные вещественные числа. Рассмотрим параллелепипед

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq \eta_i, i = 1, \dots, d\}.$$

Тогда параллелепипед

$$\mathcal{P}^* = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq \frac{1}{\eta_i} \prod_{1 \leq j \leq d} \eta_j, i = 1, \dots, d \right\}$$

называется *псевдоприсоединенным* к $\mathcal{P}$.

Принцип переноса, открытый Хинчиным [9] в одном частном случае, привел в итоге к следующему довольно общему наблюдению (см. [8]).

ТЕОРЕМА 3 (Г., Евдокимов, 2015). Пусть $c = d^{1/2(d-2)}$ и $\det \Lambda = 1$. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ – как в определении 2. Тогда

$$\mathcal{P}^* \cap \Lambda^* \neq \{\mathbf{0}\} \implies c\mathcal{P} \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}.$$

Выведем теорему 2 из теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поскольку $\omega(\Lambda)$ инвариантна относительно гомотетий, можно считать, что $\det \Lambda = 1$. Мы рассмотрим два случая.

Случай I. На координатных плоскостях нет ненулевых точек решетки Λ^* .

Зафиксируем произвольное положительное ε . Тогда найдется бесконечно много ненулевых точек $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \Lambda^*$ таких, что

$$\Pi(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^{-\gamma}, \quad \gamma = \gamma(\mathbf{u}) \geq \begin{cases} \omega(\Lambda^*) - \varepsilon & \text{при } \omega(\Lambda^*) < \infty, \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } \omega(\Lambda^*) = \infty. \end{cases}$$

Рассмотрим любую из этих точек и положим

$$\mathcal{P}_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq |u_i|, i = 1, \dots, d\}.$$

Поскольку все u_i отличны от нуля, множество $\mathcal{P}_{\mathbf{u}}$ является невырожденным параллелепипедом. Более того, $\mathcal{P}_{\mathbf{u}} = \mathcal{P}^*$ для

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid |x_i| \leq \eta_i, i = 1, \dots, d\},$$

где

$$\eta_i = |u_i|^{-1} \prod_{1 \leq j \leq d} |u_j|^{1/(d-1)}.$$

Стало быть, по теореме 3 параллелепипед $c\mathcal{P}$ содержит ненулевую точку $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ решетки Λ . Для этой точки имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &\leq c \max_{1 \leq i \leq d} |\eta_i| \leq c \cdot \frac{\prod_{1 \leq i \leq d} |\eta_i|}{\min_{1 \leq i \leq d} |\eta_i|^{d-1}} = c \cdot \frac{\max_{1 \leq i \leq d} |u_i|^{d-1}}{\prod_{1 \leq i \leq d} |u_i|^{d-2/(d-1)}} \\ &= c \cdot \frac{|\mathbf{u}|^{d-1}}{\Pi(\mathbf{u})^{d(d-2)/(d-1)}} = c |\mathbf{u}|^{d-1+d(d-2)/(d-1)\gamma} \end{aligned}$$

и

$$\Pi(\mathbf{v}) \leq c \cdot \prod_{1 \leq i \leq d} |\eta_i|^{1/d} = c \cdot \prod_{1 \leq i \leq d} |u_i|^{1/d(d-1)} = c \Pi(\mathbf{u})^{1/(d-1)} = c |\mathbf{u}|^{-\gamma/(d-1)}.$$

Таким образом,

$$\Pi(\mathbf{v}) \leq c_1 |\mathbf{v}|^{-\frac{\gamma}{(d-1)^2 + d(d-2)\gamma}}, \quad c_1 = c_1(d, \gamma). \quad (5)$$

Отметим, что $|\mathbf{u}|$ может принимать сколь угодно большие значения. Стало быть, $\min_{1 \leq i \leq d} |\eta_i|$ может принимать сколь угодно малые значения, ибо

$$\min_{1 \leq i \leq d} |\eta_i| = \max_{1 \leq i \leq d} |u_i|^{-1} \prod_{1 \leq j \leq d} |u_j|^{1/(d-1)} = |\mathbf{u}|^{-1} \Pi(\mathbf{u})^{d/(d-1)} = |\mathbf{u}|^{-1-d\gamma/(d-1)}.$$

Это наблюдение в случае отсутствия в координатных плоскостях ненулевых точек решетки Λ дает нам бесконечно много точек Λ , удовлетворяющих (5), откуда немедленно следует (4). Если же в какой-нибудь координатной плоскости все же есть ненулевая точка решетки Λ , то, очевидно, $\omega(\Lambda) = \infty$, и тогда неравенство (4) тривиально.

Случай II. На координатных плоскостях имеются ненулевые точки решетки Λ^* .

В этом случае $\omega(\Lambda^*) = \infty$, и нам нужно показать, что

$$\omega(\Lambda) \geq \frac{1}{d(d-2)}. \quad (6)$$

Можно считать, что в решетке Λ^* имеется ненулевая точка $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ такая, что $u_d = 0$. Тогда $(d-1)$ -мерное подпространство, ортогональное $\mathbf{u}$, содержит последнюю координатную ось, а также некоторую подрешетку $\Gamma \subset \Lambda$ ранга $d-1$. Применяя теорему Минковского о выпуклом теле, получаем, что существует бесконечно много точек $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) \in \Gamma$, $v_d \rightarrow \infty$ таких, что

$$\max_{1 \leq i \leq d-1} |v_i| \leq c_2 |v_d|^{-1/(d-2)}, \quad c_2 = c_2(\mathbf{u}).$$

Для каждой такой точки $\mathbf{v}$ справедливо

$$\Pi(\mathbf{v}) \leq (c_2^{d-1} |v_d|^{1-(d-1)/(d-2)})^{1/d} = c_2^{(d-1)/d} |\mathbf{v}|^{-1/d(d-2)},$$

откуда немедленно следует (6).

4. На пути к спектру

Как и в других диофантовых задачах (см. [10]–[12]), естественно возникает вопрос описания соответствующего спектра – подмножества $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2$, задаваемого парами $(\omega(\Lambda), \omega(\Lambda^*))$, если Λ пробегает все пространство решеток ранга d , содержащихся в $\mathbb{R}^d$.

Как мы уже заметили, при $d = 2$ справедливо равенство $\omega(\Lambda) = \omega(\Lambda^*)$. Кроме того, в этом простейшем случае все можно описать в терминах цепных дробей (см. [13], [14]), так что в случае $d = 2$ легко убедиться, что все неотрицательные значения $\omega(\Lambda)$ достигаются.

При $d \geq 3$ имеют место неравенства

$$\omega(\Lambda) \geq 0, \quad \omega(\Lambda^*) \geq 0, \quad \omega(\Lambda) \geq \frac{\omega(\Lambda^*)}{(d-1)^2 + d(d-2)\omega(\Lambda^*)},$$

и интересен вопрос, все ли точки задаваемого ими множества принадлежат спектру пары $(\omega(\Lambda), \omega(\Lambda^*))$.

Пока что известно довольно мало. Мы знаем примеры решеток Λ , для которых $\omega(\Lambda) = \omega(\Lambda^*) = 0$. Это решетки с положительным норменным минимумом (2) и решетки, удовлетворяющие условиям следствий 1 и 2. Действительно, с одной стороны, известно (см. [15]–[17]), что

$$N(\Lambda) > 0 \iff N(\Lambda^*) > 0.$$

С другой стороны, если $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ линейно независимы и если $\ell_1^*(\mathbf{z}), \dots, \ell_d^*(\mathbf{z})$ – двойственный набор форм, то коэффициенты поливектора $\ell_{i_1}(\mathbf{z}) \wedge \dots \wedge \ell_{i_k}(\mathbf{z})$ совпадают с точностью до знака с коэффициентами поливектора $\ell_{i_{k+1}}^*(\mathbf{z}) \wedge \dots \wedge \ell_{i_d}^*(\mathbf{z})$, где $(i_1, \dots, i_d)$ – перестановка из $(1, \dots, d)$. Стало быть, эти наборы коэффициентов одновременно являются линейно независимыми над $\mathbb{Q}$, откуда следует, что если Λ удовлетворяет условию следствия 1, то ему удовлетворяет и Λ^* .

Оказывается, при помощи теоремы о подпространствах можно привести примеры решеток Λ , для которых

$$\omega(\Lambda) = \frac{1}{d(d-2)}, \quad \omega(\Lambda^*) = \infty,$$

доказав таким образом точность теоремы 2 в одном граничном случае.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ – линейно независимые линейные формы от d переменных с алгебраическими коэффициентами. Пусть первый коэффициент поливектора

$$\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_{d-1}$$

равен нулю, а все остальные линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Пусть также для любого k -набора $(i_1, \dots, i_k)$, отличного от $(1, \dots, d-1)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d$, $1 \leq k \leq d$, коэффициенты поливектора

$$\ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_k}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Наконец, пусть Λ – решетка, определяемая (1). Тогда

$$\omega(\Lambda) = \frac{1}{d(d-2)}, \quad \omega(\Lambda^*) = \infty. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку первый коэффициент $\ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_{d-1}$ равен нулю, в плоскости

$$\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d \mid z_d = 0\}$$

есть ненулевая точка решетки Λ^* . Следовательно, $\omega(\Lambda^*) = \infty$, и в силу теоремы 2 достаточно показать, что

$$\omega(\Lambda) \leq \frac{1}{d(d-2)}. \quad (8)$$

Из условия следует, что если $\mathcal{L}$ – произвольное рациональное подпространство $\mathbb{R}^d$, отличное от $\mathcal{L}_1$, $\dim \mathcal{L} = k$, то любые k из исходных форм индуцируют k линейно независимых линейных форм в $\mathcal{L}$. Стало быть, повторяя рассуждение из доказательства следствия 1, можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{L}_1$ выполняется

$$\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| \geq c_3 |\mathbf{z}|^{-\varepsilon}, \quad c_3 = c_3(\varepsilon, \ell_1, \dots, \ell_d). \quad (9)$$

Что же касается $\mathcal{L}_1$, по условию любые $d - 1$ форм

$$\ell_{i_1}(\mathbf{z}), \dots, \ell_{i_{d-2}}(\mathbf{z}), \ell_d(\mathbf{z}), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_{d-2} \leq d - 1,$$

индуцируют линейно независимые линейные формы $\tilde{\ell}_1(\tilde{\mathbf{z}}), \dots, \tilde{\ell}_{d-1}(\tilde{\mathbf{z}})$ в $\mathcal{L}_1$, удовлетворяющие условию следствия 1. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$, любого $j \in \{1, \dots, d - 1\}$ и любого ненулевого $\mathbf{z} \in \mathcal{L}_1$ справедливо

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq j}} |\ell_i(\mathbf{z})| \geq c_4 |\mathbf{z}|^{-\varepsilon}, \quad c_4 = c_4(\varepsilon, \ell_1, \dots, \ell_d).$$

Отсюда

$$|\ell_d(\mathbf{z})| \left(\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| \right)^{d-2} = \prod_{1 \leq j \leq d-1} \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq d \\ i \neq j}} |\ell_i(\mathbf{z})| \right) \geq c_4^{d-1} |\mathbf{z}|^{-(d-1)\varepsilon}.$$

Таким образом, учитывая (3), получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого ненулевого $\mathbf{z} \in \mathcal{L}_1$ справедливо

$$\prod_{1 \leq i \leq d} |\ell_i(\mathbf{z})| \geq c_5 |\mathbf{z}|^{-1/(d-2)-\varepsilon}, \quad c_5 = c_5(\varepsilon, \ell_1, \dots, \ell_d). \quad (10)$$

Учитывая еще раз (3), получаем из (9) и (10), что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\mathbf{x} \in \Lambda$ справедливо

$$\Pi(\mathbf{x}) \geq c_6 |\mathbf{x}|^{-1/d(d-2)-\varepsilon}, \quad c_6 = c_6(\varepsilon, \Lambda),$$

откуда немедленно следует (8).

Несложно видеть, что аналогичное рассуждение можно применить для построения решеток таких, что $\omega(\Lambda^*) = \infty$, а $\omega(\Lambda)$ равно любому из значений из серии

$$\frac{k(d-k-l)}{dl}, \quad k \in \{1, \dots, d-2\}, \quad l \in \{1, \dots, d-k-1\}. \quad (11)$$

Чтобы построить соответствующую решетку, нужно рассмотреть линейные формы $\ell_1(\mathbf{z}), \dots, \ell_d(\mathbf{z})$ с алгебраическими коэффициентами такими, что k -мерное подпространство

$$\ell_1(\mathbf{z}) = \dots = \ell_{d-k}(\mathbf{z}) = 0$$

содержится в рациональном подпространстве размерности $k + l \leq d - 1$, но не содержится ни в каком рациональном подпространстве меньшей размерности. Тогда теорема Минковского о выпуклом теле даст неравенство

$$\omega(\Lambda) \geq \frac{k(d-k-l)}{dl},$$

а теорема о подпространствах – обратное.

Однако числа (11) – единственные нетривиальные значения $\omega(\Lambda)$, которые дает этот метод. Существование же решеток с конечной ненулевой экспонентой, отличной от (11), пока не доказано.

Список литературы

- [1] J. W. S. Cassels, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [2] P. M. Gruber, C. G. Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*, North-Holland Math. Library, **37**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1987.
- [3] J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer, “On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, **248** (1955), 73–96.
- [4] A. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Pure Appl. Math., **20**, Academic Press, New York, 1966.
- [5] W. M. Schmidt, “Norm form equations”, *Ann. of Math. (2)*, **96** (1972), 526–551.
- [6] E. Bombieri, W. Gubler, *Heights in Diophantine Geometry*, New Math. Monogr., **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [7] W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation*, Lecture Notes in Math., **785**, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [8] О. Н. Герман, К. Г. Евдокимов, “Усиление теоремы переноса Малера”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:1 (2015), 63–76.
- [9] A. Ya. Khintchine, “Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen”, *Rend. Sirc. Mat. Palermo*, **50**:2 (1926), 170–195.
- [10] M. Laurent, “Exponents of Diophantine approximation in dimension two”, *Canad. J. Math.*, **61**:1 (2009), 165–189.
- [11] A. Marnat, *About Jarnik’s-Type Relation in Higher Dimension*, arXiv: 1510.06334.
- [12] A. Marnat, “There is no analogue to Jarnik’s relation for twisted diophantine approximation”, *Monats. Math.*, **181** (2016), 675–688, arXiv: 1409.6665.
- [13] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., **45**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957.
- [14] A. Ya. Khintchine, *Continued Fractions*, Dover Publ., Mineola, NY, 1997.
- [15] О. Н. Герман, “Паруса и норменные минимумы решеток”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 31–60.
- [16] O. N. German, “Klein polyhedra and lattices with positive norm minima”, *J. Theor. Nombres Bordeaux*, **19**:1 (2007), 175–190.
- [17] Б. Ф. Скубенко, “Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geq 3$ ”, *Модулярные функции и квадратичные формы. 1*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **183**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1990, 142–154.