Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Коледа, О способе равномерного упорядочения вещественных алгебраических чисел, *Совр. пробл. матем.*, 2016, выпуск 23, 69–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 11:19:50

О способе равномерного упорядочения вещественных алгебраических чисел

Д. Коледа

Институт математики НАН Беларуси

koledad@rambler.ru

1. Введение

Статья посвящена распределению алгебраических чисел на вещественной прямой и основана на докладе автора на конференции памяти Анатолия Алексеевича Карацубы в январе 2016 г.

Чтобы избежать разночтений начнем с основных определений и соглашений, которые используются при изложении.

Под *целочисленным многочленом* будем понимать многочлен с целыми коэффициентами. *Алгебраическим числом* называется число α , для которого существует ненулевой целочисленный многочлен p такой, что $p(\alpha) = 0$. *Минимальным многочленом алгебраического числа α* будем называть целочисленный многочлен p наименьшей степени со взаимно простыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом такой, что $p(\alpha) = 0$. Различные алгебраические числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ называются (алгебраически) *сопряженными*, если они имеют один и тот же минимальный многочлен.

Пусть

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

Высотой многочлена $H(p)$ будем называть величину

$$H(p) := \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Степень алгебраического числа $\deg \alpha$ определяется как степень его минимального многочлена, а *высота $H(\alpha)$* – как высота его минимального многочлена.

В статье будем полагать, что степень алгебраических чисел и многочленов фиксирована и равна n ; высоты алгебраических чисел и многочленов ограничены сверху параметром Q ; асимптотические формулы рассматриваются при $Q \rightarrow +\infty$; неявные постоянные не зависят от Q , но могут зависеть от n .

Необходимо отметить, что кроме цитируемых ниже в обзоре работ есть большое количество публикаций, посвященных подсчету числа элементов в специальных классах алгебраических чисел, например, алгебраических чисел на комплексной плоскости, целых алгебраических чисел и т.д. Зачастую в подобных результатах используются другие высоты, в частности, так называемая высота Вейля. В нашем обзоре мы ограничимся исключительно распределением вещественных алгебраических чисел относительно равномерной высоты.

1.1. Рациональные числа. Наипростейшими алгебраическими числами являются числа рациональные. С ними связано множество классических задач, большинство которых формулируется в терминах последовательностей (или так называемых рядов) Фарея. *Последовательностью Фарея порядка Q* называется упорядоченная по возрастанию последовательность

несократимых рациональных дробей со знаменателем не более Q , лежащих на $[0, 1]$:

$$\mathcal{F}_Q := \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq b \leq Q, \gcd(a, b) = 1 \right\}.$$

В 1963 г. Вальфиш [1] доказал, что

$$\#\mathcal{F}_Q = \frac{3}{\pi^2} Q^2 + O(Q(\log Q)^{2/3}(\log \log Q)^{4/3}). \quad (1)$$

Известно, что классическая последовательность Фарея распределена равномерно на $[0, 1]$, т.е. для любого промежутка $I \subseteq [0, 1]$ верно равенство

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \frac{\#(\mathcal{F}_Q \cap I)}{\#\mathcal{F}_Q} = |I|.$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в [2]–[4]. Кроме того, распределение последовательностей Фарея тесно связано с гипотезой Римана [5].

«Неидеальность» распределения Фареевских последовательностей (по сравнению с непрерывным равномерным на $[0, 1]$ распределением) характеризуется отклонением (discrepancy), определяемым как

$$D_Q := \sup_{\alpha \in [0, 1]} \left| \frac{\#(\mathcal{F}_Q \cap [0, \alpha])}{\#\mathcal{F}_Q} - \alpha \right|.$$

В 1973 г. Нидэррайтер [6] установил, что $D_Q \asymp Q^{-1}$. В 1999 г. Дресс [7] доказал точное равенство $D_Q = Q^{-1}$.

Много интересных фактов о последовательностях Фарея можно найти в обзоре [8].

1.2. Алгебраические числа на вещественной прямой. В 1970 г. Бэйкер и Шмидт [9] ввели понятие регулярной системы и установили, что алгебраические числа образуют регулярную систему (параметры этой системы были не оптимальны).

За результатами [9] последовал ряд их усилений в работах Берника [10], [11], Берника и Додсона [12], а в 1999 г. Бересневич [13] доказал регулярность алгебраических чисел с неулучшаемыми параметрами.

Относительно простыми словами без потери строгости результат Бересневича можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1 [13]. *Существует постоянная c_n , зависящая только от n такая, что на любом промежутке $I \subseteq [-1, 1]$ для всех достаточно больших $Q \in \mathbb{N}$ существует не менее*

$$c_n |I| Q^{n+1}$$

алгебраических чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ степени не более n и высоты не более Q , таких что

$$|\alpha_i - \alpha_j| \geq Q^{-n-1}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Общий обзор результатов о регулярных системах алгебраических чисел и их приложениях к проблемам вычисления размерности Хаусдорфа можно найти в [12] и [14].

В 1971 г. Браун и Малер [15] предложили обобщение классических последовательностей Фарея на алгебраические числа произвольной степени: *последовательностью Фарея степени n порядка Q* называется последовательность всех вещественных корней всех целочисленных многочленов степени n и высоты не более Q .

В 1985 г. К. Малер в письме В.Г. Спринджуку писал, что даже для второй степени не известно, как распределены алгебраические числа.

Пусть $\mathbb{A}_n$ – множество алгебраических чисел степени n . Зафиксируем $n \geq 2$ и рассмотрим множество $I \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $\Phi(Q, I)$ количество алгебраических чисел $\alpha \in I$ с $\deg(\alpha) = n$ и $H(\alpha) \leq Q$:

$$\Phi(Q, I) = \#\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap I : H(\alpha) \leq Q\}. \quad (2)$$

При $n = 2$ далее в формулах появляется дополнительный множитель $\log Q$, поэтому для краткости используется символ $l(n)$, определенный как

$$l(n) := \begin{cases} 1, & n \leq 2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$$

В серии работ [16]–[18] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ – промежуток. Тогда при $Q \rightarrow \infty$ верна формула

$$\Phi(Q, I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_I \phi_n(x) dx + O(Q^n \log^{l(n)} Q), \quad (3)$$

где $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана, а функция ϕ_n задается формулой

$$\phi_n(x) = \int_{B_n(x)} \left| \sum_{k=1}^n kt_k x^{k-1} \right| dt_1 \dots dt_n \quad (4)$$

с интегрированием по области

$$B_n(x) = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq k \leq n} |t_k| \leq 1, \left| \sum_{k=1}^n t_k x^k \right| \leq 1 \right\}.$$

В (3) неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n .

При этом для бесконечного числа промежутков $I = I(Q)$ порядок остаточного члена в (3) не менее чем Q^n .

Кроме того, функция $\phi_n(x)$ удовлетворяет следующим функциональным уравнениям:

$$\phi_n(-x) = \phi_n(x), \quad \phi_n\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \phi_n(x). \quad (5)$$

При $|x| \leq 1 - 1/\sqrt{2}$ интеграл (4) равен (см. [18])

$$\phi_n(x) = \frac{2^{n-1}}{3} \left(3 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^2 x^{2k} \right).$$

Функция ϕ_n с точностью до постоянного множителя совпадает с плотностью распределения вещественных нулей случайного многочлена с независимыми равномерно распределенными на $[-1, 1]$ коэффициентами [19].

Для $n = 1$, т.е. для рациональных чисел, как уже отмечалось выше, асимптотическая формула (3) была по существу известна, с тем лишь отличием, что в классических результатах рассматривались $I \subseteq [0, 1]$. Функция $\phi_1(x)$ имеет вид

$$\phi_1(x) = \frac{1}{\max(1, x^2)}.$$

Как следствие из результатов Нидэррайтера [6] и Дресса [7] можно доказать следующее утверждение [18].

ТЕОРЕМА 3 (см. раздел 4 в [18]). Пусть $n = 1$. Тогда

$$\sup_{I \subseteq \mathbb{R}} \left| \frac{\Phi(Q, I)}{\Phi(Q, \mathbb{R})} - \frac{1}{4} \int_I \phi_1(x) dx \right| \asymp \frac{1}{Q}, \quad (6)$$

где точная верхняя грань берется по всем промежуткам вещественной оси, а неявная постоянная в символе $\asymp$ абсолютна.

Отсюда, учитывая оценку (1) количества дробей Фарея и равенство $\Phi(Q, \mathbb{R}) = 4\#\mathcal{F}_Q - 5$ (при $n = 1$), можно получить более точную оценку остаточного члена в (3).

ТЕОРЕМА 4 [18]. При $n = 1$ остаточный член в (3) имеет вид

$$O\left(Q(\log Q)^{2/3}(\log \log Q)^{4/3} \int_I \frac{dx}{\max(1, x^2)} + Q\right), \quad (7)$$

где неявная постоянная абсолютна.

Отметим, что интеграл в (7) стремится к нулю при $|I| \rightarrow 0$, соответственно для коротких промежутков логарифм фактически исчезает.

Похожее уточнение доказано [20] и для алгебраических чисел второй степени.

ТЕОРЕМА 5 [20]. При $n = 2$ остаточный член в (3) имеет вид

$$O\left(Q^2 \log Q \int_I \frac{dx}{\max(1, x^2)} + Q^2\right),$$

где неявная постоянная абсолютна.

1.3. Сопряженные алгебраические числа. Уже для второй степени возникает задача о совместном распределении вещественных алгебраически сопряженных чисел.

В 2010 г. Бересневич, Берник и Гётце [21] установили оценку снизу для числа пар близких сопряженных вещественных алгебраических чисел n -й степени на заданном промежутке.

ТЕОРЕМА 6 [21]. Для $n \geq 2$ и $0 < \gamma \leq (n+1)/3$ при достаточно больших Q в любом промежутке $I \subset [-1/2, 1/2]$ существует не менее

$$\frac{1}{2} Q^{n+1-2\gamma} |I|$$

вещественных алгебраических чисел α степени $\deg(\alpha) = n$ с высотой $H(\alpha) \asymp_n Q$, у каждого из которых есть хотя бы одно вещественное сопряженное алгебраическое число α^* такое, что

$$|\alpha - \alpha^*| \asymp_n Q^{-\gamma}.$$

Для формулировки следующей теоремы потребуются некоторые дополнительные обозначения.

Пусть $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Элементарные симметричные многочлены от $\mathbf{x}$ степени m будем обозначать так:

$$\sigma_m(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1, & \text{если } m = 0, \\ \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq k} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m}, & \text{если } 1 \leq m \leq k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{A}_n^{(k)}$ есть множество k -векторов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – вещественные сопряженные алгебраические числа степени n , т.е. различные корни одного и того же неприводимого над $\mathbb{Q}$ целочисленного многочлена степени n .

Пусть $B \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через $\Phi_k(Q, B)$ количество векторов из $\mathbb{A}_n^{(k)} \cap B$ с высотой координат $\leq Q$:

$$\Phi_k(Q, B) = \#\{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{A}_n^{(k)} \cap B : H(\alpha_i) \leq Q\}.$$

В 2015 г. Гётце, Запорожец и Коледа доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7 [22]. Пусть B – ограниченная область в $\mathbb{R}^k$ с границей, состоящей из конечно-го числа t алгебраических поверхностей, максимальная степень которых не превосходит d . Тогда

$$\Phi_k(Q, B) = \frac{(2Q)^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int_B \rho_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q\right), \quad Q \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где функция ρ_k определяется формулой

$$\rho_k(\mathbf{x}) = 2^{-n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j| \int_{D_{\mathbf{x}}} \prod_{i=1}^k \left| \sum_{j=0}^{n-k} t_j x_i^j \right| dt_0 \dots dt_{n-k} \quad (9)$$

с интегрированием по области $D_{\mathbf{x}}$, заданной как

$$D_{\mathbf{x}} = \left\{ (t_0, \dots, t_{n-k}) \in \mathbb{R}^{n-k+1} : \max_{0 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{i-j} \sigma_{i-j}(\mathbf{x}) t_j \right| \leq 1 \right\}.$$

Неявная постоянная в остаточном члене в (8) зависит только от n , t и d .

Функция (9) совпадает с корреляционной функцией корней случайного многочлена с независимыми равномерно распределенными на $[-1, 1]$ коэффициентами (см. [19] и [23]).

В двух частных случаях формула (9) существенно упрощается:

а) при $k = 1$ формула (9) фактически превращается в (4) и описывает распределение алгебраических чисел на вещественной прямой, т.е.

$$\rho_1(x) = 2^{-n-1} \phi_n(x);$$

б) при $k = n$ теорема 7 описывает распределение вполне вещественных алгебраических чисел; при этом функция ρ_n принимает вид

$$\rho_n(\mathbf{x}) = \frac{2^{-n}}{(n+1)} \left(\frac{1}{\max_{0 \leq i \leq n} |\sigma_i(\mathbf{x})|} \right)^{n+1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

Функция ρ_k удовлетворяет следующим функциональным уравнениям:

а) для любой перестановки s длины k

$$\rho_k(x_{s(1)}, x_{s(2)}, \dots, x_{s(k)}) = \rho_k(\mathbf{x});$$

б) для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$

$$\rho_k(-\mathbf{x}) = \rho_k(\mathbf{x});$$

в) для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ с ненулевыми координатами

$$\rho_k(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_k^{-1}) = \rho_k(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^k x_i^2.$$

2. О равномерном упорядочении

На конференции после доклада автора Николай Германович Моцевитин задал вопрос: известно ли автору какое-то конкретное упорядочение алгебраических чисел, чтобы полученная последовательность была распределена равномерно? Из общих соображений можно доказать, что любую всюду плотную последовательность можно переупорядочить так, чтобы получилось равномерное распределение [4; § 2.4]. Однако в данном случае естественно потребовать от такого упорядочения, чтобы оно учитывало внутренние свойства алгебраических чисел, в частности единообразно действовало на сопряженные алгебраические числа. Предложенное ниже упорядочение не согласовано с алгебраическим сопряжением, хотя существенно опирается на статистические свойства вещественных алгебраических чисел относительно равномерной высоты.

Пусть ψ – положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq C|x - y| \quad \text{для всех } x, y \in I_0 = [-R, R],$$

где $R \geq 1$ – фиксированное число. Введем обозначение

$$\Phi^*(Q, I) = \#\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap I : \psi(\alpha)H(\alpha) \leq Q\}.$$

Ниже мы покажем, как с помощью выбора функции ψ можно добиться равномерности распределения чисел, учтенных в $\Phi^*(Q, I)$. А именно, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\psi(x) = \phi_n(x)^{1/(n+1)}$, где ϕ_n определена в (4). Тогда

$$\Phi^*(Q, I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)}|I| + O(R^{n/(n+1)}Q^{n+1/2} \log^{l(n)/2} Q \cdot |I| + R^{2n/(n+1)}Q^n \log^{l(n)} Q), \quad (10)$$

где неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Функцию $\psi(\alpha)H(\alpha)$ можно было бы толковать как некоторую «высоту» алгебраического числа α , однако при таком определении функции ψ , как в теореме 8, сопряженные алгебраические числа, если у них разные абсолютные величины, будут иметь, вообще говоря, разные «высоты».

Для доказательства теоремы 8 нам потребуется пара вспомогательных утверждений. Необходимые факты о ϕ_n для удобства соберем в одну лемму.

ЛЕММА 1. Функция ϕ_n , определенная в (4), обладает следующими свойствами:

I) для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\frac{C_1}{\max(1, x^2)} \leq \phi_n(x) \leq \frac{C_2}{\max(1, x^2)},$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, зависящие только от n :

$$C_1 = \min_{x \in [0,1]} \phi_n(x), \quad C_2 = \max_{x \in [0,1]} \phi_n(x);$$

II) для любых $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $0 \leq y - x \leq 1$, и любого $\theta \in [x, y]$ верно

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| \leq \frac{C_3|x - y|}{\max(1, |\theta|^3)},$$

где C_3 – положительная постоянная, которая зависит только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно заметить, что функция ϕ_n непрерывна и ограничена на $[0, 1]$, и, следовательно, достигает там своих максимального и минимального значений. Из уравнений (5) сразу же получаем свойство I).

Докажем II). Обозначим для краткости $F(\mathbf{t}; x) = |\sum_{k=1}^n kt_k x^{k-1}|$. Тогда

$$\phi_n(x) - \phi_n(y) = \int_{B_n(x)} (F(\mathbf{t}; x) - F(\mathbf{t}; y)) dt + \int_{B_n(x)} F(\mathbf{t}; y) dt - \int_{B_n(y)} F(\mathbf{t}; y) dt.$$

Пусть $x, y \in [-2, 2]$. Нетрудно показать, что для любых $\mathbf{t} \in [-1, 1]^n$ функция $F(\mathbf{t}; x)$ ограничена постоянной величиной, зависящей только от n , и

$$|F(\mathbf{t}; x) - F(\mathbf{t}; y)| \leq C|x - y|,$$

где C – постоянная, зависящая только от n .

Также можно показать, что при $x, y \in [-2, 2]$ мера симметрической разности множеств $B_n(x)$ и $B_n(y)$ удовлетворяет неравенству

$$\text{mes}_n(B_n(x) \ominus B_n(y)) \leq C'|x - y|,$$

где C' – постоянная, зависящая только от n .

Собирая все вместе, получаем при $x, y \in [-2, 2]$

$$|\phi_n(x) - \phi_n(y)| \leq \tilde{C}|x - y|$$

для некоторой зависящей только от n постоянной $\tilde{C}$.

Пусть теперь $x, y \in [1, +\infty)$. Тогда, пользуясь вторым уравнением в (5), получаем

$$\begin{aligned} |\phi_n(x) - \phi_n(y)| &= \left| \frac{1}{x^2} \phi_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{y^2} \phi_n\left(\frac{1}{y}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{x^2} \left| \phi_n\left(\frac{1}{x}\right) - \phi_n\left(\frac{1}{y}\right) \right| + \phi_n\left(\frac{1}{y}\right) \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| \leq |x - y| \left(\frac{\tilde{C}}{x^3 y} + C_2 \frac{(x + y)}{(xy)^2} \right). \end{aligned}$$

Объединяя оба случая в одном неравенстве и подбирая постоянную C_3 , получаем свойство II). Отметим, что такая свобода в выборе промежуточной точки θ возможна благодаря ограничению $|x - y| \leq 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – конечный промежуток. Существует такое $\xi \in I$, что справедливо равенство

$$\Phi^*(Q, I) = \Phi\left(\frac{Q}{\psi(\xi)}, I\right) + O\left(\frac{Q^n}{\psi(\xi)^n} \log^{l(n)} Q\right),$$

где функция $\Phi(Q, I)$ определена в (2); неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Скобками $\lfloor \cdot \rfloor$ будем обозначать округление до целого с недостатком. По определению $H(\alpha) \in \mathbb{N}$.

Пусть $m = \inf_{x \in I} \psi(x)$, $M = \sup_{x \in I} \psi(x)$. Тогда

$$\Phi\left(\frac{Q}{M}, I\right) \leq \Phi^*(Q, I) \leq \Phi\left(\frac{Q}{m}, I\right).$$

а) Если $Q/M \geq \lfloor Q/m \rfloor$, то в качестве ξ можно взять любую точку из I , поскольку для любого $X \in [m, M]$ будет справедливо равенство

$$\Phi^*(Q, I) = \Phi\left(\frac{Q}{X}, I\right) = \Phi\left(\left\lfloor \frac{Q}{X} \right\rfloor, I\right).$$

б) Пусть $\lfloor Q/M \rfloor < \lfloor Q/m \rfloor$. Определим

$$h = \max \left\{ r \in \mathbb{Z} : \Phi(r, I) \leq \Phi^*(Q, I), \left\lfloor \frac{Q}{M} \right\rfloor \leq r < \left\lfloor \frac{Q}{m} \right\rfloor \right\}.$$

В силу монотонности $\Phi(Q, I)$ по параметру Q имеем

$$\Phi(h, I) \leq \Phi^*(Q, I) \leq \Phi(h+1, I).$$

При этом для любого $\tilde{h} \in [h, h+1)$ будет верно $\Phi(\tilde{h}, I) = \Phi(h, I)$.

По теореме 2

$$\Phi(h+1, I) - \Phi(h, I) = O(h^n \log^{l(n)} h).$$

Таким образом, в качестве ξ можно взять любую точку из I такую, что $Q/\psi(\xi) \in [h, h+1]$.

Отметим, что в случае других определений высоты алгебраического числа высота, вообще говоря, не целое число. Однако для доказательства леммы 2 существенным обстоятельством является только дискретность множества значений высоты, что автоматически выполняется для любой функции высоты $\mathcal{H}(\cdot)$ со свойством

$$\#\{\alpha \in \mathbb{A}_n : \mathcal{H}(\alpha) \leq X\} < \infty \quad \text{для всех } X > 0.$$

Перейдем к доказательству основной теоремы пункта. Разобьем промежуток I на конечное число непересекающихся подпромежутков I_i . Тогда

$$\Phi^*(Q, I) = \sum_i \Phi^*(Q, I_i).$$

По теореме 2 и лемме 2 существует такое $\xi_i \in I_i$, что

$$\Phi^*(Q, I_i) = \frac{1}{2\zeta(n+1)} \left(\frac{Q}{\psi(\xi_i)} \right)^{n+1} \int_{I_i} \phi_n(x) dx + O\left(\left(\frac{Q}{\psi(\xi_i)} \right)^n \log^{l(n)} Q \right),$$

где неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n .

По теореме Лагранжа существует $\eta_i \in I_i$ такое, что

$$\int_{I_i} \phi_n(x) dx = \phi_n(\eta_i) |I_i|.$$

Таким образом,

$$\Phi^*(Q, I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \sum_i \frac{\phi_n(\eta_i)}{\psi(\xi_i)^{n+1}} |I_i| + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q \cdot \sum_i \frac{1}{\psi(\xi_i)^n} \right). \quad (11)$$

Выбирая $\psi(x) = \phi_n(x)^{1/(n+1)}$, равенство (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi^*(Q, I) &= \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} |I| + \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \sum_i \frac{\phi_n(\eta_i) - \phi_n(\xi_i)}{\phi_n(\xi_i)} |I_i| \\ &\quad + O\left(Q^n \log^{l(n)} Q \cdot \sum_i \phi_n(\xi_i)^{-n/(n+1)} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначая $M_i = \sup_{x \in I_i} \phi_n(x)$ и $m_i = \inf_{x \in I_i} \phi_n(x)$, по лемме 1 получаем

$$\left| \sum_i \frac{\phi_n(\eta_i) - \phi_n(\xi_i)}{\phi_n(\xi_i)} |I_i| \right| \leq |I| \max_i \frac{M_i - m_i}{m_i} \leq C |I| \max_i |I_i|,$$

где C – постоянная, зависящая только от n .

Из леммы 1 для суммы в символе O получаем

$$\sum_i \phi_n(\xi_i)^{-n/(n+1)} \leq R^{2n/(n+1)} \#\{I_i\},$$

где $\#\{I_i\}$ – количество подпромежутков I_i , на которые мы разбиваем I . При этом верна оценка

$$\#\{I_i\} \leq \frac{|I|}{\min_i |I_i|}.$$

Чтобы оба второстепенных члена в (12) оценивались одинаковыми порядками величины, достаточно выполнения условия

$$\max_i |I_i| \cdot \min_i |I_i| = \frac{cR^{2n/(n+1)} \log^{l(n)} Q}{Q},$$

где c – постоянная, зависящая только от n . Причем наилучшая оценка достигается, когда все подпромежутки I_i имеют одинаковые длины:

$$\max_i |I_i| = \min_i |I_i| = R^{n/(n+1)} \sqrt{\frac{c \log^{l(n)} Q}{Q}}.$$

Отсюда для числа подпромежутков имеем

$$\#\{I_i\} \leq \max \left\{ 1, \frac{|I|}{R^{n/(n+1)}} \sqrt{\frac{Q}{c \log^{l(n)} Q}} \right\}.$$

Таким образом, получаем (10).

Автор выражает благодарность организаторам конференции памяти Анатолия Алексеича Карацубы (Москва, январь 2016 г.) за прекрасную организацию и теплую атмосферу. Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

Список литературы

- [1] A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Mathematische Forschungsberichte, **15**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
- [2] P. Erdős, M. Kac, E. R. van Kampen, A. Wintner, “Ramanujan sums and almost periodic functions”, *Studia Math.*, **9**:1 (1940), 43–53.
- [3] M. Mikolás, “Farey series and their connection with the prime number problem. I”, *Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math.*, **13** (1949), 93–117.
- [4] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер, *Равномерное распределение последовательностей*, Мир, М., 1985.
- [5] J. Franel, “Les suites de Farey et le problème des nombres premiers”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.*, **1924** (1924), 198–201.
- [6] H. Niederreiter, “The distribution of Farey points”, *Math. Ann.*, **201**:4 (1973), 341–345.
- [7] F. Dress, “Discrépance des suites de Farey”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **11**:2 (1999), 345–367.
- [8] C. Cobeli, A. Zaharescu, “The Haros–Farey sequence at two hundred years”, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, **5** (2003), 1–38.
- [9] A. Baker, W. M. Schmidt, “Diophantine approximation and Hausdorff dimension”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **21**:1 (1970), 1–11.
- [10] В. И. Берник, “Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений”, *Acta Arith.*, **42**:3 (1983), 219–253.

- [11] В. И. Берник, “О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов”, *Acta Arith.*, **53**:1 (1989), 17–28.
- [12] V. Bernik I., M. M. Dodson, *Metric Diophantine Approximation on Manifolds*, Cambridge Tracts in Math., **137**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [13] V. Beresnevich, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers”, *Acta Arith.*, **90**:2 (1999), 97–112.
- [14] Y. Bugeaud, *Approximation by Algebraic Numbers*, Cambridge Tracts in Math., **160**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [15] H. Brown, K. Mahler, “A generalization of Farey sequences: some exploration via the computer”, *J. Number Theory*, **3**:3 (1971), 364–370.
- [16] Д. У. Каляда, “Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені”, *Докл. НАН Беларусі*, **56**:3 (2012), 28–33.
- [17] Д. В. Коледа, “О распределении действительных алгебраических чисел второй степени”, *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, 2013, №3, 54–63.
- [18] D. Kaliada, “On the density function of the distribution of real algebraic numbers”, *J. Theor. Nombres Bordeaux*, 2017 (to appear), arXiv: [1405.1627](#).
- [19] Д. Н. Запорожец, “Случайные полиномы и геометрическая вероятность”, *Докл. РАН*, **400**:3 (2005), 299–303.
- [20] Д. В. Коледа, “Об асимптотике распределения алгебраических чисел при возрастании их высот”, *Чебышевский сб.*, **16**:1 (2015), 191–204.
- [21] V. Beresnevich, V. Bernik, F. Götze, “The distribution of close conjugate algebraic numbers”, *Compos. Math.*, **146**:5 (2010), 1165–1179.
- [22] F. Götze, D. Kaliada, D. N. Zaporozhets, “Correlations between real conjugate algebraic numbers”, *Чебышевский сб.*, **16**:4 (2015), 90–99.
- [23] F. Götze, D. Kaliada, D. Zaporozhets, *Correlation Functions of Real Zeros of Random Polynomials*, 2015, arXiv: [1510.00025](#).