Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Мозер, Лестницы Иакова, факторизация и метаморфозы в качестве приложения к функциональному уравнению Римана для $\zeta(s)$ на критической прямой, *Совр. пробл. матем.*, 2016, выпуск 23, 102–113

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:10:26

Лестницы Иакова, факторизация и метаморфозы в качестве приложения к функциональному уравнению Римана для $\zeta(s)$ на критической прямой

Я. Мозер

Comenius University, Slovakia

jan.mozer@fmph.uniba.sk

Посвящается памяти Анатолия Алексеевича Карацубы

1. Введение и первый результат

1.1. Напомним функциональное уравнение Римана (1859 г.):

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s), \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что Л. Эйлер открыл формулу, эквивалентную (1) для вещественных значений переменной s в 1749 г. (см. [1; с. 23–26]), однако доказательство в работе Эйлера отсутствует.

Теперь если мы положим

$$\chi(s) = \pi^{s-1/2} \frac{\Gamma(1/2 - s/2)}{\Gamma(s/2)} \implies \chi(s) \chi(1-s) = 1 \quad (2)$$

(см. [2; с. 13, 16]), то получим, что

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \chi(s). \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи с (3) используем следующее (Э. Ландау, [3; с. 30]): отношение

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}$$

выражается через известную функцию ... (ясно, что эта известная функция отличается от $\zeta(s)$).

1.2. Однако в случае

$$s = \frac{1}{2} + it, \quad 1-s = \frac{1}{2} - it = \left(\frac{1}{2} + it\right)^* \quad (4)$$

имеем (из (2), (4)), что

$$\left| \chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = 1,$$

т.е. (см. (3))

$$\left| \frac{\overline{\zeta(1/2 + it)}}{\zeta(1/2 + it)} \right| = 1 \quad \text{для всех } t \neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0 \quad (5)$$

(вслед за продолжением на $t = \gamma$ это справедливо для всех $t \in \mathbb{R}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. На критической прямой

$$s = \frac{1}{2} + it$$

Риманово функциональное уравнение (3) дает только тривиальный результат (5) (ясно, что главная цель функционального уравнения Римана – это аналитическое продолжение $\zeta(s)$ на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$).

1.3. Наше замечание 2, очевидно, приводит к следующему вопросу.

ВОПРОС. Как иначе выбрать точки

$$t_2 > t_1 > 0 \quad (6)$$

(скажем) из соответствующего множества, чтобы отношение (из (3), (5))

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + it_2)}{\zeta(1/2 + it_1)} \right|, \quad t_1, t_2 \neq \gamma, \quad (7)$$

выражалось известной функцией?

Существует способ дать ответ на вопрос, причем один ответ из набора многих возможных – это наш метод преобразования с помощью интегралов, взятых в противоположных направлениях (см. [4; (4.1)–(4.19)]).

1.4. В настоящей работе мы получаем, например, следующее.

ФОРМУЛА 1. Для любого достаточно большого $L \in \mathbb{N}$ и любого $U \in (0, \pi)$ существуют функции

$$\begin{aligned} \alpha_0^4 = \alpha_0^4(L, U; a, b), \quad \alpha_1^4 = \alpha_1^4(L, U; a, b), \quad \beta_1^4 = \beta_1^4(L, U), \\ \alpha_0^4, \alpha_1^4, \beta_1^4 \neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

такие, что

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_1^4)}{\zeta(1/2 + i\beta_1^4)} \right| \sim \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \frac{a + b \cos(\alpha_0^4)}{a + b}, \quad L \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0^4 \in (2\pi L, 2\pi L + U), \quad \alpha_1^4, \beta_1^4 \in (2\pi^1 L, 2\pi^1 L + U), \\ (2\pi L, 2\pi L + U) \prec (2\pi^1 L, 2\pi^1 L + U), \end{aligned} \quad (10)$$

и функции (8) обладают следующим свойством:

$$\alpha_1^4 - \alpha_0^4 \sim (1 - c)\pi(2\pi L), \quad L \rightarrow \infty,$$

где c – постоянная Эйлера и $\pi(t)$ – функция распределения простых чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Формула (9) дает ответ на вопрос (из (7), (10)) в направлении, указанном в замечании 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что в явном виде в случае (7), т.е. на критической прямой, мы можем предположить, что известная функция – это любая функция, например,

$$f[|\zeta|], \quad \arg \zeta, \quad \dots$$

В этом направлении мы получили следующее (см. также соответствующие формулы в статьях [4]–[6], $k = 1$)

ФОРМУЛА 2. Имеем

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_1^2)}{\zeta(1/2 + i\beta_1^2)} \right| \sim \frac{\sqrt{\zeta(2\sigma)}}{|\zeta[\sigma + i\alpha_0^2(\sigma)]|}, \quad \sigma \geq 1. \quad (11)$$

ФОРМУЛА 3. Имеем

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_1^3)}{\zeta(1/2 + i\beta_1^3)} \right| \sim \pi^l \sqrt{c_l} \left| \int_0^{\alpha_0^3(T)} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|^{-l}. \quad (12)$$

ФОРМУЛА 4. Имеем

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_1^1)}{\zeta(1/2 + i\beta_1^1)} \right| \sim \sqrt[4]{\frac{2\pi}{H}} \frac{1}{\sqrt{|\zeta(1/2 + i\alpha_0^1)|}}. \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Результаты (9), (11)–(13) основаны на таких свойствах лестницы Иакова $\varphi_1(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha_0^4 = \varphi_1^1(d) = \varphi_1(d) &\in (2\pi L, 2\pi L + U), & \alpha_1^4 = \varphi_1^0(d) = d &\in (2\pi L, 2\pi L + U), \\ \beta_1^4 = \varphi_1^0(e) = e &\in (2\pi L, 2\pi L + U). \end{aligned} \quad (14)$$

1.5. Напомним для полноты картины, что лестница Иакова

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} \varphi(t)$$

была введена в нашей работе [7] (см. также [8]), где функция $\varphi(t)$ – произвольное решение нелинейного интегрального уравнения

$$\int_0^{\mu[x(T)]} Z^2(t) e^{-t(2/x(T))} dt = \int_0^T Z^2(t) dt,$$

в котором каждая допустимая функция $\mu(y)$ порождает решение

$$y = \varphi(T; \mu) = \varphi(T), \quad \mu(y) \geq 7y \ln y.$$

Функция $\varphi_1(t)$ называется лестницей Иакова в соответствии со “сном Иакова в Хумаше, Берейшит, 28:12”.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Применением лестниц Иакова показано (см. [7]), что классический интеграл Харди–Литтлвуда (1918)

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt$$

выражается – в дополнение к формуле Харди–Литтлвуда (и другим аналогичным), обладающей неограниченной ошибкой при $T \rightarrow \infty$, – следующим бесконечным множеством почти точных формул:

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = \varphi_1(T) \ln \varphi_1(T) + (c - \ln 2\pi) \varphi_1(T) + c_0 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln T}{T}\right), \quad T \rightarrow \infty,$$

где c – константа Эйлера и c_0 – константа из формулы Тичмарша–Кобера–Аткинсона.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Лестница Иакова $\varphi_1(t)$ может быть истолкована из нашей формулы (см. [7])

$$T - \varphi_1(T) \sim (1 - c)\pi(T), \quad \pi(T) \sim \frac{T}{\ln T},$$

где $\pi(T)$ является функцией распределения простых чисел, как функция, асимптотически дополнительная к $(1 - c)\pi(T)$ в следующем смысле

$$\varphi_1(T) + (1 - c)\pi(T) \sim T, \quad T \rightarrow \infty.$$

2. Факторизация, осциллирующая Q -система и ее метаморфозы в качестве общего функционального дополнения к уравнению Римана на критической прямой

2.1. Осциллирующая Q -система определена в работе [4; (2.1)] следующим образом:

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k) &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + ix_r)}{\zeta(1/2 + iy_r)} \right| \\ &= \prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(x_r)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(x_r) - x_r \ln n\} + R(x_r)}{\sum_{n \leq \tau(y_r)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(y_r) - y_r \ln n\} + R(y_r)} \right|, \quad (15) \\ \tau(t) &= \sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \quad R(t) = \mathcal{O}(t^{-1/4}), \quad k \leq k_0 \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

для соответствующих множеств (см. [4; (2.2)]) точек

$$(x_1, \dots, x_k), \quad (y_1, \dots, y_k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Очевидно, что определение (15) основано на простом обобщении

$$\left| \frac{\zeta(1/2 + ix)}{\zeta(1/2 + iy)} \right| \rightarrow \prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + ix_r)}{\zeta(1/2 + iy_r)} \right|$$

(см. (7), (11)–(13)).

Напомним некоторые из известных результатов, играющих роль функционального уравнения Римана на критической прямой.

(А) Существуют функции (см. [4; (2.5)])

$$\begin{aligned} \alpha_r^2 &= \alpha_r^2(\sigma, T, \Theta, k, \epsilon), \quad r = 0, 1, \dots, k, \quad \beta_r^2 = \beta_r^2(T, \Theta, k), \quad r = 1, \dots, k, \\ \alpha_r^2, \beta_r^2 &\neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0, \end{aligned}$$

для допустимых

$$\sigma, T, \Theta, k, \epsilon$$

такие, что справедлива следующая формула факторизации:

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_r^2)}{\zeta(1/2 + i\beta_r^2)} \right| \sim \frac{\sqrt{\zeta(2\sigma)}}{|\zeta[\sigma + i\alpha_0^2(\sigma)]|}, \quad T \rightarrow \infty, \quad (16)$$

(см. [4; (2.6)]), т.е. существует множество метаморфоз осциллирующей Q -системы (15)

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^2)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^2) - \alpha_r^2 \ln n\} + R(\alpha_r^2)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^2)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^2) - \beta_r^2 \ln n\} + R(\beta_r^2)} \right| \\ \sim \sqrt{\zeta(2\sigma)} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\sigma + i\alpha_0^2(\sigma)} \right|, \quad \sigma > 1 + \epsilon, \quad T \rightarrow \infty \quad (17)$$

(см. [4; (2.6)]), где $\mu(n)$ – функция Мёбиуса.

(B) Существуют функции

$$\alpha_r^3 = \alpha_r^3(T, l, \epsilon, k), \quad r = 0, 1, \dots, k, \quad l \in \mathbb{N}, \quad \beta_r^3 = \beta_r^3(T, \epsilon, k), \quad r = 1, \dots, k, \\ \alpha_r^3, \beta_r^3 \neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0,$$

для допустимых

$$T, l, \epsilon, k$$

такие, что справедлива следующая формула факторизации:

$$\left| \int_0^{\alpha_0^3} \arg \zeta(1/2 + it) dt \right| \sim \pi c^{1/(2l)} \prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_r^3)}{\zeta(1/2 + i\beta_r^3)} \right|^{-1/l}, \quad T \rightarrow \infty \quad (18)$$

(см. [6; (2.4)]), т.е. существует множество метаморфоз осциллирующей Q -системы (15)

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^3) - \alpha_r^3 \ln n\} + R(\alpha_r^3)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^3) - \beta_r^3 \ln n\} + R(\beta_r^3)} \right| \\ \sim \pi^l \sqrt{c_l} \left| \int_0^{\alpha_0^3} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|, \quad T \rightarrow \infty \quad (19)$$

(см. [6; (4.6)]).

(B1) Если переписать формулу (18) следующим образом:

$$\left| \int_{\mu_m}^{\alpha_0^3} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right| \sim \pi c_l^{1/(2l)} \prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^3) - \alpha_r^3 \ln n\} + R(\alpha_r^3)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^3) - \beta_r^3 \ln n\} + R(\beta_r^3)} \right|^{-1/l},$$

где

$$m = m(\alpha_0^3), \quad \mu_m < \alpha_0^3 < \mu_{m+1}, \quad S_1(\mu_m) = 0$$

(см. [6; (4.11)]), то мы получим множество метаморфоз (19) в обратном направлении. А именно, мы начинаем с

$$\left| \int_0^w \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|$$

т.е. с группы Аарона, скажем,

$$\rightarrow \left| \int_{\mu_m}^{\alpha_0^3} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right|,$$

т.е. зародыш группы Аарона (соответствующий $w = \alpha_0^3$)

$$\sim \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^3) - \alpha_r^3 \ln n\} + R(\alpha_r^3)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^3)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^3) - \beta_r^3 \ln n\} + R(\beta_r^3)} \right|$$

уже преобразился “в миндалях созревших” (см. “Тора, 4-й книге Моисея, Хумаше, Бемидбар, 17:23”).

(C) Мы получили первый набор метаморфоз первозданной мультиформы

$$G(x_1, \dots, x_k) = \prod_{r=1}^k \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + ix_r\right) \right|$$

в статье [5]. Соответствующие результаты, выраженные в терминах осциллирующей Q -системы (15), это (см. [5; (1.7), (2.5)]) формула факторизации

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + ix)}{\zeta(1/2 + iy)} \right| \sim \sqrt[4]{\frac{2\pi}{H}} \frac{1}{|\zeta(1/2 + i\alpha_0^1)|} \quad (20)$$

и соответствующее множество метаморфоз осциллирующей Q -системы

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^1)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_r^1) - \alpha_r^1 \ln n\} + R(\alpha_r^1)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^1)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\beta_r^1) - \beta_r^1 \ln n\} + R(\beta_r^1)} \right| \sim \frac{\sqrt[4]{2\pi/H}}{\sqrt{\left| \sum_{n \leq \tau(\alpha_0^1)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\vartheta(\alpha_0^1) - \alpha_0^1 \ln n\} + R(\alpha_0^1) \right|}}, \quad T \rightarrow \infty. \quad (21)$$

(D) Кроме того, последовательности

$$\{\alpha_r^n\}_{r=0}^k, \quad \{\beta_r^n\}_{r=1}^k, \quad n = 1, 2, 3,$$

обладают следующим свойством:

$$\begin{aligned} \alpha_{r+1}^n - \alpha_r^n &\sim (1-c)\pi(T), & r = 0, 1, \dots, k-1, \\ \beta_{r+1}^n - \beta_r^n &\sim (1-c)\pi(T), & r = 1, \dots, k-1, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

(см. (6), (7), замечания 8 и 9).

3. Теорема; факторизация как аналог функционального уравнения Римана на критической прямой

3.1. Воспользуемся следующим Эйлеровым интегралом (см. [9; с. 134–135]):

$$\begin{aligned} \int \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b) \operatorname{tg}(\varphi/2)}{\sqrt{a^2 - b^2}}, & \varphi \in (0, \pi), \\ a + b > 0, \quad a^2 - b^2 > 0 &\implies a > |b|. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) сразу получаем следующую формулу:

$$\int_{2\pi L}^{2\pi L+U} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{1}{a+b} U \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)}, \quad L \in \mathbb{Z}, \quad U \in (0, \pi). \quad (23)$$

Теперь если мы используем метод преобразования (см. [4; (4.1)–(4.19)]) в соответствии с формулой (23), то получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$[2\pi L, 2\pi L + U] \rightarrow [\pi L, \pi L + U], \dots, [\pi L, \pi L + U] \quad (24)$$

где

$$[\pi L, \pi L + U], \quad r = 1, \dots, k, \quad k \leq k_0 \in \mathbb{N},$$

есть сегменты, повторяющиеся в обратном направлении по отношению к первому сегменту в (24), и k_0 есть произвольное фиксированное число. Тогда существует достаточно большое

$$T_0 = T_0(a, b) > 0$$

такое, что для каждого

$$L > \frac{1}{2\pi} T_0$$

и любых допустимых L, U, k существуют функции

$$\begin{aligned} \alpha_r^4(L, U, k; a, b), \quad r = 0, 1, \dots, k, \quad \beta_r^4(L, U, k), \quad r = 1, \dots, k, \\ \alpha_r^4, \beta_r^4 \neq \gamma: \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + i\gamma\right) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

такие, что

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\zeta(1/2 + i\alpha_r^4)}{\zeta(1/2 + i\beta_r^4)} \right|^2 \sim \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \frac{a + b \cos \alpha_0^4}{a + b}, \quad L \rightarrow \infty, \quad (26)$$

причем

$$G(\alpha^4, \beta^4) \sim \sqrt{(\dots)} \iff \{G(\alpha^4, \beta^4)\}^2 \sim (\dots).$$

Кроме того, последовательности

$$\{\alpha_r^4\}_{r=0}^k, \quad \{\beta_r^4\}_{r=1}^k, \quad n = 1, 2, 3,$$

обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 2\pi L < \alpha_0^4 < \alpha_1^4 < \dots < \alpha_k^4, \quad 2\pi L < \beta_1^4 < \beta_2^4 < \dots < \beta_k^4, \\ \alpha_0^4 \in (2\pi L, 2\pi L + U), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \alpha_r^4, \beta_r^4 \in (2\pi L, 2\pi L + U), \quad r = 1, 2, \dots, k, \\ \alpha_{r+1}^4 - \alpha_r^4 \sim (1-c)\pi(2\pi L), \quad r = 0, 1, \dots, k-1, \\ \beta_{r+1}^4 - \beta_r^4 \sim (1-c)\pi(2\pi L), \quad r = 1, \dots, k-1, \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\pi(T) \sim \frac{T}{\ln T}, \quad T \rightarrow \infty,$$

– функция распределения простых чисел и c – константа Эйлера.

3.2. Теперь отметим следующее.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Асимптотическое поведение множеств

$$\{\alpha_r^4\}_{r=0}^k \quad (29)$$

следующее: если $L \rightarrow \infty$, то точки каждого множества (29) неограниченно разбегаются друг от друга и все вместе уходят на бесконечность; следовательно, при $L \rightarrow \infty$ каждое из множеств (29) ведет себя как одномерная вселенная Фридмана–Хаббла.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Теперь представим результат (26), учитывая (1), (3), замечания 2 и 9, в виде

$$\prod_{r=0}^k \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i\alpha_r^4 \right) \right| \sim \sqrt{\chi_4(U, \alpha_0^4)} \prod_{r=1}^k \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + i\beta_r^4 \right) \right|, \quad (30)$$

где χ_4 обозначает правую часть (26). Совершенно очевидно, что эта формула является аналогом функционального уравнения Римана на критической прямой.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Ясно, что первый результат (9) – это особый случай (26).

4. О множестве метаморфоз, которые соответствуют формуле (26)

Напомним формулу Римана–Зигеля в спектральной форме:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{n \leq \tau(x_r)} \frac{2}{\sqrt{n}} \cos\{t\omega_n(x_r) + \psi(x_r)\} + \mathcal{O}(x_r^{-1/4}), \\ \tau(x_r) &= \sqrt{\frac{x_r}{2\pi}}, \quad t \in [x_r, x_r + V], \quad V \in (0, x_r^{1/4}), \end{aligned} \quad (31)$$

и аналогично для $x_r \rightarrow y_r$, где

$$T_0 < 2\pi L < x_r, y_r$$

(см. [5; (6.1)], см. [6; (4.4) и замечание 6]).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Назовем выражения

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \cos\{t\omega_n(x_r) + \psi(x_r)\}, \quad \dots \quad (32)$$

осцилляторами Римана, у которых:

(а) амплитуда

$$\frac{2}{\sqrt{n}};$$

(b) некогерентная локальная фазовая константа

$$\psi(x_r) = -\frac{x_r}{2} - \frac{\pi}{8};$$

(с) несинхронизированное локальное время

$$t = t(x_r) \in [x_r, x_r + V];$$

(d) локальный спектр циклических частот

$$\{\omega_n(x_r)\}_{n \leq \tau(x_r)}, \quad \omega_n(x_r) = \ln \frac{\tau(x_r)}{n}, \quad \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Теперь мы видим, что Q -система, у которой

$$\left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| = |Z(t)|, \quad (33)$$

действительно сложная колебательная система (см. (15), (31), (33)).

Таким образом, получаем следующее (см. (15), (26), (31), замечание 14 и (33)).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Набор метаморфоз*

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\alpha_r^4 \omega_n(\alpha_r^4) + \psi(\alpha_r^4)\} + R(\alpha_r^4)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\beta_r^4 \omega_n(\beta_r^4) + \psi(\beta_r^4)\} + R(\beta_r^4)} \right| \sim \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \frac{a+b \cos(\alpha_0^4)}{a+b}, \quad L \rightarrow \infty, \quad (34)$$

соответствует формуле факторизации (26).

ЗАМЕЧАНИЕ 15. По теореме из п. 3.1 существуют функции контроля (25) (схема Голема) множества метаморфоз (34) осциллирующей Q -системы (15) (см. также (31), (33)).

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Механизм метаморфоз имеет следующий вид. Пусть (см. (25) и [4; (2.2)])

$$M_k^3 = \{\alpha_1^4, \dots, \alpha_k^4\}, \quad M_k^4 = \{\beta_1^4, \dots, \beta_k^4\}, \quad (35)$$

где (см. [4; (2.12)])

$$M_k^3 \subset M_k^1 \subset (T_0, +\infty)^k, \quad M_k^4 \subset M_k^2 \subset (T_0, +\infty)^k. \quad (36)$$

Теперь если после случайной выборки таких точек (ср. условия [4; (2.2)]) мы получим, что

$$(x_1, \dots, x_k) = (\alpha_1^4, \dots, \alpha_k^4) \subset M_k^3, \quad (y_1, \dots, y_k) = (\beta_1^4, \dots, \beta_k^4) \subset M_k^4 \quad (37)$$

(см. (35), (36)), то в точках (37) Q -система (15) меняет свою старую форму (“куколку”) на новую форму (“бабочку”), а последняя находится под контролем функции α_0^4 .

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Теперь должно быть ясно, что множество метаморфоз осциллирующей Q -системы также принадлежит семейству аналогов функционального уравнения Римана на критической прямой.

5. О декомпозиции результата метаморфоз (34) на три части: сигнал, шум и погрешность

В этом разделе используется терминология из теории обработки сигналов.

5.1. Напомним (см. [4; (4.11)]), что

$$\tilde{Z}^2(t) = \frac{|\zeta(1/2 + it)|^2}{\omega(t)}, \quad \omega(t) = \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right) \right\} \ln t.$$

Поскольку в нашем случае

$$t \rightarrow 2\pi L,$$

то (см. [4; (4.11), (4.12)])

$$\tilde{Z}^2(\alpha_r^4) = \frac{|\zeta(1/2 + i\alpha_r^4)|^2}{\{1 + \mathcal{O}(\ln \ln L / \ln L)\} \ln t}, \quad \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Основной вид асимптотической формулы для метаморфоз (34) – это

$$\prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\alpha_r^4 \omega_n(\alpha_r^4) + \psi(\alpha_r^4)\} + R(\alpha_r^4)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\beta_r^4 \omega_n(\beta_r^4) + \psi(\beta_r^4)\} + R(\beta_r^4)} \right| \sim \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln L}{\ln L}\right) \right\} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \frac{a+b \cos(\alpha_0^4)}{a+b}. \quad (38)$$

Так как последние два сомножителя в правой части формулы (38) – ограниченные функции для всех

$$U \in (0, \pi), \quad L > \frac{1}{2\pi} T_0$$

(для всех фиксированных допустимых k, a, b , см. (22), (25)), то из (38) мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеем*

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^k \left| \frac{\sum_{n \leq \tau(\alpha_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\alpha_r^4 \omega_n(\alpha_r^4) + \psi(\alpha_r^4)\} + R(\alpha_r^4)}{\sum_{n \leq \tau(\beta_r^4)} (2/\sqrt{n}) \cos\{\beta_r^4 \omega_n(\beta_r^4) + \psi(\beta_r^4)\} + R(\beta_r^4)} \right| \\ &= \frac{a}{a+b} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \\ &+ \frac{b}{a+b} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)} \cos(\alpha_0^4) + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln L}{\ln L}\right), \quad L \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (39)$$

5.2. Напомним (см. (25)), что

$$\alpha_0^4 = \alpha_0^4(L, U, k; a, b) = \alpha_0^4(L, U) \quad (40)$$

для допустимых фиксированных k, a, b .

(а) Мы видим, что первая функция в правой части (39) есть L -й член

$$\begin{aligned} f(2\pi L + U) &= g_L(U) = \frac{a}{a+b} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U/2)}, \quad U \in (0, \pi), \\ g_L(U) &= g_{L'}(U), \quad L, L' > \frac{1}{2\pi} T, \quad 2\pi L + U \in [2\pi L, 2\pi L + \pi), \end{aligned} \quad (41)$$

стационарной последовательности

$$\{g_L(U)\}_{L > T_0/(2\pi)}, \quad U \in (0, \pi). \quad (42)$$

Соответствующий сигнал определяется посредством (41), (42). Отсюда получаем, что определенный сигнал выражается через функции в правой части формулы (39) (см. (42)).

(б) Основным множителем второго члена является следующая функция:

$$\cos(\alpha_0^4), \quad \alpha_0^4 \in \alpha_0^4(L, U),$$

где (из (14), (40))

$$\alpha_0^4 = \varphi_1(d) \in (2\pi L, 2\pi L + U), \quad d = d(L, U),$$

и $\varphi_1(d)$ – значение лестницы Иакова. То есть распределение значений

$$\alpha_0^4 \in (2\pi L, 2\pi L + U), \quad U \in (0, \pi),$$

как можно предположить, очень сложное.

Следовательно, вторую функцию будем характеризовать как шум – бесполезную часть сигнала. Шум можно регулировать путем изменения параметра b ,

$$a > |b|$$

(см. (22)), т.е. путем уменьшения $|b|$.

(с) Третью функцию будем называть (мелкой) погрешностью, так как

$$\mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln L}{\ln L}\right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Конечное состояние метаморфоз в (39) разбивается на три части: сигнал, шум и погрешность.

6. Множество различных метаморфоз в (34)

Разумеется, существует точка $U_0 \in (0, \pi)$ такая, что (см. (41))

$$g'_L(U)|_{U=U_0} \neq 0 \quad \text{для всех } L > \frac{T_0}{2\pi},$$

т.е.

$$\begin{aligned} g'_L(U) \neq 0, \quad U \in O_\delta(U_0) = (U_0 - \delta, U_0 + \delta), \\ U' \neq U'' \implies g_L(U') \neq g_L(U'') \quad \text{для всех } U', U'' \in O_\delta(U_0) \end{aligned} \quad (43)$$

для подходящего $\delta > 0$.

Далее, мы будем предполагать, что существуют такие

$$U_1, U_2 \in O_\delta(U_0), \quad U_1 \neq U_2,$$

что

$$\begin{aligned} \alpha_r^4(U_1, L) &= \alpha_r^4(U_2, L), \quad r = 0, 1, \dots, k, \\ \beta_r^4(U_1, L) &= \beta_r^4(U_2, L), \quad r = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (44)$$

для всех

$$L > \tilde{L} > \frac{T_0}{2\pi}.$$

В этом случае путем сравнения формул (38) для U_1, U_2 мы получаем, что

$$\frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U_1/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U_1/2)} = \left\{ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln \ln L}{\ln L}\right) \right\} \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U_2/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U_2/2)},$$

т.е. в предельном случае имеем равенство

$$\frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U_1/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U_1/2)} = \frac{\arctg(\sqrt{(a-b)/(a+b)} \operatorname{tg}(U_2/2))}{\sqrt{(a-b)/(a+b)} (U_2/2)},$$

которое противоречит (43).

Следовательно, для любых

$$U', U'' \in O_\delta(U_0), \quad U' \neq U''$$

существует бесконечная подпоследовательность

$$\{\bar{L}\} \subset \{L\}, \quad \bar{L} > \tilde{L},$$

такая, что (см. (44))

$$\begin{aligned} (\alpha_0^4(U', \bar{L}), \alpha_1^4(U', \bar{L}), \dots, \alpha_k^4(U', \bar{L}), \beta_1^4(U', \bar{L}), \dots, \beta_k^4(U', \bar{L})) \\ \neq (\alpha_0^4(U'', \bar{L}), \alpha_1^4(U'', \bar{L}), \dots, \alpha_k^4(U'', \bar{L}), \beta_1^4(U'', \bar{L}), \dots, \beta_k^4(U'', \bar{L})) \quad \text{для всех } \bar{L} \in \{\bar{L}\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Поэтому, из (45) получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Существует бесконечное множество различных метаморфоз (34).

Я благодарю Екатерину Карацубу и Михала Деметриана за моральную поддержку моего исследования лестниц Иакова.

Список литературы

- [1] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1949.
- [2] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Clarendon Press, Oxford, 1951.
- [3] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909.
- [4] J. Moser, *Jacob's Ladders, Riemann's Oscillators, Quotient of the Oscillating Multiforms and Set of Metamorphoses of This System*, arXiv: [1506.00442](#).
- [5] J. Moser, *Jacob's Ladders, ζ -Factorization and Infinite Set of Metamorphosis of a Multiform*, arXiv: [1501.07705](#).
- [6] J. Moser, *Jacob's Ladders, New Properties of the Function $\arg \zeta(1/2 + it)$ and Corresponding Metamorphoses*, arXiv: [1506.07967](#).
- [7] Я. Мозер, “Лестницы Якова и почти точные асимптотические представления интеграла Харди–Литтлвуда”, *Матем. заметки*, **88**:3 (2010), 446–455.
- [8] J. Moser, “Jacob's ladders, the structure of the Hardy–Littlewood integral and some new class of nonlinear integral equations”, *Теория чисел, алгебра и анализ*, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения профессора Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, **276**, МАИК, М., 2012, 213–226.
- [9] L. Euleri, *Institutionum calculi integralis*, Volumen primum, Impensis Academiae Imperialis Scientiarum, Petropoli, 1768; Л. Эйлер, *Интегральное исчисление*, Гостехиздат, М., 1956.