Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Х. Петров, Д. И. Толев, Об одном уравнении включающем дробные степени с одной простой и одной почти простой переменными, *Совр. пробл. матем.*, 2017, выпуск 24, 46–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm68>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:04:52

Об одном уравнении, включающем дробные степени с одной простой и одной почти простой переменными

Ж. Х. Петров, Д. И. Толев

Sofia University St. Kliment Ohridski, Bulgaria

zhpetrov@fmi.uni-sofia.bg, dtolev@fmi.uni-sofia.bg

Посвящается памяти профессора А. А. Карацубы

1. Введение и формулировка результата

В 1953 г. Пятецкий-Шапиро [1] доказал, что если константа $c \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам $1 < c < 12/11$, то существует бесконечно много простых вида

$$[n^c], \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

и где, как обычно, $[t]$ означает целую часть t . После верхняя граница для c была много раз улучшена, и самый сильный результат принадлежит Рива и Ву [2]. Они доказали, что то же самое утверждение справедливо при условии, что $1 < c < 243/205$.

При любом натуральном r обозначим через $\mathcal{P}_r$ множество почти простых чисел порядка r , т.е. множество натуральных чисел, состоящих не более чем из r простых сомножителей с учетом кратности.

Есть много работ, посвященных изучению проблем, связанных с простыми числами Пятецкого-Шапиро и с почти простыми числами. В 2011 г. Кай и Ван [3], улучшая более ранний результат Пеневой [4], показали, что если $1 < c < 30/29$, то существует бесконечно много простых чисел p вида $[n^c]$ таких, что $p + 2 \in \mathcal{P}_5$. Позднее, в 2014 г., Бейкер, Банкс, Го и Йегер [5] показали, что если $1 < c < 77/76$, то последовательность

$$\{[n^c]\}_{n \in \mathcal{P}_8}$$

содержит бесконечно много простых чисел.

Рассмотрим уравнение

$$[m_1^c] + [m_2^c] = N. \quad (2)$$

В 1973 г. Дезуе [6] доказал, что если $1 < c < 4/3$, то для любого достаточно большого целого числа N уравнение (2) с целыми m_1 и m_2 имеет решение. Этот результат был улучшен Гриценко [7], а затем Конягиным [8]. В частности, последний автор показал, что (2) имеет решение в целых числах m_1, m_2 при $1 < c < 3/2$ и достаточно большом N .

Кумчев [9] доказал, что если $1 < c < 16/15$, то всякое достаточно большое целое число N может быть представлено в виде (2), где m_1 является простым, а m_2 целым числом. С другой стороны, знаменитая теорема Чена [10] утверждает, что любое достаточно большое четное целое может быть представлено в виде суммы простого и почти простого из $\mathcal{P}_2$. Имея в виду этот глубокий результат, можно предположить, что существует такая постоянная $c_0 > 1$, что при $1 < c < c_0$ уравнение (2) имеет решение с простым m_1 и $m_2 \in \mathcal{P}_2$ при условии, что N достаточно велико.

В настоящей работе мы устанавливаем результат такого типа и доказываем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что $1 < c < 29/28$. Тогда каждое достаточно большое целое N может быть представлено как*

$$[p^c] + [m^c] = N, \quad (3)$$

где p есть простое и m есть почти простое число с не более чем $[52/(29 - 28c)] + 1$ простыми сомножителями.

Заметим, что целое число $[52/(29 - 28c)] + 1$ равняется 53, если c близко к 1, и становится большим, если c близко к $29/28$.

Наш первый шаг в доказательстве состоит в применении линейного решета. После этого, мы могли бы попытаться установить сравнительно сильную оценку для экспоненциальной суммы, определенной в (31), что является довольно сложной задачей, так как функция в показателе степени зависит от $[p^c]$. Вместо этого мы представим эту сумму в виде линейной комбинации подобных сумм (см. (60)) с гладкой функцией аргумента p в показателе. Затем мы используем стандартные методы для оценки этих сумм. Мы хотели бы отметить, что суммы вида (60) изучались также Кумчевым [9]. Однако мы не можем использовать его работу, потому что нам требуются более сильные оценки для них.

2. Обозначения

Введем следующие обозначения: $\{t\}$ есть дробная часть числа t , функция $\rho(t)$ определяется как $\rho(t) = 1/2 - \{t\}$ и $e(t) = e^{2\pi it}$. Символ p будет зарезервирован для простых чисел. Через ε мы обозначим сколь угодно малое положительное число, не обязательно одно и то же в разных формулах. Мы пользуемся обозначением Виноградова $A \ll B$, которое эквивалентно $A = O(B)$. Если у нас одновременно $A \ll B$ и $B \ll A$, то будем писать $A \asymp B$. Подразумевается, что константы являются абсолютными или зависят от c или ε .

Как обычно, $\sum_{n \leq x}$ значит $\sum_{1 \leq n \leq x}$ и $\mu(n)$, $\Lambda(n)$ и $\tau(n)$ являются функцией Мебиуса, функцией фон Мангольда и числом положительных делителей n соответственно.

3. Доказательство теоремы

3.1. Начало доказательства. Пусть N – достаточно большое целое, и пусть

$$1 < c < \frac{29}{28}, \quad \gamma = \frac{1}{c}, \quad P = 10^{-9} N^\gamma. \quad (4)$$

Предположим, что $\alpha > 0$ есть константа, которая будет определена позднее, и пусть

$$z = N^\alpha, \quad B_z = \prod_{p < z} p. \quad (5)$$

Рассмотрим сумму

$$\Gamma = \sum_{\substack{P < p \leq 2P, m \in \mathbb{N} \\ [p^c] + [m^c] = N \\ (m, B_z) = 1}} \log p. \quad (6)$$

Если $\Gamma > 0$, то найдутся простое число p и натуральное число m , удовлетворяющие введенным условиям в области суммирования Γ . Из условия $(m, B_z) = 1$ следует, что любой простой делитель m не меньше чем z . Предположим, что m состоит из l простых сомножителей, учитываемых с кратностью. Тогда имеем

$$N^\gamma \geq m \geq z^l = N^{\alpha l},$$

и отсюда $l \leq \gamma/\alpha$. Из этого следует, что если $\Gamma > 0$, то (3) имеет решение с простым p и почти простым m , состоящим не более чем из $[\gamma/\alpha]$ простых сомножителей.

Обозначим

$$D = N^\delta, \quad (7)$$

где $\delta > 0$ – это константа, которая будет определена позднее. Обозначим через $\lambda(d)$ нижний россеровский вес уровня D (см. [11; гл. 4]). Тогда имеем

$$\sum_{d|k} \mu(d) \geq \sum_{d|k} \lambda(d) \quad \text{для любого } k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Кроме того, мы знаем, что

$$\begin{aligned} |\lambda(d)| &\leq 1 && \text{для всех } d, \\ \lambda(d) &= 0 && \text{если } d > D \text{ или } \mu(d) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, имеем

$$\sum_{d|B_z} \frac{\lambda(d)}{d} \geq \prod_{p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) (f(s_0) + O((\log D)^{-1/3})), \quad (10)$$

где

$$s_0 = \frac{\log D}{\log z} = \frac{\delta}{\alpha} \quad (11)$$

и $f(s)$ является нижней функцией линейного решета, для которой известно, что

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < s < 2, \\ 2e^G s^{-1} \log(s-1) & \text{при } 2 < s < 3; \end{cases} \quad (12)$$

здесь G – константа Эйлера.

Из (6) и (8) находим

$$\Gamma = \sum_{\substack{P < p \leq 2P, m \in \mathbb{N} \\ [p^c] + [m^c] = N}} (\log p) \sum_{d|(m, B_z)} \mu(d) \geq \sum_{\substack{P < p \leq 2P, m \in \mathbb{N} \\ [p^c] + [m^c] = N}} (\log p) \sum_{d|(m, B_z)} \lambda(d).$$

Изменим порядок суммирования и получим

$$\Gamma \geq \sum_{d|B_z} \lambda(d) G_d, \quad \text{где } G_d = \sum_{\substack{P < p \leq 2P, m \in \mathbb{N} \\ [p^c] + [m^c] = N \\ m \equiv 0 \pmod{d}}} \log p. \quad (13)$$

Теперь запишем сумму G_d в виде

$$G_d = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) G'_{d,p}, \quad \text{где } G'_{d,p} = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ [p^c] + [m^c] = N}} 1. \quad (14)$$

Мы пользуемся очевидным тождеством

$$\sum_{a \leq m < b} 1 = [-a] - [-b] = b - a - \rho(-b) + \rho(-a),$$

чтобы установить, что

$$\begin{aligned} G'_{d,p} &= \sum_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \equiv 0 \pmod{d} \\ N - [p^c] \leq m^c < N + 1 - [p^c]}} 1 = \sum_{(1/d)(N - [p^c])^\gamma \leq m < (1/d)(N + 1 - [p^c])^\gamma} 1 \\ &= \frac{(N + 1 - [p^c])^\gamma - (N - [p^c])^\gamma}{d} + \rho\left(-\frac{1}{d}(N - [p^c])^\gamma\right) - \rho\left(-\frac{1}{d}(N + 1 - [p^c])^\gamma\right). \end{aligned}$$

Объединим вышеприведенное с (14), чтобы получить

$$G_d = \frac{1}{d} A(N) + \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \left(\rho \left(-\frac{1}{d} (N - [p^c])^\gamma \right) - \rho \left(-\frac{1}{d} (N + 1 - [p^c])^\gamma \right) \right), \quad (15)$$

где

$$A(N) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) ((N - [p^c] + 1)^\gamma - (N - [p^c])^\gamma).$$

Из

$$(N - [p^c] + 1)^\gamma = (N - [p^c])^\gamma + \gamma(N - [p^c])^{\gamma-1} + O(N^{\gamma-2})$$

получаем, что

$$A(N) = \gamma \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) ((N - [p^c])^{\gamma-1} + O(N^{\gamma-2})),$$

и по теореме о распределении простых чисел Чебышёва и определения P из (4) получаем

$$A(N) \asymp N^{\gamma-1} \sum_{P < p \leq 2P} \log p \asymp N^{2\gamma-1}. \quad (16)$$

Из (13) и (15) имеем

$$\Gamma \geq \Gamma_0 + \Sigma_0 - \Sigma_1, \quad (17)$$

где

$$\Gamma_0 = A(N) \sum_{d|B_z} \frac{\lambda(d)}{d}, \quad (18)$$

$$\Sigma_j = \sum_{d|B_z} \lambda(d) \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \rho \left(-\frac{1}{d} (N + j - [p^c])^\gamma \right), \quad j = 0, 1. \quad (19)$$

Рассмотрим Γ_0 . Пользуясь (5) и формулой Мертенса, находим

$$\prod_{p < z} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \asymp \frac{1}{\log z} \asymp \frac{1}{\log N}. \quad (20)$$

Предположим, что

$$2 < \frac{\delta}{\alpha} < 3. \quad (21)$$

Тогда, имея в виду (11) и (12), находим, что $f(s_0) > \kappa$ при некоторой константе $\kappa > 0$, зависящей только от δ и α . (Однако δ и α зависят только от c , так что κ также зависит только от c .) Следовательно, пользуясь (10) и (20) получаем

$$\sum_{d|B_z} \frac{\lambda(d)}{d} \gg \frac{1}{\log N}.$$

Таким образом, из (16) и (18) получим

$$\Gamma_0 \gg \frac{N^{2\gamma-1}}{\log N}. \quad (22)$$

Мы стремимся установить следующую оценку для сумм Σ_j , определенных в (19):

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}, \quad j = 0, 1. \quad (23)$$

Вместе с (17) и (22) это будет значить, что

$$\Gamma \gg \frac{N^{2\gamma-1}}{\log N},$$

откуда $\Gamma > 0$ для достаточно большого N . Тогда, как мы уже объяснили, уравнение (3) будет иметь решение с простым p и почти простым m не более чем с $[\gamma/\alpha]$ простыми сомножителями.

Оставшаяся часть статьи будет посвящена доказательству оценок (23) в предположениях

$$\frac{28}{29} < \gamma < 1, \quad \delta < \frac{29\gamma - 28}{26}. \quad (24)$$

Затем останется выбрать

$$\alpha = \frac{29\gamma - 28}{52} - \varepsilon_0$$

для некоторого малого $\varepsilon_0 > 0$ и взять

$$\delta \in \left(2\alpha, \frac{29\gamma - 28}{26} \right).$$

В этом случае, когда ε_0 достаточно мало, условие (21) выполняется. Выбирая c на основе (4), легко видеть, что

$$\left\lceil \frac{\gamma}{\alpha} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{52}{29 - 28c} \right\rceil + 1,$$

что доказывает теорему.

3.2. Оценка сумм Σ_1 и Σ_2 (начало). Рассмотрим сумму Σ_j , определенную в (19). Применим теорему Ваалера [12], в которой говорится, что для каждого $H \geq 2$ найдутся такие числа c_h , $0 < |h| \leq H$, и d_h , $|h| \leq H$, что

$$\rho(t) = \sum_{0 < |h| \leq H} c_h e(ht) + \Delta_H(t), \quad (25)$$

где

$$|\Delta_H(t)| \leq \sum_{|h| \leq H} d_h e(ht) \quad (26)$$

и

$$|c_h| \ll \frac{1}{|h|}, \quad |d_h| \ll \frac{1}{H}. \quad (27)$$

Из (19) и (25) следует, что

$$\Sigma_j = \Sigma'_j + \Sigma''_j, \quad (28)$$

где

$$\Sigma'_j = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \sum_{0 < |h| \leq H} c_h e\left(-\frac{h}{d}(N + j - [p^c])^\gamma\right), \quad (29)$$

$$\Sigma''_j = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \Delta_H\left(-\frac{(N + j - [p^c])^\gamma}{d}\right). \quad (30)$$

Пусть

$$W(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) e(v(N + j - [p^c])^\gamma). \quad (31)$$

Начнем с суммы Σ'_j . Изменение порядка суммирования вместе с (9), (27) и (31) влечет

$$\Sigma'_j = \sum_{d \leq D} \lambda(d) \sum_{0 < |h| \leq H} c_h W\left(-\frac{h}{d}\right) \ll \sum_{d \leq D} \sum_{1 \leq h \leq H} \frac{1}{h} \left| W\left(\frac{h}{d}\right) \right|. \quad (32)$$

Для суммы Σ''_j воспользуемся (9), (26), (27) и (31), чтобы получить

$$\begin{aligned} \Sigma''_j &\ll \sum_{d \leq D} \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \sum_{|h| \leq H} d_h e\left(-\frac{h}{d}(N+j-[p^c])^\gamma\right) \\ &= \sum_{d \leq D} \sum_{|h| \leq H} d_h W\left(-\frac{h}{d}\right) \ll \sum_{d \leq D} \sum_{|h| \leq H} \frac{1}{H} \left| W\left(\frac{h}{d}\right) \right|. \end{aligned}$$

Из (4), (31) и теоремы Чебышёва о распределении простых чисел находим, что $W(0) \asymp N^\gamma$ и отсюда

$$\Sigma''_j \ll \sum_{d \leq D} \frac{N^\gamma}{H} + \sum_{d \leq D} \sum_{1 \leq h \leq H} \frac{1}{H} \left| W\left(\frac{h}{d}\right) \right|. \quad (33)$$

Положим

$$H = dN^{1-\gamma}(\log N)^3. \quad (34)$$

Теперь, пользуясь (7), (28) и (32)–(34), получим

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \left| W\left(\frac{h}{d}\right) \right|, \quad j = 0, 1. \quad (35)$$

3.3. Изучение суммы $W(v)$. Как мы уже упоминали ранее, трудно оценить экспоненциальную сумму $W(v)$, определяемую (31), непосредственно. Вместо этого мы можем записать ее в виде линейной комбинации аналогичных сумм, с которыми легче иметь дело.

Пусть $Z \geq 2$ – целое, которое мы определим позднее. Применим известную лемму “о стаканчиках” Виноградова (см. [13; гл. 1, лемма A]) с параметрами

$$\alpha = -\frac{1}{4Z}, \quad \beta = \frac{1}{4Z}, \quad \Delta = \frac{1}{2Z}, \quad r = [\log N]$$

и построим функцию $g(t)$, периодическую с периодом 1 и обладающую следующими свойствами:

$$\begin{aligned} g(0) &= 1, \\ 0 < g(t) < 1 &\quad \text{при} \quad 0 < |t| < \frac{1}{2Z}, \\ g(t) &= 0 \quad \text{при} \quad \frac{1}{2Z} \leq |t| \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Кроме того, ряд Фурье $g(t)$ задается как

$$g(t) = \frac{1}{2Z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \beta_n e(nt) \quad \text{при} \quad |\beta_n| \leq \min\left(\frac{1}{2Z}, \frac{1}{|n|} \left(\frac{2Z[\log N]}{\pi|n|}\right)^{[\log N]}\right).$$

Из вышеприведенной оценки $|\beta_n|$ легко получается

$$\sum_{|n| > Z(\log N)^4} |\beta_n| \ll N^{-\log \log N}$$

с некоторой абсолютной константой в знаке $\ll$. Отсюда имеем

$$g(t) = \sum_{|n| \leq Z(\log N)^4} \beta_n e(nt) + O(N^{-\log \log N}), \quad (37)$$

где подразумеваемая константа является абсолютной и

$$|\beta_n| \leq \frac{1}{2Z}. \quad (38)$$

Наконец, легко видеть, что функция $g(t)$, построенная в доказательстве леммы А из [13; гл. 1], четная и также удовлетворяет

$$g(t) + g\left(t - \frac{1}{2Z}\right) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2Z}. \quad (39)$$

Пусть

$$g_z(t) = g\left(t - \frac{z}{2Z}\right) \quad \text{при} \quad z = 0, 1, 2, \dots, 2Z - 1. \quad (40)$$

Очевидно, что каждая функция $g_z(t)$ является периодической с периодом 1. Из (36) находим, что

$$0 < g_z(t) \leq 1, \quad \text{если} \quad \left|t - \frac{z}{2Z}\right| < \frac{1}{2Z}, \quad (41)$$

$$g_z(t) = 0, \quad \text{если} \quad \frac{1}{2Z} \leq \left|t - \frac{z}{2Z}\right| \leq \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Из (40) следует, что если $\beta_n^{(z)}$ есть n -й коэффициент Фурье функции $g_z(t)$, то

$$\beta_n^{(z)} = \beta_n e\left(-\frac{zn}{2M}\right),$$

и отсюда $|\beta_n^{(z)}| = |\beta_n|$. Из этого наблюдения и из (37), а также вышеприведенной оценки для $|\beta_n|$ находим, что для $z = 0, 1, \dots, 2Z - 1$ справедливо соотношение

$$g_z(t) = \sum_{|n| \leq Z(\log N)^4} \beta_n^{(z)} e(nt) + O(N^{-\log \log N}), \quad (43)$$

где константа в символе O является абсолютной и

$$|\beta_n^{(z)}| \leq \frac{1}{2Z}. \quad (44)$$

Наконец, из (39), (40) и (42) находим

$$\sum_{z=0}^{2Z-1} g_z(t) = 1 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (45)$$

(Оставляем эту легкую проверку читателю.)

Теперь рассмотрим сумму $W(v)$, определенную в (31). Из (45) следует, что

$$W(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) e(v(N + j - [p^c])^\gamma) \sum_{z=0}^{2Z-1} g_z(p^c) = \sum_{z=0}^{2Z-1} W_z(v), \quad (46)$$

где

$$W_z(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) g_z(p^c) e(v(N + j - [p^c])^\gamma). \quad (47)$$

Ясно, что

$$W_0(v) \ll \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) g(p^c) \ll \log N \sum_{P < k \leq 2P} g(k^c).$$

Применим (4), (37) и (38), чтобы получить

$$\begin{aligned} W_0(v) &\ll (\log N) \frac{P}{Z} + (\log N) \left| \sum_{P < k \leq 2P} \sum_{0 < |n| \leq Z(\log N)^4} \beta_n e(nk^c) \right| + 1 \\ &\ll (\log N) \frac{N^\gamma}{Z} + \frac{\log N}{Z} \sum_{n \leq Z(\log N)^4} |\mathcal{H}_n| + 1, \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\mathcal{H}_n = \sum_{P < k \leq 2P} e(nk^c).$$

Если $\theta(x) = nx^c$, то $\theta''(x) = c(c-1)nx^{c-2} \asymp nP^{c-2}$ равномерно по $x \in [P, 2P]$. Следовательно, можно применить теорему Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]), чтобы получить

$$\mathcal{H}_n \ll P(nP^{c-2})^{1/2} + (nP^{c-2})^{-1/2} \ll P^{c/2} n^{1/2}. \quad (49)$$

В дальнейшем мы предполагаем, что

$$Z \ll N^{(2\gamma-1)/3} (\log N)^{-4}. \quad (50)$$

Тогда, пользуясь (4) и (48)–(50), получаем

$$W_0(v) \ll (\log N) \left(\frac{N^\gamma}{Z} + N^{1/2} Z^{1/2} \log^6 N \right) \ll (\log N) \frac{N^\gamma}{Z}. \quad (51)$$

Теперь мы ограничимся рассмотрением сумм $W_z(v)$ при $1 \leq z \leq 2Z - 1$. Из (42) видим, что $g_z(p^c)$ может быть отлично от нуля, только если $\{p^c\} \in [(z-1)/(2Z), (z+1)/(2Z)]$. Следовательно, единственные слагаемые в сумме (47) это те, для которых

$$\{p^c\} = \frac{z}{2Z} + O\left(\frac{1}{Z}\right).$$

В этом случае имеем

$$v(N + j - [p^c])^\gamma = v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z}\right)$$

и, соответственно,

$$e(v(N + j - [p^c])^\gamma) = e\left(v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right) + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z}\right).$$

Тогда, пользуясь (47), находим

$$W_z(v) = V_z(v) + O\left(\frac{vN^{\gamma-1}}{Z} \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) g_z(p^c)\right), \quad (52)$$

где

$$V_z(v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) g_z(p^c) e\left(v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right). \quad (53)$$

Следовательно, из (46), (51) и (52) получаем

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} W_z(v) + W_0(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O(\Xi) + O\left((\log N) \frac{N^\gamma}{Z}\right),$$

где

$$\Xi = \frac{vN^{\gamma-1}}{Z} \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \sum_{z=1}^{2Z-1} g_z(p^c).$$

Теперь пользуясь (4), (45) и теоремой Чебышёва о распределении простых чисел, находим, что

$$\Xi \ll \frac{vN^{2\gamma-1}}{Z}$$

и, следовательно,

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O\left(\frac{vN^{2\gamma-1}}{Z}\right) + O\left((\log N) \frac{N^\gamma}{Z}\right). \quad (54)$$

С этого момента и далее мы предполагаем, что

$$v = \frac{h}{d}, \quad \text{где } 1 \leq d \leq D, \quad 1 \leq h \leq H. \quad (55)$$

Тогда из (34) видим, что $vN^{2\gamma-1} \ll N^\gamma(\log N)^3$; отсюда формула (54) может быть записана как

$$W(v) = \sum_{z=1}^{2Z-1} V_z(v) + O\left((\log N)^3 \frac{N^\gamma}{Z}\right). \quad (56)$$

Из (34), (35) и (56) находим

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{z=1}^{2Z-1} |V_z(v)| + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \frac{N^\gamma}{Z} (\log N)^3. \quad (57)$$

Выберем такое Z , что

$$Z \asymp dN^{1-\gamma}(\log N)^7. \quad (58)$$

Из (7) и (24) следует, что условие (50) выполняется. Следовательно, из (57) и (58) находим

$$\Sigma_j \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{z=1}^{2Z-1} |V_z(v)|. \quad (59)$$

Рассмотрим теперь сумму $V_z(v)$, определенную в (53), где v удовлетворяет (55). Из (43) находим, что для достаточно большого N справедливо соотношение

$$\begin{aligned} V_z(v) &= \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) \left(\sum_{|r| \leq Z(\log N)^4} \beta_r^{(z)} e(rp^c) \right) e\left(v\left(N + j - p^c + \frac{z}{2Z}\right)^\gamma\right) + O(N^{-10}) \\ &= \sum_{|r| \leq Z(\log N)^4} \beta_r^{(z)} U\left(N + j + \frac{z}{2Z}, r, v\right) + O(N^{-10}), \end{aligned}$$

где

$$U = U(T, r, v) = \sum_{P < p \leq 2P} (\log p) e(rp^c + v(T - p^c)^\gamma). \quad (60)$$

Мы хотели бы отметить, что если $0 \leq j \leq 1$ и $1 \leq z \leq 2Z - 1$, то

$$N + j + \frac{z}{2Z} \in [N, N + 2].$$

Кроме того, если мы также примем во внимание (44) и (58), мы получим

$$V_z(v) \ll N^{-10} + \frac{1}{Z} \sum_{|r| \leq R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U(T, r, v)|,$$

где

$$R = dN^{1-\gamma}(\log N)^{12}. \quad (61)$$

Если подставить вышеприведенное выражение для $V_z(v)$ в формулу (59), то будем иметь

$$|\Sigma_1| + |\Sigma_2| \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \leq R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U(T, r, v)|. \quad (62)$$

3.4. Применение тождества Вона. Введем обозначения

$$\phi(t) = rt^c + v(T - t^c)^\gamma, \quad (63)$$

$$f(m, l) = \phi(ml) = r(ml)^c + v(T - (ml)^c)^\gamma. \quad (64)$$

Для суммы U , определенной в (60), имеем

$$U = \sum_{P < n \leq 2P} \Lambda(n) e(\phi(n)) + O(P^{1/2}).$$

(Действительно, сумма в правой части приведенной выше формулы содержит все члены суммы U , а также члены, для которых $n = p^\nu$, $\nu \geq 2$, но можно легко убедиться, что их вклад $\ll P^{1/2}$.) Применяя теперь тождество Вона (см. [14]), находим, что

$$U = U_1 - U_2 - U_3 - U_4 + O(P^{1/2}), \quad (65)$$

где

$$U_1 = \sum_{m \leq P^{1/3}} \mu(m) \sum_{P/m < l \leq 2P/m} (\log l) e(f(m, l)), \quad (66)$$

$$U_2 = \sum_{m \leq P^{1/3}} c(m) \sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l)), \quad (67)$$

$$U_3 = \sum_{P^{1/3} < m \leq P^{2/3}} c(m) \sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l)), \quad (68)$$

$$U_4 = \sum_{\substack{P < ml \leq 2P \\ m > P^{1/3}, l > P^{1/3}}} a(m) \Lambda(l) e(f(m, l)) \quad (69)$$

и

$$|c(m)| \leq \log m, \quad |a(m)| \leq \tau(m). \quad (70)$$

Следовательно из (7), (24), (34), (61), (62) и (65) имеем

$$|\Sigma_1| + |\Sigma_2| \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} + \sum_{i=1}^4 \Omega_i, \quad (71)$$

где

$$\Omega_i = \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \leq R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_i|. \quad (72)$$

Из (71) и (72), чтобы доказать, что удовлетворяется (23), достаточно показать, что

$$\Omega_i \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2} \quad \text{при } i = 1, 2, 3, 4. \quad (73)$$

3.5. Оценка сумм Ω_1 и Ω_2 . Начнем с изучения Ω_2 . Из (64) получаем

$$f''_{ll}(m, l) = \pi_1 - \pi_2, \quad (74)$$

где

$$\pi_1 = m^2 r c(c-1)(ml)^{c-2}, \quad \pi_2 = m^2 v(c-1)T(ml)^{c-2}(T - (ml)^c)^{\gamma-2}. \quad (75)$$

Из (4), (55) и условий

$$P < ml \leq 2P, \quad N \leq T \leq N+2 \quad (76)$$

имеем

$$|\pi_1| \asymp |r|m^2 N^{1-2\gamma}, \quad \pi_2 \asymp vm^2 N^{-\gamma}. \quad (77)$$

Из (74) и (77) следует, что существует такая достаточно малая константа $\alpha_0 > 0$, что если $|r| \leq \alpha_0 v N^{\gamma-1}$, то $|f''_{ll}| \asymp vm^2 N^{-\gamma}$.

Аналогично, из (74) и (77) заключаем, что существует такая достаточно большая константа $A_0 > 0$, что если $|r| \geq A_0 v N^{\gamma-1}$, то $|f''_{ll}| \asymp |r|m^2 N^{1-2\gamma}$.

Разобьем сумму Ω_2 на четыре суммы в соответствии со значениями r следующим образом:

$$\Omega_2 = \Omega_{2,1} + \Omega_{2,2} + \Omega_{2,3} + \Omega_{2,4}, \quad (78)$$

где

$$\text{в } \Omega_{2,1}: \quad |r| \leq \alpha_0 v N^{\gamma-1}, \quad (79)$$

$$\text{в } \Omega_{2,2}: \quad -A_0 v N^{\gamma-1} < r < -\alpha_0 v N^{\gamma-1}, \quad (80)$$

$$\text{в } \Omega_{2,3}: \quad \alpha_0 v N^{\gamma-1} < r < A_0 v N^{\gamma-1}, \quad (81)$$

$$\text{в } \Omega_{2,4}: \quad A_0 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R. \quad (82)$$

Заметим, что из (34), (55) и (61) следует, что

$$v N^{\gamma-1} \ll (\log N)^3 \ll \frac{R}{\log N}. \quad (83)$$

Сначала рассмотрим $\Omega_{2,4}$. Имеем

$$\Omega_{2,4} = \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{A_0 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_2|. \quad (84)$$

Оценим сумму U_2 , определенную в (67), при условии, что выполняется соотношение (82). Напомним, что константа A_0 выбирается таким образом, что при $|r| \geq A_0 v N^{\gamma-1}$ равномерно по $l \in (P/m, 2P/m]$ справедливо соотношение $|f''_{ll}(m, l)| \asymp |r|m^2 N^{1-2\gamma}$. Следовательно, мы можем снова воспользоваться теоремой Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]) и учитывая (4), получаем

$$\sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l)) \ll \frac{P}{m} (|r|m^2 N^{1-2\gamma})^{1/2} + (|r|m^2 N^{1-2\gamma})^{-1/2} \ll |r|^{1/2} N^{1/2}.$$

Тогда из (67) и (70) находим

$$U_2 \ll |r|^{1/2} N^{1/2+\gamma/3} (\log N). \quad (85)$$

Подставим это выражение для U_2 в (84) и воспользуемся (34), (55) и (61), чтобы получить оценку

$$\Omega_{2,4} \ll D^{5/2} N^{2-7\gamma/6+\varepsilon}.$$

Следовательно из (7) и (24) получаем

$$\Omega_{2,4} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (86)$$

Продолжим с $\Omega_{2,3}$. Мы должны изучить сумму U_2 , определенную в (67), при выполнении условия (81). Чтобы это сделать, воспользуемся (64) и вычислим

$$\begin{aligned} f_{iii}'''(m, l) &= m^3 rc(c-1)(c-2)(ml)^{c-3} \\ &\quad + m^3 v(c-1)T(T - (ml)^c)^{\gamma-3}(ml)^{c-3}((2-c)T - (c+1)(ml)^c). \end{aligned} \quad (87)$$

Находим из (74), (75) и (87)

$$(c-2)f_{ii}''(m, l) - lf_{iii}'''(m, l) = v(c-1)(2c-1)Tm^{2c}l^{2c-2}(T - (ml)^c)^{\gamma-3}.$$

Последнее вместе с (4) и (76) влечет

$$|(c-2)f_{ii}''(m, l) - lf_{iii}'''(m, l)| \asymp vm^2 N^{-\gamma}.$$

Следовательно, существует такая $\kappa_0 > 0$, зависящая только от константы c , что для каждого $l \in (P/m, 2P/m]$ выполняется по крайней мере одно из следующих неравенств:

$$|f_{ii}''(m, l)| \geq \kappa_0 vm^2 N^{-\gamma}, \quad (88)$$

или

$$|f_{iii}'''(m, l)| \geq \kappa_0 vm^3 N^{-2\gamma}. \quad (89)$$

Мы намереваемся показать, что интервал $(P/m, 2P/m]$ может быть разбит не более чем на семь интервалов таких, что если J есть один из них, то выполняется по крайней мере одно из следующих утверждений:

$$\text{имеем (88) для всех } l \in J, \quad (90)$$

$$\text{имеем (89) для всех } l \in J. \quad (91)$$

Для установления этого достаточно показать, что уравнение $|f_{ii}''(m, l)| = \kappa_0 vm^2 N^{-\gamma}$ имеет не более шести решений в вещественных числах $l \in (P/m, 2P/m)$. Следовательно, достаточно показать, что если C не зависит от l , то уравнение $f_{ii}''(m, l) = C$ имеет не более трех решений в вещественных числах $l \in (P/m, 2P/m)$. Согласно теореме Ролля между любыми двумя решениями последнего уравнения есть решение (в вещественных числах l) уравнения $f_{iii}'''(m, l) = 0$. Таки образом, пользуясь (87), мы заключаем, что достаточно показать, что

$$vT(T - (ml)^c)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)(ml)^c) = rc(2-c)$$

имеет не более двух решений для $l \in (P/m, 2P/m)$, что эквивалентно утверждению, что уравнение

$$(T - X)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)X) = \frac{rc(2-c)}{vT}$$

имеет не более двух решений для $X \in (P^c, (2P)^c)$. В качестве альтернативы вместо последнего уравнения можно взглянуть на

$$(\gamma - 3) \log(T - X) + \log((2 - c)T - (c + 1)X) = \log \frac{rc(2 - c)}{vT}. \quad (92)$$

Обозначим через $H(X)$ функцию в левой части (92). Из теоремы Ролля мы знаем, что между любыми двумя решениями (92) найдется решение $H'(X) = 0$. Поскольку

$$H'(X) = \frac{3 - \gamma}{T - X} - \frac{c + 1}{(2 - c)T - (c + 1)X},$$

легко видеть, что $H'(X)$ обращается в нуль не более чем при одном значении X . Следовательно, (92) имеет не более двух решений в X , и наше утверждение доказано.

С другой стороны, из (74), (77) и (87) видим, что при условии на r из (81) имеем

$$f''_{ll}(m, l) \ll vm^2 N^{-\gamma}, \quad f'''_{lll}(m, l) \ll vm^3 N^{-2\gamma}.$$

Отсюда, интервал $(P/m, 2P/m]$ может быть разбит не более чем на семь таких интервалов, что если J один из них, то выполняется по меньшей мере одно из следующих утверждений:

$$|f''_{ll}(m, l)| \asymp vm^2 N^{-\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in J, \quad (93)$$

$$|f'''_{lll}(m, l)| \asymp vm^3 N^{-2\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in J. \quad (94)$$

Если выполняется (93), то, воспользовавшись теоремой Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]) для второй производной, находим

$$\sum_{l \in J} e(f(m, l)) \ll \frac{P}{m} (vm^2 N^{-\gamma})^{1/2} + (vm^2 N^{-\gamma})^{-1/2} \ll v^{1/2} N^{\gamma/2} + v^{-1/2} m^{-1} N^{\gamma/2}. \quad (95)$$

В случае (94) применим теорему Ван дер Корпута для третьей производной, чтобы получить

$$\begin{aligned} \sum_{l \in J} e(f(m, l)) &\ll \frac{P}{m} (vm^3 N^{-2\gamma})^{1/6} + \left(\frac{P}{m}\right)^{1/2} (vm^3 N^{-2\gamma})^{-1/6} \\ &\ll v^{1/6} m^{-1/2} N^{2\gamma/3} + v^{-1/6} m^{-1} N^{5\gamma/6}. \end{aligned}$$

Отсюда, в любом случае $\sum_{l \in J} e(f(m, l))$ можно оценить суммой выражений из правых частей вышеприведенных неравенств. Следовательно,

$$\sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l)) \ll v^{1/2} N^{\gamma/2} + v^{-1/2} m^{-1} N^{\gamma/2} + v^{1/6} m^{-1/2} N^{2\gamma/3} + v^{-1/6} m^{-1} N^{5\gamma/6}. \quad (96)$$

Тогда из (4), (67) и (70) находим, что

$$U_2 \ll (\log N)^2 (v^{1/2} N^{5\gamma/6} + v^{-1/2} N^{\gamma/2} + v^{1/6} N^{5\gamma/6} + v^{-1/6} N^{5\gamma/6}). \quad (97)$$

Воспользовавшись (34), (55), (81), (83) и (97), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{2,3} &= \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{\alpha_0 v N^{\gamma-1} < r < A_0 v N^{\gamma-1}} \sup_{T \in [N, N+2]} |U_2| \\ &\ll N^\varepsilon \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \left(\frac{h^{1/2} N^{5\gamma/6}}{d^{1/2}} + \frac{h^{-1/2} N^{\gamma/2}}{d^{-1/2}} + \frac{h^{1/6} N^{5\gamma/6}}{d^{1/6}} + \frac{h^{-1/6} N^{5\gamma/6}}{d^{-1/6}} \right) \\ &\ll N^\varepsilon (DN^{1/2+\gamma/3} + D^{3/2} N^{\gamma/2} + DN^{1/6+2\gamma/3} + D^{7/6} N^{5\gamma/6}), \end{aligned} \quad (98)$$

и из (7) и (24) мы заключаем, что

$$\Omega_{2,3} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (99)$$

Рассмотрим $\Omega_{2,1}$. Мы выбрали постоянную α_0 таким образом, что из (76) и из условия на r из (79) следует, что

$$|f''_{ll}(m, l)| \asymp vm^2 N^{-\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in \left(\frac{P}{m}, \frac{2P}{m}\right].$$

Следовательно, сумму $\sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(f(m, l))$ можно оценить выражением из правой части (95), и, конечно, оценка (96) выполняется снова. Отсюда видим, что $\Omega_{2,1}$ можно оценить таким же образом, как $\Omega_{2,3}$, т.е.

$$\Omega_{2,1} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (100)$$

Сумма $\Omega_{2,2}$ может быть исследована тем же путем. Из (74)–(76) и (80) следует, что $|f''_{ll}(m, l)| \asymp vm^2 N^{-\gamma}$, и оценка (96) снова верна. Поэтому

$$\Omega_{2,2} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (101)$$

Из (78), (86) и (99)–(101) заключаем, что

$$\Omega_2 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (102)$$

Теперь рассмотрим Ω_1 . Для U_1 из (66) мы применим преобразование Абеля, чтобы избавиться от множителя $\log l$ во внутренней сумме. Затем мы работаем, как при оценивании Ω_2 , чтобы получить

$$\Omega_1 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (103)$$

3.6. Оценка сумм Ω_3 и Ω_4 и завершение доказательства. Рассмотрим сумму Ω_4 из (72). Разобьем сумму U_4 из (69) на $O(\log N)$ сумм вида

$$W_{M,L} = \sum_{L < l \leq 2L} b(l) \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ P/l < m \leq 2P/l}} a(m) e(f(m, l)), \quad (104)$$

где

$$a(m) \ll N^\varepsilon, \quad b(l) \ll N^\varepsilon, \quad P^{1/3} \ll M \ll P^{1/2} \ll L \ll P^{2/3}, \quad ML \asymp P. \quad (105)$$

(Если $M \gg P^{1/2}$, то меняем местами m и l и соответственно M и L и снова получаем сумму, параметры которой удовлетворяют условия (105).)

Из (104), (105) и неравенства Коши находим

$$|W_{M,L}|^2 \ll N^\varepsilon L \sum_{L < l \leq 2L} \left| \sum_{M_1 < m \leq M_2} a(m) e(f(m, l)) \right|^2, \quad (106)$$

где

$$M_1 = \max\left(M, \frac{P}{l}\right), \quad M_2 = \min\left(2M, \frac{2P}{l}\right). \quad (107)$$

Применим теперь известное неравенство

$$\left| \sum_{a < m \leq b} \xi(m) \right|^2 \leq \frac{b-a+Q}{Q} \sum_{|q| < Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q}\right) \sum_{\substack{m \in (a, b] \\ m \in (a-q, b-q]}} \xi(m+q) \overline{\xi(m)}, \quad (108)$$

где $Q \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $1 \leq b-a$ и $\xi(m)$ произвольная комплексная функция. (Доказательство может быть найдено в [15; лемма 8.17].) У нас $\xi(m) = a(m) e(f(m, l))$, $a = M_1$, $b = M_2$. Точное значение Q будет выбрано позднее. Теперь же нам требуется только, чтобы

$$Q \leq M. \quad (109)$$

Тогда находим

$$|W_{M,L}|^2 \ll N^\varepsilon L \sum_{L < l \leq 2L} \frac{M}{Q} \sum_{|q| \leq Q} \left(1 - \frac{|q|}{Q}\right) \sum_{\substack{M_1 < m \leq M_2 \\ M_1 < m+q \leq M_2}} a(m+q) \overline{a(m)} e(f(m+q, l) - f(m, l)).$$

Оценим вклад от членов с $q = 0$, а затем изменим порядок суммирования, и пользуясь (105) и (107), найдем

$$|W_{M,L}|^2 \ll \frac{N^\varepsilon (LM)^2}{Q} + \frac{N^\varepsilon LM}{Q} \sum_{0 < |q| \leq Q} \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ M < m+q \leq 2M}} \left| \sum_{L_1 < l \leq L_2} e\left(Y_{m,q}(l)\right) \right|, \quad (110)$$

где

$$L_1 = \max\left(L, \frac{P}{m}, \frac{P}{m+q}\right), \quad L_2 = \min\left(2L, \frac{2P}{m}, \frac{2P}{m+q}\right) \quad (111)$$

и

$$Y(l) = Y_{m,q}(l) = f(m+q, l) - f(m, l). \quad (112)$$

Теперь легко видеть, что сумма по отрицательным q в формуле (110) равна сумме по положительным q , поэтому получаем

$$|W_{M,L}|^2 \ll \frac{N^\varepsilon (LM)^2}{Q} + \frac{N^\varepsilon LM}{Q} \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{M < m \leq 2M-q} \left| \sum_{L_1 < l \leq L_2} e\left(Y_{m,q}(l)\right) \right|. \quad (113)$$

Рассмотрим функцию $Y(l)$. Пользуясь (63), (64) и (112), находим, что

$$Y(l) = \int_m^{m+q} f'_t(t, l) dt = \int_m^{m+q} l \phi'(tl) dt \quad (114)$$

и, следовательно,

$$Y''(l) = \int_m^{m+q} (2t \phi''(tl) + l t^2 \phi'''(tl)) dt, \quad Y'''(l) = \int_m^{m+q} (3t^2 \phi'''(tl) + l t^3 \phi^{(4)}(tl)) dt. \quad (115)$$

Из (63) и (115) получаем

$$Y''(l) = \int_m^{m+q} (\Phi_1(t) - \Phi_2(t)) dt, \quad (116)$$

где

$$\Phi_1(t) = r c^2 (c-1) t^{c-1} l^{c-2}, \quad (117)$$

$$\Phi_2(t) = v(c-1) T t^{c-1} l^{c-2} (T - (tl)^c)^{\gamma-3} (cT + (c-1)(tl)^c). \quad (118)$$

Напомним, что P задано в (4), r есть переменная суммирования в (72) и v определяется из (55). Если $t \in [m, m+q]$, то $tl \asymp P$. Таким образом, из условия

$$N \leq T \leq N+2 \quad (119)$$

и определения P находим, что равномерно по $t \in [m, m+q]$ справедливы соотношения

$$|\Phi_1(t)| \asymp |r| m N^{1-2\gamma}, \quad \Phi_2(t) \asymp v m N^{-\gamma}. \quad (120)$$

Из (116) и (120) видим, что существует такая достаточно малая константа $\alpha_1 > 0$, что если $|r| \leq \alpha_1 v N^{\gamma-1}$, то $|Y''(l)| \asymp q v m N^{-\gamma}$. Аналогично, мы заключаем, что существует такая достаточно большая константа $A_1 > 0$, что если $|r| \geq A_1 v N^{\gamma-1}$, то $|Y''(l)| \asymp |r| q m N^{1-2\gamma}$. Поэтому имеет смысл разбить сумму Ω_4 на четыре суммы согласно значению r следующим образом:

$$\Omega_4 = \Omega_{4,1} + \Omega_{4,2} + \Omega_{4,3} + \Omega_{4,4}, \quad (121)$$

где

$$\text{в } \Omega_{4,1}: \quad |r| \leq \alpha_1 v N^{\gamma-1}, \quad (122)$$

$$\text{в } \Omega_{4,2}: \quad -A_1 v N^{\gamma-1} < r < -\alpha_1 v N^{\gamma-1}, \quad (123)$$

$$\text{в } \Omega_{4,3}: \quad \alpha_1 v N^{\gamma-1} < r < A_1 v N^{\gamma-1}, \quad (124)$$

$$\text{в } \Omega_{4,4}: \quad A_1 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R. \quad (125)$$

Сначала рассмотрим $\Omega_{4,4}$. Из (72) и (125) имеем

$$\Omega_{4,4} \ll (\log N) \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{A_1 v N^{\gamma-1} \leq |r| \leq R} \sup_{\substack{T \in [N, N+2] \\ M, L: (105)}} |W_{M,L}|. \quad (126)$$

(Супремум берется по $T \in [N, N+2]$ и M, L , удовлетворяющим условиям из (105).)

Рассмотрим сумму $W_{M,L}$. Уже упоминалось, что если $|r| \geq A_1 v N^{\gamma-1}$, то равномерно по $l \in (L_1, L_2]$ имеем $Y''(l) \asymp |r| q m N^{1-2\gamma}$. Поэтому можно использовать теорему Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]) для второй производной и из (4), (105) и (111) получить

$$\sum_{L_1 < l \leq L_2} e(Y(l)) \ll L(|r| q m N^{1-2\gamma})^{1/2} + (|r| q m N^{1-2\gamma})^{-1/2} \ll |r|^{1/2} q^{1/2} M^{-1/2} N^{1/2}.$$

Тем самым, из (4), (105) и (113) находим

$$W_{M,L} \ll N^\varepsilon (N^\gamma Q^{-1/2} + |r|^{1/4} Q^{1/4} N^{1/4+5\gamma/8}). \quad (127)$$

Из (34), (61) и (126) имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{4,4} &\ll N^\varepsilon \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{|r| \leq d N^{1-\gamma} (\log N)^{12}} (N^\gamma Q^{-1/2} + |r|^{1/4} Q^{1/4} N^{1/4+5\gamma/8}) \\ &\ll N^\varepsilon (D^2 N Q^{-1/2} + Q^{1/4} D^{9/4} N^{3/2-5\gamma/8}). \end{aligned}$$

Мы выберем

$$Q = [D^{-1/3} N^{5\gamma/6-2/3}]. \quad (128)$$

Теперь легко проверить, что условие (109) выполняется. Следовательно, из (7) и (24) получаем

$$\Omega_{4,4} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (129)$$

Теперь рассмотрим $\Omega_{4,3}$. Из (72) и (124) имеем

$$\Omega_{4,3} \ll (\log N) \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{\alpha_1 v N^{\gamma-1} < r < A_1 v N^{\gamma-1}} \sup_{\substack{T \in [N, N+2] \\ M, L: (105)}} |W_{M,L}|. \quad (130)$$

Рассмотрим сумму $W_{M,L}$ из вышеприведенного выражения. Пользуясь (116)–(118), находим

$$Y'''(l) = \int_m^{m+q} (\Psi_1(t) + \Psi_2(t)) dt, \quad (131)$$

где

$$\Psi_1(t) = rc^2(c-1)(c-2)t^{c-1}l^{c-3}, \quad (132)$$

$$\Psi_2(t) = v(c-1)Tt^{c-1}l^{c-3}(T - (tl)^c)^{\gamma-4} (c(2-c)T^2 + (-4c^2 + 3c - 2)T(tl)^c + (1 - c^2)(tl)^{2c}). \quad (133)$$

Из (116)–(118) и (131)–(133) получаем

$$lY'''(l) + (2-c)Y''(l) = - \int_m^{m+q} \Theta(t) dt,$$

где

$$\Theta(t) = v(c-1)Tt^{2c-1}l^{2c-2}(T - (tl)^c)^{\gamma-4} (2c(2c-1)T + (2c^2 - 3c + 1)(tl)^c).$$

Пользуясь (4), (105) и (119), находим, что равномерно по $t \in [m, m+q]$ справедливо соотношение

$$\Theta(t) \asymp vmN^{-\gamma}.$$

Отсюда

$$|(2-c)Y''(l) + lY'''(l)| \asymp qmvN^{-\gamma}$$

равномерно по $l \in (L_1, L_2]$. Следовательно, существует $\kappa_1 > 0$, которая зависит только от c и такая, что по крайней мере одно из следующих неравенств выполняется для любого $l \in (L_1, L_2]$:

$$|Y''(l)| \geq \kappa_1 vqmN^{-\gamma}, \quad (134)$$

$$|Y'''(l)| \geq \kappa_1 vqm^2N^{-2\gamma}. \quad (135)$$

На следующем шаге будет показано, что интервал $(L_1, L_2]$ может быть разбит не более чем на 13 интервалов таких, что если J – один из них, то по крайней мере одно из следующих утверждений выполняется:

$$\text{имеет место (134) для всех } l \in J, \quad (136)$$

$$\text{имеет место (135) для всех } l \in J. \quad (137)$$

Чтобы это установить, достаточно показать, что уравнение $|Y''(l)| = \kappa_1 vqmN^{-\gamma}$ имеет не более 12 решений в вещественных числах $l \in (L_1, L_2)$. То есть, достаточно показать, что если C не зависит от l , то уравнение $Y''(l) = C$ имеет не более шести решений в вещественных числах $l \in (L_1, L_2)$. Согласно теореме Роля между любыми двумя решениями последнего уравнения найдется решение уравнения

$$Y'''(l) = 0. \quad (138)$$

Поэтому достаточно показать, что (138) имеет не более пяти решений в вещественных числах $l \in (L_1, L_2)$.

Легко видеть из (87) и (112), что (138) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} & (m+q)^c(T - (m+q)^c l^c)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)(m+q)^c l^c) \\ & \quad - m^c(T - m^c l^c)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)m^c l^c) \\ & = \frac{rc(2-c)((m+q)^c - m^c)}{vT}. \end{aligned}$$

Пусть $X = l^c$. Определим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(X) &= (m+q)^c(T - (m+q)^c X)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)(m+q)^c X) \\ & \quad - m^c(T - m^c X)^{\gamma-3}((2-c)T - (c+1)m^c X). \end{aligned}$$

Будет достаточно показать, что если B не зависит от X , то уравнение $\mathcal{F}(X) = B$ имеет не более пяти решений с $X \in (L_1^c, L_2^c)$.

Еще раз обращаемся к теореме Ролля, чтобы подтвердить, что достаточно доказать, что уравнение $\mathcal{F}'(X) = 0$ имеет не более четырех решений при $X \in (L_1^c, L_2^c)$. Можно записать $\mathcal{F}'(X) = 0$ как

$$\begin{aligned} & (m+q)^{2c}(T - (m+q)^c X)^{\gamma-4}((4c+2\gamma-6)T + (2c-\gamma+1)(m+q)^c X) \\ & = m^{2c}(T - m^c X)^{\gamma-4}((4c+2\gamma-6)T + (2c-\gamma+1)m^c X), \end{aligned}$$

что, в свою очередь, эквивалентно

$$\mathcal{G}(X) = \log m^c - \log(m+q)^c,$$

где функция $\mathcal{G}(X)$ определяется из

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(X) &= (\gamma-4) \log(T - (m+q)^c X) + \log((4c+2\gamma-6)T + (2c+1-\gamma)(m+q)^c X) \\ & \quad - (\gamma-4) \log(T - m^c X) - \log((4c+2\gamma-6)T + (2c+1-\gamma)m^c X). \end{aligned}$$

По той же причине, что и до этого, достаточно установить, что уравнение

$$\mathcal{G}'(X) = 0 \tag{139}$$

имеет не более трех решений при $X \in (L_1^c, L_2^c)$. Это легко показать, поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(X) &= \frac{(4-\gamma)(m+q)^c}{T - (m+q)^c X} + \frac{(2c+1-\gamma)(m+q)^c}{(4c+2\gamma-6)T + (2c+1-\gamma)(m+q)^c X} \\ & \quad - \frac{(4-\gamma)m^c}{T - m^c X} - \frac{(2c+1-\gamma)m^c}{(4c+2\gamma-6)T + (2c+1-\gamma)m^c X}. \end{aligned}$$

Следовательно, число решений (139) не превосходит числа корней многочлена степени не выше 3. Этот многочлен отличен от нуля, и можно легко в этом убедиться, проверив, что $\mathcal{G}'(0) \neq 0$. Мы оставляем эти простые вычисления читателю.

С другой стороны из (116), (120), (124) и (131)–(133) имеем

$$Y''(l) \ll vqmN^{-\gamma}, \quad Y'''(l) \ll vqm^2N^{-2\gamma}. \tag{140}$$

Поэтому мы заключаем, что интервал $(L_1, L_2]$ может быть разбит на не более чем 13 таких интервалов, что если J – один из них, то имеет место по крайней мере одно из следующих утверждений:

$$|Y''(l)| \asymp vqmN^{-\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in J, \tag{141}$$

$$|Y'''(l)| \asymp vqm^2N^{-2\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in J. \tag{142}$$

Если (141) выполняется, то воспользуемся (4), (105) и теоремой Ван дер Корпута (см. [13; гл. 1, теорема 5]) для второй производной, чтобы получить

$$\begin{aligned} \sum_{l \in J} e(Y(l)) &\ll L(qvmN^{-\gamma})^{1/2} + (qvmN^{-\gamma})^{-1/2} \\ &\ll q^{1/2}v^{1/2}LM^{1/2}N^{-\gamma/2} + q^{-1/2}v^{-1/2}M^{-1/2}N^{\gamma/2}. \end{aligned} \quad (143)$$

В случае, когда (142) удовлетворяется, применим (4), (105) и теорему Ван дер Корпута для третьей производной и получим

$$\begin{aligned} \sum_{l \in J} e(Y(l)) &\ll L(qvm^2N^{-2\gamma})^{1/6} + L^{1/2}(qvm^2N^{-2\gamma})^{-1/6} \\ &\ll q^{1/6}v^{1/6}LM^{1/3}N^{-\gamma/3} + q^{-1/6}v^{-1/6}L^{1/2}M^{-1/3}N^{\gamma/3}. \end{aligned} \quad (144)$$

Следовательно, в каждом случае $\sum_{l \in J} e(Y(l))$ можно оценить с помощью суммы выражений из правых частей неравенств (143) и (144). Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{L_1 < l \leq L_2} e(Y(l)) &\ll q^{1/2}v^{1/2}LM^{1/2}N^{-\gamma/2} + q^{-1/2}v^{-1/2}M^{-1/2}N^{\gamma/2} \\ &\quad + q^{1/6}v^{1/6}LM^{1/3}N^{-\gamma/3} + q^{-1/6}v^{-1/6}L^{1/2}M^{-1/3}N^{\gamma/3}. \end{aligned}$$

Пользуясь (4), (105), (111) и (113), находим, что

$$\begin{aligned} W_{M,L} &\ll N^\varepsilon \left(N^\gamma Q^{-1/2} + v^{1/4} Q^{1/4} N^{7\gamma/8} + v^{-1/4} Q^{-1/4} N^{7\gamma/8} \right. \\ &\quad \left. + v^{1/12} Q^{1/12} N^{11\gamma/12} + v^{-1/12} Q^{-1/12} N^{23\gamma/24} \right). \end{aligned}$$

Применим вышеприведенную оценку для $W_{M,L}$ в (130). Тогда из (34) и (55) получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{4,3} &\ll N^\varepsilon \sum_{d \leq D} \sum_{h \leq H} \frac{1}{h} \sum_{r < A_1 \log^3 N} \left(N^\gamma Q^{-1/2} + \left(\frac{h}{d} \right)^{1/4} Q^{1/4} N^{7\gamma/8} + \left(\frac{h}{d} \right)^{-1/4} Q^{-1/4} N^{7\gamma/8} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{h}{d} \right)^{1/12} Q^{1/12} N^{11\gamma/12} + \left(\frac{h}{d} \right)^{-1/12} Q^{-1/12} N^{23\gamma/24} \right) \\ &\ll N^\varepsilon \left(DN^\gamma Q^{-1/2} + DQ^{1/4} N^{1/4+5\gamma/8} + D^{5/4} Q^{-1/4} N^{7\gamma/8} \right. \\ &\quad \left. + DQ^{1/12} N^{1/12+5\gamma/6} + D^{13/12} Q^{-1/12} N^{23\gamma/24} \right). \end{aligned}$$

С тем выбором Q , который мы сделали в (128), теперь ясно, что

$$\Omega_{4,3} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (145)$$

Теперь продолжим с изучением $\Omega_{4,1}$. Мы выбрали константу α_1 таким образом, что из (76) и (122) следует, что

$$Y''(l) \asymp vqmN^{-\gamma} \quad \text{равномерно по } l \in (L_1, L_2].$$

Тогда сумма $\sum_{P/m < l \leq 2P/m} e(Y(l))$ может оцениваться выражением из правой части (143). Это наблюдение показывает, что $\Omega_{4,1}$ оценивается той же величиной, что и $\Omega_{4,3}$, т.е.

$$\Omega_{4,1} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (146)$$

Очень похожим образом можно показать, что

$$\Omega_{4,2} \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (147)$$

Тогда из (121), (129) и (145)–(147) получаем

$$\Omega_4 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (148)$$

Остается найти оценку для Ω_3 . Тот же аргумент, что и для Ω_4 , может быть применен здесь еще раз, чтобы показать, что

$$\Omega_3 \ll \frac{N^{2\gamma-1}}{(\log N)^2}. \quad (149)$$

Из (102), (103), (148) и (149) заключаем, что (73) выполнено, и теорема доказана.

Список литературы

- [1] И. И. Пятецкий-Шапиро, “О распределении простых чисел в последовательностях вида $[f(n)]$ ”, *Матем. сб.*, **33 (75)**:3 (1953), 559–566.
- [2] J. Rivat, J. Wu, “Prime numbers of the form $[n^c]$ ”, *Glasgow Math. J.*, **43**:2 (2001), 237–254.
- [3] X. Wang, Y. Cai, “An additive problem involving Piatetski-Shapiro primes”, *Int. J. Number Theory*, **7**:5 (2011), 1359–1378.
- [4] T. P. Peneva, “An Additive problem with Piatetski-Shapiro primes and almost-primes”, *Monatsh. Math.*, **140**:2 (2003), 119–133.
- [5] R. C. Baker, W. D. Banks, Z. V. Guo, A. M. Yeager, “Piatetski-Shapiro primes from almost primes”, *Monatsh. Math.*, **174**:3 (2014), 357–370.
- [6] J.-M. Deshouillers, “Un problème binaire en théorie additive”, *Acta Arith.*, **25** (1974), 393–403.
- [7] С. А. Гриценко, “Три аддитивные задачи”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1198–1216.
- [8] С. В. Конягин, “Аддитивная проблема с дробными степенями”, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 633–636.
- [9] A. V. Kumchev, “A binary additive equation involving fractional powers”, *Int. J. Number Theory*, **5**:2 (2009), 281–292.
- [10] J. R. Chen, “On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes”, *Sci. Sinica*, **16** (1973), 157–176.
- [11] G. Greaves, *Sieves in Number Theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **43**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [12] J. D. Vaaler, “Some extremal problems in Fourier analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **12**:2 (1985), 183–216.
- [13] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.
- [14] R. C. Vaughan, “An elementary method in prime number theory”, *Acta Arith.*, **37** (1980), 111–115.
- [15] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.