Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ривоаль, Значения бета-функции: от цепной дроби Рамануджана до аппроксимаций Эрмита–Паде, *Совр. пробл. матем.*, 2017, выпуск 24, 66–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:03:47

Значения бета-функции: от цепной дроби Рамануджана до аппроксимаций Эрмита–Паде

Т. Ривоаль

Institut Fourier, Centre National de la Recherche Scientifique, Université Grenoble Alpes, France

tanguy.rivoal@univ-grenoble-alpes.fr

1. Введение

В двух недавних статьях [1], [2] автор представил новые методы построения последовательностей рациональных чисел, приближающих значения гамма-функции в рациональных точках. Мотивацией была диофантовость, хотя ни один новый арифметический результат не был получен. Высказывалась гипотеза, что значение $\Gamma(1/m)$ трансцендентно для любого целого $m \geq 2$ и, более обобщенно, алгебраические соотношения со значениями гамма-функции в рациональных точках, что предсказано гипотезой Порлиха–Ланга (см. в [3] точную формулировку). До сих пор известна лишь иррациональность $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1/3)$, $\Gamma(1/4)$ и $\Gamma(1/6)$ (а в действительности они трансцендентны (см. [4])). В настоящей статье мы строим хорошие рациональные приближения не к значениям самой гамма-функции, но к некоторым значениям бета-функции, которая определяется как $B(x, y) := \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$. Новых результатов в отношении арифметической природы значений $B(x, y)$ при $x, y \in \mathbb{Q}$ не найдено даже при том, что наши приближения вписываются в ныне классическую схему, развитую для аппроксимаций значений дзета-функций и, более обобщенно, периодов. Однако известно, что в особых случаях бета-значений справедлива гипотеза Порлиха–Ланга (см. классический результат Вольфарта–Вюстхольца [5]). При этом все еще важно найти новые методы в этой области.

Классическая стратегия доказательства иррациональности данного числа состоит в том, чтобы сначала построить хорошие явные функциональные рациональные приближения к некоторой функции, которые могут быть затем приспособлены к нашему числу.

Аппроксимации Эрмита–Паде – естественные кандидаты для построения функциональных рациональных приближений. Напомним, что для данного $\ell \geq 2$ и формального степенного ряда $F_1(z), \dots, F_\ell(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ существуют некоторые многочлены $P_{n,1}(z), \dots, P_{n,\ell}(z) \in \mathbb{C}[z]$ степени не большей чем n такие, что

$$P_{n,1}(z)F_1(z) + \dots + P_{n,\ell}(z)F_\ell(z)$$

имеет порядок по меньшей мере $\ell(n+1)$ в $z = 0$; и эти многочлены называются диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде $[n, \dots, n]$ к $F_1(z), \dots, F_\ell(z)$ в $z = 0$.

Однако в случае гамма-функции не совсем ясно, в какой точке такие приближения должны быть построены. Обычно вычисляют аппроксимации Паде функции $\Gamma(1+x)$ в $x = 0$, где она голоморфна. Однако ее n -й коэффициент Тейлора при $x = 0$ является многочленом от $\gamma, \zeta(2), \dots, \zeta(n)$ и, таким образом, является предположительно трансцендентным числом; что будет в лучшем случае давать какие-то приближения к $\Gamma(1/m)$ через эти значения, которые, вероятно, бесполезны с диофантовой точки зрения. Другая возможность – это вычислить Паде-аппроксимации $\Gamma(x)$ при $x = \infty$. Однако есть некоторые вопросы. Действительно, эта функция не является голоморфной на бесконечности и даже не имеет асимптотического разложения по степеням $1/x$. Мы можем избавиться от дополнительного множите-

ля $x^{x+1/2}e^{-x}$ в формуле Стирлинга, но за счет рассмотрения частного функций, связанных с гамма-функцией, таких, как

$$R(x, a) := \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(x+a)\Gamma(x-a)} = \frac{B(x, a)}{B(x-a, a)}.$$

Это и является поводом к переходу от гамма-функции к бета-функции в настоящей работе. Рамануджан нашел явную цепную дробь для $R(x, a)$ (см. [6], [7]), что эквивалентно явному построению аппроксимаций Паде расходящегося ряда Тейлора для $R(x, a)$ при $x = \infty$. Основным результатом настоящей работы является обобщение этого факта, и, понятно, предлагается новое доказательство разложения Рамануджана в цепную дробь $R(x, a)$.

Опишем теперь нашу конструкцию. Допустим, что для любого $\ell \geq 2$ комплексные числа $a, b_1, \dots, b_\ell$ являются такими, что $b_i - b_j \notin \mathbb{Z}$ для любого $i \neq j$. Напомним определение символа Похгаммера: для любого $x \in \mathbb{C}$ $(x)_0 = 1$ и $(x)_n = x(x+1) \cdots (x+n-1)$ при $n \geq 1$. Определим контурный интеграл

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) := (-1)^{\ell(n+1)+1} \frac{(n!)^{\ell-1}}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_n} \frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} \cdot \frac{(1-z-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (z-x+b_j-n)_{n+1}} dz. \quad (1)$$

Множитель $(n!)^{\ell-1}$ является арифметической нормировкой и $\mathbf{b}$ означает набор $b_1, \dots, b_\ell$. Замкнутый прямой простой контур $\mathcal{C}_n$ окружает нули $x + b_j + k$, $k = 0, \dots, n$, многочлена $\prod_{j=1}^{\ell} (z-x-b_j-n)_{n+1}$, которые все различны; но не полюсы $\Gamma(z)/\Gamma(z+a)$. Это возможно, в частности, если $x - b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $j = 1, \dots, \ell$, что мы и будем считать с этого момента, и $I_n(x, a, \mathbf{b})$ является аналитическим при любом таком x (в действительности $I_n(x, a, \mathbf{b})$, являясь аналитическим в большей области, определение которой зависит от n).

Воспользуемся интегралом $I_n(x, a, \mathbf{b})$, чтобы построить при $x = \infty$ диагональные приближения Эрмита–Паде к рядам Тейлора функций

$$B(x - b_j, a) := \frac{\Gamma(a)\Gamma(x - b_j)}{\Gamma(x + a - b_j)}, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Заметим, что $B(x - b_j, a)$ определены по меньшей мере для всех x таких, что $x - b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $j = 1, \dots, \ell$, но не мероморфны при $x = \infty$. Они имеют там (расходящиеся) асимптотические разложения вида $\sum_{n \geq 0} c_{j,n}/x^{n+a+1}$ при $x \rightarrow \infty$ по крайней мере в полуплоскостях

$$\mathcal{P}_j := \{x : \operatorname{Re}(x) > \max(\operatorname{Re}(b_j), \operatorname{Re}(b_j - a))\}.$$

Обозначим через

$$\mathcal{P} := \{x : \operatorname{Re}(x) > \max(\operatorname{Re}(b_1), \operatorname{Re}(b_1 - a), \dots, \operatorname{Re}(b_\ell), \operatorname{Re}(b_\ell - a))\}$$

полуплоскость, которая определяется как пересечение $\mathcal{P}_j$, $j = 1, \dots, \ell$. Для простоты рассмотрим асимптотические разложения при $x \rightarrow \infty$ на $\mathcal{P}$.

По определению аппроксимации Паде определяются для (формальных) рядов вида

$$\sum_{n \geq 0} \frac{c_{j,n}}{x^{n+a+1}}.$$

Строго говоря, мы должны освободиться от множителя $1/x^a$ нормировкой функции

$$\frac{B(x - b_j, a)}{B(x - a, a)},$$

или, скажем, $x^a B(x - b_j, a)$. Мы не будем явно выбирать такую нормировку в теореме 1, потому что контекст ясен. Тем не менее мы выберем в следствии 1 в качестве нормировочного множителя $1/B(x - a, a) := \Gamma(x)/(\Gamma(a)\Gamma(x - a))$. Задавая формальный ряд Лорана или асимптотическое разложение $\sum_{n \geq -N} d_n/x^{a+n}$, положим, что это $O(1/x^{a+m+1})$, если $d_{-N} = d_{-N-1} = \dots = d_m = 0$.

Для любых $j = 1, \dots, \ell$ определим теперь многочлен степени n от x :

$$P_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) := (-1)^{\ell(n+1)+1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^{\ell-2} (x - b_j)_k (1 - x + b_j - a)_{n-k}}{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (k - b_j + b_p - n)_{n+1}}. \quad (2)$$

Если a целое, то $B(x - b_j, a)$ являются рациональными функциями, и этот случай не представляет для нас интереса. С этого момента мы предполагаем, что $a \notin \mathbb{Z}$, даже если некоторые из результатов ниже могут быть верны, когда $a \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 1. (i) Для любого $x - b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $j = 1, \dots, \ell$, справедливо тождество

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{\ell} P_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) \quad (3)$$

и асимптотическое разложение этой функции есть $O(1/x^{a+(\ell-1)(n+1)})$ при $x \rightarrow \infty$ на $\mathcal{P}$.

В частности, полиномы $P_{n,1}(x, a, \mathbf{b}), \dots, P_{n,\ell}(x, a, \mathbf{b})$ являются диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде $[n, \dots, n]$ формальных рядов Тейлора (нормированных) функций $B(a, x - b_1), \dots, B(a, x - b_\ell)$ при $x = \infty$.

(ii) Для любого x такого, что $\operatorname{Re}(x) > \max_j \operatorname{Re}(b_j)$, и при $(\ell - 1)(n + 1) > -\operatorname{Re}(a)$ имеем

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = \frac{(1 - a)_n}{n!} \int_{[0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-b_j-1} (1 - u_j)^n}{(1 - u_1 \dots u_\ell)^{n-a+1}} du_1 \dots du_\ell. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ограничения в (ii) на x , n , a и на b_j достаточны для того, чтобы обе стороны (4) были определены одновременно. Они могут быть смягчены.

Мы представим больше подробностей для случая $\ell = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = a$ теоремы 1. Определим два многочлена степени n от x в $\mathbb{Q}(a)[x]$:

$$P_n(x, a) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x - a)_k (1 - x)_{n-k}}{(k - a - n)_{n+1}}, \quad Q_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x)_k (1 - x - a)_{n-k}}{(k + a - n)_{n+1}},$$

которые равны $P_{n,2}(x, a, 0, a)$ и $-P_{n,1}(x, a, 0, a)$ соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. (i) При $x \rightarrow \infty$ на полуплоскости $\{x : \operatorname{Re}(x) > |\operatorname{Re}(a)|\}$ имеем

$$Q_n(x, a) R(x, a) - P_n(x, a) = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right). \quad (5)$$

В частности, $P_n(x, a)/Q_n(x, a)$ есть n -я диагональная Паде аппроксимация $[n/n]$ ряда Тейлора отношения Рамануджана $R(x, a)$ при $x = \infty$.

(ii) Последовательности $(P_n(x, a))_{n \geq 0}$ и $(Q_n(x, a))_{n \geq 0}$ удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению порядка 2

$$U_{n+2} = \frac{(2n+3)(2x-1)}{(n-a+2)(n+a+2)} U_{n+1} + \frac{(n-a+1)(n+a+1)}{(n-a+2)(n+a+2)} U_n. \quad (6)$$

Рекуррентное соотношение (6) может быть истолковано следующим образом: мы имеем “тождество” с цепной дробью

$$R(x, a) \approx 1 - \frac{2a^2}{2x-1+a^2} + \frac{(a^2-1)^2}{6x-3} + \frac{(a^2-4)^2}{10x-5} + \dots + \frac{(a^2-m^2)^2}{(2m+1)(2x-1)} + \dots \quad (7)$$

Для любого $n \geq 0$ n -е приближение цепной дроби есть $P_n(x, a)/Q_n(x, a)$ и $\approx$ значит точно (5). Эта цепная дробь является в целом рамануджановской [6] (см. п. 3.1 для деталей), так что теорема 1 – это действительно обобщение работы Рамануджана, как и утверждалось выше.

В принципе, диагональные аппроксимации Паде могут обеспечить эффективные численные приближения к значениям основной функции, т.е. мы можем иметь поточечно предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n/n]_f(x) = f(x)$. Естественно ожидать, что в подходящей области можно заменить $\approx$ в (7) равенством для любого заданного x . Это не всегда так в настоящей ситуации. Например, в п. 3.2 мы покажем, что для всех n и $a \notin \mathbb{Z}$ имеем

$$\frac{P_n(1/2, a)}{Q_n(1/2, a)} = (-1)^{n+1},$$

что, понятно, не сходится к

$$\frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1/2+a)\Gamma(1/2-a)} = \cos(\pi a).$$

Однако этот пример является экстремальным, так как известно, что мы имеем поточечную сходимость в (7), где $\operatorname{Re}(x) > 1/2$; см. п. 3.1.

Подобный феномен несходимости случается при более общей постановке теоремы 1. Мы не пытались выяснить, когда мы имеем поточечную сходимость, поскольку получаемые численные приближения априори слишком медленны для какого-либо использования. Вместо этого мы покажем, как ускорить сходимость. Для этого заменим x на $x + rn$ (для некоторого нового фиксированного целого параметра $r \geq 1$) и получим, что

$$B(x + rn - b_j, a) = \frac{(x - b_j)_{rn}}{(x + a - b_j)_{rn}} B(x - b_j, a).$$

Теперь положим

$$\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) = \frac{(x - b_j)_{rn}}{(x + a - b_j)_{rn}} P_{n,j}(x + rn, a, \mathbf{b}); \quad (8)$$

это уже не многочлен от x , но он принадлежит $\mathbb{Q}(x, a)$.

ТЕОРЕМА 2. Для любых x, n таких, что $rn > \max_j \operatorname{Re}(b_j - x)$, и $x - b_j$ не из $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ (для всех $j = 1, \dots, \ell$), имеем

$$\sum_{j=1}^{\ell} \tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) = \frac{(1-a)_n}{n!} \int_{[0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x+rn-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_\ell)^{n-a+1}} du_1 \dots du_\ell. \quad (9)$$

Для любых $\ell \geq 2, r \geq 1$ пусть ρ – единственное число из $(0, 1)$ такое, что

$$r\rho^\ell - r + \rho \frac{\rho^{\ell-1} - 1}{\rho - 1} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{j=1}^{\ell} \tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) \right|^{1/n} = \frac{\rho^{r\ell} (1-\rho)^\ell}{1-\rho^\ell} < 1. \quad (10)$$

Для любых $\ell \geq 2$, $r \geq 1$ пусть η – единственное число из $(0, 1)$ такое, что

$$\frac{(r + \eta)(1 - \eta)^\ell}{\eta^\ell(r + \eta - 1)} = 1.$$

Тогда для любого $j \in \{1, \dots, \ell\}$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \leq \frac{(r + \eta)^r}{(1 - \eta)^\ell(r + \eta - 1)^{r-1}}. \quad (11)$$

Если ℓ четное, то пределом является $\limsup$, и в (11) имеем равенство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условий на x и n достаточно, чтобы обеспечить сходимость интеграла. Можно отделить x от n в условии $rn > \max_j \operatorname{Re}(b_j - x)$, предполагая более сильные условия: $\operatorname{Re}(x) > 0$ и $rn \geq \max_j \operatorname{Re}(b_j)$.

Если ℓ нечетное, метод, дающий равенство в (11) для ℓ четного, не работает, и это открытая проблема, определить точную скорость роста каждого $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ при $n \rightarrow \infty$. Мы обсудим это после доказательства теоремы 2.

Снова выделим случай $\ell = 2$, $b_1 = 0$, $b_2 = a$. В обозначениях следствия 1 и в соответствии с (8) положим

$$\tilde{P}_n(x, a) = \frac{(x - a)_{rn}}{(x)_{rn}} P_n(x + rn, a), \quad \tilde{Q}_n(x, a) = \frac{(x)_{rn}}{(x + a)_{rn}} Q_n(x + rn, a).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $r \geq 1$ пусть

$$\rho = \frac{\sqrt{4r^2 + 1} - 1}{2r} \in (0, 1).$$

(i) Для любого $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ при $n \rightarrow +\infty$

$$|\tilde{Q}_n(x, a)R(x, a) - \tilde{P}_n(x, a)| \sim \left(\frac{\rho^{2r}(1 - \rho)}{1 + \rho} \right)^{n+o(n)} \rightarrow 0. \quad (12)$$

(ii) Для любого $x \in \mathbb{C}$ при $n \rightarrow +\infty$

$$|\tilde{Q}_n(x, a)| \sim \left(\frac{1 + \rho}{\rho^{2r}(1 - \rho)} \right)^{n+o(n)} \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

(iii) При $r = 1$ функция $R(x, a)$ может быть представлена быстро сходящейся цепной дробью с элементами из $\mathbb{Q}[x, a]$, у которой n -е приближение – это $\tilde{P}_n(x, a)/\tilde{Q}_n(x, a)$.

Многочлены $\tilde{P}_n(x, a)$ и $\tilde{Q}_n(x, a)$ являются решениями линейного рекуррентного соотношения конечного порядка с коэффициентами от n , x , a , которые также зависят от r (см. начало раздела 4). Мы не знаем, как записать в явном виде этот рекуррентный процесс, если мы не указываем значение r . Мы показываем в разделе 4 это рекуррентное соотношение порядка 2 для случая $r = 1$. Вместе с (i) это немедленно приводит к сходящейся цепной дроби, упомянутой в (ii), n -е приближение которой – это $\tilde{P}_n(x, a)/\tilde{Q}_n(x, a)$. В качестве иллюстрации запишем цепную дробь для $x = 1/3$, $a = 2/3$. В этом случае $(\tilde{P}_n(x, a))_{n \geq 0}$ и $(\tilde{Q}_n(x, a))_{n \geq 0}$ удовлетворяют соотношениям

$$U_{n+2} = \frac{s(n)}{r(n)} U_{n+1} + \frac{t(n)}{r(n)} U_n,$$

где

$$\begin{aligned} r(n) &= 3(3n+8)(15n+13)(3n+4)(n+2), \\ s(n) &= 4455n^4 + 23166n^3 + 43668n^2 + 35199n + 10204, \\ t(n) &= (3n+5)(3n-1)(3n+1)(15n+28). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем сходящуюся цепную дробь

$$-\frac{\Gamma(1/3)^3}{2\pi\sqrt{3}} = \frac{\Gamma(1/3)^2}{\Gamma(-1/3)} = 1 + \frac{104}{s(-1)} + \frac{r(-1)t(0)}{s(0)} + \dots + \frac{r(m-1)t(m)}{s(m)} + \dots,$$

скорость сходимости которой представлена в следствии 2, (ii), при $r = 1$.

В [8] авторы строят совместные аппроксимации Паде типа II к функциям вида $B(a_j, x)$. Они не требуют большого порядка приближений в $x = \infty$, но взамен упраздняются аппроксимирующие формы во многих различных фиксированных точках. Этот подход не пересекается с нашим. Сошлемся также на [2], где построены численные приближения значений $\Gamma(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, основанные на аппроксимациях Паде рядов вида $\sum_{n \geq 0} \Gamma(n + \alpha)x^n$; приближения к значениям гамма-функции получаются очень косвенным путем, а не как в настоящей статье. Сошлемся также на [1], где построены численные рациональные приближения к значениям $\Gamma(a/b)^b$, a, b целые; построение включает в себя интеграл, аналогичный $I_n(x, a, \mathbf{b})$, но никакой интерпретации с точки зрения приближения Паде не дается. Также представлена цепная дробь для периода $\Gamma(1/3)^3$.

2. Доказательство результатов

2.1. Доказательство теоремы 1. Поскольку a не целое, полюсы подынтегральной функции $I_n(x, a, \mathbf{b})$ простые. По теореме вычетов отсюда легко получить

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{\ell} P_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a)$$

для любого x такого, что $x - b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $j = 1, \dots, \ell$, где $P_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ – многочлены степени n от x , определенные во введении в (2).

Для доказательства других утверждений, найдем сначала другое выражение для $I_n(x, a, \mathbf{b})$. Определим интеграл

$$K(N) := (-1)^{\ell(n+1)+1} \frac{(n!)^{\ell-1}}{2i\pi} \int_{\tilde{\mathcal{C}}_N} \frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} \cdot \frac{(1-z-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (z-x+b_j-n)_{n+1}} dz$$

по окружности $\tilde{\mathcal{C}}_N$ с центром в 0 и радиусом в половину целого числа $N + \eta$ (где $\eta \in (0, 1)$ зависит от a и b_j , но не от N) и такой, что окружность не проходит через полюсы подынтегральной функции. С помощью стандартных оценок, основанных на формуле Стирлинга (и формулы дополнений, когда z закрывается к отрицательной оси), получаем оценку

$$\left| \frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} \cdot \frac{(1-z-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (z-x+b_j-n)_{n+1}} \right| \ll \frac{1}{|N|^{(n+1)(\ell-1)+\operatorname{Re}(a)+1}}$$

для $z \in \tilde{\mathcal{C}}_N$ при $N \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\lim_{N \rightarrow +\infty} K(N) = 0$ при условии, что $(\ell-1)(n+1) > -\operatorname{Re}(a)$. Следовательно, при выполнении этого условия на n сумма остатков по всем полюсам подынтегральной функции равна 0. Другими словами,

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = (-1)^{\ell(n+1)} (n!)^{\ell-1} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Residue} \left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} \cdot \frac{(1-z-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (z-x+b_j-n)_{n+1}}, z = -k \right).$$

Полюсы, включенные в эту формулу, это те полюсы $\Gamma(z)$, которые соответствуют $-k$ (отрицательным целым), являются простыми и с остатком $(-1)^k/k!$.

После некоторых упрощений получаем, что если $(\ell - 1)(n + 1) > -\operatorname{Re}(a)$, то

$$\begin{aligned} I_n(x, a, \mathbf{b}) &= (-1)^{\ell(n+1)} (n!)^{\ell-1} (1-a)_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-a+1)_k}{k! \prod_{j=1}^{\ell} (k+x-b_j)_{n+1}} \\ &= \frac{(n!)^{\ell-1} (1-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell} (x-b_j)_{n+1}} \cdot {}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} n-a+1, x-b_1, \dots, x-b_{\ell} \\ n+x-b_1+1, \dots, n+x-b_{\ell}+1 \end{matrix}; 1 \right]. \end{aligned}$$

(Последнее равенство является просто определением гипергеометрического ряда.)

Используем теперь классическое интегральное представление таких рядов, чтобы получить

$$I_n(x, a, \mathbf{b}) = \frac{(1-a)_n}{n!} \int_{[0,1]^{\ell}} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_{\ell})^{n-a+1}} du_1 \dots du_{\ell}$$

для любого $x \in \mathcal{P}$ при условии $(\ell - 1)(n + 1) > -\operatorname{Re}(a)$. При этом же условии на n мы можем ослабить условие $x \in \mathcal{P}$ до $\operatorname{Re}(x) > \max_j \operatorname{Re}(b_j)$ аналитическим продолжением обеих сторон тождества.

Поскольку каждая функция $B(x - b_j, a)$ имеет асимптотическое разложение

$$\sum_{m \geq 0} \frac{c_{j,m}}{x^{m+a}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty$$

в $\mathcal{P}$, то $I_n(x, a, \mathbf{b})$ также имеет асимптотическое разложение вида $\sum_{m \geq -n} C_m/x^{m+a}$. Теперь докажем, что

$$C_{-n} = C_{-n+1} = \dots = C_{(\ell-1)(n+1)-1} = 0.$$

Допустим, что x является действительным числом, и положим $A = \operatorname{Re}(a)$, $B_j = \operatorname{Re}(b_j)$. Для любых $u_1, \dots, u_{\ell} \in [0, 1]$ имеем

$$(1 - u_1 \dots u_{\ell})^{\ell} \geq (1 - u_1) \dots (1 - u_{\ell})$$

так, что

$$\begin{aligned} &\left| \int_{[0,1]^{\ell}} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_{\ell})^{n-a+1}} du_1 \dots du_{\ell} \right| \\ &\leq \int_{[0,1]^{\ell}} \prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-B_j-1} (1-u_j)^{n-(n-A+1)/\ell} du_j = \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\Gamma(x-B_j) \Gamma(n-(n-A+1)/\ell+1)}{\Gamma(x-B_j+n-(n-A+1)/\ell+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$|I_n(x, a, \mathbf{b})| \leq \left| \frac{(1-a)_n}{n!} \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\Gamma(x-B_j) \Gamma(n-(n-A+1)/\ell+1)}{\Gamma(x-B_j+n-(n-A+1)/\ell+1)} \right|. \quad (14)$$

При $x \rightarrow +\infty$, $x > 0$ формула Стирлинга показывает, что для любых комплексных чисел α , β имеем

$$\left| \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)} \right| \ll \frac{1}{x^{\operatorname{Re}(\beta-\alpha)}}.$$

Применяя эту оценку к правой стороне соотношения (14), видим, что это $O(1/x^{(\ell-1)(n+1)+A})$ при $x \rightarrow +\infty$. Теперь, если через M обозначить наименьшее целое число такое, что $C_M \neq 0$ в асимптотическом разложении $I_n(x, a, \mathbf{b})$ в $\mathcal{P}$, имеем

$$\left| \frac{1}{x^{M+a}} \right| \ll \frac{1}{x^{(\ell-1)(n+1)+A}}$$

при $x \rightarrow +\infty$, $x > 0$, где неявная константа не зависит от x . Так как $|x^a| = x^A$ при $x > 0$, это обеспечивает $M \geq (\ell - 1)(n + 1)$, как и ожидалось.

Таким образом, мы доказали, что асимптотическое разложение

$$\sum_{j=1}^{\ell} P_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a)$$

есть $O(1/x^{(\ell-1)(n+1)+a})$ при $x \rightarrow \infty$ в $\mathcal{P}$. Сошлемся на [9; § 2] для объяснения того, почему это означает, что полиномы $P_{n,1}(x, a, \mathbf{b}), \dots, P_{n,\ell}(x, a, \mathbf{b})$ являются диагональными аппроксимациями Эрмита–Паде $[n, \dots, n]$ формальных рядов Тейлора при $x = \infty$ (нормированных) функций $B(a, x - b_1), \dots, B(a, x - b_\ell)$.

2.2. Доказательство следствия 1. Утверждение (i) является непосредственным следствием теоремы 1. Чтобы доказать (ii), применим алгоритм Цайльбергера на $P_n(x, a)$ и $Q_n(x, a)$: мы видим, что они удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (6).

2.3. Доказательство теоремы 2. Уравнение (9) является непосредственным следствием уравнений (3) и (4) с $x + rn$ вместо x .

Стандартным образом получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{[0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x+rn-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_\ell)^{n-a+1}} du_1 \dots du_\ell \right|^{1/n} = \sup_{(u_1, \dots, u_\ell) \in [0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^r (1-u_j)}{1-u_1 \dots u_\ell}.$$

Этот супремум достигается на диагонали $u_1 = \dots = u_\ell = \rho$, где ρ – единственное число в $(0, 1)$ такое, что

$$r\rho^\ell - r + \rho \frac{\rho^{\ell-1} - 1}{\rho - 1} = 0.$$

(Заметим, что для фиксированного ℓ имеем $\rho = 1 - (\ell - 1)/(\ell r) + O(1/r^2)$ при $r \rightarrow +\infty$.) См. [10] для более подробной информации об этом соотношении. Таким образом, имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{[0,1]^\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{x-b_j-1} (1-u_j)^n}{(1-u_1 \dots u_\ell)^{n-a+1}} du_1 \dots du_\ell \right|^{1/n} = \frac{\rho^{r\ell} (1-\rho)^\ell}{1-\rho^\ell} = \frac{\rho^{r\ell} (1-\rho)^{\ell-1}}{1+\rho+\dots+\rho^{\ell-1}} < 1. \quad (15)$$

Для фиксированного ℓ имеем

$$\frac{\rho^{r\ell} (1-\rho)^\ell}{1-\rho^\ell} \sim \frac{\ell^\ell}{(\ell+1)^{\ell+1}} \cdot \frac{1}{e^\ell r^\ell} \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

Укажем теперь, как оценить $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ при $n \rightarrow +\infty$. Напомним, что

$$\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) = \frac{(x)_{rn}}{(x+a)_{rn}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^{\ell-2} (x+rn-b_j)_k (1-x-rn+b_j-a)_{n-k}}{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (k-b_j+b_p-n)_{n+1}} \quad (16)$$

определено для любого $x \in \mathbb{C}$.

Сначала предположим, что ℓ четное. По формуле Стирлинга получим, что

$$\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) = c_n(x, a, \mathbf{b}) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k ((r-1)n+k)_{n-k}}{n!}, \quad (17)$$

где $|c_n(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$. Чтобы доказать (17), важно, чтобы сумма имела положительные слагаемые (тот факт, что ℓ четное, неявно здесь используется), и к тому же

этот факт даже позволяет оценить эту сумму точно с помощью дискретного метода Лапласа. Сошлемся на [10] или [11], где приведены детали в подобных ситуациях. Сначала заменим k на tn при $t \in [0, 1]$ и определяем асимптотическое поведение

$$\binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k((r-1)n+k)_{n-k}}{n!}$$

при n , стремящемся к $+\infty$. По формуле Стирлинга

$$\binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k((r-1)n+k)_{n-k}}{n!} = d_n(t) \left(\frac{(r+t)^{r+t}}{t^{\ell t}(1-t)^{\ell(1-t)}(r+t-1)^{r+t-1}} \right)^n,$$

где $d_n(t)^{1/n} \rightarrow 1$. Взяв логарифмические производные для упрощения вычислений, докажем, что

$$\varphi(t) := \frac{(r+t)^{r+t}}{t^{\ell t}(1-t)^{\ell(1-t)}(r+t-1)^{r+t-1}}$$

имеет единственный максимум на $(0, 1)$ в точке $t = \eta$, где η – единственное число на $(0, 1)$ такое, что

$$\frac{(\eta+r)(1-\eta)^\ell}{\eta^\ell(\eta+r-1)} = 1.$$

(Для фиксированного ℓ $\eta = 1/2 + 1/(4\ell r) + O(1/r^2)$ при $r \rightarrow +\infty$.) Заключаем, что для четного ℓ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} = \varphi(\eta) = \frac{(r+\eta)^r}{(1-\eta)^\ell(r+\eta-1)^{r-1}} > 1. \quad (18)$$

Для фиксированного ℓ имеем $\varphi(\eta) \sim 2^\ell r$ при $r \rightarrow +\infty$.

Если ℓ нечетное, получить точное поведение $|\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|$ намного сложнее. Мы выскажем свои замечания по этому вопросу после доказательства. Тем не менее верхняя граница легко получается. Действительно, из (16) имеем

$$|\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})| \leq \left| \frac{(x)_{rn}}{(x+a)_{rn}} \right| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^{\ell-2} |(x+rn-b_j)_k(1-x-rn+b_j-a)_{n-k}|}{|\prod_{p=1, p \neq j}^\ell (k-b_j+b_p-n)_{n+1}|},$$

откуда получаем

$$|\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})| \leq \tilde{c}_n(x, a, \mathbf{b}) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k((r-1)n+k)_{n-k}}{n!},$$

где $|\tilde{c}_n(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \rightarrow 1$. Таким образом, заключаем как и выше, что

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \leq \varphi(\eta),$$

что завершает доказательство теоремы 2.

Объясним теперь трудности, возникающие из-за нечетности ℓ . Вычисление, аналогичное тому, что проводится для (17), формально ведет к

$$\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) \stackrel{?}{=} \hat{c}_n(x, a, \mathbf{b}) \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k}^\ell \frac{(rn)_k((r-1)n+k)_{n-k}}{n!}, \quad (19)$$

где $|\hat{c}_n(x, a, \mathbf{b})|^{1/n} \rightarrow 1$. Однако не ясно, справедливо ли соотношение (19), потому что сумма в его правой части является знакопеременной. Даже если (19) имеет место, получить точное

асимптотическое поведение этой суммы будет нелегко. Может быть, можно точно оценить $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$, применяя метод перевала после преобразования (16) в контурный интеграл:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) &= (n!)^{\ell-1} \frac{\Gamma(rn + x - b_j + a)}{\Gamma(rn + x - b_j)} \frac{(x)_{rn}}{(x+a)_{rn}} \\ &\times \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\Gamma(x + rn - b_j + t)\Gamma(t)}{\Gamma((r-1)n + t + a - b_j + x)\Gamma(t-n) \prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (t - b_j + b_p - n)_{n+1}} dt. \end{aligned}$$

Здесь C представляет собой замкнутый контур, который окружает точки $0, 1, \dots, n$, но не другие полюсы подынтегральной функции. Обычной процедурой явилась бы дальнейшая замена t на tn , применение формулы Стирлинга (как мы делали выше), затем следовало бы оценить критические точки и деформировать контур через эти точки, чтобы можно было применить метод перевала. Однако такой процесс включает в себя много технических тонкостей, и мы не пытались превратить эту процедуру в формальное доказательство, потому что это несущественно для потенциального применения. Действительно, несмотря на то, что здесь, по-видимому, нет интересных диофантовых приложений (см. п. 5.3), укажем, что верхней оценки для $|\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})|$ достаточно, когда применяется критерий линейной независимости Нестеренко (см. в [10] формулировку критерия), потому что в нашей ситуации мы знаем точную скорость убывания линейной формы от значений бета-функции.

2.4. Доказательство следствия 2. (i) Поскольку у нас $n \rightarrow +\infty$, предположение $rn > \max(\operatorname{Re}(-x), \operatorname{Re}(a-x))$ и $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ просто становится $x \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Из доказательства теоремы 2 видим, что при $\ell = 2$ $\rho = (\sqrt{4r^2 + 1} - 1)/(2r)$, и (15) дает (12).

(ii) Теперь докажем утверждение для $\tilde{Q}_n(x, a)$, определенное для любого $x \in \mathbb{C}$. Поскольку ℓ четное, по теореме 2 имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\tilde{Q}_n(x)|^{1/n} = \frac{(r+\eta)^r}{(1-\eta)^2(r+\eta-1)^{r-1}},$$

где η – единственное число на $(0, 1)$ такое, что

$$\frac{(\eta+r)(1-\eta)^2}{\eta^2(r+\eta-1)} = 1.$$

Решая это уравнение, получим $\eta = (1/2)\sqrt{4r^2 + 1} + (1/2) - r$ и, пользуясь соотношением $\eta = r\rho + (1/2) - r$, видим, что

$$\frac{(r+\eta)^r}{(1-\eta)^2(r+\eta-1)^{r-1}} = \frac{1+\rho}{\rho^{2r}(1-\rho)},$$

что завершает доказательство (13).

3. Замечания о цепной дроби (7)

3.1. Цепная дробь Рамануджана. Пусть x, α, β – комплексные числа и положим

$$Q := \frac{\Gamma((x+\alpha-\beta+1)/2)\Gamma((x-\alpha+\beta+1)/2)}{\Gamma((x+\alpha+\beta+1)/2)\Gamma((x-\alpha-\beta+1)/2)}.$$

В [6] Рамануджан утверждает, что если α или β является целым числом или если $\operatorname{Re}(x) > 0$, то

$$\frac{1-Q}{1+Q} = \left\lfloor \frac{\alpha\beta}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}{3x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\alpha^2-4)(\beta^2-4)}{5x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(\alpha^2-m^2)(\beta^2-m^2)}{(2m+1)x} \right\rfloor + \dots \quad (20)$$

См. [7] для доказательства. Если мы положим $\alpha = \beta = 2a$ и заменим x на $2x - 1$, то увидим, что

$$Q = \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(x-a)\Gamma(x+a)}$$

и что (20) не что иное, как цепная дробь (7) в замаскированной форме. В частности, цепная дробь в (7) сходится к $\Gamma(x)^2/(\Gamma(x-a)\Gamma(x+a))$, как только $\operatorname{Re}(x) > 1/2$. Случай $x = 1/2$ изучаемый в следующей главе, показывает, что мы не можем ожидать сходимости в более широкой области.

Цепная дробь Рамануджана может быть доказана из общего случая $\ell = 2$ в теореме 1. Получим аппроксимацию Паде функции

$$\frac{\Gamma(x-b_1)\Gamma(x+a-b_2)}{\Gamma(x+a-b_1)\Gamma(x-b_2)},$$

которая легко преобразуется в Рамануджаново Q частное.

3.2. Суммирование $P_n(1/2, a)$ и $Q_n(1/2, a)$. В этом пункте докажем, что $P_n(1/2, a) = (-1)^{n+1}Q_n(1/2, a)$. Напомним, что

$$P_n(x, a) = -\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x-a)_k(1-x)_{n-k}}{(k-a-n)_{n+1}}, \quad Q_n(x, a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(x)_k(1-x-a)_{n-k}}{(k+a-n)_{n+1}}$$

определены во введении в контексте следствия 1. В гипергеометрических обозначениях имеем

$$P_n(x, a) = -\frac{(1-x)_n}{(-a-n)_{n+1}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} -a-n, x-a, -n \\ x-n, -1-a \end{matrix}; 1 \right],$$

$$Q_n(x, a) = \frac{(1-x-a)_n}{(a-n)_{n+1}} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} a-n, -n, x \\ a+1, a-n+x \end{matrix}; 1 \right].$$

Вообще, эти гипергеометрические ряды не суммируются. Однако если $x = 1/2$, то оба они сбалансированы и могут суммироваться по формуле Диксона (см. [12; с. 52, (2.3.3.5)]). Отсюда получаем

$$P_n\left(\frac{1}{2}, a\right) = -\frac{2^{n+a}\Gamma((a+n+1)/2)^2\Gamma(-a-n)\cos((\pi/2)(a+n))}{\sqrt{\pi}\Gamma((1+a-n)/2)\Gamma((n-a)/2+1)\cos(\pi n)},$$

$$Q_n\left(\frac{1}{2}, a\right) = \frac{\sqrt{\pi}2^{n-a}\Gamma((a+n+1)/2)\Gamma(a-n)\cos(\pi a)}{\Gamma((1+a-n)/2)^2\Gamma((a+n)/2+1)\cos(\pi(a-n))}.$$

После некоторых упрощений (с участием формулы дополнений) получим, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $a \notin \mathbb{Z}$, имеем

$$\frac{P_n(1/2, a)}{Q_n(1/2, a)} = -\frac{2\sin((\pi/2)(n+1+a))\sin((\pi/2)(2+a-n))\sin((\pi/2)(1+2a-2n))}{\sin(\pi(n+1+a))\sin((\pi/2)(1+2n))\sin((\pi/2)(1+2a))} = (-1)^{n+1},$$

как и ожидалось.

4. Линейное рекуррентное соотношение, связанное со следствием 2

Алгоритм Цайльбергера может производить рекуррентные соотношения для $\tilde{P}_n(x, a)$ и $\tilde{Q}_n(x, a)$ для любого заданного значения r , но не тогда, когда r – это переменная. Причина заключается в том, что алгоритм считает, что, например, $\binom{2n}{2k}$ является гипергеометрическим значением (и, таким образом, может найти рекуррентное соотношение для $\sum_k \binom{2n}{2k}$), но не

$\binom{rn}{rk}$. По крайней мере, поскольку $\tilde{P}_n(x, a)$ и $\tilde{Q}_n(x, a)$ могут быть выражены в виде значений функции ${}_3F_2(z)$ в $z = 1$ с параметрами вида $u(x, a)n + v(x, a)$, известно, что они удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям порядка не более 3 с полиномиальными коэффициентами из $\mathbb{Q}[n, x, a]$ (которые зависят от r). Предположительно порядок всегда 2, но мы не можем доказать это для общего случая.

Например, при $r = 1$ алгоритм Цайльбергера легко вычисляет линейное рекуррентное соотношение порядка 2, которому удовлетворяют $\tilde{P}_n(x, a)$ и $\tilde{Q}_n(x, a)$. Обе последовательности удовлетворяют соотношению

$$p_n(x, a)U_{n+2} = q_n(x, a)U_{n+1} + r_n(x, a)U_n,$$

где

$$\begin{aligned} p_n(x, a) &= (x + n + 1)(n + 2 + a)(n + 2 - a)(x + 1 + n + a)(a^2 - 5n^2 - 6nx - 2x^2 - 4n - 2x - 1), \\ q_n(x, a) &= (x + n)(n + a + 1)(n + 1 - a)(x + n - a)(a^2 - 5n^2 - 6nx - 2x^2 - 14n - 8x - 10), \\ r_n(x, a) &= 55n^6 + (176x + 319)n^5 + (-31a^2 + 234x^2 + 852x + 744)n^4 \\ &\quad + (-56a^2x + 160x^3 - 130a^2 + 924x^2 + 1580x + 891)n^3 \\ &\quad + (9a^4 - 36a^2x^2 + 56x^4 - 180a^2x + 496x^3 - 204a^2 + 1300x^2 + 1394x + 579)n^2 \\ &\quad + (8a^4x - 8a^2x^3 + 8x^5 + 19a^4 - 84a^2x^2 + 128x^4 - 188a^2x \\ &\quad + 480x^3 - 143a^2 + 766x^2 + 582x + 196)n \\ &\quad - a^6 + 2a^4x^2 + 8a^4x - 12a^2x^3 + 12x^5 + 12a^4 - 46a^2x^2 + 66x^4 - 64a^2x \\ &\quad + 144x^3 - 39a^2 + 158x^2 + 92x + 28. \end{aligned}$$

В силу этого можно записать общую цепную дробь, сходящуюся к $\Gamma(x)^2/(\Gamma(x+a)\Gamma(x-a))$, но это не проясняет ситуацию. Заметим, что характеристическое уравнение этого рекуррентного соотношения есть $X^2 - 11X - 1 = 0$, решения которого – это $(11 - 5\sqrt{5})/2$ и $(11 + 5\sqrt{5})/2$. По теореме Пуанкаре–Перрона первое решение управляет асимптотическим поведением $\tilde{Q}_n(x, a)R(x, a) - \tilde{P}_n(x, a)$, а второе – поведением $\tilde{P}_n(x, a)$ и поведением $\tilde{Q}_n(x, a)$. Конечно, это соответствует скоростям сходимости из следствия 2.

5. Заключительные замечания

5.1. Немного гипергеометрии. В качестве побочного результата при доказательстве теоремы 1 мы доказали, что

$$\frac{(n!)^{\ell-1}(1-a)_n}{\prod_{j=1}^{\ell}(x-b_j)_{n+1}} \cdot {}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} n+1-a, x-b_1, \dots, x-b_{\ell} \\ n+x-b_1+1, \dots, n+x-b_{\ell}+1 \end{matrix}; 1 \right] = \sum_{j=1}^{\ell} P_{n,j}(x)B(x-b_j, a). \quad (21)$$

Для $n = 0$, это дает формулу суммирования

$${}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} 1-a, x-b_1, \dots, x-b_{\ell} \\ x-b_1+1, \dots, x-b_{\ell}+1 \end{matrix}; 1 \right] = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\prod_{j=1}^{\ell}(x-b_j)}{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell}(b_j - b_p)} \cdot B(x-b_j, a).$$

Эту формулу нетрудно доказать непосредственно. В самом деле, по определению

$${}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} 1-a, x-b_1, \dots, x-b_{\ell} \\ x-b_1+1, \dots, x-b_{\ell}+1 \end{matrix}; 1 \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-a)_k}{k!} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{\ell}(x-b_j)}{\prod_{j=1}^{\ell}(x-b_j+k)}. \quad (22)$$

Так как $b_i - b_j \notin \mathbb{Z}$, нули $k \mapsto \prod_{j=1}^{\ell} (x - b_j + k)$ являются простыми, и разложением по частичным дробям (от k) мы получаем, что ряд справа в (22) равен

$$\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (x - b_p)}{\prod_{p=1, p \neq j}^{\ell} (b_j - b_p)} \cdot {}_2F_1 \left[\begin{matrix} 1 - a, x - b_j \\ x - b_j + 1 \end{matrix}; 1 \right].$$

Заканчиваем применением формулы суммирования Гаусса ([12; с. 28, (1.7.6)]) и аналитическим продолжением. Более общее уравнение (21) может быть доказано по той же схеме. На самом деле, мы могли бы начать статью от этого гипергеометрического ряда вместо интеграла $I_n(x, a, \mathbf{b})$, но мы выбрали настоящий подход, поскольку этот вид интеграла (Барнесова типа) является классическим в теории аппроксимаций Паде и диофантовых аппроксимаций; см., например, [13]–[15].

5.2. Другой подход. Формулы, приведенные в предыдущем пункте, обеспечивают альтернативный подход к построению хороших численных приближений к значениям $B(x - b_j, a)$. Рассмотрим гипергеометрический ряд

$$\begin{aligned} J_n(x, a, \mathbf{b}) &:= \frac{(n!)^{\ell}}{\Gamma(sn + 1 - a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + 1 - a)}{k!} \cdot \frac{(k - sn + 1)_{sn}}{\prod_{j=1}^{\ell} (k + x - b_j)_{n+1}} \\ &= \frac{(n!)^{\ell}}{\prod_{j=1}^{\ell} (sn + x - b_j)_{n+1}} \cdot {}_{\ell+1}F_{\ell} \left[\begin{matrix} sn + 1 - a, sn + x - b_1, \dots, sn + x - b_{\ell} \\ (s + 1)n + x - b_1 + 1, \dots, (s + 1)n + x - b_{\ell} + 1 \end{matrix}; 1 \right], \end{aligned}$$

где s – такое целое число, что $(\ell - s)n + \ell > 1 - \operatorname{Re}(a)$, так что ряд сходится. Если $s = \ell$, то это предположение выполняется, если мы предполагаем, что $\operatorname{Re}(a) > -1$, так как $\ell \geq 2$. Множитель $(n!)^{\ell}/(sn)!$ является арифметической нормировкой, также мы могли бы выбрать $(n!)^{\ell-s}$. На первый взгляд, $J_n(x, a, \mathbf{b})$ довольно сильно отличается от ряда для $I_n(x, a, \mathbf{b})$: в числителе мы имеем $(k - sn + 1)_{sn}$ вместо $(k - a)_{n+1}$. Множитель $(k - sn + 1)_{sn}$ значит, что первые sn членов ряда равны 0 и что он должен быть “маленький” (см. п. 5.3).

Определим

$$Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p} (n!)^{\ell} (-x + b_j - p - sn)_{sn} (x - b_j)_p}{p! (n - p)! (1 - a)_{sn} (x + a - b_j)_p \prod_{q=1, q \neq j}^{\ell} (b_j - b_q - p)_{n+1}} \in \mathbb{Q}(x, a, b_1, \dots, b_{\ell}).$$

ТЕОРЕМА 3. *Имеем*

$$J_n(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{\ell} Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) = \int_{[0,1]^{\ell}} \frac{\prod_{j=1}^{\ell} u_j^{sn+x-b_j} (1 - u_j)^n}{(1 - u_1 \dots u_{\ell})^{sn+1-a}} du_1 \dots du_{\ell}.$$

Отметим, что на самом деле в этом интегральном выражении

$$J_n(x, a, \mathbf{b}) = \frac{n!}{(1 - a)_n} I_n(x + sn + 1, a - (s - 1)n, \mathbf{b}).$$

Таким образом, оба подхода по существу обеспечивают одинаковую информацию. Приведем теперь прямое доказательство теоремы 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Поскольку $s \leq n$, имеем разложение по частичным дробям (от k)

$$\frac{(k - sn)_{sn}}{\prod_{j=1}^{\ell} (k + x - b_j)_{n+1}} = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p} (-x + b_j - p - sn)_{sn}}{p! (n - p)! \prod_{q=1, q \neq j}^{\ell} (b_j - b_q - p)_{n+1}} \frac{1}{k + x - b_j + p}.$$

Следовательно,

$$J_n(x, a, \mathbf{b}) = \frac{1}{\Gamma(sn + 1 - a)} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{n-p} (n!)^\ell (-x + b_j - p - sn)_{sn}}{p! (n-p)! \prod_{q=1, q \neq j}^\ell (b_j - b_q - p)_{n+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k + 1 - a)}{k! (k + x - b_j + p)}.$$

Теперь с помощью формулы суммирования Гаусса получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(sn + 1 - a)} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k + 1 - a)}{k! (k + x - b_j + p)} \\ &= \frac{\Gamma(p + x - b_j) \Gamma(a)}{\Gamma(x - b + a - p) (1 - a)_{sn}} = \frac{(x - b_j)_p}{(x + a - b)_p (1 - a)_{sn}} B(x - b_j, a), \end{aligned}$$

так что

$$J_n(x, a, \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^\ell \left(\sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \frac{(n!)^\ell (-x + b_j - p - sn)_{sn} (x - b_j)_p}{p! (n-p)! (1 - a)_{sn} (x + a - b_j)_p \prod_{q=1, q \neq j}^\ell (b_j - b_q - p)_{n+1}} \right) B(x - b_j, a).$$

Это интегральное выражение является следствием того факта, что $J_n(x, a, b)$ является гипергеометрическим рядом.

5.3. Диофантовы вопросы. Гипергеометрические ряды или интегралы, как те, что изучаются в настоящей работе, широко применяются, в частности, при исследовании арифметической природы дзета-значений; см., например, [10], [16], [17]. В теореме 2 нетрудно доказать, что

$$\left| \sum_{j=1}^\ell \tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) \right| \ll \frac{1}{r^{\ell n + o(n)}} \quad \text{для любого } r,$$

где неявная константа не зависит от ℓ . Аналогично, в теореме 3 имеем

$$\left| \sum_{j=1}^\ell Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b}) B(x - b_j, a) \right| \ll \frac{1}{(es)^{(\ell-s)n + o(n)}} \quad \text{для любого } s < \ell.$$

Когда в качестве x , a и b_j выбираются рациональные числа, $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ и $Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ являются рациональными числами. К сожалению, оказывается, что общий знаменатель $\tilde{P}_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ -х и соответственно $Q_{n,j}(x, a, \mathbf{b})$ -х, слишком большой для результативного применения критерия линейной независимости Нестеренко. Даже в простом случае $x = 1$, $a = 1/2$, $b_j = -j/\ell$ оказывается, что мы не можем получить нетривиальную нижнюю оценку размерности вектора пространства над $\mathbb{Q}$ через $B(1/2, 1/\ell), \dots, B(1/2, (\ell - 1)/\ell)$. Мы не приводим никаких подробностей, потому что даже если бы мы могли получить нетривиальную нижнюю оценку для большей размерности, результат не был бы новым. В самом деле, результаты [5] о линейной независимости бета-значений позволяют получить точное значение этой размерности, как и предсказывает гипотеза Рорлиха–Ланга.

Список литературы

- [1] T. Rivoal, “Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels: le cas des puissances”, *Acta Arith.*, **142**:4 (2010), 347–365.
- [2] T. Rivoal, “Approximations rationnelles des valeurs de la fonction Gamma aux rationnels”, *J. Number Theory*, **130**:4 (2010), 944–955.

- [3] T. Rivoal, J. Roques, “Hadamard products of algebraic functions”, *J. Number Theory*, **145** (2014), 579–603.
- [4] M. Waldschmidt, “Transcendance de périodes: état des connaissances”, *Proc. Tunisian Math. Soc.*, **11** (2007), 89–116.
- [5] J. Wolfart, G. Wüstholz, “Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion an rationalen Stellen”, *Math. Ann.*, **273**:1 (1985), 1–15.
- [6] B. C. Berndt, *Ramanujan’s Notebooks*, Part II, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [7] L. Jacobsen, “Domains of validity for some of Ramanujan’s continued fraction formulas”, *J. Math. Anal. Appl.*, **143**:2 (1989), 412–437.
- [8] А. А. Кандаян, В. Н. Сорокин, “Многоточечные аппроксимации Эрмита–Паде бета-функций”, *Матем. заметки*, **87**:2 (2010), 217–232.
- [9] T. Rivoal, “Simultaneous polynomial approximations of the Lerch function”, *Canad. J. Math.*, **61**:6 (2009), 1341–1356.
- [10] K. Ball, T. Rivoal, “Irrationalité d’une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs”, *Invent. Math.*, **146**:1 (2001), 193–207.
- [11] R. J. McIntosh, “An Asymptotic formula for binomial sums”, *J. Number Theory*, **58**:1 (1996), 158–172.
- [12] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [13] Ю. В. Нестеренко, “О показателе иррациональности числа $\ln 2$ ”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 549–564.
- [14] T. Schneider, *Introduction aux nombres transcendants*, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [15] W. Zudilin, “Arithmetic of linear forms involving odd zeta values”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **16**:1 (2004), 251–291.
- [16] Е. М. Никишин, “Об иррациональности значений функций $F(x, s)$ ”, *Матем. сб.*, **109** (151):3 (7) (1979), 410–417.
- [17] T. Rivoal, “La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **331**:4 (2000), 267–270.