Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Чирский, Представление натуральных чисел слагаемыми определенного вида, *Совр. пробл. матем.*, 2017, выпуск 24, 81–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm70>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:44:52

Представление натуральных чисел слагаемыми определенного вида

В. Г. Чирский

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Статья посвящена задаче о представлении натурального числа в виде суммы слагаемых определенного вида. Эта задача имеет давнюю историю. С ней связаны многие замечательные результаты и нерешенные проблемы.

Современные компьютерные технологии вызывают особый интерес к некоторым частным случаям этой задачи. Например, в алгоритмах возведения в степень часто используется представление натуральных чисел в системе с двумя основаниями (DBNS – double base number system). В этой задаче получены асимптотические оценки для количества членов в разложении натурального числа таким способом и для наименьшего натурального числа, не представляемого заданным количеством слагаемых в системе с двумя основаниями.

В предлагаемой работе эти оценки значительно уточняются. Для этого используются очень точные оценки линейных форм от логарифмов, установленные Салиховым [1].

Введем необходимые обозначения. Пусть $P = \{p_1, \dots, p_t\}$ обозначает множество, состоящее из конечного числа простых чисел $p_1, \dots, p_t$. Пусть A обозначает множество произведений целых неотрицательных степеней чисел $p_1, \dots, p_t$. Множество $A_{\pm}$ определяется как $A \cup (-A)$.

Жарден и Наркевич [2] доказали, что не существует такого натурального числа k , что любое натуральное число n можно представить суммой не более чем k слагаемых из множества A .

Из теоремы Натансона [3] следует, что для любого натурального числа k существует бесконечное множество целых чисел n таких, что число k представляет собой наименьшее значение l , для которых имеет место представление

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_l, \quad a_1, a_2, \dots, a_l \in A_{\pm}.$$

Обозначим через $F(k)$ -наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы менее чем k слагаемых из множества A . Величина $F_{\pm}(k)$ определяется аналогичным образом для множества $A_{\pm}$. Исследуем задачу получения оценок для величин $F(k)$, $F_{\pm}(k)$. В работе [4] получены такие оценки для общего случая $P = \{p_1, \dots, p_t\}$.

ТЕОРЕМА 1 [4; теорема 2]. Пусть $P = \{p_1, \dots, p_t\}$ – конечное множество простых чисел и A – множество произведений целых неотрицательных степеней чисел из P . Пусть k – натуральное число. Пусть $F(k)$ обозначает наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы $\sum_{i=1}^k a_i$ с $a_i \in A \cup [0]$, а $F_{\pm}(k)$ обозначает наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы $\sum_{i=1}^k a_i$ с $a_i \in A_{\pm} \cup [0]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют число s , зависящее только от двух наименьших чисел из P , число C , зависящее только от ε , и абсолютная постоянная $C_{\pm}$ такие, что

- 1) $F(k) > k^{ck}$ для всех $k > 1$;
- 2) $F(k) \leq C(kt)^{(1+\varepsilon)kt}$ для всех $k > 1$;
- 3) $F_{\pm}(k) < \exp((kt)^{C_{\pm}})$ для всех $k > 1$.

Для упомянутой выше задачи возведения в степень часто актуально представление натуральных чисел в системе с двумя основаниями: 2 и 3.

Одна из важных проблем – получение асимптотической оценки длины представления числа n суммой слагаемых вида $2^a 3^b$ с неотрицательными целыми a и b . Для разложения используется «жадный» алгоритм, состоящий в том, что из числа n вычитается наибольшее число вида $2^a 3^b$ с неотрицательными целыми a и b . Затем с полученным числом производится та же процедура и т.д.

В работе [5] установлена следующая асимптотическая оценка.

ТЕОРЕМА 2 [5]. *Продолжительность работы приведенного выше алгоритма равна*

$$O\left(\frac{\log_2 n}{\log_2 \log_2 n}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

В доказательстве этой теоремы существенно использована теорема Тайдемана [6], в которой основную роль играет оценка линейной формы от логарифмов чисел 2 и 3. В работе [5] отмечено, что оценка для величины постоянной, подразумеваемой в этом асимптотическом соотношении, очень велика и далека от значений, получаемых при практических вычислениях.

Именно за счет использования очень точных оценок линейных форм от логарифмов чисел 2 и 3, установленных Салиховым [1], и удастся получить уточнение приведенных выше оценок.

Именно, в работе [7] доказано, что приведенное в теореме 2 асимптотическое соотношение выполняется при следующих условиях (формулируется несколько упрощенный и укороченный вариант теоремы из [7]).

ТЕОРЕМА 3 [7]. *При любом $C \geq 33/8$ и любом $\varepsilon > 0$ при $n \geq N(C, \varepsilon)$ продолжительность работы приведенного выше алгоритма не превосходит величины*

$$C_0 \frac{\ln n}{\ln \ln n},$$

где можно считать, что $C_0 = 6$.

Перейдем к уточнению оценок теоремы 1.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть A состоит из чисел вида $2^a 3^b$ с неотрицательными целыми a и b . Множество $A_{\pm}$ определяется, как $A \cup (-A)$. Обозначим через $F(k)(F_{\pm}(k))$ – наименьшее натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы менее чем k слагаемых из множества $A(A_{\pm})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число k_0 такое, что при $k > k_0$ выполняются неравенства*

$$\left(\frac{k}{6}\right)^{k/6} \leq F(k) \leq F_{\pm}(k) \leq (2k)^{(1+\varepsilon)2k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Постоянная k_0 в этой теореме не является эффективной. Результат с эффективной постоянной k_0 имеет значительно худшую оценку сверху вида $F_{\pm}(k) < \exp((2k)^{C_{\pm}})$. Поскольку объектом исследования являлось получение асимптотически наиболее точной оценки, требование эффективности постоянной опущено. Отметим, что улучшение известного результата достигнуто в оценке снизу величины $F(k)$ за счет того, что была использована теорема Салихова [1] об оценке линейной формы от $\ln 2, \ln 3$. Оценка $F(k) > k^{ck}$, полученная на основе теоремы Тайдемана, имеет значительно меньшую, чем $1/6$, величину (порядка 0.000001).

Перейдем к доказательству теоремы 4. Ввиду теоремы 3 количество слагаемых k в представлении числа n суммой слагаемых вида $2^a 3^b$ с неотрицательными целыми a и b удовлетворяет неравенству $k \geq 6 \ln n / \ln \ln n$, или $k \ln \ln n \geq 6 \ln n$, или $\ln(\ln n)^k \geq 6 \ln n$, откуда

$$(\ln n)^k \leq n^6.$$

Следовательно, используя неравенство $(1/6)k \ln \ln n \leq \ln n$, получаем

$$n \geq (\ln n)^{k/6} \geq \left(\frac{1}{6} k \ln \ln n\right)^{k/6} \geq \left(\frac{1}{6} k\right)^{k/6}.$$

Таким образом, $F(k)$, т.е. наименьшее число, которое нельзя представить в виде суммы менее чем k слагаемых из множества A , удовлетворяет неравенству

$$F(k) \geq \left(\frac{1}{6} k\right)^{k/6}.$$

Первая часть теоремы доказана.

Отметим очевидное неравенство $F(k) \leq F_{\pm}(k)$ (если удалось представить число в виде суммы слагаемых из A , то мы получили представление и в виде суммы слагаемых из $A_{\pm}$).

При получении оценки сверху для величины $F_{\pm}(k)$ мы следуем доказательству теоремы 3 из работы [4]. В нем использована теорема Эвертса о подпространствах [8], которую мы сформулируем в следующем виде.

ЛЕММА [8; следствие 1]. Пусть числа c, d удовлетворяют неравенствам $c > 0, 0 \leq d < 1$. Пусть $S_0 = \{2, 3\}$, и пусть l – натуральное число. Тогда существует лишь конечное число наборов целых чисел $(x_0, x_1, \dots, x_l)$ таких, что $\text{НОД}(x_0, x_1, \dots, x_l) = 1$ и выполняется равенство

$$x_0 + x_1 + \dots + x_l = 0,$$

а для любого собственного непустого подмножества $\{i_0, i_1, \dots, i_s\}$ множества $\{0, 1, \dots, l\}$ имеет место неравенство

$$x_{i_0} + x_{i_1} + \dots + x_{i_s} \neq 0$$

и, кроме того,

$$\prod_{j=0}^l (|x_j| |x_j|_2 |x_j|_3) \leq c \left(\max_{0 \leq j \leq l} |x_j| \right)^d.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Символы $|x_j|_2, |x_j|_3$ обозначают, соответственно, 2-адическое и 3-адическое нормирования целого числа x_j . Напомним, что если p – простое число и целое число x делится в точности на p^k , то $|x|_p = p^{-k}$.

Пусть n – целое число, не делящееся ни на 2, ни на 3, и пусть

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_l, \quad a_1, a_2, \dots, a_l \in A_{\pm}, \quad l \leq k.$$

Можно считать, что l минимальное, так что любая сумма, состоящая не из всех слагаемых $a_1, a_2, \dots, a_l$, не обращается в нуль. По определению множества $A_{\pm}$ $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_l) = 1$. Применим лемму с $c = 1, d = 1/2$ к уравнению $a_0 + a_1 + \dots + a_l = 0$, где $a_0 = -n$. Следовательно, для заданного k существует лишь конечное число наборов целых чисел $(n, a_1, a_2, \dots, a_l)$ с условиями, что n – целое число, не делящееся ни на 2, ни на 3, и $l \geq k$ таких, что

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_l, \quad a_1, a_2, \dots, a_l \in A_{\pm}, \quad n \leq \left(\max_{0 \leq j \leq l} |a_j| \right)^{1/2}, \quad n^2 \leq \max_{0 \leq j \leq l} |a_j|.$$

Пусть N_0 обозначает наибольшее из чисел $|n|$ для всех таких наборов (если таких наборов нет, то $N_0 = 0$). Рассмотрим натуральное число $n > N_0$, не делящееся ни на 2, ни на 3. Тогда для любого представления числа n в виде

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_l, \quad a_1, a_2, \dots, a_l \in A_{\pm}, \quad l \leq k,$$

выполняются неравенства

$$|a_j| < n^2, \quad j = 1, \dots, l.$$

Представим $a_j = \pm 2^{s_1} 3^{s_2}$ и получим неравенство $\max\{s_1, s_2\} < 2 \log_2 n$. Количество таких возможных наборов $(a_1, a_2, \dots, a_l)$ для заданного l не превосходит числа $2^l (2 \log_2 n)^{2l}$, а возможных наборов $(a_1, a_2, \dots, a_l)$, $l \leq k$, не больше чем $2 \cdot 2^k (2 \log_2 n)^{2k}$. Тогда при $N > N_0$ существует не более чем $N_0 + 2 \cdot 2^k (2 \log_2 N)^{2k}$ натуральных чисел $n \leq N$, не делящееся ни на 2, ни на 3, имеющих представление в виде суммы не более чем k слагаемых из $A_{\pm}$. Количество натуральных чисел $n \leq N$, не делящееся ни на 2, ни на 3, не меньше, чем $N/3$. Следовательно, для того, чтобы нашлось число $n \leq N$, не имеющее требуемого представления, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{N}{3} > N_0 + 2 \cdot 2^k (2 \log_2 N)^{2k} = N_0 \cdot 2^{3k+1} (\log_2 N)^{2k},$$

или

$$N > 6N_0 \cdot 2^{3k} (\log_2 N)^{2k}.$$

Следовательно,

$$\log_2 N > 2k \left(\log_2 \log_2 N + \frac{3}{2} + \log_2 6N_0 \right)$$

или

$$2k < \frac{\log_2 N}{\log_2 \log_2 N + C_0}.$$

Пусть $N > (2k)^{(1+\varepsilon)2k}$. Ввиду монотонности функции $\log_2 x / (\log_2 \log_2 x + C_0)$ при больших x при достаточно больших k имеем

$$\frac{\log_2 N}{\log_2 \log_2 N + C_0} > \frac{(1+\varepsilon)2k \log_2 2k}{\log_2 2k + \log_2((1+\varepsilon) \log_2 2k) + C_0} > 2k.$$

Следовательно,

$$F_{\pm}(k) \leq (2k)^{(1+\varepsilon)2k}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности $\log 3$ ”, *Докл. РАН*, **417**:6 (2007), 753–755.
- [2] M. Jarden, W. Narkiewicz, “On sums of units”, *Monatsh. Math.*, **150**:4 (2007), 327–332.
- [3] M. B. Nathanson, “Geometric group theory and arithmetic diameter”, *Publ. Math. Debrecen*, **79**:3–4 (2011), 563–572.
- [4] L. Hajdu, R. Tijdeman, “Representing integers as linear combinations of power products”, *Arch. Math. (Basel)*, **98**:6 (2012), 527–533.
- [5] V. S. Dimitrov, G. A. Julien, W. C. Miller, “An algorithm for modular exponentiation”, *Inform. Process. Lett.*, **66**:3 (1998), 155–159.
- [6] R. Tijdeman, “On the maximal distance between integers composed of small primes”, *Compositio Math.*, **28** (1974), 159–162.
- [7] В. Г. Чирский, Р. Ф. Шакиров, “О представлении натуральных чисел с использованием нескольких оснований”, *Чебышевский сб.*, **14**:1 (2013), 86–93.
- [8] J.-H. Evertse, “On sums of S -units and linear recurrences”, *Compositio Math.*, **53**:2 (1984), 225–244.