Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гончар, С. П. Суетин, Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа, *Совр. пробл. матем.*, 2004, выпуск 5, 3–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/spm8>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:46:03

Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа

А. А. Гончар, С. П. Суетин

§ 1. Введение

1. Теория аппроксимаций Паде – *локально наилучших рациональных аппроксимаций степенного ряда* – составляет важное направление в комплексном анализе и теории приближений. В XVIII–XIX вв. это направление развивалось, в основном, в рамках классической теории непрерывных дробей. Интерес к аппроксимациям Паде и более общим конструкциям рациональных аппроксимаций аналитических функций резко возрос во второй половине прошлого века. Благодаря современному развитию вычислительной техники такие аппроксимации нашли многочисленные применения в различных задачах математической физики, механики и прикладной математики. В свою очередь, анализ возникающих при этом математических проблем привел к новым задачам и результатам в комплексном анализе, теории потенциала, теории ортогональных многочленов (см. [1], где имеется обширная библиография работ в рассматриваемом направлении).

Подчеркнем, что речь идет о приближениях рациональными функциями со *свободными* полюсами, а сами рассматриваемые аппроксимации – непрерывные дроби, аппроксимации Паде и их различные обобщения – имеют *нелинейный* характер. Оптимальный выбор коэффициентов как числителей, так и знаменателей аппроксимаций Паде позволяет с их помощью *локализовать особенности* функции, заданной своим разложением в степенной ряд, и *осуществлять ее эффективное аналитическое продолжение* за пределы круга сходимости степенного ряда. В этом состоит принципиальное преимущество рассматриваемых рациональных

аппроксимаций перед полиномиальными приближениями и рациональными аппроксимациями с заранее *фиксированными* полюсами.

Настоящая работа посвящена асимптотическим свойствам диагональных аппроксимаций Паде для мероморфных функций марковского типа. Многие замечательные свойства аппроксимаций Паде и их обобщений были открыты сначала эмпирически в результате численных расчетов и лишь затем строго обоснованы. Именно так была сделана и эта работа: сначала с помощью компьютерных расчетов было обнаружено новое свойство, связанное с асимптотическим поведением полюсов диагональных аппроксимаций Паде, а затем, с целью доказательства того, что соответствующая закономерность имеет место в достаточно широком классе мероморфных функций, были получены новые формулы сильной асимптотики для диагональных аппроксимаций Паде и их знаменателей.

2. Пусть

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}} \quad (1)$$

– степенной ряд с центром в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, $f_n = [n/n]_f$, $n = 1, 2, \dots$, – последовательность его диагональных¹ аппроксимаций Паде. В случае, когда все ганкелевы определители

$$H_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

отличны от нуля, ряду (1) с помощью классического алгоритма Евклида сопоставляется чебышевская непрерывная дробь [2]:

$$f \sim \frac{a_1}{z - b_1 - \frac{a_2}{z - b_2 - \dots}}, \quad (2)$$

¹Термин “диагональная последовательность” связан с тем, что такие аппроксимации составляют главную диагональ в общей *таблице Паде* ряда f (см. [1]).

n -я подходящая дробь которой совпадает с f_n и обладает следующим характеристическим свойством:

$$(f - f_n)(z) = \frac{A_n}{z^{2n+1}} + \dots, \quad (3)$$

где $A_n \neq 0$. Тем самым, дробь (2) есть просто другая (эквивалентная) форма записи для последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

В общем случае удобно основываться на следующем определении n -й диагональной аппроксимации Паде ряда f (определение Фробениуса): $f_n = P_n/Q_n$, где P_n, Q_n – полиномы от z , $\deg P_n < \deg Q_n \leq n$ ($Q_n \neq 0$) и выполняется соотношение

$$R_n(z) := (Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Этими условиями полиномы P_n и Q_n определяются не однозначно, но рациональная дробь $f_n = P_n/Q_n$ единственна (с точностью до стандартного отождествления). Функция R_n называется *функцией остатка*. Для *нормальных* индексов n порядок рациональной функции f_n равен n . Тем самым, для таких n полиномы P_n и Q_n , удовлетворяющие условию (4), не имеют общих нулей, $\deg Q_n = n$ и выполняется соотношение (3) (где, возможно, $A_n = 0$). Каково бы ни было n , справедливо равенство $f_n = f_{n_k}$, где n_k – наибольший нормальный индекс, не превосходящий n . Тем самым, последовательность нормальных индексов $\{n_k\} = \Lambda = \Lambda(f)$ для ряда f разбивает натуральный ряд чисел на множества $\Lambda_k = \{n : n_k \leq n < n_{k+1}\}$ такие, что $f_n = f_{n_k}$ для $n \in \Lambda_k$. Такая структура последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ позволяет в вопросах сходимости диагональных аппроксимаций Паде ограничиться рассмотрением последовательности $\{f_n\}_{n \in \Lambda}$.

Для *марковской* функции

$$\hat{\sigma}(z) := \int \frac{d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (5)$$

где σ – положительная борелевская мера с бесконечным носителем $S = \text{Supp } \sigma \in \mathbb{R}$, коэффициенты соответствующего ей ряда (1) совпадают с моментами меры σ :

$$c_n = \int x^n d\sigma(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

При этом все определители H_n положительны, полиномы $Q_n(z) = Q_n(z; \hat{\sigma})$ имеют степень n и при нормировке $Q_n(z; \hat{\sigma}) = z^n + \dots$ определяются единственным образом:

$$Q_n(z; \hat{\sigma}) = \frac{1}{H_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} = z^n + \dots, \quad n = 1, \dots$$

Полиномы Q_n ортогональны по мере σ , при этом для функции остатка (4) справедливо представление

$$R_n(z) = \int \frac{Q_n(x) d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (6)$$

а для полиномов P_n – представление

$$P_n(z) = \int \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} d\sigma(x); \quad (7)$$

в теории ортогональных многочленов (6) принято называть функцией второго рода, а (7) – многочленами второго рода.

Классическая теорема Маркова [3] утверждает, что *для марковской функции $\hat{\sigma}$ чебышевская непрерывная дробь (2) равномерно сходится внутри* (на компактных подмножествах) *области* $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$, где $[\alpha, \beta]$ – выпуклая оболочка S .

3. В 1975 году в работе [4] одним из авторов настоящей статьи было получено обобщение теоремы Маркова на класс *мероморфных* функций вида

$$f = \hat{\sigma} + r, \quad (8)$$

где r – рациональная функция с комплексными коэффициентами (r – “рациональное возмущение” марковской функции $\hat{\sigma}$). Основным результатом работы [4] состоит в следующем².

ТЕОРЕМА 1. Пусть σ – положительная борелевская мера с носителем $\text{Supp } \sigma = [\alpha, \beta]$, $\sigma' > 0$ п.в. на $[\alpha, \beta]$ и $f = \hat{\sigma} + r$, где

²В [4] мера σ предполагалась такой, что имеет место асимптотика отношения многочленов, ортогональных на $[\alpha, \beta]$ относительно σ . Позднее Е. А. Рахмановым [5], [6] было показано, что при условии: $\sigma' > 0$ п.в. на $[\alpha, \beta]$, эта асимптотика отношения имеет место.

r – произвольная комплексная рациональная функция, все полюсы которой принадлежат области $\mathbb{C} \setminus [\alpha, \beta]$, и $r(\infty) = 0$. Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f равномерно в сферической метрике³ внутри области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$.

Из теоремы 1 вытекает, что к каждому полюсу функции f в D стремится (со скоростью геометрической прогрессии; см. ниже формулу (10)) ровно столько полюсов f_n , какова его кратность, а все предельные точки остальных полюсов лежат на отрезке $[\alpha, \beta]$. Отметим, что из указанного асимптотического поведения полюсов диагональных аппроксимаций Паде для формального ряда f уже вытекает равномерная сходимости последовательности f_n внутри области $\widehat{\mathbb{C}} \setminus [\alpha, \beta]$ (в сферической метрике); тем самым, этот ряд определяет аналитическую функцию f , допускающую мероморфное продолжение во внешность отрезка $[\alpha, \beta]$ (см. [7], [8]).

Таким образом, диагональные аппроксимации Паде в классе функций вида (8), заданных своими разложениями в степенной ряд (1), полностью решают задачу эффективного аналитического продолжения степенного ряда в область $D = D_f$: полюсы этих аппроксимаций локализуют как отрезок $[\alpha, \beta] = \text{Supp } \sigma$, так и полюсы f в D с учетом их кратностей, а сами аппроксимации f_n восстанавливают f внутри D .

Из теоремы 1 получаем следующее утверждение о скорости сходимости последовательности f_n к функции f в “проколотой” области $D' = D \setminus \{\text{полюсы } f\}$:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |(f - f_n)(z)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(z)|^2}, \quad (9)$$

где Φ – функция, отображающая внешность отрезка $[\alpha, \beta]$ на внешность единичного круга с условием $\Phi(\infty) = \infty$.

Отсюда уже вытекает [4, § 2, п. 10], что полюсы f_n стремятся к полюсам f в D со скоростью геометрической прогрессии

³Имеется в виду, что за расстояние между двумя точками в комплексной плоскости принимается расстояние между соответствующими точками на сфере Римана.

(в дальнейшем – *геометрически*); при этом если a – полюс f кратности $\mu \geq 1$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}}, \quad j = 1, \dots, \mu, \quad |\Phi(a)| > 1; \quad (10)$$

здесь $\zeta_{j,n}(a)$, $j = 1, \dots, \mu$, – полюсы⁴ f_n , перенумерованные в порядке неубывания их расстояний до точки a .

В работе [4, § 2, п. 11] было отмечено, что как теорема 1, так и ее следствия остаются в силе для любых мероморфных в области D функций f (с конечным числом полюсов в D), голоморфные составляющие f^* которых могут быть представлены в виде

$$f^*(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{s(x) d\sigma(x)}{z - x}, \quad z \in D,$$

где s – произвольная комплексная рациональная функция, все нули и полюсы которой принадлежат области D . В частности, это относится и к простейшим алгебраическим функциям вида

$$f(z) = \frac{r_1(z)}{w} + r_2(z), \quad (11)$$

где $w = \sqrt{(z - \alpha)(z - \beta)}$, при условии, что все полюсы рациональных функций r_1 , r_2 лежат в D , r_1 не имеет нулей на отрезке $[\alpha, \beta]$ и в D зафиксирована определенная ветвь квадратного корня.

4. В условиях теоремы 1 для функций вида (8) в (9) и (10) имеет место *точное равенство*; тем самым, в правой части (10) указан правильный показатель скорости сходимости полюсов f_n к полюсам f в области D (ср. [7], а также § 2, п. 3 ниже). В то же время соотношения такого типа дают информацию о поведении каждого из μ полюсов аппроксимаций Паде по отдельности и не позволяют судить о том, какова “в целом” картина поведения μ полюсов f_n в окрестности μ -кратного полюса f . Для выяснения возможных закономерностей в асимптотическом поведении полюсов аппроксимаций Паде f_n в окрестности кратного полюса f мы провели соответствующие вычисления для конкретных примеров

⁴Как обычно, полюсы и нули функций считаются с учетом их кратностей.

функций вида (11). С помощью программы, написанной на языке FORTRAN и работающей под управлением операционной системы LINUX, были проведены вычисления (с точностью в 40 значащих цифр) нулей и полюсов диагональных аппроксимаций Паде для функций вида

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} + r(z), \quad (12)$$

где r – вещественная рациональная функция, которая в одном случае имеет единственный полюс 10-й кратности в точке $a > 1$, а в другом – два полюса в точках a и $\bar{a}$, $\text{Im } a > 0$, каждый 10-й кратности. В обоих случаях ветвь корня в (12) выбиралась так, что $\sqrt{z^2 - 1} > 0$ при $z > 1$.

Результаты численного анализа рассматриваемой задачи (для достаточно больших n) представлены на рис. 1–8. Сделаем необходимые пояснения. На рис. 1 изображены нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональной аппроксимации Паде f_{28} функции вида (12) для первого случая с $a = 1.45$. Часть нулей и полюсов локализует отрезок $\Delta = [-1, 1]$, при этом они перемежаются между собой. Остальные нули рациональной функции f_{28} локализуют *простые* нули функции f в области D . То, что эти нули простые, отчетливо видно из сравнения рис. 1 и рис. 3: расположение таких нулей для аппроксимаций Паде f_n очень быстро стабилизируется и при последовательных $n = 21, 22, \dots, 33$ остается практически неизменным, так как в соответствии с (10) они стремятся к нулям f в D геометрически⁵ (отметим, что расстояние между такими нулями f_n , локализующими простой нуль f , при двух последовательных значениях $n = 42, 43$ уже оказывается порядка 10^{-10}). Такой же характер имеет сходимость полюсов f_n к простому полюсу f .

Иначе обстоит дело в случае *кратного* (здесь – 10-кратного) полюса f : как видно из рис. 2, все 10 полюсов f_n в окрестности этого полюса *простые*; они по-прежнему сходятся к полюсу f геометрически (см. рис. 3 и 4), но теперь в соответствии с формулой (10) общий показатель скорости сходимости $|\Phi(a)|^{-2} < 1$ распределяется между 10-ю простыми полюсами рациональной дроби f_n , локализующими точку $z = a$. Более того, это распределение

⁵Это вытекает из очевидной связи между диагональными аппроксимациями Паде для функций f и $1/f$.

носит равномерный характер, а совокупность из этих 10-ти простых полюсов f_n ведет себя регулярно в целом: *асимптотически они располагаются в вершинах правильного 10-угольника*. В этом убеждают результаты расчетов, представленные на рис. 2, 4, 6, 8.

Основная *цель настоящей работы* – вывод формул *сильной асимптотики* (см. (22₁)–(22₃)) для знаменателей диагональных аппроксимаций Паде мероморфных функций марковского типа $f = \hat{\sigma} + r$ при дополнительных ограничениях на σ (см. ниже § 2). На основе соответствующих формул в работе доказано, что в достаточно малой окрестности кратного полюса мероморфной функции $f = \hat{\sigma} + r$ все полюсы рациональных функций f_n простые и ведут себя именно так, как было указано выше в связи с проведенными численными расчетами.

Доказательство этих результатов основано на свойствах Ψ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на двулистной римановой поверхности. В работе рассмотрен также случай, когда носитель σ состоит из *нескольких отрезков*.

Настоящая работа выполнена в рамках Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики” и Программы поддержки ведущих научных школ России (грант № НШ-1551.2003.1), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00564) и фонда INTAS (грант № 03-51-6637).

Рис. 1. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональной аппроксимации Паде f_{28} для функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$, где r – вещественная рациональная функция с единственным полюсом в точке $z = a$, $a > 1$, кратности 10. Основная часть нулей и полюсов функции f_{28} локализует отрезок $[-1, 1]$, при этом они перемежаются между собой. Оставшиеся нули и полюсы f_{28} локализуют соответственно простые нули и 10-кратный полюс функции f , расположенные в дополнении к отрезку $[-1, 1]$.

Рис. 2 (справа). Полюсы диагональной аппроксимации Паде f_{28} , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$.

Рис. 3. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональных аппроксимаций Паде $f_{21}, \dots, f_{33}$ для функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$, где r – вещественная рациональная функция с единственным полюсом в точке $z = a$, $a > 1$, кратности 10. Основная часть нулей и полюсов функций $f_{21}, \dots, f_{33}$ локализует отрезок $[-1, 1]$. Оставшиеся нули и полюсы $f_{21}, \dots, f_{33}$ локализуют соответственно простые нули и 10-кратный полюс функции f , расположенные в дополнении к отрезку $[-1, 1]$.

Рис. 4 (справа). Полюсы диагональных аппроксимаций Паде $f_{21}, \dots, f_{33}$, расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$.

Рис. 5. Нули (черные кружки) и полюсы (белые кружки) диагональной аппроксимации Падэ f_{38} для функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$, где $r -$ вещественная рациональная функция с двумя полюсами в точках $z = a$ и $z = \bar{a}$, $\text{Im } a > 0$, кратности 10 каждый. Основная часть нулей и полюсов функции f_{38} локализуется отрезок $[-1, 1]$, при этом они перемежаются между собой. Оставшиеся нули и полюсы f_{38} локализуют соответственно простые нули и два 10-кратных полюса функции f , расположенные в дополнении к отрезку $[-1, 1]$.

Рис. 6 (справа). Полюсы диагональной аппроксимации Падэ f_{38} , расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$.

Рис. 7. Нули (белые кружки) и полюсы (черные кружки) диагональных аппроксимаций Паде $f_{31}, \dots, f_{43}$ для функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$, где $r -$ вещественная рациональная функция с двумя полюсами в точках $z = a$ и $z = \bar{a}$, $\text{Im } a > 0$, кратности 10 каждый. Основная часть нулей и полюсов функций $f_{31}, \dots, f_{43}$ локализует отрезок $[-1, 1]$. Оставшиеся нули и полюсы $f_{31}, \dots, f_{43}$ локализуют соответственно простые нули и два 10-кратных полюса функции f , расположенные в дополнении к отрезку $[-1, 1]$.

Рис. 8 (справа). Полюсы диагональных аппроксимаций Паде $f_{31}, \dots, f_{43}$, расположенные в малой окрестности 10-кратного полюса функции $f(z) = 1/\sqrt{z^2 - 1} + r(z)$.

§ 2. Формулировка основных результатов

1. Всюду в дальнейшем полагаем $\Delta = [-1, 1]$, $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$. Мы будем рассматривать здесь *класс функций* вида

$$f = \widehat{\rho} + r, \quad (13)$$

где⁶

$$\widehat{\rho}(z) := \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (14)$$

комплекснозначная функция ρ голоморфна на отрезке Δ и не обращается в нуль на этом отрезке, все полюсы комплексной рациональной функции r лежат в D и $r(\infty) = 0$. По традиции, восходящей к С. Н. Бернштейну [9], функцию ρ называют тригонометрическим весом; для краткости мы будем называть ρ просто *весом*. Очевидно, что класс функций (13) содержит функции вида (11) с $w = \sqrt{z^2 - 1}$ и $r_1 \neq 0, \infty$ на Δ . Тем самым, все результаты настоящей работы справедливы и для таких простейших алгебраических функций.

В основе доказательства теоремы 1 в работе [4] лежит формула сравнительной асимптотики полиномов $Q_n(z; \widehat{\sigma} + r)$ и $Q_n(z; \widehat{\sigma})$ *вне* отрезка Δ . Такая же формула (см. (20)) доказывается ниже для полиномов $Q_n(z; f)$ и $Q_n(z; \widehat{\rho})$ — знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функций вида (13) и (14). Эта формула является ключевой при доказательстве теоремы 2 — аналога теоремы 1 — и уже сама может рассматриваться как формула сильной асимптотики для полиномов $Q_n(z; f)$, но только *внутри области* $D' = D \setminus \{\text{полюсы } f\}$. В настоящей работе для исследования сильной асимптотики полюсов диагональных аппроксимаций Паде функций вида $f = \widehat{\rho} + r$ в области D нам понадобится сильная асимптотика полиномов $Q_n(z; f)$ как *вне* отрезка Δ , так и *на* самом отрезке. Эти формулы сильной асимптотики будут получены в терминах, связанных с римановой поверхностью $\mathfrak{R}$: $w^2 = z^2 - 1$. Прежде чем формулировать основные результаты настоящей работы, приведем необходимые определения и обозначения, связанными с простейшими и хорошо известными конструкциями.

⁶Используемые нами обозначения $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{\rho}$ для *меры* σ и *функции* ρ имеют разный смысл; ср. формулы (5) и (14). Однако из текста работы всегда ясно, какой из двух случаев имеется в виду.

Пусть $\mathfrak{R}$ – риманова поверхность, заданная уравнением $w^2 = z^2 - 1$. Будем считать, что $\mathfrak{R}$ реализована как двулистное разветвленное в точках $z = \pm 1$ накрытие расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}}$. Два листа $\mathfrak{R}$ – это два экземпляра $\hat{\mathbb{C}}$, разрезанных по отрезку Δ и склеенных затем накрест так, что верхнему берегу одного отрезка соответствует нижний берег другого. Тем самым, над каждой точкой $\hat{\mathbb{C}}$ за исключением точек ветвления $z = \pm 1$ лежат ровно две точки римановой поверхности, а отрезку Δ соответствует на $\mathfrak{R}$ замкнутый цикл Γ . Будем считать, что в $D = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ выбрана ветвь корня $\sqrt{z^2 - 1}$, удовлетворяющая условию $\sqrt{z^2 - 1}/z \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Функция w : $w^2 = z^2 - 1$ однозначна на $\mathfrak{R}$. Первым (открытым) листом $D^{(1)}$ поверхности $\mathfrak{R}$ будем считать тот, на котором $w = \sqrt{z^2 - 1}$. На втором листе $D^{(2)}$ имеем: $w = -\sqrt{z^2 - 1}$. Для точек римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем использовать обозначение $\mathbf{z} = (z, w)$, где $w = \pm\sqrt{z^2 - 1}$; при этом для точек первого листа $z^{(1)} = (z, \sqrt{z^2 - 1})$, а для точек второго $z^{(2)} = (z, -\sqrt{z^2 - 1})$. Область $D^{(1)}$ будем, как правило, отождествлять с “физической” областью D . Пусть $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная к функции Жуковского. Тогда Φ однозначна в D и продолжается на всю риманову поверхность $\mathfrak{R}$ как однозначная мероморфная функция, $\Phi(\mathbf{z}) = z + w \in \mathbb{C}(z, w)$, с дивизором $(\Phi) = \infty^{(2)} - \infty^{(1)}$.

Риманова поверхность $\mathfrak{R}$ – нулевого рода, поэтому на $\mathfrak{R}$ разрешим любой дивизор нулевой степени. Для дивизора вида $a^{(1)} - b^{(2)}$, где $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, легко указать явно функцию $\Phi_{a,b} \in \mathbb{C}(z, w)$ такую, что $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$:

$$\Phi_{a,b}(\mathbf{z}) = \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b)}{z - b} \frac{z - a}{1 - \Phi(a)\Phi(\mathbf{z})}; \quad (15)$$

при $a = \infty$ или $b = \infty$ формула для соответствующей функции $\Phi_{a,b}$ получается предельным переходом в (15). Очевидно, что произвольному дивизору нулевой степени на $\mathfrak{R}$ будет соответствовать произведение функций вида (15).

Функции Грина $g_D(z, \infty) = \log |\Phi(z)|$ области D соответствует комплексная функция Грина $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + i g_D^*(z, \infty)$, где $g_D^*(z, \infty)$ – гармонически сопряженная к $g_D(z, \infty)$ функция. Функция $G(z) = G_D(z, \infty)$ имеет в бесконечно удаленной точке ветвление логарифмического характера, однозначна по модулю $2\pi i$ и представляется в виде

$$G(z) = \log \Phi(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad \zeta \in D,$$

где интегрирование – по любому пути, лежащему в D .

Используемый здесь подход к изучению асимптотических свойств знаменателей диагональных аппроксимаций Паде $Q_n(z; f)$ основан на свойствах Ψ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на двулистной римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Такой подход берет начало с работ Н. И. Ахиезера [10]–[12] и был затем развит в работах Дж. Наттолла [13], [14] и С. П. Суетина [15]–[17] прежде всего – с целью изучения вопросов сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций и их естественных обобщений. Отметим также работу А. И. Аптекарева [18], посвященную вопросам изучения сильной асимптотики рациональных аппроксимаций аналитических функций, где применяется метод, основанный, в частности, на свойствах решения краевой задачи Римана подобного типа.

Как правило, наиболее общее условие на вес ρ для применимости такого подхода – это условие Гёльдера. В настоящей работе для простоты мы изучаем случай, когда вес ρ – голоморфная функция на отрезке Δ ($\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$).

2. Рассмотрим сначала ряд (1) для функции $f = \hat{\rho}$, где $\rho \in \mathcal{H}(\Delta)$ и $\rho(x) \neq 0$ на Δ . Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА ($\mathcal{R}_1$). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1°. Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\Psi) = n\infty^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$.

Здесь под $\Psi(\mathbf{x}+)$ понимаются предельные значения функции $\Psi(\zeta)$ при $D^{(1)} \ni \zeta \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$. Аналогичный смысл придается и $\Psi(\mathbf{x}-)$.

Так как род $\mathfrak{R}$ равен нулю и $\deg(\Psi) = 0$, то задача ($\mathcal{R}_1$) распадается на две независимые задачи, соответствующие п. 2° и п. 3°. Стандартными методами (см., например, [16]) доказывается, что такая функция Ψ всегда существует и определяется однозначно с точностью до мультипликативной постоянной. Нетрудно найти и явный вид этой функции:

$$\Psi(z) = \Phi(z)^n e^{S(z)} = e^{nG(z)+S(z)} \quad \text{при } \mathbf{z} = z^{(1)}, \quad (16)$$

где

$$S(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (17)$$

– функция Сегё. Из свойств Ψ -функции вытекает, что

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \neq 0$$

при $z \in D$. Тем самым, это произведение продолжается как постоянная функция на всю комплексную плоскость $\hat{\mathbb{C}}$. В дальнейшем нам удобно ввести следующую нормировку⁷: $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv 1$ при $z \in D$. Последнее соотношение в совокупности с (16), (17) приводит к явной формуле для Ψ -функции и при $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$.

При подходящей нормировке (подробнее см. ниже § 3, п. 3) полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции $f = \hat{\rho}$ – их сильная асимптотика как вне отрезка Δ , так и на этом отрезке описывается в терминах Ψ -функции следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть комплекснозначная функция ρ голоморфна и не обращается в нуль на отрезке Δ , Ψ – решение задачи $(\mathcal{R}_1)$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$ имеем:

- 1°. $Q_n(z; \hat{\rho}) = \Psi(z)(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри D ;
- 2°. $Q_n(x; \hat{\rho}) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на Δ .

Здесь $\Psi(z) = \Psi(z^{(1)})$, под $\Psi^+(x)$ ($\Psi^-(x)$) понимаются верхние (соответственно нижние) предельные значения Ψ на Δ ; величина $o(1) = o(\delta^n)$, где $\delta < 1$. Из п. 2° задачи $(\mathcal{R}_1)$ вытекает, что функция Ψ , решающая эту задачу, имеет в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс n -го порядка. Поэтому в силу п. 1° предложения 1 для всех достаточно больших n степень полинома $Q_n(z; \hat{\rho})$ равна n , т.е. все такие индексы нормальны. Непосредственно из представления (16) для Ψ -функции вытекает, что существует

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Psi(z)}{z^n} = \varkappa_n, \quad \text{где } \varkappa_n = 2^n e^{S(\infty)} \neq 0. \quad (18)$$

⁷Таким условием Ψ -функция определяется однозначно с точностью до знака $\pm$. В дальнейшем мы уточним правило выбора знака.

Тем самым, формула сильной асимптотики из п. 1° задает следующую естественную нормировку полиномов Q_n :

$$Q_n(z; \hat{\rho}) = \varkappa_n z^n + \dots,$$

где $\varkappa_n \neq 0$ задано (18). Наконец, из п. 2° вытекает, что

$$\int_{\Delta} Q_n^2(x; \hat{\rho}) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

а если вес ρ положителен на Δ , то равномерно на Δ

$$Q_n(x; \hat{\rho}) = \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x)) + o(1),$$

где

$$\theta(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad o(1) = o(\delta^n).$$

Предложение 1 и его следствия хорошо известны (см., например, [13] и [14]). В § 3 настоящей работы для полноты изложения приводится его независимое доказательство (ср. с доказательством теоремы 2.1 в [14]).

3. Прежде чем переходить непосредственно к вопросу о сильной асимптотике полиномов $Q_n(z; f)$, $f = \hat{\rho} + r$, сформулируем аналог теоремы 1 для изучаемого нами случая.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f = \hat{\rho} + r$, где комплекснозначная функция ρ голоморфна и не обращается в нуль на отрезке Δ , все полюсы комплексной рациональной функции r лежат в области D и $r(\infty) = 0$. Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f равномерно в сферической метрике внутри области D .

Тем самым, к каждому полюсу функции f в D стремится ровно столько полюсов f_n , какова его кратность. При этом если a – полюс f кратности $\mu \geq 1$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}} < 1, \quad j = 1, \dots, \mu;$$

здесь $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная к функции Жукковского, $\zeta_{j,n}(a)$, $j = 1, \dots, \mu$, – полюсы f_n , перенумерованные в порядке неубывания их расстояния до точки a .

Доказательство теоремы 2 проводится (см. ниже § 4) по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 в работе [4]; в частности, утверждение об асимптотике полюсов f_n в D немедленно следует из полученной в § 4 формулы *сравнительной асимптотики* для подходящим образом нормированных полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$ и $Q_n(z; \hat{\rho} + r)$, которая выполняется равномерно внутри D :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n(z; \hat{\rho} + r)}{Q_n(z; \hat{\rho})} = \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(z)\Phi(a_j)} \right)^{m_j}, \quad (20)$$

где $\Lambda = \Lambda(f)$ – последовательность нормальных индексов для $f = \hat{\rho} + r$, $a_1, \dots, a_{\ell}$ – полюсы f в D , $m_1, \dots, m_{\ell}$ – их кратности, $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$ – полное число полюсов f в D . Соотношение (20) является ключевым и при доказательстве теоремы 2; с учетом предложения 1 оно само уже может рассматриваться как формула сильной асимптотики для полиномов $Q_n(z; f)$, но – по *подпоследовательности* нормальных индексов Λ и только *внутри* области $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_{\ell}\}$. Для доказательства основного результата работы (см. ниже теорему 3) нам, во-первых, надо показать, что все достаточно далекие индексы n нормальны, а во-вторых, установить формулу сильной асимптотики для полиномов $Q_n(z; f)$ не только внутри D' , но и *на отрезке* Δ , и, в конечном счете, *в окрестности полюсов* функции f в D . Для этого мы применим подход, основанный, как и в случае полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$, на свойствах Ψ -функции, решающей специальную краевую задачу Римана на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Подчеркнем, что сильную асимптотику $Q_n(z; f)$ можно выразить непосредственно в терминах этой Ψ -функции только *внутри области* $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_{\ell}\}$ и *на отрезке* Δ . Зато, пользуясь этими результатами, мы затем найдем сильную асимптотику тех нулей $Q_n(z; f)$ (т.е. полюсов f_n), которые стремятся к полюсам f в D . Полученные в итоге формулы (см. ниже формулы (22₁)–(22₃)) и следует *в совокупности* рассматривать как формулы сильной асимптотики для $Q_n(z; f)$.

Рассмотрим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА ($\mathcal{R}_2$). При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1°. Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\Psi) = n\infty^{(2)} + m_1 a_1^{(1)} + \dots + m_\ell a_\ell^{(1)} - m_1 a_1^{(2)} - \dots - m_\ell a_\ell^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$.

(Здесь предполагается, что все точки $a_j \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, $j = 1, \dots, \ell$.)

Подчеркнем еще раз, что непосредственно в терминах Ψ -функции, решающей задачу ($\mathcal{R}_2$), оказывается возможным описать сильную асимптотику $Q_n(z, f)$ как на отрезке Δ , так и внутри области $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$.

Так как в рассматриваемом здесь случае род римановой поверхности $\mathfrak{R}$ равен нулю и $\deg(\Psi) = 0$, то задача ($\mathcal{R}_2$), как и задача ($\mathcal{R}_1$), распадается на независимые задачи, соответствующие п. 2° и п. 3°. Каждая из них решается явно в терминах, связанных с $\mathfrak{R}$. Таким образом, решение задачи ($\mathcal{R}_2$) всегда существует, единственно (с точностью до мультипликативной постоянной) и может быть найдено в явном виде. Зависимость Ψ -функции от n связана только с условием 2°. Нетрудно увидеть, что при $z \in D$ функция $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const}$, где $\text{const} \neq 0$. В дальнейшем нам удобно как обычно положить $\text{const} = 1$, т.е. нормировать Ψ -функцию (как и ранее, с точностью до знака $\pm$) стандартным условием

$$\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv 1.$$

Приведем явный вид решения задачи ($\mathcal{R}_2$) при $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$:

$$\Psi(z) = \Phi(z)^n e^{S(z)} \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)} \right)^{m_j} = e^{nG(z) + S(z)} \Pi_m(z), \quad (21)$$

где $S(z)$ – функция Серё (17).

В терминах Ψ -функции, решающей задачу ($\mathcal{R}_2$), асимптотическое поведение полиномов $Q_n(z; f)$ описывается следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть в условиях теоремы 2 точки $a_1, \dots, a_\ell$ – полюсы f в D , $m_1, \dots, m_\ell$ – их кратности, Ψ – решение задачи ($\mathcal{R}_2$) при $n \in \mathbb{N}$. Тогда при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; f)$ имеем:

$$1^\circ. Q_n(z; f) = \Psi(z)(1+o(1)) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } D', \quad (22_1)$$

$$2^\circ. Q_n(x; f) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно на } \Delta, \quad (22_2)$$

где $D' = D \setminus \{a_1, \dots, a_\ell\}$, величина $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Непосредственно из п. 1° этого предложения и свойств Ψ -функции, решающей задачу $(\mathcal{R}_2)$, вытекает, что $\deg Q_n(z; f) = n$ для достаточно больших n , т.е. для функции f все достаточно большие индексы n нормальны.

Полученная в п. 2° предложения 2 формула сильной асимптотики полиномов $Q_n(x; f)$ на отрезке Δ лежит в основе доказательства следующего утверждения об асимптотическом поведении полюсов f_n вне отрезка Δ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть в условиях теоремы 2 точка $a_j \in D$ – полюс функции f кратности $m_j \geq 1$, $a_{j,\nu}(n)$, $\nu = 1, \dots, m_j$, – соответствующие точке a_j при $n \rightarrow \infty$ полюсы f_n . Тогда

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}} (1+o(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \nu = 1, \dots, m_j, \quad (22_3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\ B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = |\Phi(a_j)|^{1/m_j} e^{ig^*(a_j)/m_j}, \\ C_j &= e^{-2S(a_j)/m_j} \left(-\frac{2G'(a_j)}{A_j \alpha_j} \right)^{1/m_j} \\ &\quad \times \frac{(-2)^{m/m_j} \Phi(a_j)^{m/m_j} \prod_{s=1}^{\ell} \Phi(a_s)^{m_s/m_j}}{\prod_{s=1}^{\ell} (1 - \Phi(a_s) \Phi(a_j))^{2m_s/m_j}}; \end{aligned}$$

комплексные постоянные A_j и α_j , $j = 1, \dots, \ell$, конечны, отличны от нуля и зависят только от f .

Здесь $g^*(z) = g_D^*(z, \infty)$ – функция, сопряженная к функции Грина $g_D(z, \infty)$ области D , $G(z) = G_D(z, \infty)$ – комплексная функция Грина; $S(z)$ – функция Сегё.

Постоянная C_j связана с геометрическим расположением j -го полюса a_j функции f относительно отрезка Δ и других полюсов f ; величина $1/B_j$ характеризует (геометрическую) скорость

сходимости полюсов f_n к точке a_j и не зависит от других полюсов f ; наличие множителя ε_j , $\varepsilon_j^{m_j} = 1$, обеспечивает то асимптотически правильное расположение m_j полюсов f_n по отношению к притягивающей точке a_j , о котором говорилось во введении. Непосредственно из (22₃) вытекает, что при каждом $j = 1, \dots, \ell$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_j - a_{j,\nu}(n)|^{1/n} = \frac{1}{|\Phi(a_j)|^{2/m_j}}, \quad \nu = 1, \dots, m_j;$$

тем самым, в правой части (10) указан правильный показатель скорости сходимости полюсов f_n к полюсам f в D .

Из теоремы 3 вытекают следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В классе функций вида $f = \hat{\rho} + r$, где функция ρ голоморфна и не обращается в нуль на отрезке Δ , а все полюсы комплексной рациональной функции r лежат в области D и $r(\infty) = 0$, справедлива импликация*

$$\begin{aligned} (f - f_n)(z) &= \frac{A}{z^{2n+1}} + \dots \\ &\Downarrow \\ (f - f_n)(z) &= \frac{2G'(z)}{\Psi(z)^2} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \\ &\text{равномерно внутри } D', \end{aligned} \tag{23}$$

где f_n , $n \in \mathbb{N}$, – рациональная функция порядка не выше n , $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Соотношение (23) приводит к формуле сильной асимптотики для последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f_n(z) = f(z) - \frac{2G'(z)}{\Psi(z)^2} (1 + o(1))$$

равномерно внутри D' при $n \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть в условиях теоремы 2 вес ρ положителен на Δ , а рациональная функция r вещественна. Тогда для всех достаточно больших n все полюсы диагональных аппроксимаций Паде функции $f = \hat{\rho} + r$ простые.*

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть в условиях теоремы 2 вес $\rho > 0$ на Δ , $f = \hat{\rho} + r$, $r \in \mathbb{R}(z)$. Тогда равномерно на Δ

$$Q_n(x; f) = \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x) + \alpha(x)) + o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \\ \cos \alpha(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{i \arccos x}} \right)^{m_j} \right. \\ &\quad \left. + \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{-i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{-i \arccos x}} \right)^{m_j} \right\}. \end{aligned}$$

В заключение сделаем общее замечание относительно используемого здесь метода, основанного на свойствах Ψ -функции – решении специальной краевой задачи Римана. Такая задача рассматривается при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ (см. задачи $(\mathcal{R}_1)$ и $(\mathcal{R}_2)$), а ее решение находится в явном виде в терминах римановой поверхности $\mathfrak{R}$ и веса ρ (см. (16) и (21)). Отсюда следует, что этот метод пригоден и для нахождения формул сильной асимптотики в случае переменного (т.е. зависящего от n) веса $\rho = \rho_n$: в явную формулу для Ψ -функции вместо веса ρ_n надо подставить выражение, описывающее его зависимость от n (см. [18]). Кроме того, метод оказывается применим и в случае, когда в (5) носитель S меры σ состоит из нескольких отрезков (подробнее см. ниже § 7).

§ 3. Доказательство предложения 1

1. Пусть Ψ – решение задачи $(\mathcal{R}_1)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, полином $Q_n(z) = Q_n(z; \hat{\rho})$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$, удовлетворяет соотношению

$$R_n(z; \hat{\rho}) := (Q_n \hat{\rho} - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где $\deg P_n \leq n-1$, $R_n(z) = R_n(z; \hat{\rho})$ – функция остатка.

Определим на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ функцию F следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}, \\ -2Q_n(z), & \mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}; \end{cases} \quad (24)$$

нетрудно видеть, что F (кусочно) голоморфна в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$.

Используя свойства Ψ -функции как решения задачи $(\mathcal{R}_1)$ и свойства функции остатка R_n на границе отрезка Δ : $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$, получаем следующее краевое условие для F на кривой Γ :

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (25)$$

где функция $\chi(\mathbf{z}) = \Psi(\mathbf{z})R_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, голоморфна на втором листе⁸. При этих условиях F стандартным образом [20, § 8, формула (8.16)] восстанавливается в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ по граничным условиям (25) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) + C_n, \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (26)$$

где C_n – некоторая постоянная,

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \quad (27)$$

– мероморфный на $\mathfrak{R}$ абелев дифференциал, который имеет полюсы только в точках $\mathbf{z}$, $\infty^{(1)}$, $\infty^{(2)}$ с вычетами 1, $-1/2$, $-1/2$ соответственно, а контур Γ^+ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$: область остается слева при обходе по контуру. Интегральное представление (26) лежит в основе дальнейших рассуждений.

2. Пусть сначала $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$. Выберем числа $R > 1$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы функции χ и $1/\rho$ были бы голоморфны в области $\{z^{(2)} : 1 < |\Phi(z)| < R + \varepsilon\}$. Тогда (при $\mathbf{z} = z^{(1)}$) в интегральном представлении (26) контур Γ можно заменить на контур

⁸Как и ранее, под $F(\zeta+)$ здесь понимаются предельные значения функции $F(\mathbf{z})$ при $D^{(1)} \ni \mathbf{z} \rightarrow \zeta \in \Gamma$. Аналогичный смысл придается $F(\zeta-)$ и $\chi(\zeta-)$.

$\Gamma_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| = R\}$, целиком лежащий на втором листе $D^{(2)}$. Воспользуемся теперь тем, что

$$\chi(z^{(2)}) = \Psi(z^{(2)})R_n(z)w(z^{(2)}) = -F(z^{(1)})\frac{\Psi(z^{(2)})}{\Psi(z^{(1)})} = -\frac{F(z^{(1)})}{\Psi(z^{(1)})^2}$$

и $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)})$ (см. (27)). Тогда из (26) получаем следующее представление для функции F :

$$\begin{aligned} F(z^{(1)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{F(\zeta^{(1)})}{\Psi(\zeta^{(1)})^2 \rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + C_n, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\Gamma_R^{(1)} = \{\zeta^{(1)} : |\Phi(\zeta)| = R\}$. При $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$ дифференциал (27) имеет вид:

$$d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) - w(z)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)};$$

следовательно, это – голоморфный по переменной $z^{(2)}$ в области $D^{(2)}$ дифференциал. Более того, дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; \mathbf{z})$ – голоморфный по $\mathbf{z}$ на компакте $D^{(2)} \sqcup \Gamma$ при $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$. Поэтому представление (28) справедливо⁹ при $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$. Из (28) получаем, что равномерно на компакте $D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \max_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{1}{|\Psi(\zeta^{(1)})|^2} O(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

где $M_n = \max_{\Gamma_R^{(1)}} |F(\zeta^{(1)})|$. Следовательно, равномерно по $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \cdot O(\delta^n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (30)$$

где $\delta = 1/R^2 < 1$. Так как $F(z^{(1)}) \not\equiv 0$ (см. (24)), то $M_n \neq 0$, поэтому, применяя (30) сначала к компакту $\Gamma_R^{(1)} \subset D^{(1)}$, а затем

⁹Интегральная формула (28) задает аналитическое продолжение функции $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, через контур Γ на второй лист римановой поверхности $\mathfrak{R}$ вплоть до контура $\Gamma_R^{(2)}$, причем для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной в (24); ср. с доказательством теоремы 2.1 в [14].

к компакту $D^{(1)} \sqcup \Gamma$, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} M_n &= |C_n|(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \\ F(\mathbf{z}) &= C_n(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \\ &\quad \text{равномерно по } \mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma. \end{aligned} \quad (31)$$

3. Пусть теперь $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$. Тогда из (26) вытекает, что при $z^{(2)} \in D_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| > R\}$

$$\begin{aligned} F(z^{(2)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} \frac{F(\zeta^{(1)})}{\Psi(\zeta^{(1)})^2 \rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + C_n; \end{aligned} \quad (32)$$

здесь мы воспользовались тем, что $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$. Дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$ – голоморфный по $z^{(1)} \in D_R^{(1)}$ при $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$. Используя свойства Ψ -функции и полученное выше асимптотическое представление (31) для функции $F(z^{(1)})$, получаем из (32) аналог соотношения (31) для $F(z^{(2)})$ при $n \rightarrow \infty$:

$$F(z^{(2)}) = C_n(1 + O(\delta_1^n)) \quad (33)$$

равномерно внутри $D_R^{(2)}$, где $\delta_1 < 1$. Отсюда и из определения (24) функции F вытекает, что равномерно внутри D_R справедливо представление

$$\begin{aligned} 2Q_n(z) &= -\frac{C_n}{\Psi(z^{(2)})} (1 + o(1)) = -C_n \Psi(z) (1 + o(1)), \\ \text{где } o(1) &= O(\delta_1^n), \quad \delta_1 < 1. \end{aligned} \quad (34)$$

Напомним, что

$$\frac{\Psi(z)}{z^n} \rightarrow \varkappa_n \quad \text{при } z \rightarrow \infty,$$

где $\varkappa_n = 2^n \exp\{S(\infty)\} \neq 0$, т.е. Ψ имеет в точке $z = \infty$ полюс n -го порядка. Так как постоянная $C_n \neq 0$ при достаточно больших n (см. (31)), то $\deg Q_n = n$, т.е. все достаточно далекие индексы n нормальны. Выбор постоянной $C_n \neq 0$ связан только с нормировкой Q_n . Положим $C_n = -2$. В таком случае асимптотическая формула (34) для полиномов Q_n вне отрезка Δ примет вид:

$$Q_n(z) = \Psi(z)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (35)$$

где $o(1) = O(\delta^n)$, $\delta < 1$.

4. Вернемся теперь к соотношению $F(\mathbf{z}) = C_n(1 + o(1)) = -2 + o(1)$, которое справедливо равномерно на компакте $D^{(1)} \sqcup \Gamma$ и, следовательно, равномерно на Γ . Из этого соотношения в силу определения функции F вытекает, что равномерно по $x \in \Delta$

$$\begin{aligned}\Psi^+(x)R_n^+(x)w^+(x) &= -2 + o(1), \\ \Psi^-(x)R_n^-(x)w^-(x) &= -2 + o(1)\end{aligned}\quad n \rightarrow \infty.$$

Так как $\Psi^+(x) \neq 0$ и $\Psi^-(x) \neq 0$ на Δ , то

$$\begin{aligned}R_n^+(x)w^+(x) &= -\frac{2}{\Psi^+(x)}(1 + o(1)), \\ R_n^-(x)w^-(x) &= -\frac{2}{\Psi^-(x)}(1 + o(1)),\end{aligned}\quad n \rightarrow \infty.$$

Суммируя два последних соотношения, получаем

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -\frac{2}{\Psi^+(x)} - \frac{2}{\Psi^-(x)} + o(1). \quad (36)$$

Поскольку $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$ при $x \in \Delta$, то

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x). \quad (37)$$

Объединяя соотношения (36) и (37), получаем, что

$$Q_n(x)\rho(x) = \frac{1}{\Psi^+(x)} + \frac{1}{\Psi^-(x)} + o(1).$$

Так как $\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$ при $x \in \Delta$, то

$$Q_n(x) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$$

равномерно по $x \in \Delta$, где $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Предложение 1 доказано.

§ 4. Доказательство теоремы 2

1. Схема доказательства теоремы 1, предложенная в [4] для *положительной меры* σ , является достаточно общей и при условии существования сильной асимптотики (35) позволяет получить аналог теоремы 1 для *комплексного веса* ρ . Ниже мы приведем доказательство теоремы 2, следуя в целом схеме рассуждений работы [4].

В этом параграфе мы будем придерживаться следующего соглашения при обозначении полюсов функции f в D : a_j , $j = 1, \dots, \ell$, – попарно различные полюсы f кратностей $m_j \geq 1$ соответственно, $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$ – полное число полюсов f в D с учетом их кратностей.

Пусть функция $f = \hat{\rho} + r$, где

$$\hat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (38)$$

$$r(z) = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{A_{j,k}}{(k-1)!} \frac{1}{(z-a_j)^k}, \quad (39)$$

здесь $A_{j,m_j} \neq 0$.

Так как для функции $\hat{\rho}$ все достаточно далекие индексы n нормальны, то $\deg Q_n(z; \hat{\rho}) = n$ при $n \geq n_0$. Временно в пределах этого параграфа нам удобно, *сохранив обозначения, перейти к другой нормировке полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$ и считать, что $Q_n(z; \hat{\rho}) = z^n + \dots$ при $n \geq n_0$* . С учетом представления (16) функции Ψ нетрудно видеть, что формула сильной асимптотики (35) для полиномов Q_n сохранится, если мы соответствующим образом изменим и нормировку самой Ψ -функции, точнее, в правой части представления (16) $\Phi(z)$ заменим на $\Phi(z)/2$ и умножим эту правую часть на $\exp\{-S(\infty)\}$ (и, тем самым, нормируем Ψ -функцию условием $\Psi(z)/z^n \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$).

Аналогичное соглашение в пределах этого параграфа будет действовать и относительно полиномов $Q_n(z; f)$: *если $\Lambda = \{n_k\}$ – последовательность нормальных индексов для функции f , то $Q_n(z; f) = z^n + \dots$ при $n \in \Lambda$* . Напомним, что последовательность $\Lambda = \{n_k\}$ разбивает натуральный ряд чисел на множества $\Lambda_k = \{n : n_k \leq n < n_{k+1}\}$ такие, что $f_n = f_{n_k}$ для $n \in \Lambda_k$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ существует единственная пара полиномов P_n, Q_n (степени $\leq n$) такая, что: а) справедливо соотношение (4), б) полиномы P_n и Q_n не имеют общих нулей и с) старший коэффициент полинома Q_n равен 1. Всюду в этом параграфе через $P_n = P_n(f)$ и $Q_n = Q_n(f)$ обозначаются полиномы, удовлетворяющие условиям а)–с); будем называть их числителем и знаменателем рациональной функции f_n , $n \in \mathbb{N}$.

Всюду в дальнейшем мы придерживаемся этих соглашений и, кроме того, для краткости полагаем: $L_n(z) := Q_n(z; \hat{\rho}) = z^n + \dots$

при $n \geq n_0$, $Q_n(z) := Q_n(z; f)$; тем самым, $Q_n(z) = z^n + \dots$ при $n \in \Lambda$.

С учетом сказанного из предложения 1 вытекают следующие формулы сильной асимптотики для полиномов L_n при $n \rightarrow \infty$:

$$L_n(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2} \right)^n e^{S(z)-S(\infty)} (1 + o(1)) \quad (40)$$

равномерно внутри D ,

$$L_n(x) = \left(\frac{\Phi^+(x)}{2} \right)^n e^{S^+(x)-S(\infty)} + \left(\frac{\Phi^-(x)}{2} \right)^n e^{S^-(x)-S(\infty)} + o(1)$$

равномерно на Δ . (41)

Отметим несколько фактов относительно полиномов L_n , ортогональных на отрезке Δ с весом ρ , которые вытекают из (40), (41) и будут использоваться нами в дальнейшем. Пусть U – произвольная окрестность отрезка Δ вида $U = U_\varepsilon = \{z : g_D(z, \infty) < \varepsilon\}$. Из формулы сильной асимптотики (40) для L_n вытекает, что для достаточно больших n все нули L_n и их производных лежат внутри U . В дальнейшем будем считать, что $\varepsilon > 0$ выбрано так, что все полюсы функции f лежат в $D \setminus \bar{U}$.

Из формулы (41) легко вытекает, что $L_n(x) = 2^{-n} \cdot O(1)$ равномерно на Δ и

$$\int_{\Delta} L_n^2(x) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2^{1-2n} e^{-2S(\infty)} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(ср. с (19)).

Исходя из этих свойств полиномов L_n легко доказать следующие утверждения (аналоги лемм 2–5 из [4]).

(i) *Равномерно внутри D справедливо соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+\mu}}{L_n}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2} \right)^\mu, \quad (42)$$

где μ – произвольное натуральное число.

(ii) *Для любых натуральных μ и ν , $\mu < \nu < n$, и любого $K \Subset \mathbb{C} \setminus \bar{U}$ имеют место оценки*

$$c_1 n^{\nu-\mu} < \left| \frac{L_n^{(\nu)}}{L_n^{(\mu)}}(z) \right| < c_2 n^{\nu-\mu}, \quad z \in K, \quad (43)$$

где $c_1 > 0$ и $c_2 < +\infty$ не зависят от n .

(iii) Для любых натуральных μ и ν равномерно внутри D имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+\mu}^{(\nu)}}{L_n^{(\nu)}}(z) = \left(\frac{\Phi(z)}{2} \right)^\mu. \quad (44)$$

(iv) Для любых целых неотрицательных μ и ν и любого $a \in D$ имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|L_{n+\mu}\|_\Delta}{|L_n^{(\nu)}(a)|} \right)^{1/n} = \frac{1}{|\Phi(a)|}, \quad (45)$$

где $\|\cdot\|_\Delta$ – sup-норма на Δ .

Из определяющего рациональную дробь f_n соотношения (4) для $f = \hat{\rho} + r$ легко вытекает, что для любого полинома q , $\deg q \leq n-1$, имеем

$$\int_\Delta Q_n(x) q(x) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{j=1}^\ell \sum_{k=1}^{m_j} A_{j,k} (Q_n(z) q(z))^{(k-1)} \Big|_{z=a_j} = 0 \quad (46)$$

(напомним, что $Q_n(z) := Q_n(z; f)$). Всюду в дальнейшем считаем, что $n > m$. Полагая $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^\ell (z - a_j)^{m_j}$, $q(z) = \omega_m(z) z^\nu$, получим из (46) следующие соотношения “квазиортогональности” для полинома $(Q_n \omega_m)(z)$, $\deg(Q_n \omega_m) \leq n + m$:

$$\int_\Delta Q_n(x) \omega_m(z) z^\nu \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n - m - 1. \quad (47)$$

Так как все достаточно далекие индексы n для функции $\hat{\rho}$ нормальны, то $\deg L_n = n$ при $n \geq n_0$. Отсюда, из ортогональности L_n с весом ρ на Δ и соотношений квазиортогональности (47) для Q_n вытекает, что $\deg Q_n \geq n - 2m$ при всех $n \geq n_0 + m$. Это означает, что для последовательности $\Lambda = \{n_k\}$ нормальных индексов для функции f имеем:

$$n_{k+1} - n_k \leq 2m + 1 \quad \text{при} \quad n_k \geq n_0 + m. \quad (48)$$

Дальнейшие рассуждения (в пп. 2–4) проводятся для нормальных индексов.

2. Наша ближайшая цель – доказательство следующего утверждения (формулы сравнительной асимптотики), аналогичного лемме 1 из [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Равномерно внутри области D справедливо соотношение*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n}{L_n}(z) = \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\Phi(z) - \Phi(a_j))^{2m_j}}{2^m \Phi^m(z) \prod_{j=1}^{\ell} (z - a_j)^{m_j}}. \quad (49)$$

Пусть $n \in \Lambda$, $S_{n+m}(z) = (Q_n \omega_m)(z) = z^{n+m} + \dots$. Тогда

$$\int_{\Delta} S_{n+m}(x) x^{\nu} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-m-1.$$

Так как для всех достаточно далеких индексов $\deg L_n = n$, то из этих соотношений вытекает, что полином S_{n+m} представляется в следующем виде:

$$S_{n+m} = L_{n+m} + \lambda_{n,1} L_{n+m-1} + \dots + \lambda_{n,2m} L_{n-m}, \quad (50)$$

где параметры $\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{n,2m}$ неизвестны. Ниже мы получим $2m$ соотношений, которые позволят исключить эти параметры из представления (50).

Первые m соотношений немедленно следуют из определения полинома S_{n+m} :

$$S_{n+m}(a_j) = S'_{n+m}(a_j) = \dots = S_{n+m}^{(m_j-1)}(a_j) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell. \quad (51)$$

Получим еще одну группу из m соотношений.

Зафиксируем $j \in \{1, \dots, \ell\}$ и положим

$$S_{n+m}(z) \cdot (z - a_j)^{-m_j} = S_{n+m,j}(z) = b_{n,j}^{(0)} + b_{n,j}^{(1)}(z - a_j) + \dots \quad (52)$$

(степень этого полинома равна $n + m - m_j$). Подставив теперь полином $\omega_m(z)/(z - a_j)^{\nu}$, $\nu = 1, \dots, m_j$, в соотношение (46), получим

$$\int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x - a_j)^{\nu}} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{k=1}^{m_j} A_{j,k} (S_{n+m,j}(z)(z - a_j)^{m_j-\nu})^{(k-1)} \Big|_{z=a_j} = 0.$$

Отсюда вытекает система уравнений

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{x - a_j} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} + (m_j - 1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(0)} = 0, \\
 & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x - a_j)^2} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} + (m_j - 2)! A_{j,m_j-1} b_{n,j}^{(0)} \\
 & \quad + (m_j - 1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(1)} = 0, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \int_{\Delta} \frac{S_{n+m}(x)}{(x - a_j)^{m_j}} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} + A_{j,1} b_{n,j}^{(0)} + \dots \\
 & \quad + (m_j - 1)! A_{j,m_j} b_{n,j}^{(m_j-1)} = 0.
 \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно $b_{n,j}^{(0)}, b_{n,j}^{(1)}, \dots, b_{n,j}^{(m_j-1)}$ (напомним, что величины $A_{j,m_j} \neq 0$, см. (39)), получим набор из m_j полиномов $p_{j,1}, \dots, p_{j,m_j}$ (второй индекс равен степени полинома) таких, что

$$\begin{aligned}
 & m_j! b_{n,j}^{(0)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,1} \left(\frac{1}{x - a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \\
 & (m_j + 1)! b_{n,j}^{(1)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,2} \left(\frac{1}{x - a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & (2m_j - 1)! b_{n,j}^{(m_j-1)} + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,m_j} \left(\frac{1}{x - a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.
 \end{aligned}$$

Подчеркнем, что полиномы $p_{j,\nu}$, $1 \leq \nu \leq m_j$, не зависят от n ; они полностью определяются главной частью разложения функции f в точке $z = a_j$. Учитывая (52), последнюю систему равенств можно переписать так:

$$\begin{aligned}
 & S_{n+m}^{(m_j)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,1} \left(\frac{1}{x - a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \\
 & S_{n+m}^{(m_j+1)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,2} \left(\frac{1}{x - a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \quad (53) \\
 & \dots\dots\dots \\
 & S_{n+m}^{(2m_j-1)}(a_j) + \int_{\Delta} S_{n+m}(x) p_{j,m_j} \left(\frac{1}{x - a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.
 \end{aligned}$$

Совокупность таких систем (53) для всех $j = 1, 2, \dots, \ell$ содержит m соотношений.

3. Положим

$$\delta_n(j, \mu, \nu) = \frac{1}{L_{n-m}^{(m_j-1+\nu)}(a_j)} \int_{\Delta} L_{n-m+\mu}(x) p_{j,\nu} \left(\frac{1}{x-a_j} \right) \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (54)$$

где $j = 1, \dots, \ell$, $\nu = 1, \dots, m_j$, $\mu = 0, 1, \dots, 2m$. Функции

$$p_{j,\nu} \left(\frac{1}{z-a_j} \right)$$

голоморфны в окрестности отрезка Δ , а полиномы $p_{j,\nu}$ не зависят от n . С учетом свойств (i)–(iv) полиномов L_n , получаем из (54):

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\delta_n(j, \mu, \nu)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a_j)|} < 1.$$

Пусть $\delta < 1$ таково, что $1/|\Phi(a_j)| < \delta < 1$ при каждом $j = 1, \dots, \ell$. Тогда для любой тройки индексов j, μ, ν , меняющихся в указанных выше пределах, имеем

$$\delta_n(j, \mu, \nu) = o(\delta^n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (55)$$

Подставим в соотношения (53) разложение (50); после очевидных преобразований, учитывая (55), получим

$$\begin{aligned} & \frac{L_{n+m}}{L_{n-m}}(a_j) + \lambda_{n,1} \frac{L_{n+m-1}}{L_{n-m}}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{L_{n+m}^{(m_j-1)}}{L_{n-m}^{(m_j-1)}}(a_j) + \lambda_{n,1} \frac{L_{n+m-1}^{(m_j-1)}}{L_{n-m}^{(m_j-1)}}(a_j) + \dots + \lambda_{n,2m} = 0, \quad (56) \\ & \frac{L_{n+m}^{(m_j)}}{L_{n-m}^{(m_j)}}(a_j) + o(\delta^n) + \lambda_{n,1} \left(\frac{L_{n+m-1}^{(m_j)}}{L_{n-m}^{(m_j)}}(a_j) + o(\delta^n) \right) + \dots \\ & \quad + \lambda_{n,2m}(1 + o(\delta^n)) = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & \frac{L_{n+m}^{(2m_j-1)}}{L_{n-m}^{(2m_j-1)}}(a_j) + o(\delta^n) + \lambda_{n,1} \left(\frac{L_{n+m-1}^{(2m_j-1)}}{L_{n-m}^{(2m_j-1)}}(a_j) + o(\delta^n) \right) + \dots \\ & \quad + \lambda_{n,2m}(1 + o(\delta^n)) = 0, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2, \dots, \ell$. Во второй группе из m_j соотношений мы заменили на $o(\delta^n)$ выражения вида (54).

При $n \rightarrow \infty$ в каждом из уравнений (56) строка коэффициентов имеет один и тот же предел, а именно строку

$$\left(\frac{1}{2}\Phi(a_j)\right)^{2m}, \left(\frac{1}{2}\Phi(a_j)\right)^{2m-1}, \dots, 1$$

(см. свойства (i)–(iv)). Преобразуем теперь систему (56) так, чтобы в пределе получались линейно независимые строки.

С помощью формулы Лейбница получаем

$$\frac{L_{n+m-\mu}^{(\nu)}}{L_{n-m}^{(\nu)}} = \left(\frac{L_{n+m-\mu}}{L_{n-m}}\right)^{(\nu)} \frac{L_{n-m}}{L_{n-m}^{(\nu)}} - \sum_{k=1}^{\nu} F_{n-m}(\nu, k) \frac{L_{n+m-\mu}^{(\nu-k)}}{L_{n-m}^{(\nu-k)}}, \quad (57)$$

где

$$F_{n-m}(\nu, k) = \binom{\nu}{k} \frac{L_{n-m} L_{n-m}^{(\nu-k)}}{L_{n-m}^{(\nu)}} \left(\frac{1}{L_{n-m}}\right)^{(k)},$$

$\mu = 0, 1, \dots, 2m-1$; подчеркнем, что $F_{n-m}(\nu, k)$ не зависит от μ . Пользуясь соотношениями (43) и (44), нетрудно показать, что для любого $a \in D$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_{n-m}(\nu, k)(a)|^{1/n} \leq 1. \quad (58)$$

Пусть $C > 1$ таково, что $\delta_1 = C\delta < 1$. В силу (58) для любой тройки индексов j, ν, k , меняющихся в пределах $j = 1, \dots, \ell$, $\nu = 1, \dots, 2m_j - 1$, $k = 1, \dots, \nu$, имеем

$$F_{n-m}(\nu, k)(a_j) = O(C^m), \quad n \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_{n,\mu} = \frac{L_{n+m-\mu}}{L_{n-m}}, \quad \mu = 0, 1, \dots, 2m; \quad \varphi = \frac{\Phi}{2}. \quad (60)$$

В силу (42) равномерно внутри D выполняются соотношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n,\mu}(z) = \varphi^{2m-\mu}(z), \quad \mu = 0, 1, \dots, 2m; \quad (61)$$

тем самым, и последовательные производные функций $\varphi_{n,\mu}$ равномерно внутри D сходятся к соответствующим производным функций $\varphi^{2m-\mu}$.

Символ, стоящий в правой части этого равенства, обозначает определитель порядка $2m$, в котором последовательно выписываются указанные группы строк для $j = 1, 2, \dots, \ell$. Поскольку φ – однолистная функция в области D , определитель Δ^0 отличен от нуля (величина этого определителя нам не понадобится). Следовательно, $\Delta_n^0 \neq 0$ при достаточно больших $n \geq n_0$.

Добавим теперь к системе (62) соотношение

$$\varphi_{n,0}(z) + \lambda_{n,1}\varphi_{n,1}(z) + \dots + \lambda_{n,2m} = \frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z), \quad z \in D,$$

и исключим из этого соотношения (с помощью системы (62)) неизвестные $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,2m}$. Получим

$$\frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z) = \frac{\Delta_n(z)}{\Delta_n^0}, \quad z \in D, \quad n \geq n_0,$$

где

$$\Delta_n(z) = \begin{vmatrix} \varphi_{n,0}(z) & \varphi_{n,1}(z) & \dots & 1 \\ \varphi_{n,0}(a_j) & \varphi_{n,1}(a_j) & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,0}^{(m_j-1)}(a_j) & \varphi_{n,1}^{(m_j-1)}(a_j) & \dots & 0 \\ \varphi_{n,0}^{(m_j)}(a_j) + o(1) & \varphi_{n,1}^{(m_j)}(a_j) + o(1) & \dots & o(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,0}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1) & \varphi_{n,1}^{(2m_j-1)}(a_j) + o(1) & \dots & o(1) \end{vmatrix}_{j=1, \dots, \ell}.$$

Следовательно (напомним, что $n \in \Lambda$),

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{S_{n+m}}{L_{n-m}}(z) = \mathcal{P}(z) = \frac{\Delta(z)}{\Delta^0}, \quad z \in D, \quad (63)$$

где

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \varphi^{2m}(z) & \varphi^{2m-1}(z) & \dots & 1 \\ \varphi^{2m}(a_1) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi^{2m})^{(2m_\ell-1)}(a_\ell) & \vdots & \Delta^0 & \vdots \end{vmatrix}; \quad (64)$$

переход к пределу в (63) – равномерный внутри D . Функция $\mathcal{P}(z)$ – полином от $\varphi(z)$ степени $2m$ со старшим коэффициентом

при $\varphi^{2m}(z)$, равным 1 (см. (50)). Учитывая характер нулей этой функции, получаем

$$\mathcal{P}(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (\varphi(z) - \varphi(a_j))^{2m_j}. \quad (65)$$

Следовательно, принимая во внимание (60), (65) и введенное ранее обозначение $S_{n+m} = Q_n \omega_m$, имеем:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n}{L_{n-m}}(z) = \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (\Phi(z) - \Phi(a_j))^{2m_j}}{2^{2m} \omega_m(z)}, \quad z \in D; \quad (66)$$

сходимость – равномерная внутри D . Последнее соотношение эквивалентно (49). Предложение 3 доказано.

Отметим, что в силу легко проверяемого тождества

$$\frac{\Phi(z) - \Phi(a)}{z - a} = -\frac{2\Phi(z)\Phi(a)}{1 - \Phi(z)\Phi(a)}$$

соотношение (49) эквивалентным образом переписывается в виде:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \frac{Q_n(z)}{L_n(z)} = \text{const} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(z)\Phi(a_j)} \right)^{m_j}, \quad (67)$$

где $\text{const} = (-1)^m / \prod_{j=1}^{\ell} \Phi^{m_j}(a_j)$.

5. Функция, стоящая в правой части соотношения (49), голоморфна в области D ; множество ее нулей совпадает (с учетом их кратностей) с множеством полюсов функции f в D . Отсюда и из теоремы Руше получаем утверждение теоремы 2 для последовательности нормальных индексов $\Lambda = \{n_k\}$; структура последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такова (см. § 1, п. 2), что тем самым это утверждение оказывается справедливым и для всех индексов.

Ниже мы используем следующее соотношение, вытекающее из (63):

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} |S_{n+m}(z)|^{1/n} = \frac{1}{2} |\Phi(z)|, \quad z \in D' \quad (68)$$

(переход к пределу – равномерный внутри D').

Докажем утверждение о скорости сходимости функций f_n к f и полюсов f_n к полюсам f . Пусть $n \in \Lambda$, $n > m$; из (4) получаем

$$(\hat{\rho} + r - f_n)(z) = (\hat{\rho} - \tau_n)(z) = \frac{A}{z^{2n+1}} + \dots; \quad (69)$$

здесь $\tau_n = f_n - r$ – рациональная функция порядка $n + m$, знаменатель которой есть $Q_n \omega_m = S_{n+m}$. Соотношение (69) означает, что эта рациональная функция интерполирует голоморфную в области D функцию $\hat{\rho}$ в точке $z = \infty$ до порядка $2n + 1 > n + m$.

Фиксируем произвольный компакт $K \subset D'$; из утверждения теоремы 2 следует, что для достаточно больших n все нули полинома S_{n+m} лежат вне компакта K . Для любого $R > 1$ положим $\Gamma_R = \{z : |\Phi(z)| = R\}$; пусть R столь близко к 1, что K лежит во внешности Γ_R . С помощью формулы Эрмита из (69) получаем

$$(f - f_n)(z) = (\hat{\rho} - \tau_n)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{S_{n+m}(t)q(t)\hat{\rho}(t)dt}{S_{n+m}(z)q(z)(t-z)}, \quad z \in K,$$

где q – произвольный полином степени $\leq n - m$. Выберем $q = L_{n-m}$. Тогда, используя (68) и свойства полиномов $\{L_n\}$, получаем оценку

$$\|f - f_n\|_K < C \left(\frac{R + \varepsilon}{R(K) - \varepsilon} \right)^{2n},$$

где $\|\cdot\|$ – sup-норма, $R(K) = \inf\{|\Phi(z)| : z \in K\}$, $\varepsilon > 0$ – произвольно, $n > n(\varepsilon)$, $n \in \Lambda$, C не зависит от n . Следовательно,

$$\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{R + \varepsilon}{R(K) - \varepsilon};$$

устремляя ε к нулю и R к единице, получаем отсюда

$$\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \Lambda}} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{1}{R(K)} < 1. \quad (70)$$

Вновь учитывая структуру последовательности $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и неравенство (48) для нормальных индексов, получаем из (70) следующее утверждение о скорости сходимости функций f_n к f :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_K^{1/2n} \leq \frac{1}{R(K)} < 1.$$

Отсюда уже легко вытекает, что если $a \in D$ – полюс f кратности $\mu \geq 1$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a - \zeta_{j,n}(a)|^{1/n} \leq \frac{1}{|\Phi(a)|^{2/\mu}} < 1, \quad j = 1, \dots, \mu$$

(как обычно, $\zeta_{j,n}(a)$, $j = 1, \dots, \mu$, – полюсы f_n , перенумерованные в порядке неубывания их расстояния до точки a).

§ 5. Доказательство предложения 2

1. Существование и единственность решения задачи $(\mathcal{R}_2)$ доказываются стандартным способом (см. [16]): в предположении, что решение существует, находится его явный вид. Непосредственно проверяется, что полученная в итоге функция является решением краевой задачи. Для *доказательства* предложения 2 нам понадобится рассмотреть и решить несколько более общую, чем $(\mathcal{R}_2)$, краевую задачу.

Пусть $a_j, b_j \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, $j = 1, \dots, m$, – произвольные необязательно различные точки.

ЗАДАЧА $(\mathcal{R}_3)$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ найти функцию $\psi = \psi_n$ такую, что:

- 1°. ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\psi) = n\infty^{(2)} + a_1^{(1)} + \dots + a_m^{(1)} - b_1^{(2)} - \dots - b_m^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\psi(\mathbf{x}+) = \psi(\mathbf{x}-)$.

Непосредственно из условий этой задачи вытекает, что

$$\psi(z^{(1)})\psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - a_j)}{\prod_{j=1}^m (z - b_j)}$$

при $z \in D$, где $\text{const} \neq 0$. Как и ранее, будем придерживаться той нормировки ψ -функции, которая даст $\text{const} = 1$. Решение задачи $(\mathcal{R}_3)$ понадобится нам в ситуации, когда $b_j = a_{j,n} \rightarrow a_j$ при $n \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, m$. Отметим, что среди точек $a_1, \dots, a_m$ в п. 2° задачи $(\mathcal{R}_3)$ могут встречаться совпадающие; аналогичное замечание относится и к точкам $b_1, \dots, b_m$. В дальнейшем в пределах этого параграфа подобного соглашения нам будет удобно придерживаться и относительно полюсов функции f : *каждый полюс f в D выписывается столько раз, какова его кратность*.

Найти явный вид решения задачи $(\mathcal{R}_3)$ не составляет труда: риманова поверхность $\mathfrak{R}$ – нулевого рода, поэтому любой дивизор вида $a^{(1)} - b^{(2)}$ разрешим: существует функция $\Phi_{a,b}$, мероморфная на $\mathfrak{R}$ и такая, что $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$ (см. (15)). Для ψ -функции $\deg(\psi) = 0$, поэтому задача $(\mathcal{R}_3)$ разбивается на несколько независимых задач, соответствующих пп. 2° и 3°.

Функция $\Phi(\mathbf{z}) = z + w$ мероморфна на $\mathfrak{R}$, дивизор $(\Phi) = \infty^{(2)} - \infty^{(1)}$ и $\Phi(z^{(1)})\Phi(z^{(2)}) \equiv 1$ при $z \in D$. Пусть $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ – произвольные точки, $\lambda \neq 0$ – комплексная постоянная. Функция

$$\Phi_{a,b}(\mathbf{z}) = \lambda \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b)}{z - b} \frac{z - a}{1 - \Phi(a)\Phi(\mathbf{z})} \quad (71)$$

– однозначная мероморфная функция на $\mathfrak{R}$ с дивизором $(\Phi_{a,b}) = a^{(1)} - b^{(2)}$. Положим $\lambda = \lambda(a, b) = \sqrt{\Phi(a)/\Phi(b)}$. Тогда $\Phi_{a,b}(z^{(1)}) \times \Phi_{a,b}(z^{(2)}) \equiv (z - a)/(z - b)$ при $z \in D$. Функции вида (71) потребуются нам только в ситуации, когда a фиксировано, а $b \rightarrow a$. Исходя из этого условия выберем в представлении для λ ветвь корня так, что $\lambda(a, b) = 1 + o(1)$ при $b \rightarrow a$; очевидно, что $o(1)$ определяется скоростью стремления $b \rightarrow a$: $o(1) = O(|a - b|)$.

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{z}) &= \Phi(\mathbf{z})^n \prod_{j=1}^m \Phi_{a_j, b_j}(\mathbf{z}) \\ &= \Phi(\mathbf{z})^n \prod_{j=1}^m \lambda(a_j, b_j) \frac{\Phi(\mathbf{z}) - \Phi(b_j)}{z - b_j} \frac{z - a_j}{1 - \Phi(a_j)\Phi(\mathbf{z})}. \end{aligned}$$

Функция $\mathcal{F}$ мероморфна на $\mathfrak{R}$, дивизор $(\mathcal{F}) = n\infty^{(2)} - n\infty^{(1)} + \sum_{j=1}^m a_j^{(1)} - \sum_{j=1}^m b_j^{(2)}$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x}+) = \mathcal{F}(\mathbf{x}-)$ на Γ . Тем самым, $(\mathcal{F}) = (\psi)$ и для функции $H(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z})/\mathcal{F}(\mathbf{z})$ имеем: $(H) = 0$, т.е. H голоморфна и отлична от нуля в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$, а на Γ выполняется краевое условие $\rho(x)H(\mathbf{x}+) = H(\mathbf{x}-)$. Отсюда с учетом выбранных нормировок функций ψ и $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(z^{(1)})\mathcal{F}(z^{(2)}) \equiv \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_m)}{(z - b_1) \cdots (z - b_m)},$$

получаем, что $H(z^{(1)})H(z^{(2)}) \equiv 1$ при $z \in D$. С учетом этого соотношения из краевого условия для функции H на Γ вытекает, что $\rho(x)H^+(x)H^-(x) \equiv 1$ при $x \in \Delta$.

Таким образом, функция $H(z) = H(z^{(1)})$ голоморфна и отлична от нуля в D и удовлетворяет условию: $\rho(x)H^+(x)H^-(x) \equiv 1$ при $x \in \Delta$. Тогда функция $u(z) = \frac{\log H(z)}{w(z)}$ однозначно определена и голоморфна в D , $u(\infty) = 0$ и

$$u^+(x) - u^-(x) = -\frac{\log \rho(x)}{w^+(x)} = i \frac{\log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

при $x \in \Delta$. Следовательно, для u справедливо следующее представление интегралом типа Коши:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{x-z} \frac{dx}{w^+(x)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{x-z} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Тем самым, произведение $w(z)u(z) = S(z)$ – функция Сегё для веса ρ . Отсюда вытекает, что

$$H(z) = e^{w(z)u(z)} = e^{S(z)} = \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\}.$$

В итоге для ψ -функции, решающей задачу $(\mathcal{R}_3)$, получаем следующее представление при $\mathbf{z} \in \mathfrak{R} \setminus \Gamma$:

$$\psi(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\mathbf{z})H(\mathbf{z}), \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned} H(z^{(1)}) &= \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2-1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x)}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\}, \\ H(z^{(2)}) &\equiv \frac{1}{H(z^{(1)})}, \\ \mathcal{F}(z^{(1)}) &= \Phi(z)^n \prod_{j=1}^m \lambda(a_j, b_j) \frac{\Phi(z) - \Phi(b_j)}{z - b_j} \frac{z - a_j}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)}, \\ \mathcal{F}(z^{(2)}) &\equiv \frac{\prod_{j=1}^m (z - a_j)}{\prod_{j=1}^m (z - b_j) \cdot \mathcal{F}(z^{(1)})}. \end{aligned} \quad (73)$$

Из полученного представления вытекает, что $\psi(z)/z^n \rightarrow \varkappa_n$ при $z \rightarrow \infty$, где

$$\begin{aligned} \varkappa_n &= 2^n e^{S(\infty)} \prod_{j=1}^m \frac{\lambda(a_j, b_j)}{(-\Phi(b_j))} \\ &= 2^n \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \prod_{j=1}^m \frac{\lambda(a_j, b_j)}{(-\Phi(b_j))} \neq 0, \end{aligned}$$

т.е. ψ имеет в точке $z = \infty$ полюс n -го порядка. Непосредственно проверяется, что полученная функция ψ является решением задачи $(\mathcal{R}_3)$. Отметим также следующее свойство этой функции, которое понадобится нам в дальнейшем:

$$\rho(x)\psi^+(x)\psi^-(x) \equiv \prod_{j=1}^m \frac{x-a_j}{x-b_j} \quad \text{при } x \in \Delta. \quad (74)$$

Наконец, при $b_j = a_j$, $j = 1, \dots, m$, полученные результаты прямо приводят к Ψ -функции, решающей задачу $(\mathcal{R}_2)$:

$$\Psi(\mathbf{z}) = \mathcal{F}(\mathbf{z})H(\mathbf{z}), \quad (75)$$

где $H(\mathbf{z})$ определяется условиями (73), а

$$\mathcal{F}(z^{(1)}) = \Phi(z)^n \prod_{j=1}^m \frac{\Phi(z) - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)\Phi(z)}, \quad \mathcal{F}(z^{(2)}) \equiv \frac{1}{\mathcal{F}(z^{(1)})}, \quad (76)$$

при этом $\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$ при $x \in \Delta$ и $\Psi(z)/z^n \rightarrow \varkappa_n$ при $z \rightarrow \infty$, где

$$\varkappa_n = \frac{2^n e^{S(\infty)}}{\prod_{j=1}^m (-\Phi(a_j))} \neq 0,$$

т.е. Ψ имеет в точке $z = \infty$ полюс n -го порядка.

2. Рассуждения этого пункта основаны на свойствах ψ -функции. Всюду здесь предполагается, что в условии 2° задачи $(\mathcal{R}_3)$ точки a_j , $j = 1, \dots, m$, – полюсы¹⁰ функции f в D , $b_j = a_{j,n}$ – полюсы рациональной дроби f_n , соответствующие полюсам f в D

¹⁰Напомним, что в этом параграфе мы придерживаемся следующего соглашения: каждый полюс или нуль функции выписывается столько раз, какова его кратность.

при $n \rightarrow \infty$ и занумерованные так, что $a_{j,n} \rightarrow a_j$ при $n \rightarrow \infty$ для $j = 1, \dots, m$. Тем самым дивизор $(\psi) = n\infty^{(2)} + a_1^{(1)} + \dots + a_m^{(1)} - a_{1,n}^{(2)} - \dots - a_{m,n}^{(2)} - n\infty^{(1)}$, а соответствующие $\lambda = \lambda(a_j, b_j) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ с *геометрической скоростью* (см. § 2, п. 3). Положим $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$, $\omega_{n,m}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$.

Определим на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ функцию F следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}) \cdot \begin{cases} R_n(z)w(z), & \mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}, \\ -2Q_n(z), & \mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}. \end{cases} \quad (77)$$

Опираясь на свойства функции ψ в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$, нетрудно увидеть, что функция F (кусочно) голоморфна в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$. Как будет показано ниже, все достаточно большие индексы n нормальны для функции $f = \hat{\rho} + r$ и для таких n дивизор $(F) = 0$.

Используя свойства ψ -функции на кривой Γ и следующее свойство функции остатка R_n на границе отрезка Δ : $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$, получаем краевое условие для F на Γ :

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (78)$$

где функция $\chi(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z})R_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, мероморфна на втором листе. В таком случае F стандартным образом (см. [19], [16]) восстанавливается в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ по граничным условиям (78) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) + C_n, \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (79)$$

где C_n – некоторая постоянная,

$$d\Omega(\zeta; \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)} \quad (80)$$

– мероморфный на $\mathfrak{R}$ абелев дифференциал, а контур Γ^+ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$: область остается слева при обходе по контуру. Как обычно, дальнейшие рассуждения основаны на интегральном представлении (79).

Пусть сначала $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$. Выберем числа $R > 1$ и $\varepsilon > 0$ так, чтобы функции χ и $1/\rho$ были бы голоморфны в области

$\{z^{(2)} : 1 < |\Phi(z)| < R + \varepsilon\}$. Тогда в интегральном представлении (79) контур Γ можно заменить на контур $\Gamma_R^{(2)} \subset D^{(2)}$. Воспользовавшись тем, что

$$\begin{aligned}\chi(z^{(2)}) &= \psi(z^{(2)})R_n(z)w(z^{(2)}) = -F(z^{(1)})\frac{\psi(z^{(2)})}{\psi(z^{(1)})} \\ &= -F(z^{(1)})\frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(z^{(1)})^2}\end{aligned}$$

и $d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) = d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)})$, получаем из (79) следующее представление для функции F :

$$\begin{aligned}F(z^{(1)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(1)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(2)}) + C_n,\end{aligned}\tag{81}$$

где $\Gamma_R^{(1)} = \{z^{(1)} : |\Phi(z)| = R\}$. Так как дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; \mathbf{z})$ – голоморфный по $\mathbf{z}$ на компакте $D^{(2)} \sqcup \Gamma$ при $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$, то последнее интегральное представление¹¹ справедливо равномерно на компакте $D^{(1)} \sqcup \Gamma$. Из (81) получаем, что равномерно по $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \max_{\Gamma_R} \frac{1}{|\psi(\zeta^{(1)})|^2} O(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $M_n = \max_{\Gamma_R^{(1)}} |F(\zeta^{(1)})|$. Используя свойства ψ -функции, получаем отсюда, что равномерно по $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$

$$|F(\mathbf{z}) - C_n| = M_n \cdot O(\delta^n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,\tag{82}$$

где $\delta = 1/R^2 < 1$. Так как $F(z^{(1)}) \not\equiv 0$, то $M_n \neq 0$, поэтому из (82) последовательно получаем: $M_n = |C_n|(1 + O(\delta^n))$ и

$$F(z^{(1)}) = C_n(1 + O(\delta^n)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty\tag{83}$$

равномерно по $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$.

¹¹Как и ранее, интегральная формула (81) задает аналитическое продолжение функции $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, через контур Γ на второй лист римановой поверхности $\mathfrak{R}$ вплоть до контура $\Gamma_R^{(2)}$, причем для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ это продолжение, вообще говоря, не совпадает с функцией $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной (77).

Пусть теперь $\mathbf{z} = z^{(2)} \in D^{(2)}$. Тогда из (79) вытекает, что при $z^{(2)} \in D_R^{(2)} = \{z^{(2)} : |\Phi(z)| > R\}$

$$\begin{aligned} F(z^{(2)}) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(2)}} \chi(\zeta^{(2)}) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(2)}; z^{(2)}) + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{(1)}} F(\zeta^{(1)}) \frac{\omega_m(z)/\omega_{m,n}(z)}{\psi(\zeta^{(1)})^2} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) + C_n. \end{aligned} \quad (84)$$

Дифференциал $d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)})$ – голоморфный по $z^{(1)} \in D_R^{(1)}$ при $\zeta^{(1)} \in \Gamma_R^{(1)}$. Используя свойства ψ -функции и полученное выше асимптотическое представление (83) для функции $F(\mathbf{z})$, получаем из (84) аналог соотношения (83) для $F(z^{(2)})$ при $n \rightarrow \infty$:

$$F(z^{(2)}) = C_n(1 + O(\delta^n)) \quad (85)$$

равномерно внутри $D_R^{(2)}$, $\delta < 1$. Непосредственно из определения (77) функции F вытекает, что равномерно внутри D_R , $R > 1$, справедливо представление

$$2Q_n(z) = -C_n \frac{1}{\psi(z^{(2)})} (1 + o(1)), \quad \text{где } o(1) = O(\delta^n), \quad \delta < 1.$$

Так как в силу (83) постоянная $C_n \neq 0$ при достаточно больших n , то $\deg Q_n = n$, т.е. все такие индексы нормальны. Выбор постоянной $C_n \neq 0$ связан только с нормировкой Q_n , поэтому в дальнейшем положим $C_n = -2$. В таком случае асимптотическая формула для полиномов Q_n вне отрезка Δ примет вид:

$$Q_n(z) = \frac{1}{\psi(z^{(2)})} (1 + o(1)) = \psi(z) \prod_{j=1}^m \frac{\omega_{m,n}(z)}{\omega_m(z)} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

или, окончательно,

$$Q_n(z) \frac{\omega_m(z)}{\omega_{m,n}(z)} = \psi(z) (1 + o(1)) \quad (86)$$

равномерно внутри D при $n \rightarrow \infty$.

Вернемся теперь к соотношению

$$F(\mathbf{z}) = C_n(1 + o(1)) = -2 + o(1),$$

которое справедливо равномерно на компакте $D^{(1)} \sqcup \Gamma$. Из этого соотношения в силу определения функции F вытекает, что равномерно по $x \in \Delta$

$$\begin{aligned}\psi^+(x)R^+(x)w^+(x) &= -2 + o(1), \\ \psi^-(x)R^-(x)w^-(x) &= -2 + o(1),\end{aligned}\quad n \rightarrow \infty.$$

Так как $\psi^+(x) \neq 0$ и $\psi^-(x) \neq 0$ на Δ , то

$$\begin{aligned}R^+(x)w^+(x) &= -\frac{2}{\psi^+(x)}(1 + o(1)), \\ R^-(x)w^-(x) &= -\frac{2}{\psi^-(x)}(1 + o(1)),\end{aligned}\quad n \rightarrow \infty.$$

Суммируя последние соотношения, получаем

$$R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -\frac{2}{\psi^+(x)} - \frac{2}{\psi^-(x)} + o(1).$$

Поскольку $R_n^+(x) - R_n^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)/w^+(x)$ при $x \in \Delta$, то $R_n^+(x)w^+(x) + R_n^-(x)w^-(x) = -2Q_n(x)\rho(x)$. Объединяя последние соотношения для функции остатка, получаем, что

$$Q_n(x)\rho(x) = \frac{1}{\psi^+(x)} + \frac{1}{\psi^-(x)} + o(1).$$

Но $\rho(x)\psi^+(x)\psi^-(x) \equiv \omega_m(x)/\omega_{m,n}(x) = 1 + o(1)$ на Δ , тем самым

$$Q_n(x)\frac{\omega_m(x)}{\omega_{m,n}(x)} = \psi^+(x) + \psi^-(x) + o(1) \quad (87)$$

равномерно по $x \in \Delta$, где $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Итак, получены (см. выше (86) и (87)) следующие асимптотические представления для полиномов $Q_n(z) = Q_n(z; f)$:

$$\begin{aligned}Q_n(z; f)\frac{\omega_m(z)}{\omega_{m,n}(z)} &= \psi(z)(1 + o(\delta^n)) \\ &\text{равномерно внутри } D', \\ Q_n(x; f)\frac{\omega_m(x)}{\omega_{m,n}(x)} &= \psi^-(x) + \psi^+(x) + o(\delta^n) \\ &\text{равномерно на } \Delta,\end{aligned}\quad (88)$$

где $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_j)$, $\omega_{m,n}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$, а $\delta < 1$. Так как равномерно внутри D' и равномерно на Δ при $n \rightarrow \infty$ имеем: $\omega_{m,n}(z) = \omega_m(z)(1 + o(\delta^n))$ и $\psi(z) = \Psi(z)(1 + o(\delta^n))$, где Ψ – решение задачи $(\mathcal{R}_2)$, то из (88) немедленно следуют утверждения предложения 2.

Предложение 2 доказано.

В дальнейшем нам понадобится также следующее соотношение, которое вытекает непосредственно из (88) и представления (75), (76):

$$\frac{Q_n(z; f)}{\omega_{m,n}(z)} = \frac{\Psi(z)}{\omega_m(z)}(1 + o(\delta^n)) \quad \text{равномерно внутри } D,$$

или, если ввести обозначения $\tilde{Q}_n(z; f) = Q_n(z; f)/\omega_{m,n}(z)$, $\tilde{\Psi}(z) = \Psi(z)/\omega_m(z)$, то

$$\tilde{Q}_n(z; f) = \tilde{\Psi}(z)(1 + o(\delta^n)) \quad \text{равномерно внутри } D. \quad (89)$$

§ 6. Доказательство теоремы 3

1. Доказательство теоремы 3 основано, главным образом, на формуле *сильной асимптотики* (22₂) *полиномов* $Q_n(z) = Q_n(z; f)$ на отрезке Δ . Наша ближайшая цель – придать этой формуле вид, пригодный для дальнейших рассуждений. Для отображающей функции $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ имеем:

$$\Phi^+(x) = e^{ig^{*+}(x)} = e^{i \arccos x}, \quad \Phi^-(x) = e^{-i \arccos x} \quad \text{при } x \in \Delta.$$

Следовательно, $|\Phi^+(x)| \equiv |\Phi^-(x)| \equiv 1$ на Δ . Учитывая теперь представление (75), (76) для Ψ -функции, получаем: $\Psi^+(x) = O(1)$ и $\Psi^-(x) = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на Δ . Так как $Q_n(x) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$ равномерно на отрезке Δ , то, во-первых, $Q_n(x) = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \Delta$, а во-вторых,

$$Q_n^2(x) = \Psi^+(x)^2 + \Psi^-(x)^2 + \frac{2}{\rho(x)} + o(1), \quad \text{где } o(1) = o(\delta^n), \quad \delta < 1; \quad (90)$$

здесь мы воспользовались полученным ранее соотношением

$$\rho(x)\Psi^+(x)\Psi^-(x) \equiv 1$$

при $x \in \Delta$.

Пусть $a_1, \dots, a_\ell$ – (различные) полюсы функции f в области D , m_j , $j = 1, \dots, \ell$, – их кратности, $m = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$ – полное число полюсов f в D . Положим $\omega_m(z) = \prod_{j=1}^{\ell} (z - a_j)^{m_j}$, $\omega_{n,m}(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_{j,n})$, где $a_{j,n}$, $j = 1, \dots, m$, – соответствующие полюсам f при $n \rightarrow \infty$ полюсы рациональной дроби f_n ; пусть $\tilde{Q}_n(z) = Q_n(z)/\omega_{n,m}(z)$, тогда $\deg \tilde{Q}_n = n - m$ при достаточно больших n . Умножив соотношение (4) на полином $\tilde{Q}_n \omega_m$ степени n , получим

$$\tilde{R}_n(z) = (Q_n \tilde{Q}_n \omega_m f - \tilde{P}_n)(z) = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где функция $\tilde{R}_n = R_n \tilde{Q}_n \omega_m$ голоморфна в D , $\tilde{P}_n = P_n \tilde{Q}_n \omega_m$. Для голоморфной в D функции $\tilde{R}_n$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n(x) \tilde{Q}_n(x) \omega_m(x) \rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)(1+\delta_n(x))\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\delta_n(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}} \\ &= I_1(z) + I_2(z), \quad z \in D, \end{aligned} \tag{91}$$

где $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n\|_{\Delta}^{1/n} < 1$. Так как $Q_n^2(x) = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \Delta$, то для

$$I_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)\delta_n(x)\rho(x) dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}}$$

имеем

$$I_2(z) = \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} = G'(z)o(1)$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри D ,

где $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$. Займемся теперь асимптотикой величины

$$I_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)}{(z-x)} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Дальнейшие рассуждения основаны на асимптотической формуле (90) для Q_n^2 на отрезке Δ .

Последовательно используя (90) и свойства Ψ -функции, преобразуем представление для $I_1(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_1(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{2}{z-x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\Psi^+(x)^2 + \Psi^-(x)^2}{z-x} \frac{\rho(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \left(\frac{1}{\Psi^-(x)^2} + \frac{1}{\Psi^+(x)^2} \right) \frac{dx}{(z-x)\rho(x)\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} \\
 &= \frac{2+o(1)}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{\zeta-z} \frac{d\zeta}{\Psi(\zeta)^2 \rho(\zeta) \sqrt{\zeta^2-1}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{o(1)}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} (1+o(1)) \\
 &= 2G'(z)(1+o(1))
 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри D_R , $R > 1$,

где $D_R = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| > R\}$, $\Gamma_R = \partial D_R$, $R > 1$, $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$. Таким образом,

$$\tilde{R}_n(z) = 2G'(z)(1+o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } D. \quad (92)$$

Непосредственно из хода доказательства этого соотношения видно, что оно “выдерживает” дифференцирование любое число раз: для любого целого $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n^{(k)}(z) &= 2G^{(k+1)}(z)(1+o(1)) \\ \text{при } n \rightarrow \infty &\text{ равномерно внутри } D; \end{aligned} \quad (93)$$

последнее соотношение важно для нас лишь постольку, поскольку его правая часть равномерно ограничена внутри $\mathbb{C} \setminus \Delta$, а следовательно, – и в окрестности полюсов функции f в D .

2. Напомним, что $\tilde{R}_n(z) = (Q_n \tilde{Q}_n \omega_m f - \tilde{P}_n)(z) = (Q_n \tilde{Q}_n F - \tilde{P}_n)(z)$, где функция $F = \omega_m f$ голоморфна в D , а полином $\tilde{P}_n = P_n Q_n \omega_m$. Величина $A_j = F(a_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, \ell$. Зафиксируем теперь произвольное $j \in \{1, \dots, \ell\}$ и, тем самым, соответствующие ему a_j и m_j . В силу соотношений (92), (93) величина $\tilde{R}_n^{(k)}(a_j) = 2G^{(k+1)}(a_j)(1 + o(1))$ для $k = 0, \dots, m_j - 1$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, для таких k величина $\tilde{P}_n^{(k)}(a_j) = (P_n \tilde{Q}_n \omega_m)(a_j)^{(k)} = 0$, поэтому в силу формулы Лейбница

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n^{(k)}(a_j) &= (Q_n \tilde{Q}_n F)^{(k)}(a_j) = (\omega_{m,n} \tilde{Q}_n^2 F)^{(k)}(a_j) \\ &= A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}^{(k)}(a_j) + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (\tilde{Q}_n^2 F)^{(s)} \omega_{m,n}^{(k-s)}(a_j). \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение при $k = 0$ в (92), получаем

$$A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}(a_j) = 2G'(a_j)(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{где } G'(a_j) \neq 0, \quad (94)$$

аналогично из (93) для $k = 1, \dots, m_j - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega_{m,n}^{(k)}(a_j) + \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} (\tilde{Q}_n^2 F)^{(s)} \omega_{m,n}^{(k-s)}(a_j) \\ = 2G^{(k+1)}(a_j)(1 + o(1)); \end{aligned} \quad (95)$$

в частности,

$$A_j \tilde{Q}_n^2(a_j) \omega'_{m,n}(a_j) + (\tilde{Q}_n^2 F)' \omega_{m,n}(a_j) = 2G''(a_j)(1 + o(1)). \quad (96)$$

Пусть $a_{j,\nu}(n)$, $\nu = 1, \dots, m_j$, — полюсы рациональной дроби f_n , соответствующие при $n \rightarrow \infty$ точке a_j . Положим $q_n(z) = \prod_{\nu=1}^{m_j} (z - a_{j,\nu}(n))$, $\tilde{\omega}_n(z) = \omega_{m,n}(z)/q_n(z)$. Тогда $\tilde{\omega}_n(a_j) = \alpha_j(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$, где $\alpha_j = \omega_m^{(m_j)}(a_j)/m_j! \neq 0$. Тем самым, величина $A_j \alpha_j \tilde{\Psi}(a_j)^2 / 2G'(a_j) \neq 0, \infty$; здесь $\tilde{\Psi} = \Psi/\omega_m$, $G'(a_j) \neq 0$. Пусть

$$\lambda_j = \lambda_j(n) = - \left(- \frac{A_j \alpha_j \tilde{\Psi}(a_j)^2}{2G'(a_j)} \right)^{2/m_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_j &= -|\Phi(a_j)|^{2n/m_j} \exp \left\{ \frac{i2ng^*(a_j)}{m_j} \right\} \exp \left\{ \frac{2S(a_j)}{m_j} \right\} \\ &\times \left(- \frac{A_j \alpha_j}{2G'(a_j)} \frac{\Pi_m}{\omega_m}(a_j) \right)^{2/m_j} \end{aligned}$$

и из (94) вытекает, что $q_n(a_j)\lambda_j^{m_j} = 1 + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, где $o(1) = o(\delta^n)$. Так как для достаточно больших n все нули полиномов $\tilde{Q}_n$ и их производных лежат в произвольной наперед заданной окрестности U отрезка Δ , множество $\{a_1, \dots, a_\ell\} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{U}$, то

$$\left| \frac{(F\tilde{Q}_n^2)'(z)}{\tilde{Q}_n^2(z)} \right| = O(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \mathbb{C} \setminus \overline{U}.$$

Рассуждая по индукции, получаем отсюда, что и для любого $k = 2, \dots, m_j$

$$\left| \frac{(F\tilde{Q}_n^2)^{(k)}(z)}{\tilde{Q}_n^2(z)} \right| = O(n^k) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \mathbb{C} \setminus \overline{U}.$$

Модуль величины $\lambda_j(n)$ растет со скоростью геометрической прогрессии при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_j(n)|^{1/n} = |\Phi(a_j)|^{2/m_j} > 1.$$

Поэтому из (96) вытекает, что $q'_n(a_j)\lambda_j^{m_j-1} = (q'_n(a_j)\lambda_j^{m_j})/\lambda_j = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, где, как обычно, $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$. Вновь рассуждая по индукции, получаем из (94) и (95), что $q_n^{(k)}(a_j)\lambda_j^{m_j-k} = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ для $k = 2, \dots, m_j - 1$.

Пусть теперь $p_n(z) = \prod_{\nu=1}^{m_j} (z - z_{\nu,n})$, где $z_{\nu,n} = \lambda_j(n)(a_j - a_{j,\nu}(n))$, $\nu = 1, \dots, m_j$. Тогда из установленных выше асимптотических соотношений вытекает, что $p_n(z) = z^{m_j} - 1 + o(1)$. Следовательно, при надлежащей перенумерации точек $z_{\nu,n}$ — нулей p_n — имеем: $z_{\nu,n} = \varepsilon_j^\nu + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$, где $\varepsilon_j = e^{2\pi i/m_j}$, $o(1) = o(\delta^n)$. Отсюда уже получаем, что

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}} (1 + o(1)) \quad (97)$$

при $n \rightarrow \infty$, $\nu = 1, \dots, m_j$, $j = 1, \dots, \ell$.

Здесь

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\
 B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = |\Phi(a_j)|^{1/m_j} e^{ig^*(a_j)/m_j}, \\
 |B_j| &= |\Phi(a_j)|^{1/m_j} > 1, \\
 C_j &= e^{-2S(a_j)/m_j} \left(-\frac{2G'(a_j)}{A_j \alpha_j} \right)^{1/m_j} \\
 &\quad \times \frac{(-2)^{m/m_j} \Phi(a_j)^{m/m_j} \prod_{s=1}^{\ell} \Phi(a_s)^{m_s/m_j}}{\prod_{s=1}^{\ell} (1 - \Phi(a_s) \Phi(a_j))^{2m_s/m_j}}, \tag{98}
 \end{aligned}$$

а величины A_j и α_j , $j = 1, \dots, \ell$, конечны, отличны от нуля и зависят только от f :

$$A_j = (f\omega_m)(a_j) \neq 0, \quad \alpha_j = \frac{\omega_m^{(m_j)}(a_j)}{m_j!} \neq 0, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Постоянная C_j связана с геометрическим расположением j -го полюса функции f относительно отрезка Δ и других полюсов f ; величина $1/B_j$ характеризует (геометрическую) скорость сходимости полюсов f_n к точке a_j при $n \rightarrow \infty$ и не зависит от других полюсов f ; наличие ε_j , $\varepsilon_j^{m_j} = 1$, обеспечивает то асимптотически правильное расположение полюсов f_n по отношению к притягивающей точке a_j , о котором говорилось во введении.

Теорема 3 доказана.

Формулы (97), (98) полностью описывают асимптотическое поведение полюсов рациональных дробей f_n , находящихся вблизи полюсов f в D .

3. Перейдем к доказательству следствий.

Справедливость следствия 1 вытекает непосредственно из хода доказательства теоремы 3 (см. формулы (91)–(93)).

Утверждение следствия 2 вытекает из того, что в его условиях при всех достаточно больших n на отрезке Δ расположены $n - m$ простых нулей полинома $Q_n(x; f)$. Поскольку в силу теоремы 3 для оставшихся m нулей справедливы асимптотические формулы вида (97), (98), то при $j = 1, \dots, \ell$ и $\nu, \mu = 0, \dots, m_j - 1$, $\nu \neq \mu$, имеем

$$|a_{j,\nu}(n) - a_{j,\mu}(n)| = \frac{|C_j| \cdot |\varepsilon_j^{\nu-\mu} - 1|}{|B_j^n|} (1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Так как $\varepsilon_j^{\nu-\mu} \neq 1$ при $\nu \neq \mu$, то из последней асимптотической формулы вытекает, что при достаточно больших n и оставшиеся m нулей знаменателя f_n простые.

Докажем следствие 3. Из теоремы Сохоцкого получаем, что для $x \in \Delta$

$$\hat{\rho}^+(x) = I(x) + i \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \hat{\rho}^-(x) = I(x) - i \frac{\rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\rho(t) - \rho(x)}{x - t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Аналогично, для функции

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t)}{z - t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

имеем

$$u^+(x) = J(x) - \frac{\log \rho(x)}{w^+(x)} = J(x) + \frac{i \log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$u^-(x) = J(x) - \frac{i \log \rho(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x - t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Положим $\theta(x) = \sqrt{1-x^2} J(x)/2$. Тогда в условиях следствия 3 величина $\theta(x)$ вещественна при всех $x \in \Delta$, а для функции Сегё $S(z) = w(z)u(z)/2$ и функции $H(z) = \exp\{S(z)\}$ получаем

$$S^+(x) = i\theta(x) - \frac{1}{2} \log \rho(x), \quad S^-(x) = -i\theta(x) - \frac{1}{2} \log \rho(x),$$

$$H^+(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \exp\{i\theta(x)\}, \quad H^-(x) = \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \exp\{-i\theta(x)\}. \quad (99)$$

Для функции $\mathcal{F}$ (см. (76)) при $x \in \Delta$ имеем с учетом принятого здесь соглашения относительно полюсов функции f :

$$\mathcal{F}^+(x) = e^{in\varphi} \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{i\varphi} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)e^{i\varphi}} \right)^{m_j},$$

$$\mathcal{F}^-(x) = e^{-in\varphi} \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{-i\varphi} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j)e^{-i\varphi}} \right)^{m_j},$$

где $\varphi = \varphi(x) = \arccos x$. Нетрудно видеть, что так как рациональная функция r вещественна, то при $x \in \Delta$

$$\mathcal{F}^+(x) = e^{ni\varphi(x)+i\alpha(x)}, \quad \mathcal{F}^-(x) = e^{-ni\varphi(x)-i\alpha(x)}, \quad (100)$$

где $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ при $x \in \Delta$,

$$\begin{aligned} \cos \alpha(x) = \frac{1}{2} \left\{ \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{i \arccos x}} \right)^{m_j} \right. \\ \left. + \prod_{j=1}^{\ell} \left(\frac{e^{-i \arccos x} - \Phi(a_j)}{1 - \Phi(a_j) e^{-i \arccos x}} \right)^{m_j} \right\}. \end{aligned}$$

Перепишем асимптотическую формулу для полиномов Q_n на отрезке Δ следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_n(x; f) &= \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \\ &= \mathcal{F}^+(x)H^+(x) + \mathcal{F}^-(x)H^-(x) + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись представлениями (99) и (100) для граничных значений функций H и $\mathcal{F}$ на отрезке Δ , получаем

$$\begin{aligned} Q_n(x; f) &= \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}} \{ e^{ni\varphi(x)+i\alpha(x)+i\theta(x)} + e^{-ni\varphi(x)-i\alpha(x)-i\theta(x)} \} + o(1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\rho(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x) + \alpha(x)) + o(1), \end{aligned}$$

где $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$,

$$\theta(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \rho(t) - \log \rho(x)}{x-t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Следствие 3 доказано.

§ 7. Случай нескольких отрезков

1. В этом параграфе мы коротко изложим результаты, относящиеся к случаю, когда носитель меры σ марковской функции (5) состоит из нескольких (непересекающихся) отрезков: $S = \bigsqcup_{j=1}^p \Delta_j \in \mathbb{R}$, $p \geq 2$. В [20] Е. А. Рахманов получил для такого случая аналог теоремы 1 для мероморфных функций вида $f = \hat{\sigma} + r$,

где r – вещественная рациональная функция, все полюсы которой лежат вне отрезка Δ – выпуклой оболочки S . В той же работе [20] доказано, что уже для двух отрезков и комплексной рациональной функции r аналог теоремы 1 не имеет места.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть σ – положительная борелевская мера на $\mathbb{R}$, носитель $S = \text{Supp } \sigma$ которой состоит из нескольких отрезков, Δ – выпуклая оболочка S и $f = \widehat{\sigma} + r$, где r – произвольная вещественная рациональная функция, все полюсы которой принадлежат области $\mathbb{C} \setminus \Delta$, и $r(\infty) = 0$. Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к f равномерно в сферической метрике внутри области $\widetilde{D} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$.

При этом, как и в теореме 1, к каждому полюсу f в $\widetilde{D}$ стремится ровно столько полюсов f_n , какова его кратность. Остальные полюсы f_n ведут себя следующим образом. Все предельные точки этих полюсов лежат на отрезке Δ ; ассоциированная с полюсами f_n единичная¹² мера (слабо) сходится к равновесной мере компакта S , в каждой из $p - 1$ (открытой) лакуны между отрезками при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ может располагаться не больше чем по одному полюсу f_n , в “общем положении” такие полюсы f_n при $n \rightarrow \infty$ всюду плотны в лакунах. Тем самым, в рассматриваемом случае “как правило” весь отрезок Δ – выпуклая оболочка S – состоит из предельных точек полюсов f_n .

Используемый в настоящей работе метод исследования сильной асимптотики знаменателей $Q_n(z; f)$ рациональных дробей f_n оказывается применим и для рассмотренного Е. А. Рахмановым случая, когда $S = \bigsqcup_{j=1}^p \Delta_j$ в предположении, что мера σ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на S и

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{\pi} \frac{\rho(x)}{\sqrt{-h(x+i0)}} > 0 \quad \text{на } S; \quad (101)$$

здесь $h(z) = \prod_{j=1}^{2p} (x - e_j)$, $e_1, \dots, e_{2p}$ – концы отрезков $\{\Delta_j\}$, в области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$ выбрана ветвь квадратного корня, которая положительна при положительных значениях аргумента, а весовая

¹²В условиях теоремы 1' все индексы n нормальны, тем самым, при каждом n рациональная функция f_n имеет ровно n полюсов.

функция ρ голоморфна и не обращается в нуль на S . Формулы сильной асимптотики для Q_n и в этом случае выражаются явно в терминах Ψ -функции – решения соответствующей специальной краевой задачи Римана – и вполне аналогичны (22₁)–(22₃). Однако при этом в дивизоре Ψ -функции неизбежно присутствуют “свободные” нули, число которых равно числу лакун между отрезками, а их поведение при $n \rightarrow \infty$ определяется проблемой обращения Якоби.

2. Пусть $\mathfrak{R}$ – гиперэллиптическая риманова поверхность рода $g = p-1$, заданная уравнением $w^2 = h(z)$, где $h(z) = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - e_j)$, $e_1 < \dots < e_{2g+2}$. Будем считать, что $\mathfrak{R}$ реализована как двулистное разветвленное в точках $\{e_j\}$ накрытие римановой сферы $\widehat{\mathbb{C}}$ таким образом, что переход с одного листа на другой осуществляется по верхнему Δ_j^+ и нижнему Δ_j^- берегам отрезков Δ_j . Тем самым, над каждой точкой $\widehat{\mathbb{C}}$, за исключением точек ветвления $\{e_j\}$, лежат ровно две точки римановой поверхности, а каждому отрезку Δ_j соответствует на $\mathfrak{R}$ замкнутая аналитическая (в комплексной структуре $\mathfrak{R}$) кривая Γ_j , $j = 1, \dots, g+1$, – цикл на $\mathfrak{R}$; положим $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j$. Будем считать, что в $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$ выбрана ветвь квадратного корня, удовлетворяющая условию $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Функция $w: w^2 = h(z)$ однозначна на $\mathfrak{R}$. Первым (открытым) листом $D^{(1)}$ поверхности $\mathfrak{R}$ будем считать тот, на котором $w = \sqrt{h(z)}$. На втором листе $D^{(2)}$ имеем $w = -\sqrt{h(z)}$. Для точек римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем использовать обозначение $\mathbf{z} = (z, w)$, где $w = \pm \sqrt{h(z)}$; при этом для точек первого листа $z^{(1)} = (z, \sqrt{h(z)})$, а для точек второго $z^{(2)} = (z, -\sqrt{h(z)})$. Область $D^{(1)}$ будем, как правило, отождествлять с “физической” областью D . Для $\mathbf{z} = z^{(1)}$ будем часто писать просто $w(z)$ вместо $w(\mathbf{z})$; тем самым, приобретает смысл и запись $w^+(x) = \sqrt{h(x+i0)}$, $x \in S$ (см. (101)). Каноническая проекция $\text{pr}: \mathfrak{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ определяется соотношением $\text{pr } \mathbf{z} = z$, в частности $\text{pr } D^{(1)} = \text{pr } D^{(2)} = D$, $\text{pr } \Gamma = S$.

Приведем некоторые стандартные сведения о гиперэллиптических римановых поверхностях, которые понадобятся нам в этом параграфе. В обозначениях и терминологии мы здесь придерживаемся в основном [19] (см. также [21], [22]).

Ориентируем кривые Γ_j так, что при обходе по Γ_j область $D^{(1)}$ остается слева, а область $D^{(2)}$ – справа. Примем ориентированные кривые Γ_j , $j = 1, \dots, g$, за a -циклы $\mathbf{a}_j$ на $\mathfrak{R}$ и стандартным образом [19] дополним их b -циклами $\mathbf{b}_j$ до базиса гомологий $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}_{j=1, \dots, g}$ на $\mathfrak{R}$. Пусть $\{d\Omega_k\}$ – соответствующий a -нормированный базис голоморфных абелевых дифференциалов:

$$\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, g.$$

Матрица $\mathbf{B} = \|B_{kj}\|_{k,j=1, \dots, g}$, где $B_{kj} = \oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega_k$ – b -периоды базисных дифференциалов, является матрицей Римана: она симметрична, $B_{kj} = B_{jk}$, а ее мнимая часть положительно определена, $\|\operatorname{Im} B_{jk}\| > 0$ (отметим, что в рассматриваемом здесь случае все $B_{jk} \in i\mathbb{R}$). Функции

$$\Omega_k(\mathbf{z}) = \int_{e_{2g+1}}^{\mathbf{z}} d\Omega_k$$

определены на $\mathfrak{R}$ однозначно по модулю их a - и b -периодов. Так как $\Omega'_k(z) = p_k(z)/w(z)$, где p_k – полином степени $g-1$, то имеет смысл обозначение $d\Omega_k^+(x) = p_k(x) dx/w^+(x)$ при $x \in S$.

Если в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ задана функция $F(\mathbf{z})$, то под $F(\mathbf{x}+)$ понимаются ее предельные значения при $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, если они существуют; аналогичный смысл придается и $F(\mathbf{x}-)$ при $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$.

Фиксируем стандартный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_g$ в $\mathbb{R}^g$: $(\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}$. Тогда векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_g, \mathbf{B}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_g$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и образуют базис в $\mathbb{C}^g$. Факторпространство $\mathbb{C}^g/\{N + \mathbf{B}\mathbf{M}\}$ по целочисленной решетке, $N, M \in \mathbb{Z}^g$, является $2g$ -мерным вещественным тором $\mathbb{T}^{2g}$ и называется многообразием Якоби $\operatorname{Jac} \mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$ однозначно представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + N + \mathbf{B}\mathbf{M} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \pmod{\text{периодов}}$, $0 \leq (\mathbf{x})_j, (\mathbf{y})_j < 1$, $N, M \in \mathbb{Z}^g$; иногда для краткости знак сравнения по модулю периодов дифференциалов $\{d\Omega_k\}$ мы будем опускать и писать просто $\mathbf{v} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}$.

Неупорядоченные наборы точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g)$, $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, образуют g -ю симметрическую степень $S^g \mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$.

Пусть $\mathbf{z}_0$ – некоторая фиксированная точка¹³ $\mathfrak{R}$. Вектор-функция $A(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = (A_1, \dots, A_g)$ с координатами

$$A_k = A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \equiv \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) \equiv \sum_{j=1}^g \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}_j} d\Omega_k, \quad k = 1, \dots, g,$$

определяет отображение Абеля $A: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Яс } \mathfrak{R}$. Если задан вектор $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_g) \in \text{Яс } \mathfrak{R}$, то задача нахождения неупорядоченного набора точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \in S^g \mathfrak{R}$, для которого

$$A_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = v_k \pmod{\text{периодов}}, \quad k = 1, \dots, g,$$

называется проблемой обращения Якоби. Проблема обращения Якоби всегда разрешима, но, вообще говоря, не единственным образом. В дальнейшем неупорядоченный набор точек $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \in S^g \mathfrak{R}$ будем называть дивизором и обозначать $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$.

Для любых двух различных точек $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ существует абелев дифференциал третьего рода, голоморфный всюду на $\mathfrak{R}$, за исключением этих двух точек, в которых он имеет простые полюсы с вычетами соответственно 1 и -1 ; такой дифференциал называется нормальным. Нормальный дифференциал будет определен однозначно, если потребовать, чтобы все его a -периоды были равны нулю; будем называть такой дифференциал a -нормированным абелевым дифференциалом третьего рода и обозначать $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$. Другой способ однозначно задать (нормировать) дифференциал третьего рода – потребовать, чтобы все его периоды были чисто мнимыми. Для таких дифференциалов будем использовать обозначение $dG(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$, предполагая при этом, что вычеты в точках $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ равны соответственно -1 и 1 . К подобным дифференциалам относится дифференциал комплексной функции Грина $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + ig_D^*(z, \infty)$ (здесь $g_D^*(z, \infty)$ – функция, гармонически сопряженная к функции Грина $g_D(z, \infty)$) многосвязной области $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus S$. Функция $G_D(z, \infty)$ многозначна в D и

$$G_D(z, \infty) = \int_{e_{2g+1}}^z \frac{P_g(\zeta)}{\sqrt{h(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in D,$$

¹³В дальнейшем мы выбираем $\mathbf{z}_0 = e_{2g+1}$.

где $P_g(z) = P_g(z; h) = z^g + \dots$ – вещественный полином, все нули которого лежат в лакунах (e_{2j}, e_{2j+1}) , $j = 1, \dots, g$. Дифференциал $dG = dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = P_g(z) dz/w(\mathbf{z})$ определен на всей римановой поверхности $\mathfrak{R}$, имеет чисто мнимые периоды и простые полюсы в точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно -1 и 1 .

Через $\omega_k(z; D) = \omega(z; \Delta_k, D)$ будем обозначать гармоническую меру (в точке $z \in D$) отрезка Δ_k относительно области D .

3. Следуя предложенной в § 2 схеме изложения, обсудим сначала случай $f = \hat{\rho}$, где

$$\hat{\rho}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_S \frac{\rho(x)}{z - x} \frac{dx}{w^+(x)}, \quad (102)$$

компакт S состоит из нескольких отрезков, а весовая функция ρ голоморфна на S и удовлетворяет условию (101).

Зафиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА $(\mathcal{R}'_1)$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$, найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1°. Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\Psi) = (n - g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$.

В п. 2° точки $\mathbf{z}_j$ – “свободные” нули Ψ -функции – зависят от n , под $\Psi(\mathbf{x}+)$ в п. 3° понимаются предельные значения функции $\Psi(\mathbf{z})$ при $D^{(1)} \ni \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma$, аналогичный смысл придается и $\Psi(\mathbf{x}-)$. Функция Ψ , решающая задачу $(\mathcal{R}'_1)$, всегда существует, при этом так как род $g = p - 1$ поверхности $\mathfrak{R}$ положителен, то нули и полюсы Ψ на $\mathfrak{R}$ оказываются связанными определенными соотношениями, аналогичными соотношениям Абеля для произвольной мероморфной функции на $\mathfrak{R}$, а дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ является решением определенной проблемы обращения Якоби. Анализ данных этой проблемы показывает, что при оговоренном выше условии (101) на вес ρ ее решение всегда таково, что $z_j = \text{pr } \mathbf{z}_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, т.е. в каждой замкнутой лакуне между отрезками $\{\Delta_j\}$ лежит ровно по одной точке $\text{pr } \mathbf{z}_j \in \mathbb{R}$. Значит, дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ неспециальный,

а следовательно, такая проблема обращения Якоби имеет единственное решение. Отсюда вытекает, что Ψ -функция, решающая задачу $(\mathcal{R}'_1)$, единственна с точностью до нормировки и имеет в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n -го порядка. Нетрудно видеть, что для любого $z \in \mathbb{C} \setminus S$ выполняется соотношение $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \prod_{j=1}^g (z - z_j)$, где $\text{const} \neq 0$. В дальнейшем мы будем придерживаться следующей нормировки¹⁴ Ψ -функции: $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$. Нетрудно найти и явный вид этой функции. При $\mathbf{z} = z^{(1)} \in D^{(1)}$ и в предположении, что $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, имеем (ср. с (21)):

$$\Psi(z^{(1)}) = \Phi(z)^{n-g} e^{A(z;\rho)} \mathcal{F}_n(z), \quad (103)$$

где $\Phi(z) = e^{G_D(z, \infty)}$ – (многозначная) отображающая функция,

$$A(z; \rho) = w(z) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(x)}{x - z} \frac{dx}{w^+(x)} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \lambda_k \int_{\Delta_k} \frac{1}{x - z} \frac{dx}{w^+(x)} \right),$$

$\lambda_k = 2 \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x)$ (при $g = 0$ $A(z; \rho)$ – функция Серё),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(z) &= \exp \left(\sum_{j=1}^g \Omega(\mathbf{z}_j, \infty^{(1)}; z^{(1)}) + \frac{1}{2} c_g + \sum_{k=1}^g \theta_k \Omega_k(z^{(1)}) \right) \\ &= \exp(\varphi_n(z)), \end{aligned} \quad (104)$$

величины $\theta_k = \theta_k(n) = \{n\omega_k(\infty)\} - g$ (здесь и ниже в (105) $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть соответствующего числа), дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$, где $\mathbf{z}_j = \mathbf{z}_j(n)$, является (единственным) решением проблемы обращения Якоби

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) &= \sum_{s=1}^g \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega_s(\infty; D) \right\} B_{ks} + \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x), \\ k &= 1, \dots, g, \end{aligned} \quad (105)$$

величина $c_g = c_g(n) = \prod_{j=1}^g (e_{2g+1} - z_j)$.

¹⁴Как уже отмечалось выше, таким условием Ψ -функция определяется однозначно с точностью до знака $\pm$.

Представление для $\Psi(z^{(2)})$ при $z^{(2)} \in D^{(2)}$ следует непосредственно из (103) и соотношения $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$ при $z \in D$. Так как функция ρ голоморфна и отлична от нуля на S , то правая часть представления (103) имеет смысл и при $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$ для дивизора $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$, удовлетворяющего системе уравнений (105). Тем самым, под функцией $\Psi(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)} \sqcup \Gamma$, естественно понимать правую часть представления (105). Аналогичного соглашения будем придерживаться и для функции $\Psi(\mathbf{z})$ при $\mathbf{z} \in D^{(2)} \sqcup \Gamma$.

При подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции $f = \hat{\rho}$ – их сильная асимптотика внутри области $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ и на компакте S описывается в терминах Ψ -функции, решающей задачу $(\mathcal{R}'_1)$, следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1'. Пусть голоморфная на S функция ρ удовлетворяет условию (101), Ψ – решение задачи $(\mathcal{R}'_1)$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; \hat{\rho})$ имеем:

- 1°. $Q_n(z; \hat{\rho}) = \Psi(z)(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно внутри $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$;
- 2°. $Q_n(x; \hat{\rho}) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на S .

Здесь $\Psi(z) = \Psi(z^{(1)})$, под $\Psi^+(x)$ ($\Psi^-(x)$) понимаются верхние (соответственно нижние) предельные значения $\Psi(z)$ на S ; величина $o(1) = o(\delta^n)$, где $\delta < 1$. Функция Ψ , решающая задачу $(\mathcal{R}'_1)$, имеет в точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n -го порядка. Так как $\deg Q_n = n$ при всех n и $\Psi(z^{(1)})/z^n \rightarrow \varkappa_n \neq 0$ при $z \rightarrow \infty$, где $\varkappa_n \in \mathbb{R}$, то естественно нормировать Q_n условием $Q_n(z) = \varkappa_n z^n + \dots$. С помощью представления (103) величину $\varkappa_n$ нетрудно найти и в явном виде, при этом, так как $\varkappa_n \in \mathbb{R}$, можно считать, что $\varkappa_n > 0$; таким выбором знака у $\varkappa_n$ однозначно определяется и сама Ψ -функция.

Отметим, что сильная асимптотика полиномов Q_n в лакунах между отрезками нам здесь не понадобится, хотя она также может быть описана в терминах, связанных с римановой поверхностью $\mathfrak{R}$ (так как асимптотическое поведение нулей Q_n , расположенных в лакунах между отрезками, подчиняется определенной динамической системе; см. [17] и [20]).

4. Перейдем теперь к общему случаю $f = \widehat{\rho} + r$, где функция ρ удовлетворяет условию (101) и голоморфна на S , а функция $r \in \mathbb{R}(z)$ и не имеет полюсов на Δ – выпуклой оболочке S . Пусть $a_1, \dots, a_\ell$ – полюсы f в $\mathbb{C} \setminus \Delta$, $m_1, \dots, m_\ell$ – их кратности.

Рассмотрим на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА $(\mathcal{R}'_2)$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$, найти функцию $\Psi = \Psi_n$ такую, что:

- 1°. Ψ (кусочно) мероморфна на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma = D^{(1)} \sqcup D^{(2)}$;
- 2°. дивизор $(\Psi) = (n - g)\infty^{(2)} + \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g + m_1 a_1^{(1)} + \dots + m_\ell a_\ell^{(1)} - m_1 a_1^{(2)} - \dots - m_\ell a_\ell^{(2)} - n\infty^{(1)}$;
- 3°. на Γ выполнено краевое условие: $\rho(x)\Psi(\mathbf{x}+) = \Psi(\mathbf{x}-)$.

Как и в задаче $(\mathcal{R}'_1)$, точки $\mathbf{z}_j$ в п. 2° зависят от n . Смысл обозначений $\Psi(\mathbf{x}+)$ и $\Psi(\mathbf{x}-)$ – тот же, что и выше. При оговоренных выше условиях на ρ и r функция Ψ , решающая задачу $(\mathcal{R}'_2)$, всегда существует, при этом дивизор $d = \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ оказывается единственным решением некоторой проблемы обращения Якоби, кроме того, $z_j \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$ при $j = 1, \dots, g$, т.е. в каждой замкнутой лакуне между $\{\Delta_j\}$ лежит ровно по одной точке $z_j = \text{pr } \mathbf{z}_j$. Функция, решающая задачу $(\mathcal{R}'_2)$, единственна с точностью до нормировки и имеет в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ полюс в точности n -го порядка. Для любого $z \in \mathbb{C} \setminus S$ выполняется соотношение $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \text{const} \cdot \prod_{j=1}^g (z - z_j)$, где $\text{const} \neq 0$. Как и ранее, мы придерживаемся следующей нормировки Ψ -функции: $\Psi(z^{(1)})\Psi(z^{(2)}) \equiv \prod_{j=1}^g (z - z_j)$. Если условиться, что $\Psi(z^{(1)})/z^n \rightarrow \varkappa_n > 0$ при $z \rightarrow \infty$, то последним тождеством Ψ -функция определяется однозначно. По сравнению с задачей $(\mathcal{R}'_1)$ явный вид этой функции претерпевает следующие изменения: в правую часть (103) надо добавить множитель

$$\Pi_m(z) = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega(a_s^{(1)}, a_s^{(2)}; z^{(1)}) \right\}$$

(здесь $m = \sum_{s=1}^{\ell} m_s$ – полное число полюсов f в $\mathbb{C} \setminus \Delta$), а в правую часть (105) – удвоенное слагаемое $\sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega_k(a_s^{(1)})$. В итоге получаем, что при $z \in \mathbb{C} \setminus S$

$$\Psi(z^{(1)}) = \Phi(z)^{n-g} e^{A(z;\rho)} \mathcal{F}_n(z) \Pi_m(z),$$

где дивизор $\mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{z}_g$ является (единственным) решением следующей проблемы обращения Якоби:

$$\sum_{j=1}^g \Omega_k(\mathbf{z}_j) = \sum_{s=1}^g \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right) \omega_s(\infty; D) \right\} B_{ks} + \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(x) d\Omega_k^+(x) \\ + 2 \sum_{s=1}^{\ell} m_s \Omega_k(a_s^{(1)}), \quad k = 1, \dots, g.$$

В терминах Ψ -функции, решающей задачу $(\mathcal{R}'_2)$, асимптотическое поведение полиномов $Q_n(z; f)$, нормированных условием $Q_n(z; f) = \varkappa_n z^n + \dots$, описывается так.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'. Пусть $f = \hat{\rho} + r$, где голоморфная на S функция ρ удовлетворяет условию (101), вещественная рациональная функция r не имеет полюсов на Δ и $r(\infty) = 0$. Если Ψ – решение задачи $(\mathcal{R}_2)$ при $n \in \mathbb{N}$, то для полиномов $Q_n(z; f)$ имеем:

$$1^\circ. \quad Q_n(z; f) = \Psi(z)(1 + o(1)) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно внутри } \tilde{D}', \quad (22'_1)$$

$$2^\circ. \quad Q_n(x; f) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) + o(1) \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно на } S, \quad (22'_2)$$

где $\tilde{D} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, $\tilde{D}' = \tilde{D} \setminus \{\text{полюсы функции } f\}$, величина $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$.

Формула п. 2° сильной асимптотики для полиномов $Q_n(x; f)$ на S лежит в основе доказательства следующего утверждения об асимптотическом поведении полюсов f_n в окрестности кратного полюса f .

ТЕОРЕМА 3'. Пусть в условиях предложения 2' точка $a_j \in D$ – полюс функции f кратности $m_j \geq 1$, $a_{j,\nu}(n)$, $\nu = 1, \dots, m_j$, – соответствующие точке a_j при $n \rightarrow \infty$ полюсы f_n . Тогда

$$a_{j,\nu}(n) = a_j + \frac{C_j \varepsilon_j^\nu}{B_j^{2n}} (1 + o(\delta^n)) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \nu = 1, \dots, m_j, \quad (22'_3)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_j &= e^{2\pi i/m_j}, \\ B_j &= \Phi(a_j)^{1/m_j} = e^{G(a_j)/m_j}, \quad |B_j| > 1, \\ C_j &= C_j(n) = e^{-2A(a_j;\rho)/m_j} \left(-\frac{2G'(a_j)r_{n,g}(a_j)}{A_j\alpha_j} \right)^{2/m_j} \\ &\quad \times e^{2gG(a_j)/m_j - 2\varphi_n(a_j)/m_j} \left(\frac{m_j!}{\Pi_m^{(m_j)}(a_j)} \right)^{2/m_j}.\end{aligned}$$

Здесь функция $r_{n,g}(z) = P_g(z)/\prod_{j=1}^g(z - z_j)$ и, тем самым, зависит от n , комплексные постоянные $A_j = (f\omega_m)(a_j) \neq 0$, $\alpha_j = \omega_m^{(m_j)}(a_j)/m_j! \neq 0$, $j = 1, \dots, \ell$, зависят только от f , функция φ_n определена соотношением (104).

Список литературы

- [1] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П., *Аппроксимации Паде*. — М.: Мир, 1986.
- [2] Чебышёв П. Л., “О непрерывных дробях” // *Ученые записки Имп. Академии Наук*, 1855, **III**, 636–664. (Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948, 103–126.)
- [3] Марков А. А., “Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues” // *Acta Math.*, 1895, **19**, 93–104. (Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей // Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948, 106–119.)
- [4] Гончар А. А., “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций” // *Матем. сб.*, 1975, **97 (139)**, 607–629.
- [5] Рахманов Е. А., “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов” // *Матем. сб.*, 1977, **103 (145)**, 237–252.
- [6] Рахманов Е. А., “Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II” // *Матем. сб.*, 1982, **118 (160)**, 104–117.
- [7] Гончар А. А., “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1982, **118 (160)**, 535–556.

- [8] Гончар А. А., “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде в сферической метрике” // *Математические структуры – вычислительная математика – математическое моделирование*. Т. 2. София, 1984, 29–35.
- [9] Бернштейн С. Н., *О многочленах, ортогональных в конечном интервале*. — Харьков: ОНТИ, 1937.
- [10] Ахизер Н. И., “Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах” // *Докл. АН СССР*, 1960, **134**(1), 9–12.
- [11] Ахизер Н. И., Томчук Ю. Я., “К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах” // *Докл. АН СССР*, 1961, **138**(4), 743–746.
- [12] Ахизер Н. И., “Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов” // *Докл. АН СССР*, 1961, **141**(2), 263–266.
- [13] Nuttall J., “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials” // *J. Approx. Theory*, 1984, **42**, 299–386.
- [14] Nuttall J., “Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation” // *Constr. Approx.*, 1990, **6**(2), 157–166.
- [15] Суетин С. П., “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций” // *Матем. сб.*, 2000, **191**(9), 81–114.
- [16] Суетин С. П., “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда” // *УМН*, 2002, **57**(1), 45–142.
- [17] Суетин С. П., “Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций” // *Матем. сб.*, 2002, **193**(12), 81–114.
- [18] Аптекарев А. И., “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций” // *Матем. сб.*, 2002, **193**(1), 3–72.
- [19] Зверович Э. И., “Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях” // *УМН*, 1971, **26**(1), 113–180.
- [20] Рахманов Е. А., “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде” // *Матем. сб.*, 1977, **104** (146), 271–291.
- [21] Форстер О., *Римановы поверхности*. — М.: Мир, 1980.
- [22] Дубровин Б. А., “Тэта-функции и нелинейные уравнения” // *УМН*, 1981, **36**(2), 11–80.

Содержание

§ 1. Введение	3
§ 2. Формулировка основных результатов	15
§ 3. Доказательство предложения 1	24
§ 4. Доказательство теоремы 2	28
§ 5. Доказательство предложения 2	40
§ 6. Доказательство теоремы 3	48
§ 7. Случай нескольких отрезков	55
Список литературы	65