Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Давыдов, А. С. Платов, Оптимальная эксплуатация двух структурированных по размеру конкурирующих популяций, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2013, том 19, номер 4, 89–94

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 17:35:40

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ДВУХ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ПО РАЗМЕРУ КОНКУРИРУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИЙ

А. А. Давыдов¹, А. С. Платов²

Для модели, описывающей динамику двух структурированных по размеру конкурирующих популяций при выбранных интенсивностях их эксплуатации, доказано существование и единственность стационарного решения. Показано, что существуют интенсивности эксплуатации, доставляющие максимум заданного функционала выгоды на соответствующем им стационарном решении.

Ключевые слова: Структурированная по размеру популяция, оптимальная эксплуатация, стационарное решение.

A. A. Davydov, A. S. Platov. Optimal exploitation of two competing size-structured populations.

For a model describing the dynamics of two competing size-structured populations under chosen intensities of their exploitation, the existence and uniqueness of a stationary solution is proved. It is shown that there exist exploitation intensities that maximize a given profit functional on the stationary solution corresponding to them.

Keywords: size-structured population, optimal exploitation, stationary solution.

Введение

Динамика эксплуатации двух структурированных по размеру конкурирующих популяций описывается системой уравнений [1; 2]

$$\frac{\partial x_i(t, l)}{\partial t} + \frac{\partial (g_i(l, E_1(t), E_2(t))x_i(t, l))}{\partial l} = -(\mu_i(l, E_1(t), E_2(t)) - u_i(l))x_i(t, l), \quad i = 1, 2, \quad (0.1)$$

где x_i — плотность биомассы i -й популяции размера l в момент времени t ; g_i и μ_i — коэффициенты ее прироста и смертности соответственно; u_i — интенсивность эксплуатации этой популяции. Функция E_i отвечает за часть конкуренции, которую создает i -я популяция. Она вычисляется по формуле

$$E_i(t) = \int_0^{L_i} \chi_i(l)x_i(t, l) dl, \quad (0.2)$$

где χ_i — непрерывная функция, а отрезок $[0, L_i]$, $L_i > 0$, — диапазон размеров, на котором мы эксплуатируем i -ю популяцию.

В работе [3] предполагалось, что все коэффициенты модели зависели от суммарной конкуренции, которая имела вид

$$E = \sum_{k=1}^N E_k.$$

Здесь мы рассматриваем более общий случай, когда конкуренция является вектором, $E = (E_1, E_2)$, а не просто суммой его компонент.

¹Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке программы Президиума РАН “Динамические системы и теория управления”.

²Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-12446 офи_м2) и проекта ДРПННТ №1.1348.2011 Министерства образования и науки РФ.

Как и в работах [3; 4], за приток новых индивидов отвечает граничное условие, которое является суммой естественного воспроизводства и промышленного возобновления p_i :

$$x_i(t, 0) = \int_0^{L_i} r_i(l, E_1(t), E_2(t)) x_i^{\beta_i}(t, l) dl + p_i(t), \quad (0.3)$$

где функции r_i и β_i , $\beta_i \in (0, 1)$, характеризуют репродуктивность биомассы и нелинейную зависимость естественного воспроизводства от плотности биомассы соответственно.

Здесь коэффициенты модели предполагаются непрерывными функциями от *показателя конкуренции* $E = (E_1, E_2)$ и удовлетворяют естественным ограничениям (которые аналогичны наложенным в [3; 4]):

а) коэффициенты прироста g_i и рождаемости r_i являются невозрастающими по E_1 и E_2 функциями при каждом $l \in [0, L_i]$, первый из них всюду положителен, а второй всюду неотрицателен и положителен на некотором интервале размеров на отрезке $[0, L_i]$, $i = 1, 2$;

б) каждый из коэффициентов смертности μ_i — положительная неубывающая по E_1 и E_2 функция при $l \in [0, L_i]$;

с) отношение $g_i(0, \cdot)/g_i(l, \cdot)$ есть невозрастающая по E_1 и E_2 функция при $l \in [0, L_i]$.

Первые два из этих условий характеризуют не улучшение условий развития популяции при росте конкуренции, а последнее условие — не меньшее влияние конкуренции на рост индивидов малых размеров, чем на рост больших. Всюду здесь и ниже $i = 1, 2$, если не оговорено противное.

1. Существование стационарного решения

Здесь доказано существование стационарного решения в динамике двух популяций при выбранных интенсивностях эксплуатации каждой из них.

Такое решение $x = \{x_1, x_2\}$ должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений (0.1) без производной по времени:

$$\frac{d(g_i(l, E)x_i(l))}{dl} = -(\mu_i(l, E) + u_i(l))x_i(l),$$

где показатель конкуренции уже имеет некоторое числовое значение — вектор $E = (E_1, E_2)$, соответствующий этому решению.

Если не связывать этот показатель с решением, а рассмотреть его как двумерный параметр, то решение последнего уравнения легко находится. Оно имеет вид

$$x_i(l, E) = \frac{g_i(0, E)x_i(0, E)}{g_i(l, E)} \exp \left\{ - \int_0^l m_i(s, E) ds \right\}, \quad (1.4)$$

где

$$m_i(s, E) = \frac{\mu_i(s, E) + u_i(s)}{g_i(s, E)}.$$

Мы будем предполагать, что так найденные решения по отношению к параметрам E_1 и E_2 удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial x_i}{\partial E_i} \leq \frac{\partial x_i}{\partial E_j}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (1.5)$$

если эти производные существуют, т. е. “маргинальное” влияние на объем популяции межвидовой конкуренция всегда не сильнее, чем внутривидовой.

Теорема 1. Пусть при $i = 1, 2$ функция $p_i(t) = p_{0,i} \geq 0$ постоянна, функции g_i , μ_i и r_i непрерывны по всем аргументам и удовлетворяют условиям а)–с), а интенсивность эксплуатации u_i измерима и удовлетворяет условию

$$U_{i,1}(l) \leq u_i(l) \leq U_{i,2}(l), \quad l \in [0, L_i],$$

с некоторыми непрерывными на $[0, L_i]$ функциями ограничений $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$, $0 \leq U_{i,1} \leq U_{i,2}$. Тогда существует ненулевое стационарное решение задачи (0.1)–(0.3), и такое решение единственно, если коэффициенты g_i , μ_i и r_i дифференцируемы и выполнены условия (1.5).

Доказательство. Подстановка решения (1.4) в краевые условия (0.3) позволяет получить систему уравнений на плотность биомассы “нулевого” размера $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}) = (x_{1,0}(0, E), x_{2,0}(0, E))$:

$$x_{i,0} - p_{i,0} = x_{i,0}^{\beta_i} \int_0^{L_i} r_i(l, E) \left[\frac{g_i(0, E)}{g_i(l, E)} \exp \left\{ - \int_0^l m_i(s, E) ds \right\} \right]^{\beta_i} dl. \quad (1.6)$$

При $p_{0,i} \geq 0$ и $\beta \in (0, 1)$ существует единственное положительное решение $x_{0,i}$ уравнения (1.6), что нетрудно видеть. Подстановка этого решения в (1.4) дает стационарное решение, соответствующее заданному значению параметра конкуренции $E = (E_1, E_2)$.

Покажем, что существуют такое значение параметра конкуренции и соответствующие ему стационарные решения (1.4), для которых показатели конкуренции, вычисленные по формуле (0.2), доставляют в точности это значение.

С этой целью рассмотрим следующие функции f_i и F_i от параметров E_1, E_2 :

$$f_i(E_1, E_2) = \int_0^{L_i} \chi_i(l) x(l, E_1, E_2) dl, \quad F_i(E_1, E_2) := E_i - f_i(E_1, E_2).$$

В силу условий а)–с) функция f_i не возрастает с ростом компонент показателя конкуренции, поэтому функция F_1 (или F_2) при фиксированном значении параметра E_2 (соответственно E_1) строго монотонна по E_1 (соответственно по E_2) и неограниченно возрастает при $E_1 \rightarrow \infty$ (соответственно при $E_2 \rightarrow \infty$). Но

$$F_1(0, E_2) < 0, \quad F_2(E_1, 0) < 0.$$

Следовательно, существуют функции $E_i = \phi_i(E_j)$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$, однозначно определенные при неотрицательных значениях аргумента, положительные и такие, что

$$F_1(\phi_1(E_2), E_2) \equiv 0 \quad \text{и} \quad F_2(E_1, \phi_2(E_1)) \equiv 0 \quad \text{при} \quad E_1 \geq 0, \quad E_2 \geq 0.$$

Эти функции невозрастающие, поскольку функции f_j невозрастающие по обоим аргументам. Следовательно, в положительном квадранте существует точка пересечения графиков функций $E_i = \phi_i(E_j)$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$. Нетрудно видеть, что координаты (E_1, E_2) такой точки доставляют значения параметров, которые совпадают с показателями конкуренции, вычисляемыми на стационарных решениях, соответствующих этим параметрам.

Таким образом, ненулевое стационарное решение существует. Покажем, что оно единственно, если выполнены условия (1.5). Достаточно доказать, что в этих условиях ограничение функции F_2 на график функции ϕ_1 является строго монотонной функцией от E_2 и, следовательно, обращается в нуль не более чем в одной точке. С этой целью посчитаем полную производную этого ограничения по E_2 . Имеем

$$\frac{d}{dE_2} (E_2 - f_2(\phi_1(E_2), E_2)) = 1 - \frac{\partial f_2}{\partial E_1} \frac{d\phi_1(E_2)}{dE_2} - \frac{\partial f_2}{\partial E_2}. \quad (1.7)$$

Производная $\partial f_2/\partial E_2$ неположительна в силу условий а)–с), а по теореме о неявной функции из уравнения $F_1 = 0$ находим

$$\frac{d\phi_1(E_2)}{dE_2} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial E_2}}{\left(1 - \frac{\partial f_1}{\partial E_1}\right)}.$$

В силу условий (1.5) имеем оценку

$$\left| \frac{d\phi_1(E_2)}{dE_2} \right| < 1.$$

Отсюда, учитывая эти же условия в (1.7), находим

$$\frac{dF_2(\phi_1(E_2), E_2)}{dE_2} > 0.$$

Таким образом, ограничение функции F_2 на график функции ϕ_1 действительно является строго монотонной функцией от E_2 . Следовательно, искомый показатель конкуренции $E = (E_1, E_2)$ и соответствующие ему стационарные решения (1.4) определяются однозначно.

Теорема 1 доказана.

2. Существование оптимального стационарного решения

Таким образом, в силу теоремы 1 существует стационарное состояние популяции при выбранной интенсивности $u = (u_1, u_2)$ ее эксплуатации и векторе p промышленного возобновления.

Рассмотрим задачу выбора пары (p, u) , доставляющей на таком состоянии максимальный доход при функционале выгоды

$$\sum_{i=1}^2 \left(\int_0^{L_i} c_i(l) u_i(l) x_i(l, E) dl + c_{L_i} x_i(L_i, E) - p_{i,0} c_{i,0} \right). \quad (2.1)$$

Здесь c_i , $c_{i,0}$ и c_{L_i} — это агрегированные цены. Кроме того, предполагается, что вектор $p_0 = \{p_{1,0}, p_{2,0}\}$ и вектор функция $u = \{u_1, u_2\}$ удовлетворяют следующим ограничениям

$$0 \leq P_{i,1} \leq p_{i,0} \leq P_{i,2}, \quad 0 \leq U_{i,1} \leq u_i \leq U_{i,2}. \quad (2.2)$$

с некоторыми константами $P_{i,1}$ и $P_{i,2}$ и непрерывными функциями $U_{i,1}$ и $U_{i,2}$. Такие векторы и их набор мы будем называть *допустимыми*.

Теорема 2. Пусть цены c_i являются непрерывными функциями, коэффициенты модели g_i , μ_i и r_i дифференцируемы и удовлетворяют условиям а)–с), при этом g_i и μ_i отделены от нуля, и выполнены условия (1.5), тогда существует допустимая пара (p_0, u) , стационарное решение для которой доставляет максимум функционала (2.1).

Доказательство. Полезно

Лемма [3, Lemma 1]. В условиях теоремы (2) функционал выгоды ограничен на множестве допустимых пар (p, u) .

В силу ограниченности функционала на множестве допустимых пар существует точная верхняя грань его значений. Рассмотрим теперь последовательность допустимых пар $(p_{1,k}, p_{2,k})$ и $(u_{1,k}, u_{2,k})$, для которых значение функционала выгоды на соответствующем стационарном решении стремится к этой грани при $k \rightarrow \infty$. Для k -го члена последовательности обозначим через $E_{i,k}$ значения уровня конкуренции на соответствующем стационарном решении для i -й популяции.

По предположению компоненты допустимых векторов возобновления ограничены, поэтому из последовательности $\{(p_{1,k}, p_{2,k})\}_{k=1}^{\infty}$ по теореме Больцано — Вейерштрасса можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Без нарушения общности считаем, что сама исходная последовательность является сходящейся, т. е.

$$(p_{1,k}, p_{2,k}) \rightarrow (p_{1,\infty}, p_{2,\infty}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Ясно, что предельный вектор возобновления $(p_{1,\infty}, p_{2,\infty})$ также является допустимым.

Значения $E_{i,k}$ показателей конкуренции также ограничены, поэтому и из их последовательности также можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Снова, как и в случае с векторами возобновления, не нарушая общности, считаем сходящейся саму эту последовательность:

$$(E_{1,k}, E_{2,k}) \rightarrow (E_{1,\infty}, E_{2,\infty}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Обозначим $E_{\infty} := (E_{1,\infty}, E_{2,\infty})$.

Наконец, для компоненты $u_{i,k}$ вектора интенсивностей эксплуатации и любых значений $l_1, l_2 \in [0, L_i]$, $l_1 \leq l_2$, соответствующая функция $\phi_{i,k}$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{l_1}^{l_2} \frac{U_{i,1}(l)}{g_i(l, E_{1,k}, E_{2,k})} dl \leq \phi_{i,k}(l_2) - \phi_{i,k}(l_1) \leq \int_{l_1}^{l_2} \frac{U_{i,2}(l)}{g_i(l, E_{1,k}, E_{2,k})} dl. \quad (2.3)$$

В частности, эта функция удовлетворяет условию Липшица с константой

$$C_i := \max_{l \in [0, L_i]} \left\{ \frac{u_{i,2}(l)}{g_i(l, f(0))} \right\}.$$

Следовательно, последовательность функций $\{\phi_{i,k}\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и равномерно непрерывна на отрезке $[0, L_i]$ и, значит, по теореме Арцела — Асколи [5] из нее можно выбрать равномерно сходящуюся на этом отрезке подпоследовательность $\{\phi_{i,k_m}\} \Rightarrow \phi_{i,\infty}$ при $k_m \rightarrow \infty$. Применяя этот выбор сначала для $i = 1$, а затем для $i = 2$, выбирая уже лишь из индексов, оставшихся на предыдущем шаге, получим подпоследовательность индексов $\{k_m\}$, для которой последовательность $\{\phi_{i,k_m}\}$ равномерно сходится при $i = 1, 2$.

Но функционал (2.1) зависит непрерывно от вектора E , начального значения x_0 и вектор-функции ϕ , что нетрудно видеть. Начальный вектор, в свою очередь, непрерывно зависит от вектора E , вектора возобновления и этой вектор-функции. Следовательно, данный функционал непрерывно зависит от вектора E , вектора возобновления и вектор-функции ϕ . Следовательно, на предельных значениях E_{∞} , p_{∞} и ϕ_{∞} этот функционал принимает значение своей точной верхней грани, т. е. максимальное значение.

Для завершения доказательства утверждения теоремы нам необходимо найти допустимую интенсивность эксплуатации u , интегрирование которой доставляет предельную вектор-функцию ϕ_{∞} . Понятно, что в результате предельного перехода каждая компонента этой вектор-функции должна удовлетворять условию (2.3) и быть абсолютно непрерывной. Следовательно, почти всюду на интервале $[0, L_i]$ производная этой компоненты существует и удовлетворяет неравенствам

$$\frac{U_{i,1}(l)}{g_i(l, E_{\infty})} dl \leq \phi'_{i,\infty}(l) \leq \frac{U_{i,2}(l)}{g_i(l, E_{\infty})} dl.$$

Таким образом, соответствующую компоненту вектора интенсивностей эксплуатации можно определить по формуле

$$u_{i,\infty}(l) = g_i(l, E_{\infty}) \phi'_{i,\infty}(l)$$

в любой точке существования этой производной, а в любой из остальных точек на отрезке $[0, L_i]$ доопределить любым значением из отрезка $[U_{i,1}, U_{i,2}]$. Определенная так интенсивность $u_{i,\infty}$ является допустимой и доставляет нужную функцию $\phi_{i,\infty}$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Murphy L.F.** A nonlinear growth mechanism in size structured population dynamics // J. Theor. Biol. 1983. Vol. 104. P. 493–506.
2. **Roos A.M.** A gentle introduction to models of physiologically structured populations // Structured population models in marine, terrestrial, and freshwater systems / eds. S. Tuljapurkar, H. Caswell. New York: Chapman and Hall, 1997. P. 119–204. (Population and Community Biology).
3. **Panesh A.A., Platov A.S.** Optimization of size-structured population with interacting species // J. Math. Sci. 2013. Vol. 188, no. 3. P. 293–298.
4. **Davydov A.A., Platov A.S.** Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition // Moscow Math. J. 2012. Vol. 12, no. 2. P. 269–273.
5. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

Давыдов Алексей Александрович

Поступила 30.07.2013

д-р физ.-мат. наук, профессор

Владимирский государственный университет

им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Международный институт прикладного системного анализа, Лаксенбург, Австрия

e-mail: davydov@vlsu.ru, davydov@iiasa.ac.at

Платов Антон Сергеевич

Владимирский государственный университет

им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

e-mail: platovmm@mail.ru